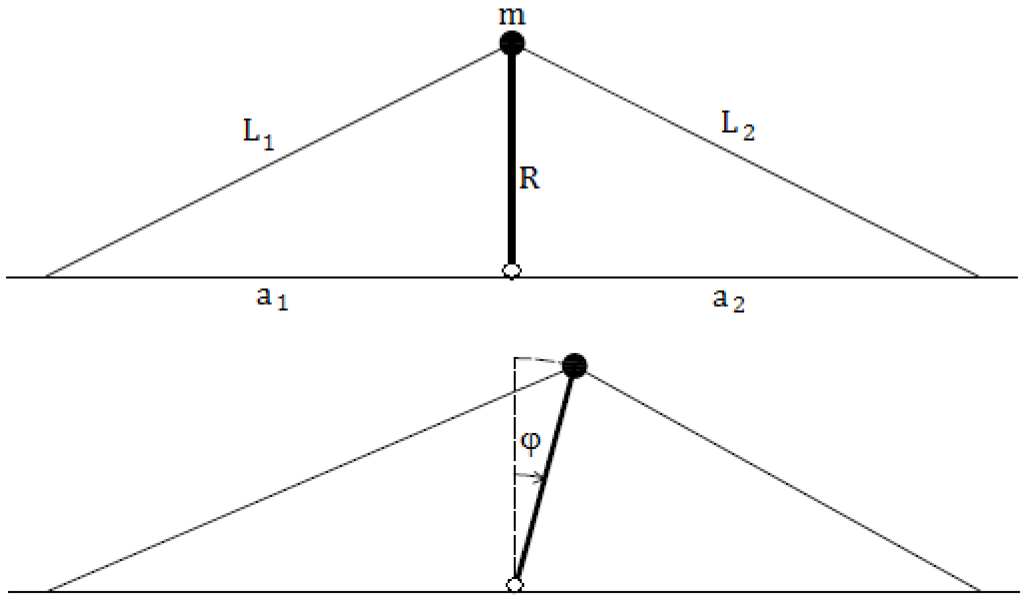
# Kmitání soustavy

## Vedoucí práce Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Karel Mikeš

# PŘEDMĚT PRÁCE

Předmětem práce bylo analyzovat chování následující soustavy




Nestlačitelný prut délky $r$

Předepnutá lana délek $L_1$, $L_2$

# Odvození pohybové rovnice

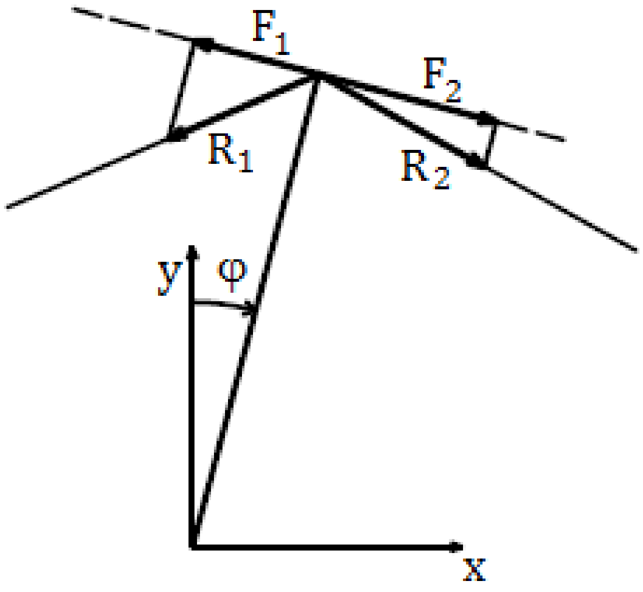
Velikost reakcí je obecně dána vztahem:

$$R = N_0 + EA\varepsilon = N_0 + EA\left(\frac{L}{L_0} - 1\right)$$

Pro jednotlivá lana dostaneme:

$$R_1 = N_{01} + EA_1\left(\frac{\sqrt{{a_1}^2 + 2a_1 r \sin\varphi + r^2}}{\sqrt{{a_1}^2 + r^2}} - 1\right)$$

$$R_2 = N_{02} + EA_2\left(\frac{\sqrt{{a_2}^2 - 2a_2 r \sin\varphi + r^2}}{\sqrt{{a_2}^2 + r^2}} - 1\right)$$



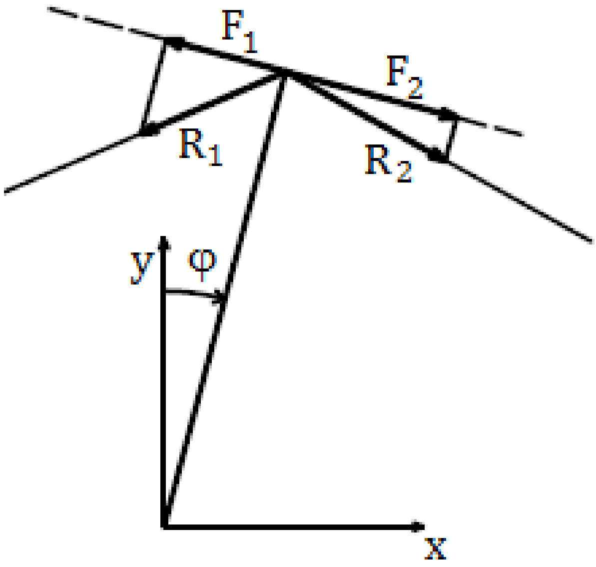
# ODVOZENÍ POHYBOVÉ ROVNICE

Pro určení průmětů zavedeme souřadnicový systém (x, y)

Těžiště tělesa: T: $[r \sin\varphi, r\cos\varphi]$.

Směrové vektory:

$$\mathbf{o} = (-r\sin\varphi, -r\cos\varphi)$$
$$\mathbf{r}_1 = (-a_1 - r\sin\varphi, -r\cos\varphi)$$
$$\mathbf{r}_2 = (a_2 - r\sin\varphi, -r\cos\varphi)$$
$$\mathbf{f}_1 = (-r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$\mathbf{f}_2 = (r\cos\varphi, -r\sin\varphi)$$




Průmět provedeme pomocí skalárního součinu:

$$F_1 = R_1 \frac{\mathbf{r_1}.\mathbf{f_1}}{\|\mathbf{r_1}\|.\|\mathbf{f_1}\|} = R_1 \frac{a_1 \cos\varphi}{\sqrt{a_1{}^2 + 2a_1 r\sin\varphi + r^2}}$$

$$F_2 = R_2 \frac{\mathbf{r_2}.\mathbf{f_2}}{\|\mathbf{r_2}\|.\|\mathbf{f_2}\|} = R_2 \frac{a_2 \cos\varphi}{\sqrt{a_2{}^2 - 2a_2 r\sin\varphi + r^2}}$$

# Odvození pohybové rovnice

Dosadíme do pohybové rovnice $mr\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum F = -F_1 + F_2$

$$mr\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(N_{01} + EA_1\left(\frac{\sqrt{a_1{}^2+2a_1 r\sin\varphi+r^2}}{\sqrt{a_1{}^2+r^2}} - 1\right)\right)\frac{a_1\cos\varphi}{\sqrt{a_1{}^2+2a_1 r\sin\varphi+r^2}} +$$

$$+\left(N_{02} + EA_2\left(\frac{\sqrt{a_2{}^2-2a_2 r\sin\varphi+r^2}}{\sqrt{a_2{}^2+r^2}} - 1\right)\right)\frac{a_2\cos\varphi}{\sqrt{a_2{}^2-2a_2 r\sin\varphi+r^2}}$$

zavedeme poměry $\alpha_1 = \frac{a_1}{r}$, $\beta_1 = \frac{N_{01}}{EA_1}$ resp. $\alpha_2 = \frac{a_2}{r}$ $\beta_2 = \frac{N_{02}}{EA_2}$

$$mr\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -EA_1\left(\beta_1 + \left(\frac{\sqrt{\alpha_1{}^2+2\alpha_1\sin\varphi+1}}{\sqrt{\alpha_1{}^2+1}} - 1\right)\right)\frac{\alpha_1\cos\varphi}{\sqrt{\alpha_1{}^2+2\alpha_1\sin\varphi+1}} +$$

$$+EA_2\left(\beta_2 + \left(\frac{\sqrt{\alpha_2{}^2-2\alpha_2\sin\varphi+1}}{\sqrt{\alpha_2{}^2+1}} - 1\right)\right)\frac{\alpha_2\cos\varphi}{\sqrt{\alpha_2{}^2-2\alpha_2\sin\varphi+1}}$$

Počáteční podmínky: $\varphi(0) = 0$, $r\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{(0)} = \mathrm{v}_0$,

# Linearizace pohybové rovnice

Pokud předpokládáme pouze malé hodnoty $\varphi$

Potom jsou úhly $\theta_1$ a $\theta_2$ konstantní a $\cos\theta_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{{\alpha_1}^2+1}}$ resp. $\cos\theta_2 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{{\alpha_2}^2+1}}$

Reakce v lanech obecně: $R = N_0 + EA\varepsilon = N_0 + EA\frac{\Delta L}{L_0}$

$$R_1 = N_{01} + EA_1\frac{r\varphi}{r\sqrt{{\alpha_1}^2+1}} \qquad\qquad R_2 = N_{02} + EA_2\frac{-r\varphi}{r\sqrt{{\alpha_2}^2+1}}.$$

Linearizovaná forma pohybové rovnice:

$$mr\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -EA_1\left(\beta_1 + \frac{\varphi}{\sqrt{{\alpha_1}^2+1}}\right)\frac{\alpha_1}{\sqrt{{\alpha_1}^2+1}} + EA_2\left(\beta_2 + \frac{-\varphi}{\sqrt{{\alpha_2}^2+1}}\right)\frac{\alpha_2}{\sqrt{{\alpha_2}^2+1}}$$

Pro symetrickou soustavu

$mr\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2EA\frac{\alpha}{\alpha^2+1}\varphi \rightarrow$ rovnice pro harmonický oscilátor

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0, \qquad$ kde $\omega^2 = \frac{2EA}{mr}\frac{\alpha}{\alpha^2+1}.$

Perioda $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2mr}{EA}\frac{\alpha^2+1}{\alpha}}.$

# Numerické řešení:

Vstupními parametry: r, m, $v_0$, $EA_1$, $\alpha_1$, $\beta_1$, resp. $EA_2$, $\alpha_2$, $\beta_2$.

K řešení použijeme Eulerovu metodu 2. řádu pro řešení diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou.

Budeme postupovat po časových krocích velikosti $\Delta = \frac{1}{n}$,

Hodnoty pro další krok určíme ze vztahů:

$$\varphi(t+\Delta) \;= \varphi(t) + \dot{\varphi}(t).\Delta + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}(t).\Delta^2$$

$$\dot{\varphi}(t+\Delta) \;= \dot{\varphi}(t) + \ddot{\varphi}(t).\Delta$$

$$\ddot{\varphi}(t+\Delta) = -\frac{EA_1}{mr}\left(\beta_1 + \left(\frac{\sqrt{{\alpha_1}^2+2\alpha_1 \sin\varphi(t+\Delta)+1}}{\sqrt{{\alpha_1}^2+1}} - 1\right)\right)\frac{\alpha_1 \cos\,\varphi(t+\Delta)}{\sqrt{{\alpha_1}^2+2\alpha_1 \sin\varphi(t+\Delta)+1}} +$$

$$+\frac{EA_2}{mr}\left(\beta_2 + \left(\frac{\sqrt{{\alpha_2}^2-2\alpha_2 \sin\varphi(t+\Delta)+1}}{\sqrt{{\alpha_2}^2+1}} - 1\right)\right)\frac{\alpha_2 \cos\,\varphi(t+\Delta)}{\sqrt{{\alpha_2}^2-2\alpha_2 \sin\varphi(t+\Delta)+1}}$$

# NUMERICKÉ ŘEŠENÍ:

Kinetická energie $\mathrm{E_k} = \frac{1}{2} m\left(r\dot{\varphi}(t)\right)^2$

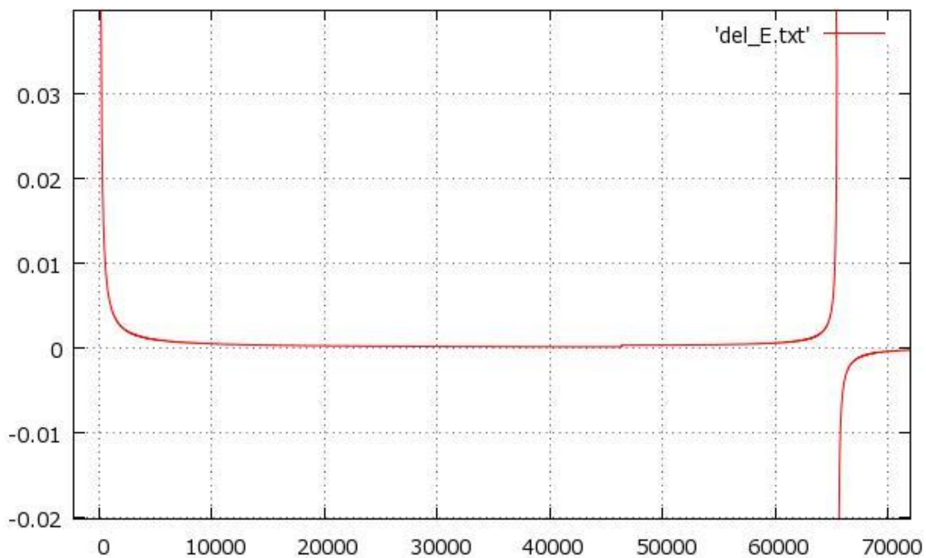
Potenciální energie obecně $\mathrm{E_p} = \frac{1}{2} EAL(\varepsilon + \varepsilon_0)^2$

Po vyjádření pomocí vstupních parametrů

$$\mathrm{E_p} = \frac{1}{2} EA_1 r\sqrt{{\alpha_1}^2 + 1}\left(\frac{\sqrt{{\alpha_1}^2 + 2\alpha_1 \sin\varphi(t+\Delta) + 1}}{\sqrt{{\alpha_1}^2+1}} - 1 + \beta_1\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2} EA_2 r\sqrt{{\alpha_2}^2 + 1}\left(\frac{\sqrt{{\alpha_2}^2 - 2\alpha_2 \sin\varphi(t+\Delta) + 1}}{\sqrt{{\alpha_2}^2+1}} - 1 + \beta_2\right)^2$$

$\Delta_{\mathrm{E}} = \mathrm{E(T)} - \mathrm{E(0)} = 0$



# Řešení

Kritická počáteční rychlost $v_{0k}$

určíme z rovnosti energií v polohách $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{1}{2} m {v_{0k}}^2 + \frac{1}{2} E A_1 r \sqrt{{\alpha_1}^2 + 1} (\beta_1)^2 + \frac{1}{2} E A_2 r \sqrt{{\alpha_2}^2 + 1} (\beta_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} E A_1 r \sqrt{{\alpha_1}^2 + 1} \left( \frac{\sqrt{{\alpha_1}^2 + 2\alpha_1 + 1}}{\sqrt{{\alpha_1}^2 + 1}} - 1 + \beta_1 \right)^2 + \frac{1}{2} E A_2 r \sqrt{{\alpha_2}^2 + 1} \left( \frac{\sqrt{{\alpha_2}^2 - 2\alpha_2 + 1}}{\sqrt{{\alpha_2}^2 + 1}} - 1 + \beta_2 \right)^2$$

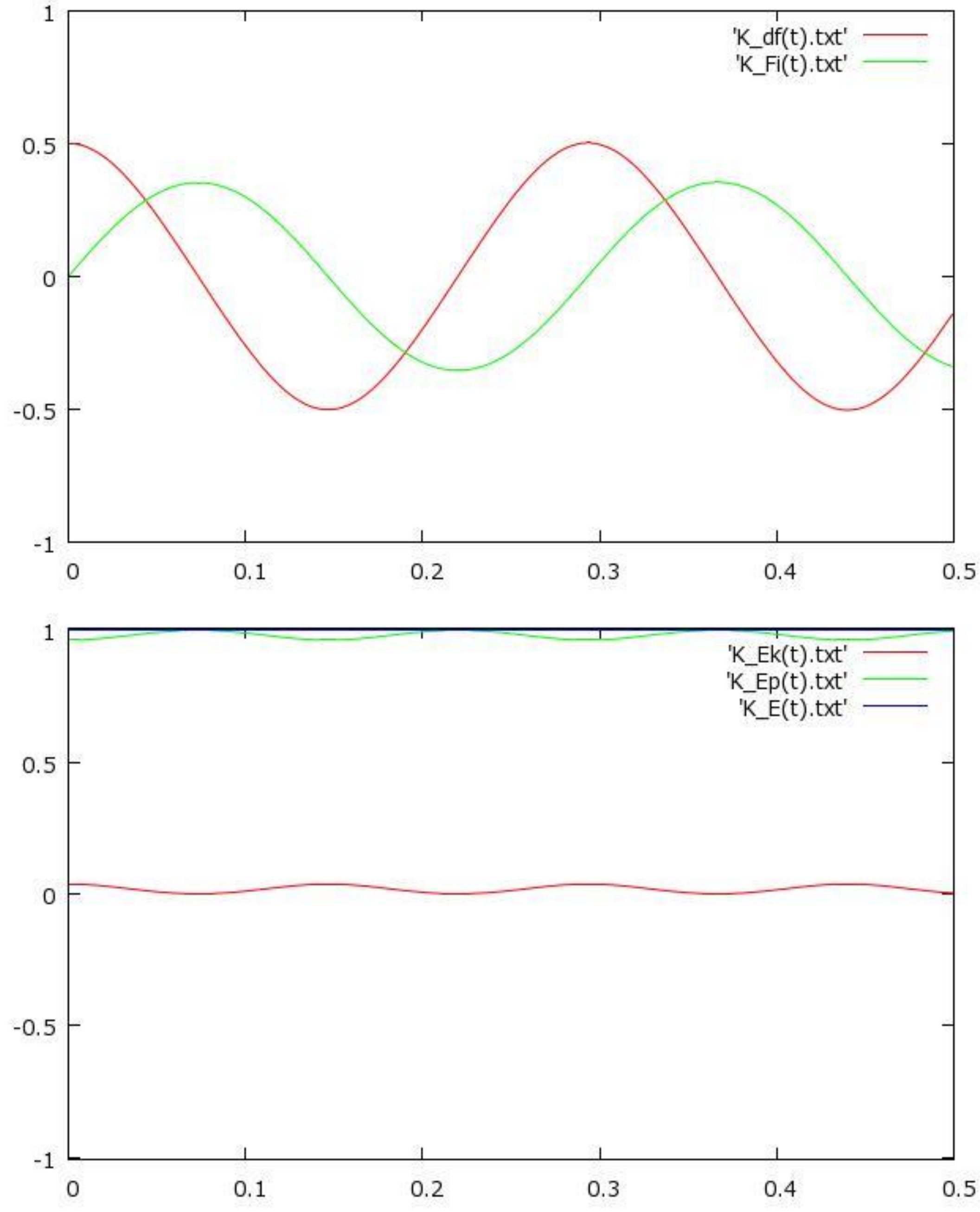
$$v_{0k} = \quad \frac{E A_1 r}{m} \sqrt{{\alpha_1}^2 + 1} \left( \left( \frac{\sqrt{{\alpha_1}^2 + 2\alpha_1 + 1}}{\sqrt{{\alpha_1}^2 + 1}} - 1 + \beta_1 \right)^2 - {\beta_1}^2 \right) +$$

$$+ \frac{E A_2 r}{m} \sqrt{{\alpha_2}^2 + 1} \left( \left( \frac{\sqrt{{\alpha_2}^2 - 2\alpha_2 + 1}}{\sqrt{{\alpha_2}^2 + 1}} - 1 + \beta_2 \right)^2 - {\beta_2}^2 \right)$$

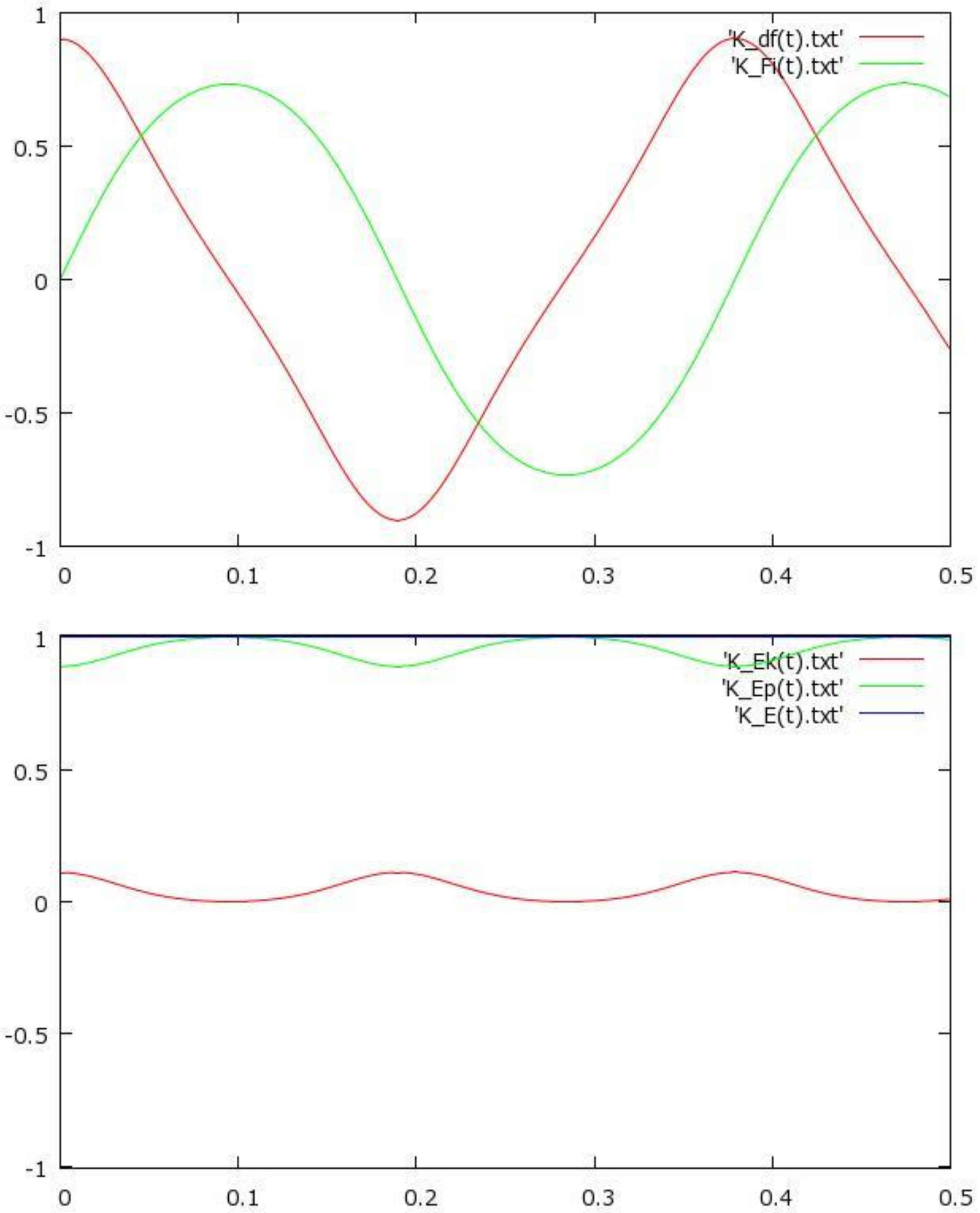
Typy řešení:

1. $v_0 < v_{0k}$
2. $v_0 = v_{0k}$
3. $v_0 > v_{0k}$

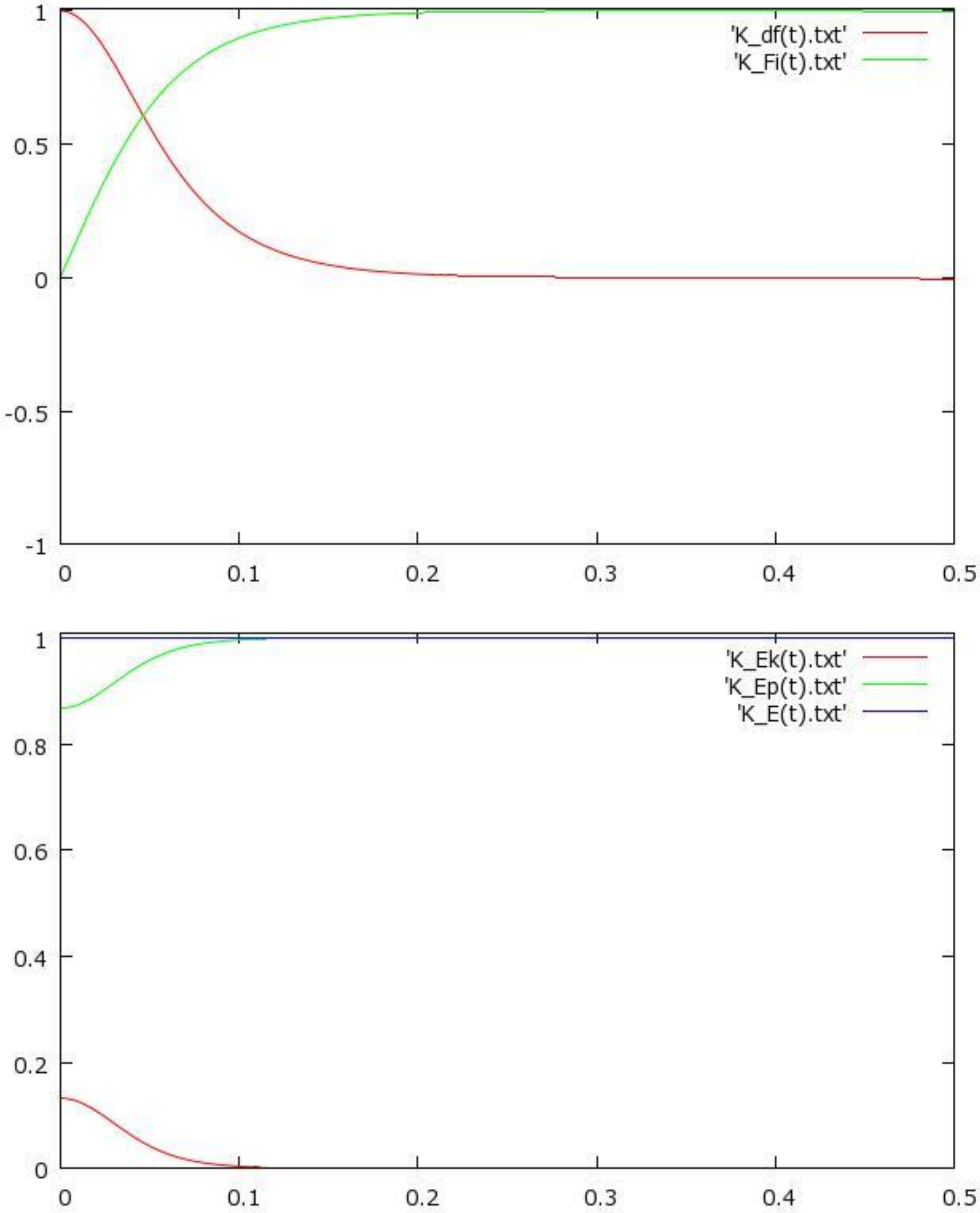
$V_0 = 0.5\ V_{0k}$



$V_0 = 0.9\ V_{0k}$

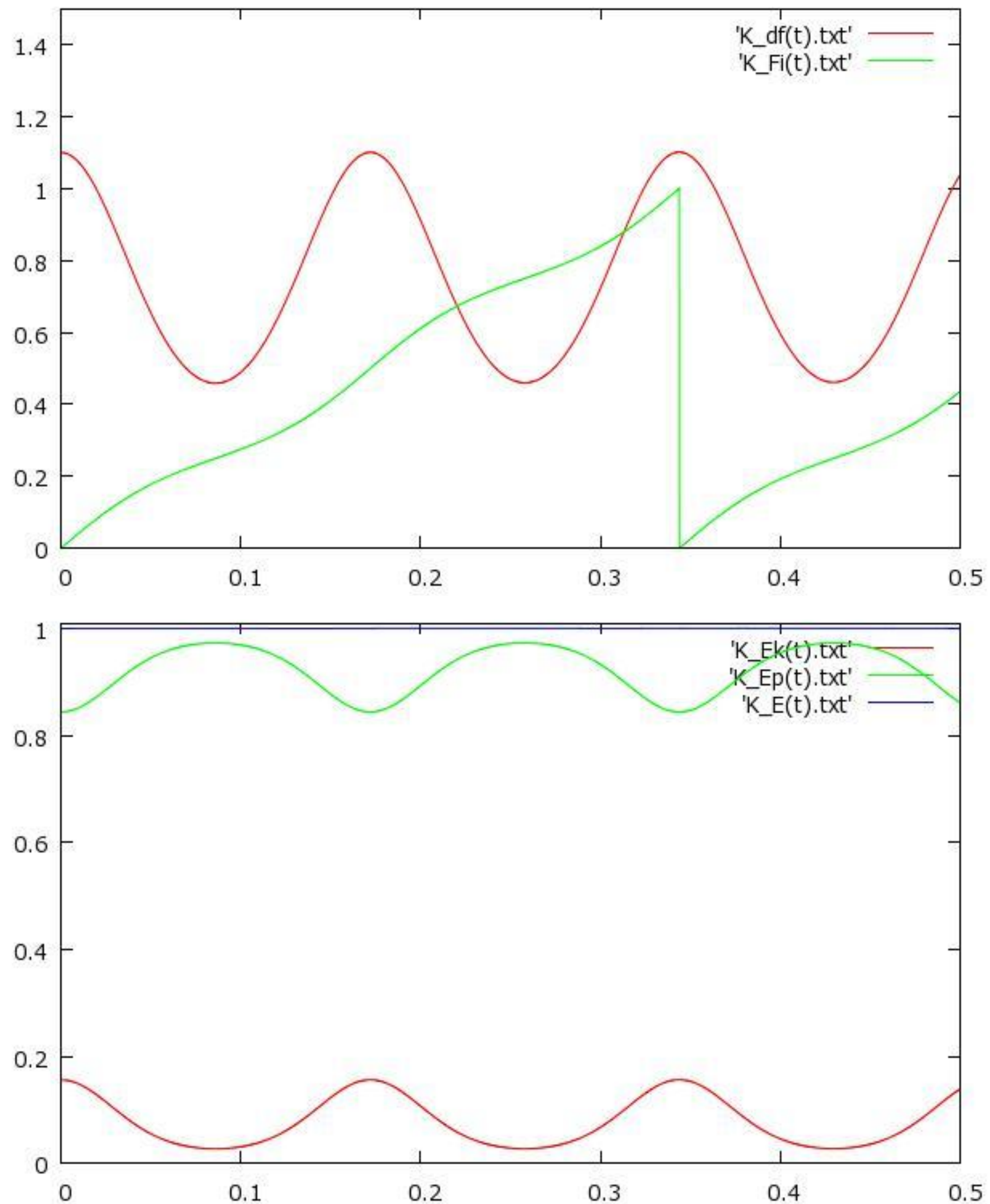


$V_0 = 0.999\ V_{0k}$

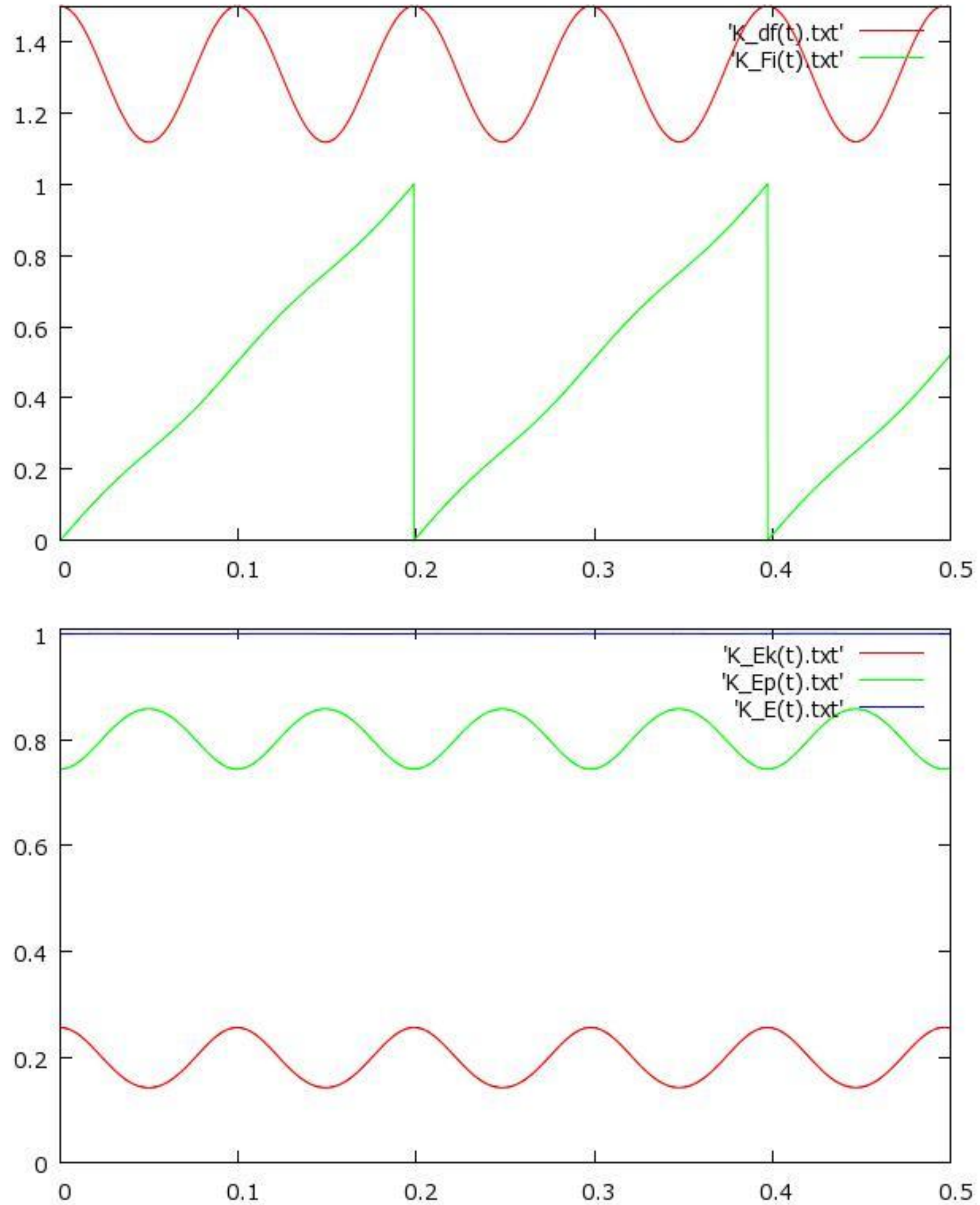


'K_df(t).txt'
'K_Fi(t).txt'
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
'K_Ek(t).txt'
'K_Ep(t).txt'
'K_E(t).txt'
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

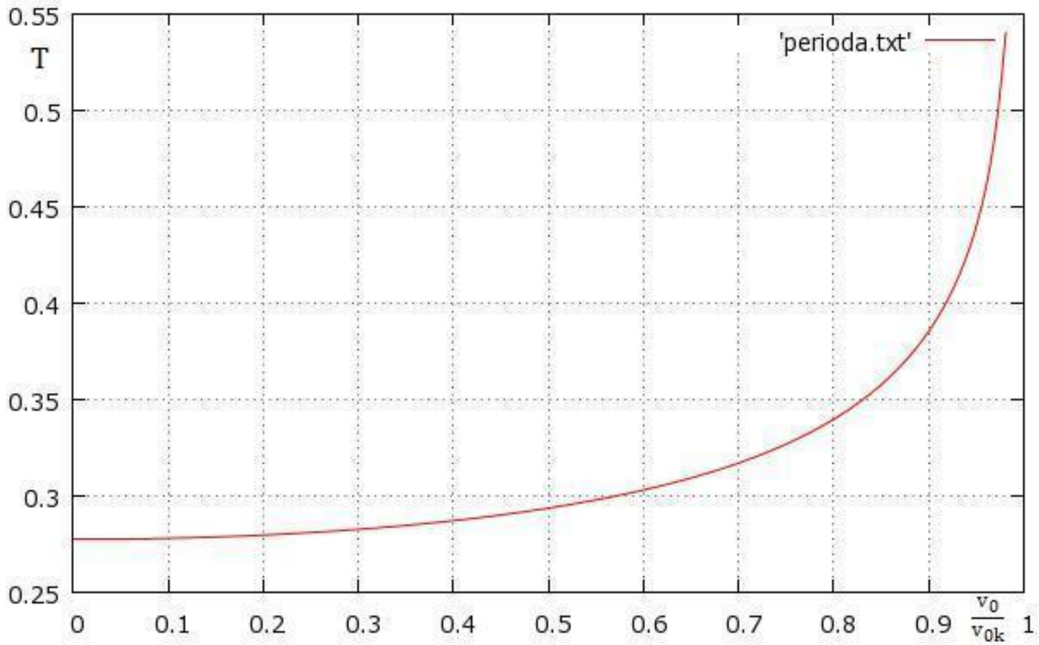
$V_0 = 1.1\ V_{0k}$



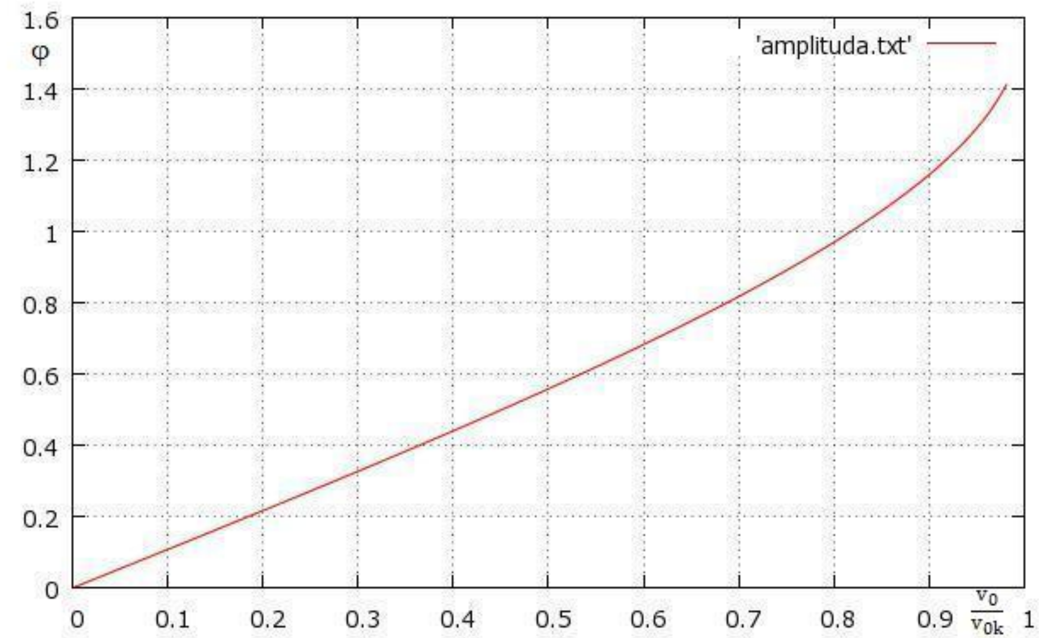
$V_0 = 1.5\ V_{0k}$



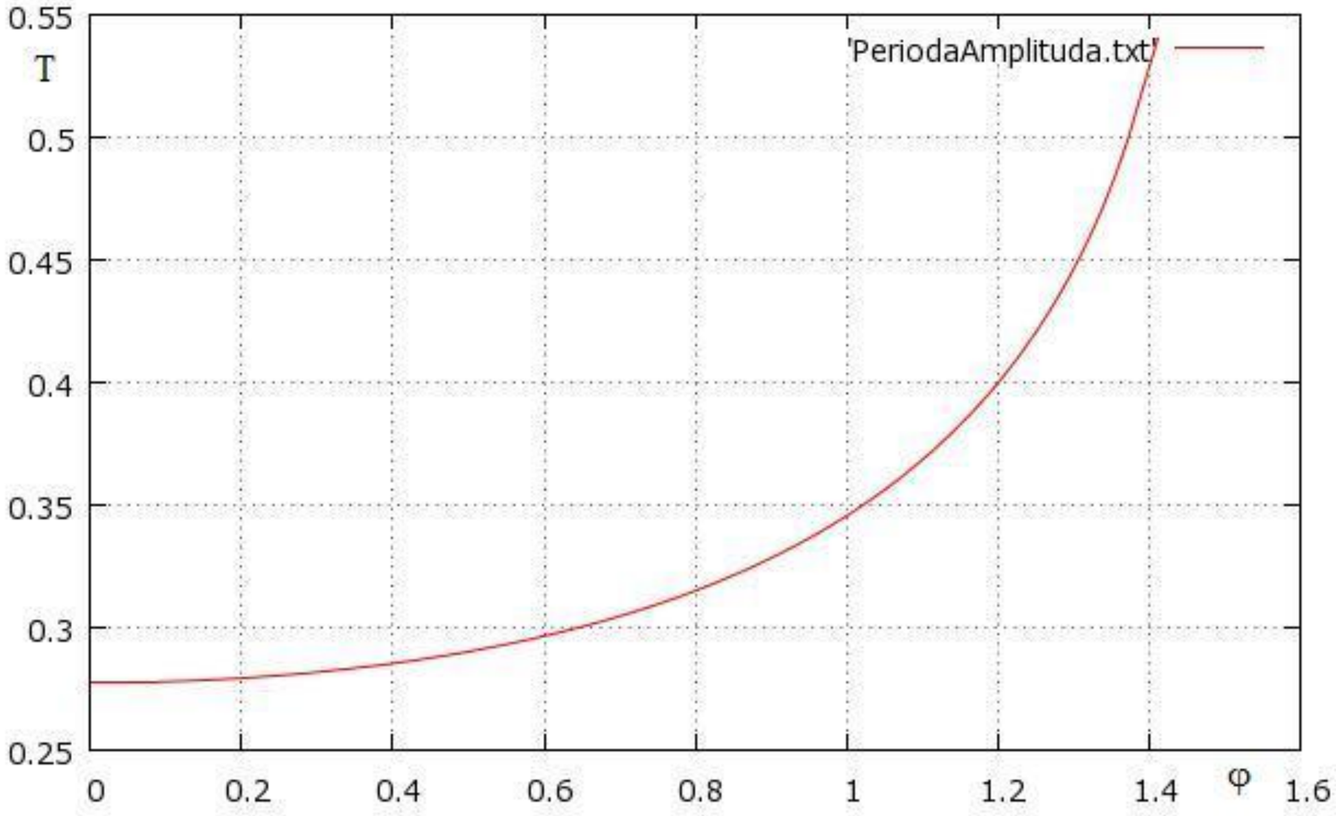
'K_df(t).txt'
'K_Fi(t).txt'
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
'K_Ek(t).txt'
'K_Ep(t).txt'
'K_E(t).txt'
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5



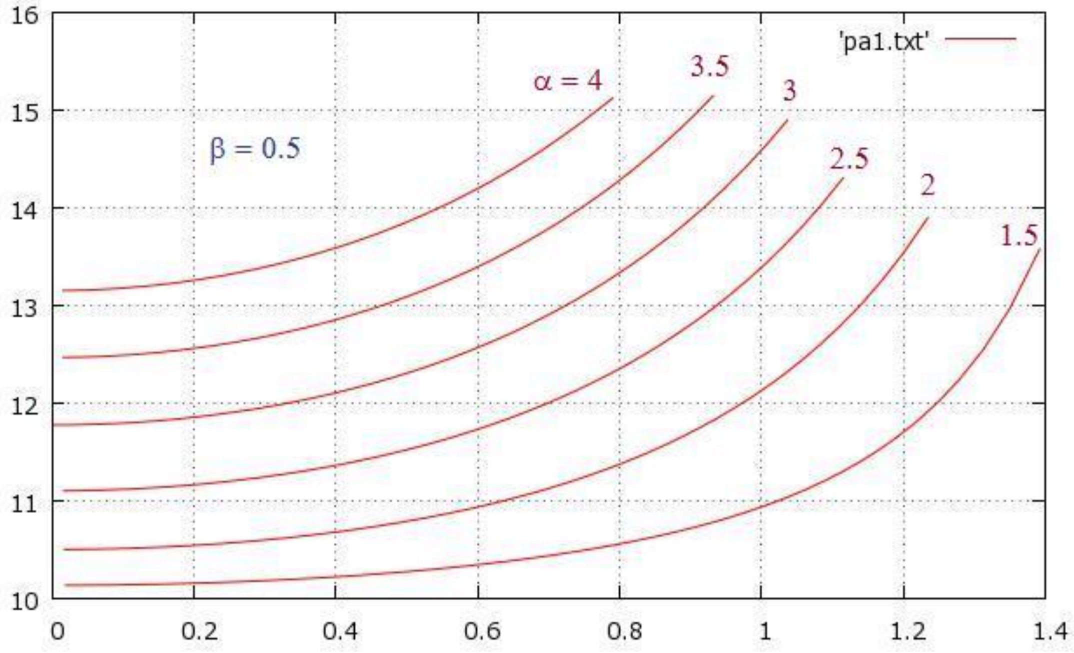
'perioda.txt'
T
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
$\frac{v_0}{v_{0k}}$
1

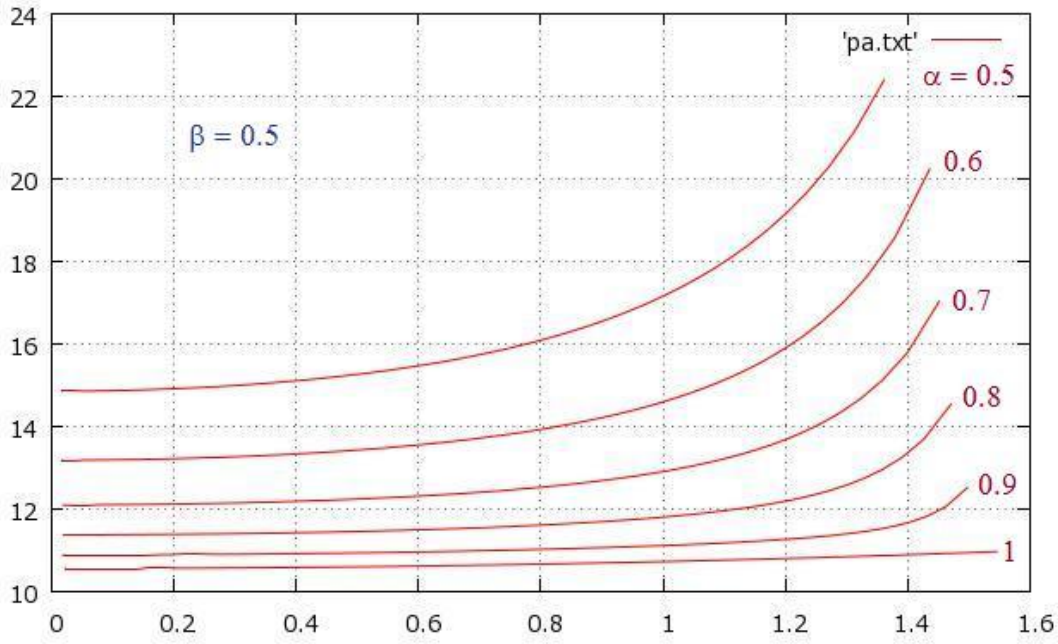
'amplituda.txt'
φ
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
$\frac{v_0}{v_{0k}}$
1



'PeriodaAmplituda.txt'
T
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
φ
1.6



'pa1.txt'
α = 4
3.5
3
2.5
2
1.5
β = 0.5
16
15
14
13
12
11
10
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4

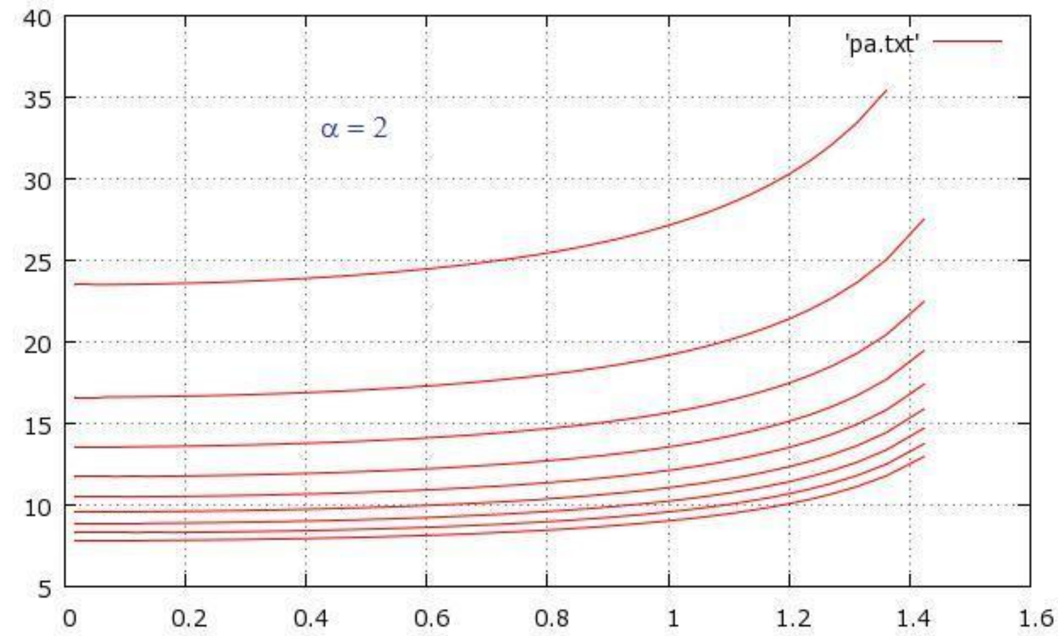



'pa.txt'
α = 0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
β = 0.5
24
22
20
18
16
14
12
10
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

$\alpha = 2$

$$T = \pi\sqrt{\frac{2mr}{EA}\frac{\alpha^2+1}{\alpha}} = \pi\sqrt{\frac{2mr}{EA}\frac{2^2+1}{2}} \cong.$$

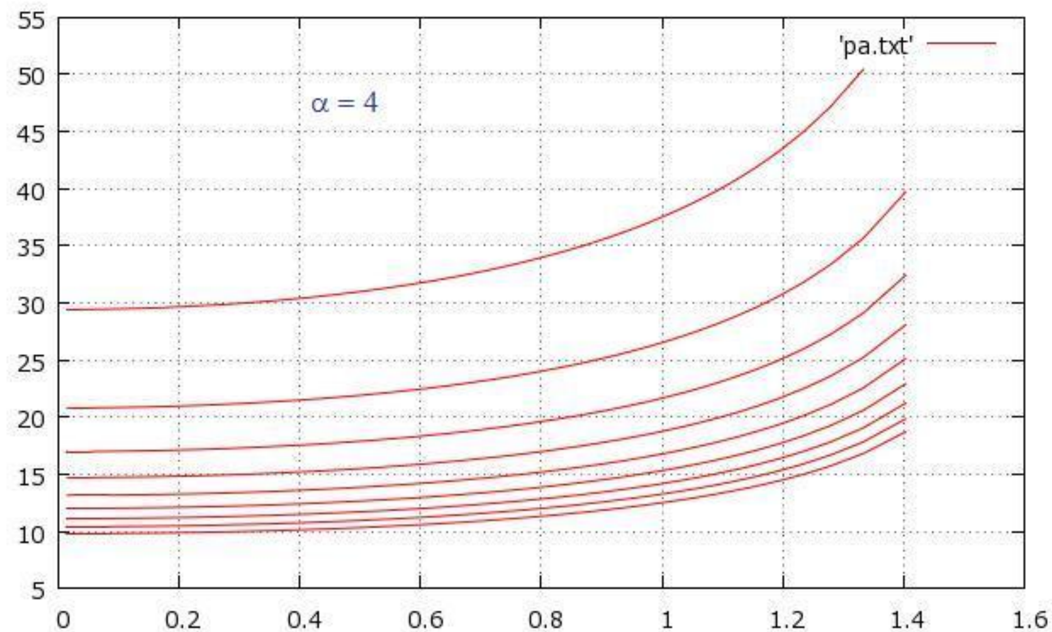
$\cong 7.02$




$\alpha = 4$

$$T = \pi\sqrt{\frac{2mr}{EA}\frac{\alpha^2+1}{\alpha}} = \pi\sqrt{\frac{2mr}{EA}\frac{4^2+1}{4}} \cong.$$

$\cong 9.16$



# ZÁVĚR:

Pomocí vytvořeného programu jsme schopni určit, jak bude soustava kmitat z parametrů: r, m, $v_0$, $EA_1$, $\alpha_1$, $\beta_1$, resp. $EA_2$, $\alpha_2$, $\beta_2$.

Při nezanedbání nelinearity zjišťujeme, že na rozdíl od lineárního případu se s rostoucí výchylkou prodlužuje perioda.

Děkuji za pozornost