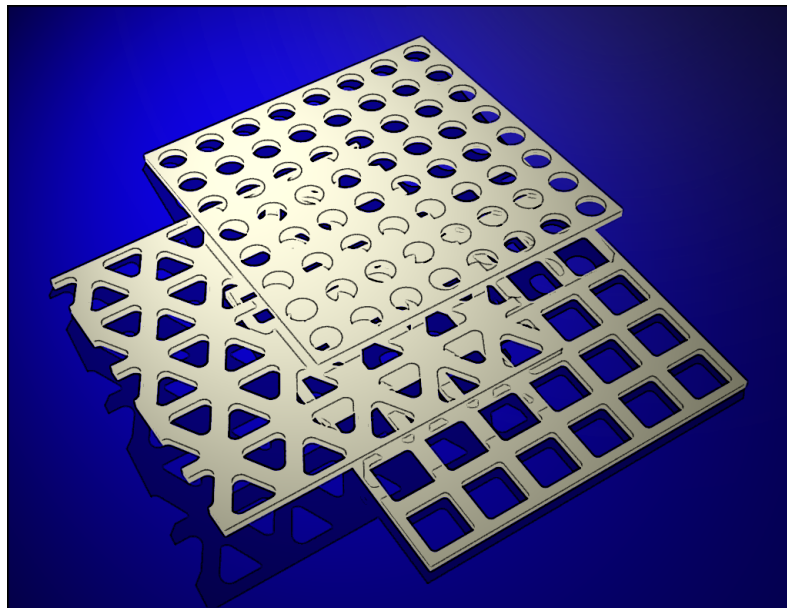


České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, Katedra mechaniky
Studijní program: Stavební inženýrství
Studijní obor: Pozemní stavby a konstrukce

HOMOGENIZACE APLIKOVANÁ NA STAVEBNÍ KONSTRUKCE

HOMOGENIZATION APPLIED
TO CIVIL ENGINEERING STRUCTURES



Autorka diplomové práce:

ALENA SOMOLOVÁ

Vedoucí diplomové práce: Doc. Ing. Michal Šejnoha, Ph.D.
Akademický rok: 2006/2007

Obsah

1	Úvod	1
2	Základní principy homogenizace	4
2.1	Homogenizace ohýbané heterogenní konzoly	5
2.1.1	Formulace problému	5
2.1.2	Homogenizace pomocí limitního přechodu	5
2.1.3	Inženýrský přístup k homogenizaci	9
2.1.4	Porovnání přesného a homogenizovaného řešení	12
2.2	Homogenizace taženého heterogenního prutu	16
2.2.1	Formulace problému	16
2.2.2	Homogenizace pomocí limitního přechodu	17
2.2.3	Inženýrský přístup k homogenizaci	18
2.3	Shrnutí základních principů	19
3	Aplikace homogenizačních principů	20
3.1	Shrnutí experimentálních výsledků	22
3.2	Numerický model perforované desky	23
3.3	Základní vztahy pro homogenizované desky	28
3.3.1	Kinematické předpoklady a pole deformací	28
3.3.2	Fyzikální rovnice	29
3.3.3	Měrné vnitřní síly	30
3.3.4	Princip virtuálních prací a podmínky rovnováhy	31
3.3.5	Základní vztahy stabilitní analýzy	31
3.3.6	Vztah pro kritické zatížení	32
3.4	Homogenizace desek - obecné principy	33
3.5	Homogenizace kirchhoffovských desek	35
3.5.1	Zatěžování prostřednictvím pootočení řídicích bodů	35
3.5.2	Periodické okrajové podmínky pro pootočení	37
3.5.3	Průměrné hodnoty měrných momentů	38
3.5.4	Homogenizační vztahy pro šestiúhelníkovou PUC	39
3.5.5	Numerické modelování kirchhoffovských desek	42
3.6	Homogenizace mindlinovských desek	49
3.6.1	Zatěžování prostřednictvím průhybů řídicích bodů	49
3.6.2	Periodické okrajové podmínky pro průhyby	50
3.6.3	Průměrné hodnoty měrných momentů	51
3.6.4	Homogenizační vztahy pro šestiúhelníkovou PUC	51
3.6.5	Numerické modelování mindlinovských desek	53
3.7	Porovnání kritických sil	60
4	Závěr	62

Literatura	63
A Seznam geometrií perforovaných desek	65
B Tvary vybočení perforovaných desek	73
C Odezva jednotkových buněk	81

Seznam obrázků

1.1	Struktura materiálů: (a) beton, (b) zdivo, (c) dřevo, (d) ocel	1
1.2	Schéma oddělení mikroskopické úlohy od makroskopické	2
1.3	Fotografie Karlova mostu a výpočetní model	2
1.4	Vize použití kompozitních materiálů v moderní architektuře	3
2.1	Schéma heterogenní konzoly	5
2.2	Schéma homogenizované konzoly	5
2.3	Ohýbaná konzola: inženýrská interpretace homogenizace	10
2.4	Jednotková buňka: (a) zatížení a podepření, (b) virtuální stav	11
2.5	Průběhy pootočení na konzole	13
2.6	Průběhy průhybu na konzole	14
2.7	Průběh (a) pootočení a (b) průhybu v závislosti na počtu n	15
2.8	Odchylka přesného a homogenního (a) pootočení, (b) průhybu	15
2.9	Závislost chyby na konci konzoly na počtu intervalů n	16
2.10	Tažený prut: (a) heterogenní konstrukce, (b) homogenizovaný model, (c) inženýrská interpretace homogenizace	17
3.1	Způsob výroby a nejpoužívanější tvary vylehčujících otvorů	20
3.2	Příklady použití perforovaných desek	21
3.3	Perforace tenkostěnného profilu	21
3.4	Experiment: (a) schéma zatěžování, (b) tvar vybočení	22
3.5	Numerický model zatížení desky odpovídající experimentu	24
3.6	Tvar vybočení desky PWC 6-12	24
3.7	Vybočení plné desky o tloušťce 2 mm	25
3.8	Vybočení perforované desky PWC 5-4	25
3.9	Vybočení perforované desky PWS 6-27	26
3.10	Vybočení perforované desky PWT 6-20	26
3.11	Graf kritického zatížení	27
3.12	Kinematické předpoklady	28
3.13	Schéma zatížení desky	32
3.14	Schéma homogenizace deskové konstrukce	33
3.15	Periodické jednotkové buňky	34
3.16	Předepsaná pootočení řídicích bodů PUC	36
3.17	Rozdělení hranice jednotkové buňky	37
3.18	Předepsaná pootočení řídicích bodů šestiúhelníkové PUC	40
3.19	Rozdělení hranice šestiúhelníkové PUC	40
3.20	Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^x = \{1; 0; 0\}^T$	42
3.21	Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	42
3.22	Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^{xy} = \{0; 0; 1\}^T$	43
3.23	Příklady sítí konečných prvků (n značí počet intervalů na straně PUC)	43

3.24	Graf závislosti homogenizované matice tuhosti na jemnosti sítě	44
3.25	Sít' a odezva jednotkové buňky PWC 5-4 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	45
3.26	Sít' a odezva jednotkové buňky PWS 6-27 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	46
3.27	Sít' a odezva jednotkové buňky PWT 6-20 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	47
3.28	Graf kritického zatížení	48
3.29	Předepsané průhyby řídicích bodů PUC	50
3.30	Předepsané průhyby řídicích bodů šestiúhelníkové PUC	51
3.31	Rozdělení hranice šestiúhelníkové PUC na intervaly	52
3.32	Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^x = \{1; 0; 0\}^T$	53
3.33	Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	53
3.34	Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^{xy} = \{0; 0; 1\}^T$	54
3.35	Příklady sítí konečných prvků (n značí počet intervalů na straně PUC)	54
3.36	Graf závislosti homogenizované matice tuhosti na jemnosti sítě	55
3.37	Sít' a odezva jednotkové buňky PWC 5-4 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	56
3.38	Sít' a odezva jednotkové buňky PWS 6-27 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	57
3.39	Sít' a odezva jednotkové buňky PWT 6-20 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	58
3.40	Graf kritického zatížení	59
3.41	Porovnání kritických sil	60
A.1	Geometrie perforované desky PWC 3-3	66
A.2	Geometrie perforované desky PWC 3-4	66
A.3	Geometrie perforované desky PWC 3-12	67
A.4	Geometrie perforované desky PWC 4-3	67
A.5	Geometrie perforované desky PWC 4-12	68
A.6	Geometrie perforované desky PWC 5-3	68
A.7	Geometrie perforované desky PWC 5-4	69
A.8	Geometrie perforované desky PWC 5-12	69
A.9	Geometrie perforované desky PWC 6-12	70
A.10	Geometrie perforované desky PWC 6-24a	70
A.11	Geometrie perforované desky PWC 6-24b	71
A.12	Geometrie perforované desky PWS 5-26	71
A.13	Geometrie perforované desky PWS 6-27	72
A.14	Geometrie perforované desky PWT 6-20	72
B.1	Tvar vybočení PWC 3-3 (čtvrtina konstrukce)	74
B.2	Tvar vybočení PWC 3-4	74
B.3	Tvar vybočení PWC 3-12	75
B.4	Tvar vybočení PWC 4-3 (polovina konstrukce)	75
B.5	Tvar vybočení PWC 4-12	76
B.6	Tvar vybočení PWC 5-3 (polovina konstrukce)	76
B.7	Tvar vybočení PWC 5-4	77
B.8	Tvar vybočení PWC 5-12	77
B.9	Tvar vybočení PWC 6-12	78
B.10	Tvar vybočení PWC 6-24a	78
B.11	Tvar vybočení PWC 6-24b	79
B.12	Tvar vybočení PWS 5-26	79
B.13	Tvar vybočení PWS 6-27	80
B.14	Tvar vybočení PWT 6-20	80
C.1	Odezva jednotkové buňky PWC 3-3 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	82

C.2	Odezva jednotkové buňky PWC 3-4 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	83
C.3	Odezva jednotkové buňky PWC 3-12 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	84
C.4	Odezva jednotkové buňky PWC 4-3 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	85
C.5	Odezva jednotkové buňky PWC 4-12 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	86
C.6	Odezva jednotkové buňky PWC 5-3 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	87
C.7	Odezva jednotkové buňky PWC 5-4 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	88
C.8	Odezva jednotkové buňky PWC 5-12 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	89
C.9	Odezva jednotkové buňky PWC 6-12 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	90
C.10	Odezva jednotkové buňky PWC 6-24a na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	91
C.11	Odezva jednotkové buňky PWC 6-24b na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	92
C.12	Odezva jednotkové buňky PWS 5-26 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	93
C.13	Odezva jednotkové buňky PWS 6-27 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	94
C.14	Odezva jednotkové buňky PWT 6-20 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$	95

Seznam tabulek

3.1	Geometrie a kritické zatížení perforovaných desek	23
3.2	Parametry materiálů použité při výpočtu	23
3.3	Porovnání experimentálních a numerických kritických sil	27
3.4	Hodnoty členu $(D_{\kappa})_{22}$ pro Kirchhoffův model desky	44
3.5	Výstižnost kritické síly určené použitím Kirchhoffova modelu	48
3.6	Hodnoty členu $(D_{\kappa})_{22}$ pro Mindlinův model desky	55
3.7	Výstižnost kritické síly určené použitím Mindlinova modelu	59

Poděkování

Děkuji Ing. Janu Zemanovi, Ph.D., za jeho důvěru, prvotní impuls k této práci, čas, který mi věnoval při konzultacích, a trpělivost, se kterou mě odborně vedl během studia. Dále bych ráda poděkovala svému školiteli Doc. Ing. Michalu Šejnohovi, Ph.D., za cenné rady, inspiraci a veškerou podporu, kterou mi poskytl nejen při vypracování této diplomové práce.

Doc. Ing. Jiřímu Mácovi, CSc., děkuji za poskytnutí dat ze stabilitních testů perforovaných stěn. Zvláštní poděkování patří Prof. Ing. Jiřímu Šejnohovi, DrSc., za jeho zajímavé přednášky z oboru pružnosti a pevnosti materiálů, které ve mně vzbudily zájem o tuto vědní disciplínu. V neposlední řadě patří můj dík i všem ostatním členům katedry mechaniky za podnětné názory k práci a též za zázemí, které mi katedra poskytla.

Na závěr děkuji také své rodině a přátelům za podporu po celou dobu mého studia.

Tato práce vznikla v rámci grantu GAČR 103/04/P254.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci vypracovala samostatně a veškeré písemné podklady, ze kterých jsem čerpala, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

V Praze dne 20.12.2006

Alena Somolová

Abstrakt

Pochopení a následná předpověď odezvy prvků z heterogenních materiálů je nezbytným předpokladem k racionálnímu návrhu inženýrských konstrukcí obecně. Mezi nejpoužívanější přístupy k modelování těchto materiálů z více složek patří tzv. homogenizační metody, které nahrazují komplikovaný heterogenní materiál jistým fiktivním homogenizovaným materiálem, jehož vlastnosti odrážejí vlastnosti jednotlivých složek a jejich geometrické uspořádání.

V posledních desetiletích se homogenizační metody ukázaly jako velmi vhodný nástroj pro určení chování heterogenních struktur, o čemž svědčí jejich praktické použití například v biomedicíně, textilním průmyslu, tradičním stavebnictví i moderní architektuře. Tato práce si klade za cíl představit aplikaci homogenizačních postupů na ohýbané konstrukce.

Navrhovaný přístup je detailně ilustrován na několika příkladech. Základní principy metody jsou představeny na jednoduchém problému ohybu heterogenní konzoly složené ze dvou materiálů. Pro tento prutový konstrukční prvek je možné analyticky určit přesné řešení a konfrontovat ho s výsledkem získaným homogenizačním přístupem. Důvodem volby perforovaných desek pro demonstraci homogenizace dvou-
rozměrných konstrukcí je možnost vytvoření detailního modelu celé konstrukce a porovnání výstupů navržené metody s dostupnými experimentálními daty. Výstižnost řešení prezentované homogenizační úlohy je v jednotlivých kapitolách doložena formou grafických a tabulkových vyhodnocení.

Abstract

Understanding and simulating the behavior of structural members made of heterogeneous materials is a necessary prerequisite for the rational design of engineering structures in general. One of the most common approaches to the modeling of heterogeneous bodies are homogenization methods, which replace a complex heterogeneous material with a homogeneous equivalent with properties reflecting the characteristics of individual constituents as well as their geometrical configuration.

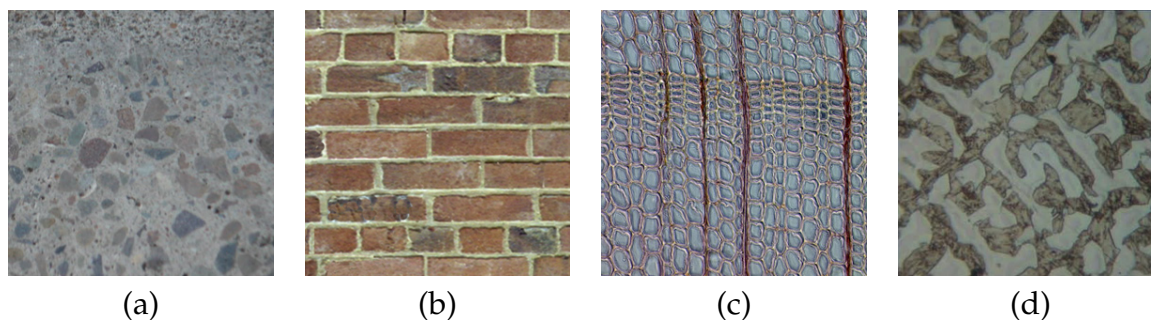
In the recent decades, the homogenization methods have proven themselves to be a convenient tool for the modeling of heterogeneous structures with diverse applications in, e.g., biomedicine, textile industry, conventional civil engineering as well as modern architecture. This thesis aims at the application of homogenization approaches to heterogeneous members subject to bending.

The proposed homogenization technique is illustrated in detail on several examples. The basic principles of the method are introduced on a bending problem of a heterogeneous cantilever beam composed of two materials. For such a simple one-dimensional structure, it is possible to find the exact solution in a closed form and confront it with the result obtained using the homogenization method. Perforated plates were selected as the representatives of two-dimensional structures. In this case, the homogenized response was compared not only with the detailed numerical model but also with available experimental data. In each chapter, accuracy of the homogenized solution is systematically illustrated using both graphical and tabular formats.

Kapitola 1

Úvod

Struktura značné části materiálů používaných ve stavebnictví je heterogenní. Podrobným zkoumáním těchto materiálů okem nebo mikroskopem zjistíme, že se skládají z několika různorodých složek. Příkladem může být beton (z plniva, pojiva a příměsí), zdivo (ze zdicích prvků: kamenů, cihel nebo tvárnic a malty), dřevo (z tracheid, parenchymatických buněk, případně také cév a libriformních vláken) nebo ocel (z feritu, cementitu a austenitu).



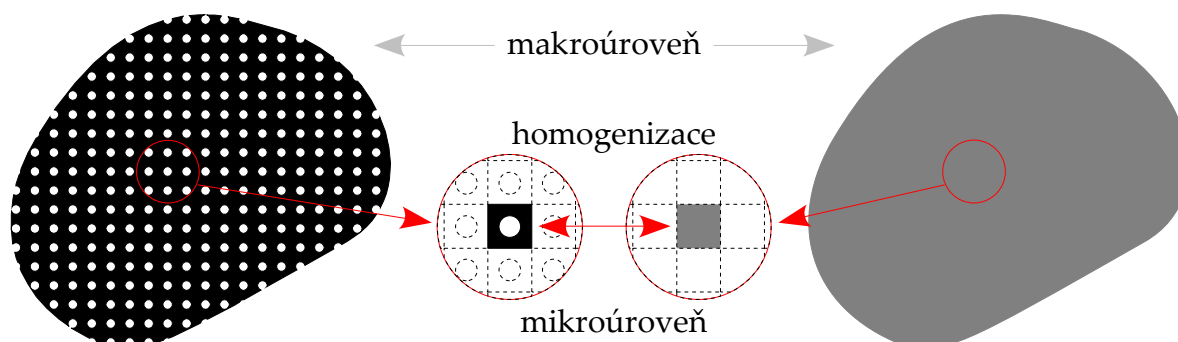
Obrázek 1.1: Struktura materiálů: (a) beton, (b) zdivo, (c) dřevo, (d) ocel

Kromě těchto běžných materiálů se ve stavebnictví uplatňují nové kompozity. Tyto materiály jsou složeny alespoň ze dvou komponent odlišných vlastností, jejichž kombinace může zajistit chování, které nemá žádný tradiční materiál. Například kompozity vyztužené vlákny a textiliemi získávají stále na větší důležitosti především v oblasti zesilování staveb a návrhu konstrukcí v extrémních situacích.

Modelovat ve výpočtech zvláště jednotlivé složky, ze kterých se materiál skládá, je značně náročné a většinou i nereálné. Je to dáno také tím, že rozměry jednotlivých různorodých částí jsou v porovnání s rozměry tělesa často zanedbatelné.

Přiblížíme si to na názorném příkladu. Představme si blok z pórobetonu o rozměrech $300 \times 500 \times 1000$ mm. Předpokládejme, že vzduchové póry jsou rozmístěny rovnoměrně, jejich průměr je jeden milimetr a jsou od sebe vzdáleny také zhruba milimetr. Při výpočtu některou diskretizační metodou (například metodou konečných prvků) nás tyto milimetrové detaily nutí zvolit alespoň $300 \times 500 \times 1000 = 150\,000\,000$ diskretizačních bodů. Po zatížení hledáme neznámá posunutí všech bodů ve směru jednotlivých prostorových os. Při takovéto diskretizaci tělesa získáme zhruba 450 miliónů algebraických rovnic pro 450 miliónů neznámých, což je náročná výpočetní úloha i pro současné počítače. Pokud bychom tímto způsobem zkoumali chování stěny vyrobené z těchto pórobetonových bloků a modelovali také jednotlivé složky pórobetonové hmoty (křemičitá složka a pojivo), budeme mít problém s řešením této soustavy i na současných nejvýkonnějších počítačích.

Při výpočtech se můžeme jemné diskretizaci vyhnout tím, že budeme chování materiálů zkoumat na dvou úrovních. Princip tohoto „rozdvojení“ problému je zjednodušeně znázorněn na obrázku 1.2.

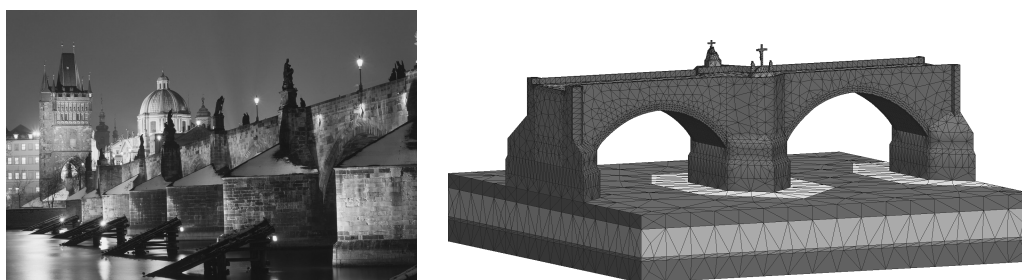


Obrázek 1.2: Schéma oddělení mikroskopické úlohy od makroskopické

Heterogenitou materiálu se zabýváme pouze na mikroúrovni. Za předpokladu, že mikrostruktura materiálu je periodická, vymežíme v rámci tělesa vzorek, který se pravidelně opakuje (PUC - Periodic Unit Cell). Pokud nelze nalézt přesně periodickou část, určíme pomocí statistických metod „průměrnou“ základní buňku. Protože tento reprezentativní objem (RVE - Representative Volume Element) „vyjmeme“ z okolního materiálu a zkoumáme ho odděleně, musíme na jeho okrajích předepsat takové podmínky, které simulují spolupůsobení se zbytkem tělesa. Tuhost této základní buňky zjistíme ze znalosti geometrie a materiálových konstant jednotlivých složek. To je úkolem teorie homogenizace a hovoříme o homogenizovaném materiálu.

Po získání těchto tuhostních parametrů můžeme na makroúrovni pohlížet na těleso, jako by bylo homogenní. Objekt z homogenizovaného materiálu lze diskretizovat pomocí řádově menšího počtu bodů.

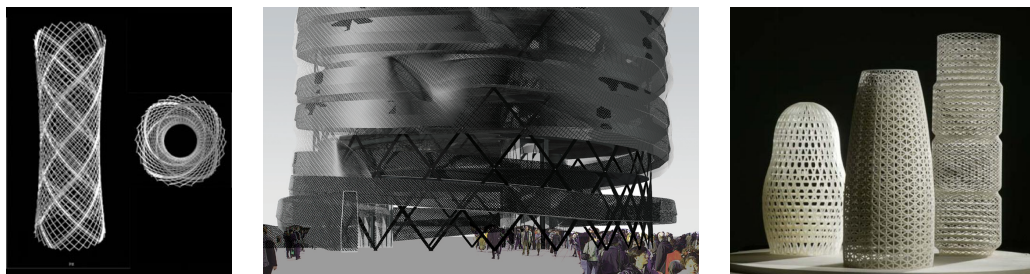
Základní podmínkou teorie homogenizace je, že poměr mikroskopického a makroskopického měřítká jde limitně k nule, neboli velikost základní buňky (RVE) je mnohem menší než celková velikost zkoumaného tělesa. Často při výpočtech striktně nerespektujeme toto omezení, a přesto je nalezené řešení pro dané účely dostatečně přesné.



Obrázek 1.3: Fotografie Karlova mostu a výpočetní model

V posledních desetiletích se ukázaly homogenizační metody jako velmi vhodný nástroj pro modelování heterogenních materiálů. Uplatnění nacházejí v biomedicíně, v textilním průmyslu, v oblasti kompozitních materiálů s periodickou strukturou a v neposlední řadě také ve stavebnictví. Význam principů homogenizace pro praktické inženýrské úlohy dokládá fakt, že byly použity na získání vstupních parametrů pro výpočetní model Karlova mostu - jedné z nejvýznamnějších kulturních památek České republiky [1].

Také v projektech moderní architektury se začínají objevovat pokročilé materiály, jako jsou například kompozity vyztužené vlákny [2, 3, 4]. Tyto atraktivní materiály se vyznačují velkou variabilitou, a proto je v této oblasti značný prostor pro uplatnění homogenizačních metod, které umožňují optimální návrh jejich struktury bez nutnosti nákladného experimentálního výzkumu.



Obrázek 1.4: Více použití kompozitních materiálů v moderní architektuře

Tato práce je členěna do dvou tématických celků. První je věnován základním principům homogenizačních metod. Cílem je představit a detailně ilustrovat tyto teze na jednoduchých příkladech. V prvním příkladu je vyšetřován ohyb a v druhém tah heterogenní konstrukce složené ze dvou materiálů, které se periodicky střídají. Analyzovány jsou nejjednodušší konstrukční prvky ve stavební praxi – pruty. Pro tyto jednorozměrné úlohy je možné vypočítat přesné řešení a porovnat ho s výsledkem homogenizace. Na závěr jsou získané poznatky shrnuty a zobecněny pro homogenizaci rovinných a prostorových konstrukcí. Druhá část je zaměřena na využití homogenizačních metod při řešení inženýrských úloh. Konkrétně se zabývá stabilitou tlačných stěn, které jsou vylehčeny otvory. Výsledky získané homogenizací těchto perforovaných materiálů jsou konfrontovány s experimentálními daty.

Dílní části této práce byly prezentovány v časopise *Stavební obzor* (viz článek [5]) a ve sborníku konference *Engineering mechanics 2005* (viz příspěvek [6]).

Kapitola 2

Základní principy homogenizace

V literatuře lze najít celou řadu publikací a textů vztahujících se k teorii homogenizace heterogenních materiálů. Podle přístupu k problematice lze tyto práce rozdělit do dvou skupin:

- První pochází z oblasti aplikované matematiky [7]. Zde je chování homogenizované konstrukce chápáno jako (vhodně definovaná) limita odezvy heterogenní konstrukce.
- Druhá skupina, vycházející spíše z fyzikálních a inženýrských přístupů, je pak typicky založena na předpokladu konstantního průběhu průměrných polí (např. napětí a deformace) na délkách odpovídajících charakteristické velikosti složek materiálu [8].

Obě tyto skupiny publikací jsou však pro úvod do homogenizačních metod poněkud komplikované, jelikož předpokládají netriviální znalosti aplikované mechaniky nebo matematiky, případně obou.

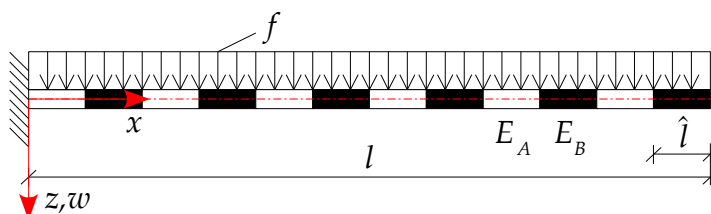
Cílem kapitoly je demonstrovat na co nejjednodušších příkladech základní principy homogenizace konstrukcí složených z nehomogenních materiálů. Hlavní důraz byl kladen na to, aby pochopení textu vyžadovalo znalost jen základních principů stavební mechaniky a teorie pružnosti (např. v rozsahu [9]). Proto jsou veškerá odvození a úpravy prováděny poněkud podrobněji, než je v odborných publikacích běžné, s cílem přiblížit tuto problematiku čtenáři, který nemá hlubší znalosti v této oblasti. Dalším důvodem volby jednoduchých příkladů je možnost názorného porovnání homogenizovaného řešení s řešením přesným, které lze vyjádřit v uzavřeném tvaru. To je ve vícerozměrných případech prakticky nemožné.

Kapitola je uspořádána následujícím způsobem. Příklad v prvním oddílu se týká ohybu heterogenní konzoly. Členění na pododdíly odpovídá jednotlivým bodům postupu řešení. Nejprve je formulováno zadání úlohy. Dále je odvozeno přesné řešení problému. Homogenizované vlastnosti jsou získány pomocí limitního přechodu, tedy v duchu matematické teorie homogenizace. Třetí pododdíl demonstruje inženýrský přístup k homogenizaci. V závěru příkladu je na řadě grafů prezentováno, jak výstižně nahrazuje homogenizovaný model skutečné chování heterogenní konstrukce. Následující oddíl se zabývá taženým heterogenním prutem a je rozdělen opět na odpovídající pododdíly: formulaci úlohy, určení homogenizovaných vlastností využitím rovnosti protažení heterogenní a homogenizované konstrukce a pomocí inženýrského přístupu. V posledním oddílu jsou shrnuty poznatky vyplývající z řešení předchozích úloh.

2.1 Homogenizace ohýbané heterogenní konzoly

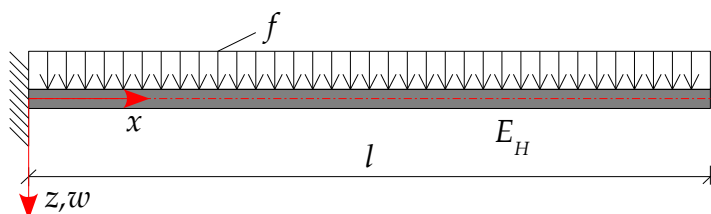
2.1.1 Formulace problému

Principy homogenizace si objasníme na příkladu ohybu heterogenní prizmatické konzoly. Zatížení konstrukce f je spojitě rovnoměrné silové (viz obrázek 2.1). Konzola má délku l a skládá se z n intervalů označených indexy $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$. U vetknutí má interval index $i = 0$ a na konci konzoly $i = n - 1$. Jednotlivé intervaly jsou tvořeny materiály s rozdílnými moduly pružnosti E_i (pro $i = 0$ a i sudé nabývá hodnoty E_A , pro i liché E_B). Průřez uvažované konstrukce je charakterizován konstantním momentem setrvačnosti I . Závěry uvedené v pododdílu 2.1.4 a shrnutí 2.3 jsou však obecně platné.



Obrázek 2.1: Schéma heterogenní konzoly

Naším cílem bude nalezení homogenních parametrů (konkrétně modulu pružnosti), které co nejlépe charakterizují chování původní konstrukce. Homogenizovaný model¹ je znázorněn na obrázku 2.2. Neznámou veličinou je pro nás modul pružnosti E_H . Délka konzoly, moment setrvačnosti průřezu i působící zatížení zůstávají stejné jako u nehomogenní konzoly.



Obrázek 2.2: Schéma homogenizované konzoly

2.1.2 Homogenizace pomocí limitního přechodu

První možnost řešení problému je odvození vztahu pro modul pružnosti E_H z podmínky rovnosti průhybu homogenizované a skutečné heterogenní konzoly v bodě $x = l$ (na volném konci konstrukce)

$$w_H(l) = w_{n-1}(l), \quad (2.1)$$

kde $w_H(l)$ značí průhyb konce homogenizované konzoly a $w_{n-1}(l)$ je přesný průhyb konce heterogenní konzoly (tedy posledního intervalu, $i = n - 1$). Počet intervalů n , ze kterých se tato konstrukce skládá, se blíží nekonečnu ($n \rightarrow \infty$).

¹ Předpokládáme, že počet intervalů n se blíží nekonečnu, aby byla splněna podmínka teorie homogenizace (velikost základní buňky (RVE) je mnohem menší než celková velikost zkoumaného tělesa). Z grafů v oddílu 2.1.4 je zřejmé, že od určité hodnoty n se homogenizované řešení dostatečně přibližuje přesnému řešení.

Pro výpočet průhybů využijeme ohybovou rovnici (viz například [9], strana 77), ve které se vyskytuje křivost, tedy záporná hodnota druhé derivace průhybu

$$\kappa(x) = -\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{M(x)}{E(x)I}. \quad (2.2)$$

Vyjádříme průběh ohybového momentu $M(x)$ po konstrukci

$$M(x) = -\frac{f}{2} (x^2 - 2xl + l^2) \quad (2.3)$$

a po dosazení zpět do (2.2) přepíšeme ohybovou rovnici takto

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{1}{E(x)I} \frac{f}{2} (x^2 - 2xl + l^2). \quad (2.4)$$

Nejprve určíme ohybovou čáru pro konzolu s konstantním modulem pružnosti E_H , protože je tato úloha podstatně jednodušší než pro heterogenní konstrukci. Postupnou integrací rovnice (2.4) získáme

- pootočení (záporné)

$$\frac{dw_H}{dx}(x) = \frac{1}{E_H I} \frac{f}{2} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 l + x l^2 \right) + c, \quad (2.5)$$

- průhyb

$$w_H(x) = \frac{1}{E_H I} \frac{f}{2} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} l + \frac{x^2}{2} l^2 \right) + cx + d \quad (2.6)$$

homogenizované konzoly v libovolném bodě x . Hodnoty integračních konstant c a d vyplývají z okrajových podmínek ve vetknutí. Platí

- pro pootočení

$$\frac{dw_H}{dx}(0) = 0 = c, \quad (2.7)$$

- pro průhyb

$$w_H(0) = 0 = d. \quad (2.8)$$

Po dosazení integračních konstant do vztahu (2.6) lze vyjádřit pro $x = l$ průhyb na konci homogenizované konzoly ve tvaru

$$w_H(l) = \frac{1}{E_H I} \frac{f l^4}{8}. \quad (2.9)$$

Určení ohybové čáry heterogenní konzoly je komplikovanější. Vztah pro pootočení (2.5) a průhyb (2.6) musíme vyjádřit pro každý interval, protože průběh modulu pružnosti po konstrukci $E(x)$ není v tomto případě konstantní a navíc se nejedná ani o spojitou funkci. Připomeňme, že se jeho hodnota mění skokem. Pro intervaly s indexem $i = 0$ a i sudé nabývá hodnoty E_A a pro i liché E_B .

- Pootočení (záporné) i -tého intervalu je

$$\frac{dw_i}{dx}(x) = \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 l + x l^2 \right) + c_i, \quad (2.10)$$

- průhyb i -tého intervalu se vyjádří jako

$$w_i(x) = \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} l + \frac{x^2}{2} l^2 \right) + c_i x + d_i, \quad (2.11)$$

kde c_i a d_i jsou integrační konstanty na příslušném intervalu. Protože máme v tomto případě $2n$ konstant a stále jen dvě okrajové podmínky ve vetknutí (rovnice (2.7) a (2.8)), musíme pro jejich výpočet použít podmínky spojitosti průhybu a pootočení mezi jednotlivými intervaly. Na rozhraní intervalů (tedy v bodech $x = i\hat{l}$, $i = 1, 2, \dots, (n-1)$), kde $\hat{l} = l/n$) mají podmínky spojitosti tvar

- pro pootočení

$$\frac{dw_{i-1}}{dx}(x) = \frac{dw_i}{dx}(x), \quad (2.12)$$

- pro průhyb

$$w_{i-1}(x) = w_i(x). \quad (2.13)$$

První dvě konstanty určíme stejně jako u homogenního případu ze znalosti okrajových podmínek pro pootočení (2.7) a průhyb (2.8). Po dosazení $x = 0$ a aplikaci těchto podmínek do vztahu (2.10) a (2.11) v intervalu $i = 0$ dostaneme

- pro pootočení

$$\frac{dw_0}{dx}(0) = 0 = c_0$$

- a pro průhyb

$$w_0(0) = d_0 = 0.$$

Vzájemný vztah mezi zbylými $2(n-1)$ integračními konstantami získáme použitím podmínek spojitosti. Dosazením $x = i\hat{l}$ do rovnic (2.10) a (2.11) dostáváme

- pootočení (záporné) pravého okraje intervalu ($i-1$)

$$\begin{aligned} \frac{dw_{i-1}}{dx}(i\hat{l}) &= \frac{1}{E_{i-1} I} \frac{f}{2} \left(\frac{i^3 \hat{l}^3}{3} - i^2 \hat{l}^2 n \hat{l} + i \hat{l} n^2 \hat{l}^2 \right) + c_{i-1} \\ &= \frac{1}{E_{i-1} I} \frac{f}{2} \hat{l}^3 \left(\frac{i^3}{3} - i^2 n + i n^2 \right) + c_{i-1}, \end{aligned}$$

- průhyb pravého okraje intervalu ($i-1$)

$$\begin{aligned} w_{i-1}(i\hat{l}) &= \frac{1}{E_{i-1} I} \frac{f}{2} \left(\frac{i^4 \hat{l}^4}{12} - \frac{i^3 \hat{l}^3}{3} n \hat{l} + \frac{i^2 \hat{l}^2}{2} n^2 \hat{l}^2 \right) + c_{i-1} i \hat{l} + d_{i-1} \\ &= \frac{1}{E_{i-1} I} \frac{f}{2} \hat{l}^4 \left(\frac{i^4}{12} - \frac{i^3}{3} n + \frac{i^2}{2} n^2 \right) + c_{i-1} i \hat{l} + d_{i-1}, \end{aligned}$$

- pootočení (záporné) levého okraje intervalu i

$$\begin{aligned} \frac{dw_i}{dx}(i\hat{l}) &= \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \left(\frac{i^3 \hat{l}^3}{3} - i^2 \hat{l}^2 n \hat{l} + i \hat{l} n^2 \hat{l}^2 \right) + c_i \\ &= \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \hat{l}^3 \left(\frac{i^3}{3} - i^2 n + i n^2 \right) + c_i, \end{aligned}$$

- průhyb levého okraje intervalu i

$$\begin{aligned} w_i(\hat{l}) &= \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \left(\frac{i^4 \hat{l}^4}{12} - \frac{i^3 \hat{l}^3}{3} n \hat{l} + \frac{i^2 \hat{l}^2}{2} n^2 \hat{l}^2 \right) + c_i \hat{l} + d_i \\ &= \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \hat{l}^4 \left(\frac{i^4}{12} - \frac{i^3}{3} n + \frac{i^2}{2} n^2 \right) + c_i \hat{l} + d_i. \end{aligned}$$

Tyto vztahy pro pootočení a průhyby na rozhraní sousedních intervalů svážeme pomocí podmínek spojitosti (2.12) a (2.13). Za moduly pružnosti dosadíme konstanty E_A a E_B a výrazy upravíme tak, aby platily pro i sudé i liché. Po několika početních úpravách získáme závislosti mezi integračními konstantami ve tvaru

$$\begin{aligned} c_i &= c_{i-1} + (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \hat{l}^3 \left(\frac{i^3}{3} - i^2 n + i n^2 \right), \\ d_i &= d_{i-1} - \hat{l} (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \hat{l}^3 \left(\frac{i^3}{3} - i^2 n + i n^2 \right) \\ &\quad + (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \hat{l}^4 \left(\frac{i^4}{12} - \frac{i^3}{3} n + \frac{i^2}{2} n^2 \right). \end{aligned}$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme pomocné konstanty. Označíme-li

$$A_i = (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \hat{l}^3 \left(\frac{i^3}{3} - i^2 n + i n^2 \right) \quad (2.14)$$

a

$$B_i = (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \hat{l}^4 \left(\frac{i^4}{12} - \frac{i^3}{3} n + \frac{i^2}{2} n^2 \right), \quad (2.15)$$

můžou být předchozí vztahy pro integrační konstanty přepsány do kompaktního tvaru

$$c_i = c_{i-1} + A_i, \quad d_i = d_{i-1} - \hat{l} A_i + B_i. \quad (2.16)$$

Využitím hodnot konstant $c_0 = 0$ a $d_0 = 0$ vypočtených z okrajových podmínek můžeme výrazy (2.16) ještě upravit

$$c_i = \sum_{k=0}^i A_k, \quad d_i = \sum_{k=0}^i \left(B_k - k \hat{l} A_k \right). \quad (2.17)$$

Nyní známe rovnice pro pootočení (2.10) a průhyb (2.11) heterogenní konzoly z n intervalů a všechny integrační konstanty plynou z (2.17). Můžeme tedy vypočítat průhyb v libovolném bodě x . Dosazením $x = l$ a $i = n - 1$ do vztahu (2.11) získáme průhyb konzoly na konci posledního $(n - 1)$ -intervalu

$$\begin{aligned} w_{n-1}(l) &= \frac{1}{E_{n-1} I} \frac{f}{2} \left(\frac{l^4}{12} - \frac{l^4}{3} + \frac{l^4}{2} \right) + c_{n-1} l + d_{n-1} \\ &= \frac{1}{E_{n-1} I} \frac{f}{8} l^4 + \sum_{k=0}^{n-1} A_k l + \sum_{k=0}^{n-1} \left(B_k - k \hat{l} A_k \right) \\ &= \frac{1}{E_{n-1} I} \frac{f}{8} l^4 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(A_k l + B_k - k \hat{l} A_k \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Sumační výraz upravíme do následujícího tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (A_k l + B_k - k \hat{l} A_k) \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^{k+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \hat{l}^4 \left(nk^3 - \frac{3}{2} k^2 n^2 + n^3 k - \frac{1}{4} k^4 \right) \right) \end{aligned}$$

a například pomocí programu Maple® sečteme předchozí řadu. Po dosazení do rovnice (2.18) získáváme výraz

$$w_{n-1}(l) = \frac{1}{E_{n-1} I} \frac{f}{8} l^4 + \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \hat{l}^4 \left(\frac{1}{8} n^4 (-1)^n + \frac{1}{4} n^3 - \frac{1}{8} n \right).$$

Budeme uvažovat, že počet intervalů n je sudé² číslo, a vypočítáme limitu průhybu konce konzoly $w_{n-1}(l)$ pro $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} w_{n-1}(l) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{E_B I} \frac{f}{8} l^4 + \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \hat{l}^4 \left(\frac{1}{8} n^4 + \frac{1}{4} n^3 - \frac{1}{8} n \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{E_B I} \frac{f}{8} l^4 + \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} l^4 \left(\frac{1}{8} \frac{n^4}{n^4} + \frac{1}{4} \frac{n^3}{n^4} - \frac{1}{8} \frac{n}{n^4} \right) \right) \\ &= \frac{f l^4}{8I} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{E_B} + \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} \right) \right) \\ &= \frac{f l^4}{8I} \left(\frac{1}{E_B} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Podmínka rovnosti průhybu homogenizované a heterogenní konzoly (2.1) vypadá po dosazením vztahů (2.9) a (2.19) takto

$$\frac{1}{E_H} \frac{f l^4}{8I} = \frac{f l^4}{8I} \left(\frac{1}{E_B} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \right).$$

Po několika úpravách získáme finální vztah pro E_H ve tvaru

$$E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}. \quad (2.20)$$

2.1.3 Inženýrský přístup k homogenizaci

Nyní odvodíme vztah pro homogenizovaný modul pružnosti (2.20) jiným způsobem, s využitím poznatků víceúrovňové kinematiky [10]. Konstrukci budeme zkoumat odděleně na dvou úrovních:

- Na mikroúrovni analyzujeme chování periodické buňky, ze kterého určíme modul pružnosti E_H .
- Na makroúrovni nahradíme heterogenní konzolu modelem konstrukce z homogenního materiálu s nalezeným modulem pružnosti E_H .

² Pokud bychom zvolili pro výpočet n liché, získali bychom po úpravách výsledný vztah pro E_H stejný (viz též pododdíl 2.2.2).

Tím se výpočty značně urychlí, neboť analýza ohybu heterogenní konzoly je velmi pracná a náročná (viz pododdlíl 2.1.2).

Při řešení homogenizačního problému využijeme opět vztah mezi momentem a křivostí. Obrázek 2.3 schématicky znázorňuje postup řešení:

- Na makroúrovni je homogenizovaná konstrukce tvořena materiálovými body na ose x . Na mikroúrovni každému materiálovému bodu odpovídá periodická buňka, popsaná v souřadném systému \hat{x} .
- Tuto buňku zatížíme makroskopickou (průměrnou) hodnotou křivosti $\kappa(x)$

$$\kappa(x) = \frac{1}{2\hat{l}} \int_0^{2\hat{l}} \hat{\kappa}(\hat{x}) d\hat{x}. \quad (2.21)$$

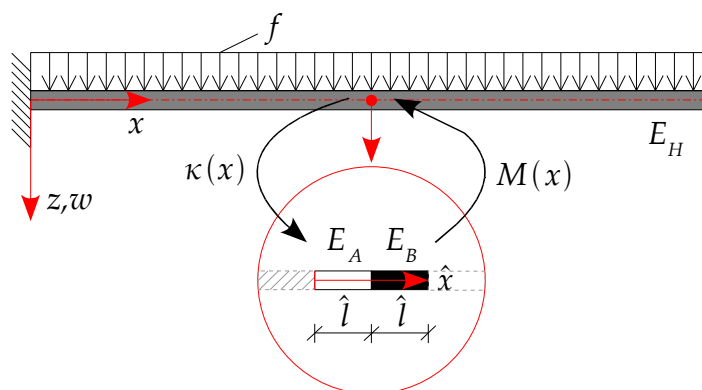
- Pro toto zatížení určíme průběh ohybového momentu $\hat{M}(\hat{x})$ na úrovni jednotkové buňky.
- Objemovým průměrováním získáme makroskopickou hodnotu ohybového momentu

$$M(x) = \frac{1}{2\hat{l}} \int_0^{2\hat{l}} \hat{M}(\hat{x}) d\hat{x}. \quad (2.22)$$

- Z ohybové rovnice³ na makroúrovni

$$M(x) = E_H I \kappa(x) \quad (2.23)$$

odvodíme snadno vztah pro modul pružnosti E_H , protože moment setrvačnosti I , zatížení (průměrnou křivost $\kappa(x)$) i odezvu konstrukce (průměrný ohybový moment $M(x)$) známe.



Obrázek 2.3: Ohýbaná konzola: inženýrská interpretace homogenizace

Zatížení konstantní křivostí $\kappa(x)$ budeme realizovat na okrajích jednotkové buňky prostřednictvím pootočení. Tento způsob, představený například v [11], je vhodný zejména u složitějších úloh, které řešíme na počítači, protože v dostupných numerických programech není zatěžování křivostí možné.

³ Porovnej s (2.2).

Pokud by byla jednotková buňka homogenní, platilo by pro zatížení makroskopickou křivostí

$$\frac{d\hat{\varphi}^{\text{hmg}}}{d\hat{x}}(\hat{x}) = \kappa(x) = \text{konst.}$$

Z této podmínky můžeme vyjádřit pootočení $\hat{\varphi}^{\text{hmg}}(\hat{x})$ ve tvaru

$$\hat{\varphi}^{\text{hmg}}(\hat{x}) = \kappa(x)\hat{x} + c, \quad (2.24)$$

což by znamenalo, že je průběh funkce $\hat{\varphi}^{\text{hmg}}(\hat{x})$ na jednotkové buňce lineární vzhledem k proměnné \hat{x} , protože c je integrační konstanta. Tento předpoklad však není splněn pro heterogenní buňku. Z ohybové rovnice (2.4) vyplývá, že na rozhraní intervalů s různým modulem pružnosti bude mít graf funkce $\hat{\varphi}^{\text{hmg}}(\hat{x})$ hrot. S ohledem na tuto skutečnost vyjádříme pootočení ve tvaru

$$\hat{\varphi}(\hat{x}) = \hat{\varphi}^{\text{hmg}}(\hat{x}) + \hat{\varphi}^*(\hat{x}), \quad (2.25)$$

kde $\hat{\varphi}^{\text{hmg}}(\hat{x})$ označuje pootočení, které by vzniklo v homogenní jednotkové buňce pod účinky předepsané křivosti $\kappa(x)$, zatímco $\hat{\varphi}^*(\hat{x})$ zohledňuje heterogenitu studované konstrukce. V důsledku periodického střídání intervalů s různými moduly pružnosti nabývají tyto členy stejných hodnot na protilehlých koncích jednotkové buňky

$$\hat{\varphi}^*(0) = \hat{\varphi}^*(2\hat{l}). \quad (2.26)$$

Dosazením funkce $\hat{\varphi}^{\text{hmg}}(\hat{x})$ (2.24) do vztahu (2.25) získáme rovnici

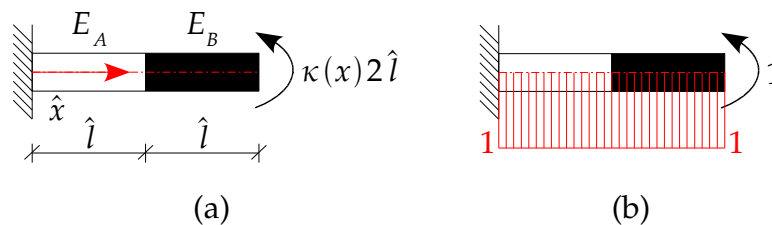
$$\hat{\varphi}(\hat{x}) = \kappa(x)\hat{x} + c + \hat{\varphi}^*(\hat{x}). \quad (2.27)$$

Na okrajích můžeme jednotkovou buňku zatížit například tak, že předepíšeme pootočení jejího pravého konce $\hat{\varphi}(2\hat{l})$ a vetkneme levý konec $\hat{\varphi}(0) = 0$, abychom zabránili posunutí a pootočení buňky při zatěžování. Z okrajové podmínky v bodě $\hat{x} = 0$ vyplývá

$$\hat{\varphi}(0) = 0 = c + \hat{\varphi}^*(0). \quad (2.28)$$

Vyjádříme pootočení (2.27) na pravém okraji buňky ($\hat{x} = 2\hat{l}$), přičemž využijeme vztahy (2.28) a (2.26)

$$\hat{\varphi}(2\hat{l}) = \kappa(x)2\hat{l} + c + \hat{\varphi}^*(2\hat{l}) = \kappa(x)2\hat{l} + c + \hat{\varphi}^*(0) = \kappa(x)2\hat{l}. \quad (2.29)$$



Obrázek 2.4: Jednotková buňka: (a) zatížení a podepření, (b) virtuální stav

Průběh ohybového momentu $\hat{M}(\hat{x})$ od zatížení naznačeného na obrázku 2.4(a) je konstantní. Při výpočtu momentu využijeme principu virtuálních sil. Připomeňme, jak se určí pootočení zvoleného bodu na konstrukci (viz [12], strana 133):

- Vypočteme ohybové momenty pro skutečné zatížení.

- Skutečné křivosti odvodíme ze skutečných momentů jejich vydělením ohybovou tuhostí.
- Ve virtuálním stavu zatížíme konstrukci jednotkovým momentem v tom bodě, jehož pootočení hledáme.
- Z podmínek rovnováhy na staticky určité konstrukci vypočteme virtuální ohybové momenty.
- Integrací součinu virtuálních ohybových momentů a skutečných křivostí získáme přímo hodnotu hledaného pootočení.

V našem případě je neznámou moment $\hat{M}(2\hat{l})$, který odpovídá hodnotě pootočení $\hat{\phi}(2\hat{l})$. Aplikací výše uvedeného postupu získáme vztah

$$\hat{\phi}(2\hat{l}) = \kappa(x)2\hat{l} = \int_0^{2\hat{l}} \frac{\hat{M}(\hat{x}) \cdot 1}{E(\hat{x})I} d\hat{x}.$$

Do předchozí rovnice dosadíme za $E(\hat{x})$ hodnotu modulu pružnosti pro příslušný interval a využijeme znalosti konstantního průběhu $\hat{M}(\hat{x})$:

$$\kappa(x)2\hat{l} = \frac{1}{E_A I} \int_0^{\hat{l}} \hat{M}(\hat{x}) d\hat{x} + \frac{1}{E_B I} \int_{\hat{l}}^{2\hat{l}} \hat{M}(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{1}{2I} \int_0^{2\hat{l}} \hat{M}(\hat{x}) d\hat{x} \left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B} \right).$$

Odtud vyjádříme makroskopický ohybový moment (2.22)

$$M(x) = \frac{1}{2\hat{l}} \int_0^{2\hat{l}} \hat{M}(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B} I \kappa(x)$$

a dosadíme ho do vztahu (2.23)

$$\frac{2E_A E_B}{E_A + E_B} I \kappa(x) = E_H I \kappa(x).$$

Homogenizovaný modul pružnosti

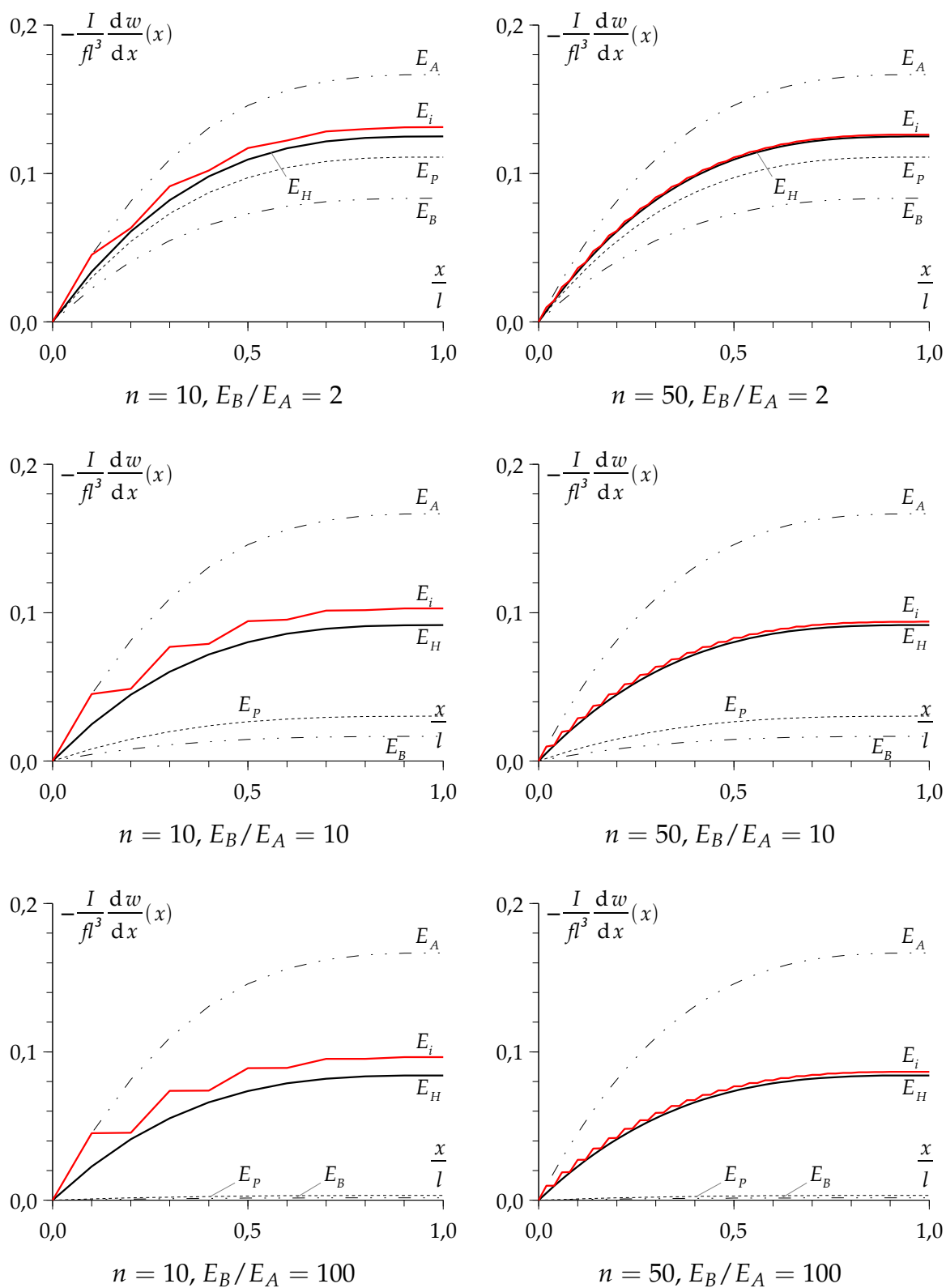
$$E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}$$

vychází stejně jako v předchozím pododdíle (viz rovnice (2.20)).

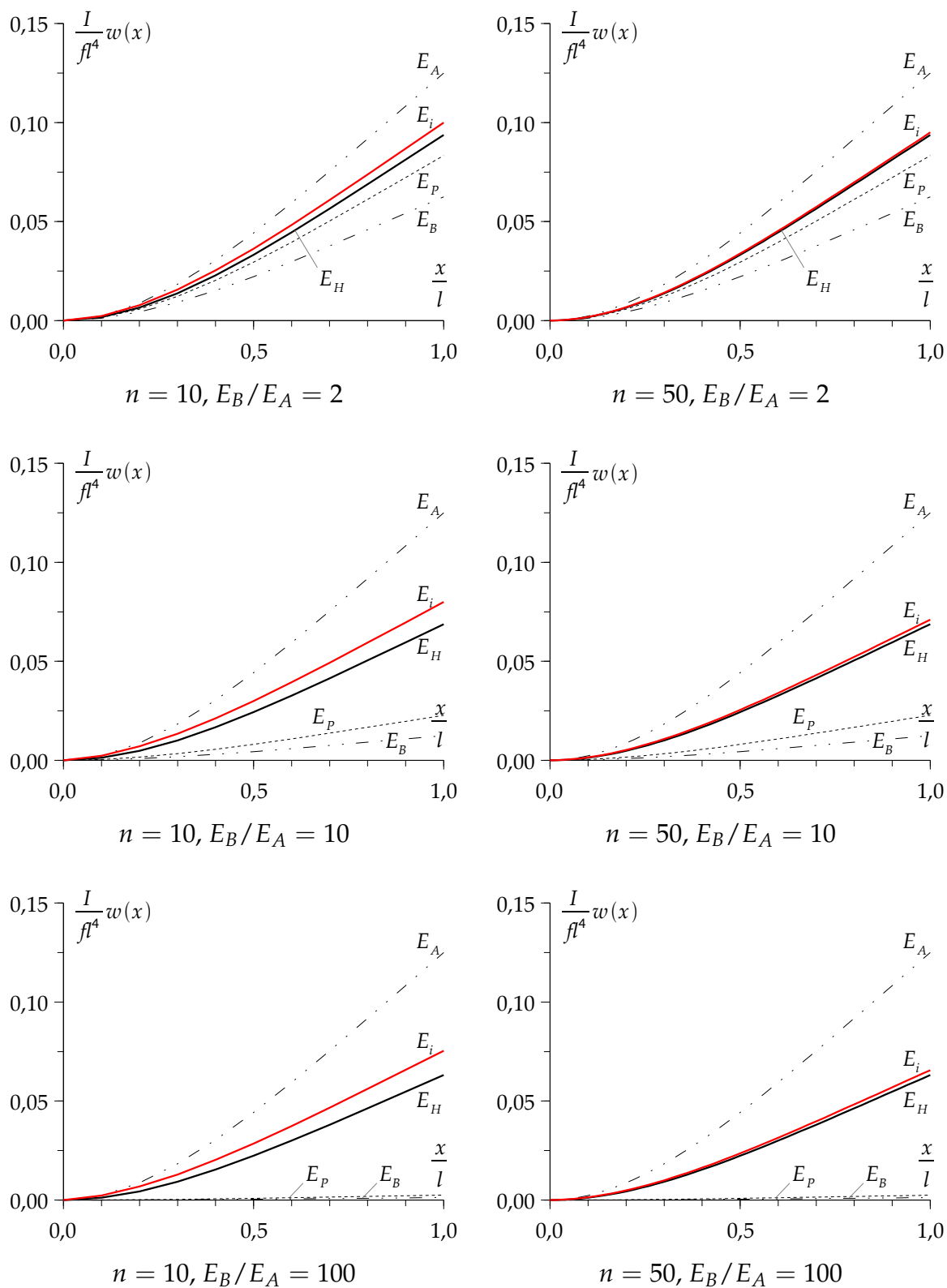
2.1.4 Porovnání přesného a homogenizovaného řešení

Nyní ukážeme, jak výstižně homogenizované řešení reprezentuje skutečné chování heterogenní konstrukce. Obrázky 2.5 a 2.6 dokumentují vztah mezi

- přesným pootočením (respektive průhybem) - viz rovnice (2.10) a (2.11),
- pootočením (respektive průhybem) vypočteným použitím homogenizovaného modulu pružnosti E_H - viz rovnice (2.5) a (2.6),
- pootočením (respektive průhybem) vypočteným použitím průměrného modulu pružnosti $E_P = (E_A + E_B)/2$.



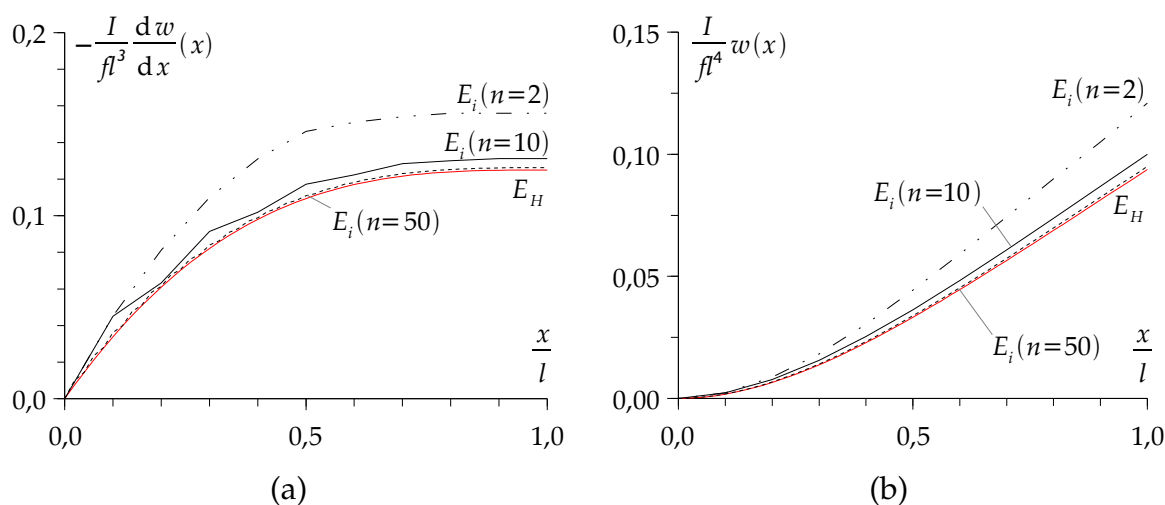
Obrázek 2.5: Průběhy pootočení na konzole



Obrázek 2.6: Průběhy průhybu na konzole

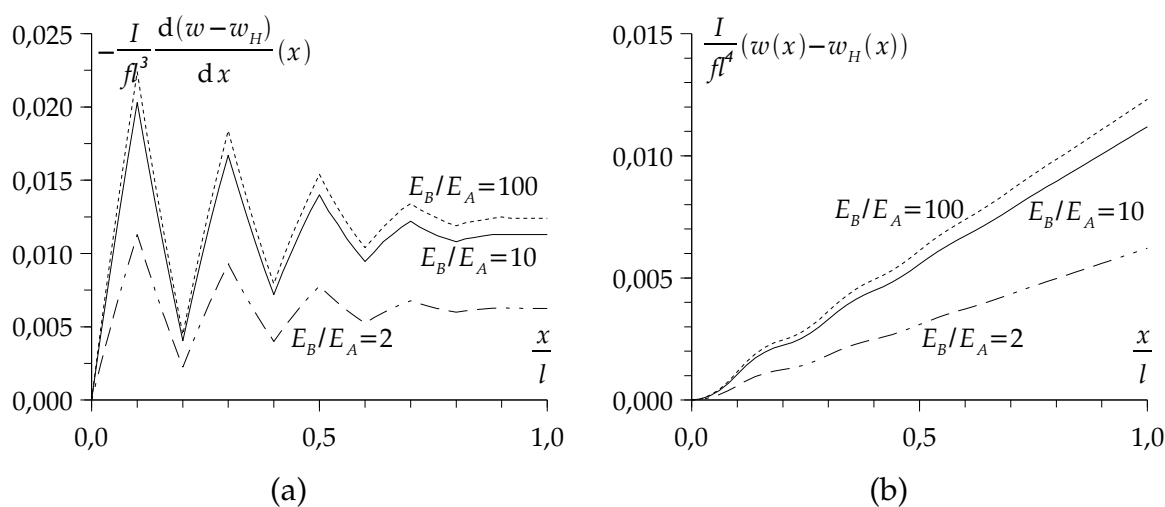
Lze vysledovat závislost přesnosti homogenizovaného řešení na proměnném počtu intervalů n a poměru modulů pružnosti E_B/E_A . Pro srovnání jsou v grafech vyneseny i pootočení a průhyby vypočtené použitím modulu pružnosti E_A^4 (respektive E_B) pro celou konzolu.

Z obrázků 2.5 a 2.6 je zřejmé, že od určité hodnoty n se pootočení a průhyb homogenizované konzoly dostatečně přibližují přesnému řešení (viz grafy pro $n = 50$). Při zvětšujícím se poměru modulů pružnosti E_B/E_A se zvětšuje odchylka mezi přesným a homogenizovaným řešením. Dále je patrné, že použití průměrné hodnoty modulů pružnosti jednotlivých materiálů pro celou konzolu je velmi nepřesné (zvláště při velkém poměru E_B/E_A).



Obrázek 2.7: Průběh (a) pootočení a (b) průhybu v závislosti na n ($E_B/E_A = 2$)

Pro názornost a další demonstraci tohoto chování jsou na obrázku 2.7 vyneseny do grafu dohromady přesná pootočení (respektive průhyby) konzol s různým počtem intervalů n a pootočení (respektive průhyb) homogenní konzoly.

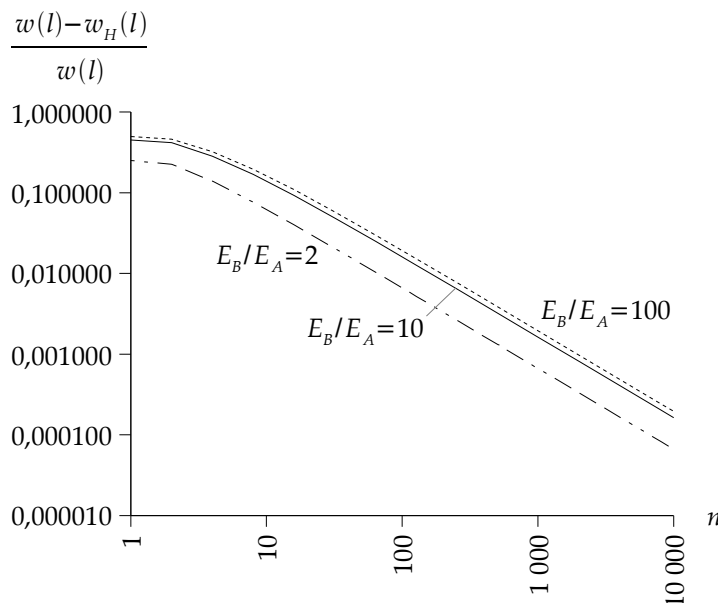


Obrázek 2.8: Odchylka přesného a homogenního (a) pootočení, (b) průhybu ($n = 10$)

Míru nepřesnosti pootočení (respektive průhybu) způsobenou použitím homogenizovaného modulu pružnosti E_H vystihuje nejlépe odchylka přesného a homogenního

⁴ Poznamenejme, že ve všech prezentovaných výpočtech byla uvažována hodnota modulu pružnosti $E_A = 1$.

pootočení (respektive průhybu), jejíž průběh na konzole je znázorněn na obrázku 2.8. Na konstrukci dochází ke kolísání hodnoty této odchylky, což odpovídá změně modulu pružnosti na sousedních intervalech skutečné konstrukce. Protože průběh momentu na makroúrovni $M(x)$ není konstantní, jak předpokládáme, ale kvadratický s vrcholem v bodě $x = l$, je amplituda odchylky pootočení minimální na konci konzoly a maximální v blízkosti vetknutí. Průběh odchylky průhybu je hladší a jeho maximum je na konci konzoly. To je způsobeno tím, že se celková chyba homogenizovaného řešení nasčítává.



Obrázek 2.9: Závislost chyby na konci konzoly na počtu intervalů n

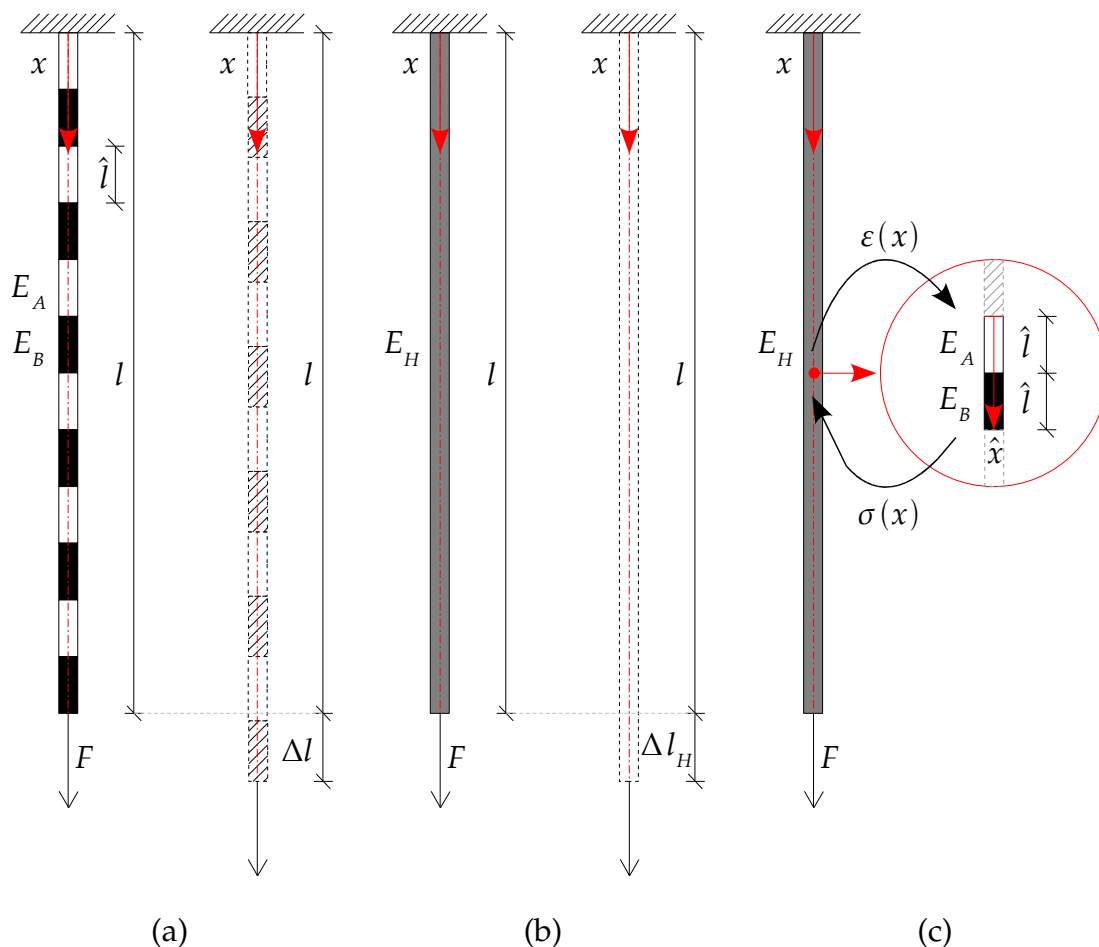
Maximální chyba homogenního průhybu se projeví na volném konci konzoly. Její velikost v závislosti na počtu intervalů n zobrazuje graf 2.9. Pro malý počet intervalů je výstižnost řešení poměrně malá, již od přibližně padesáti intervalů je z hlediska průhybu na konci konzoly přesnost řešení uspokojivá. Dále je zjevný dominantní vliv počtu intervalů vzhledem k poměru modulů pružnosti jednotlivých materiálů.

2.2 Homogenizace taženého heterogenního prutu

2.2.1 Formulace problému

V tomto příkladu se budeme zabývat chováním stejné heterogenní konstrukce jako v předchozím oddíle, ale tentokrát bude zatížena tahovou silou F . Na obrázku 2.10a je prut znázorněn. Má délku l , nahoře je vetknutý a skládá se z n intervalů označených indexem $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$. U vetknutí má interval index $i = 0$ a na volném konci $i = n - 1$. Jednotlivé intervaly jsou tvořeny materiály s rozdílnými moduly pružnosti E_i (pro $i = 0$ a i sudé nabývá hodnoty E_A , pro i liché E_B). Průřez je charakterizován konstantní plochou A .

Hledanou veličinou bude opět modul pružnosti E_H . Chování homogenní konstrukce (viz obrázek 2.10b) s tímto modulem pružnosti odpovídá co nejlépe původní heterogenní konstrukci.



Obrázek 2.10: Tažený prut: (a) heterogenní konstrukce, (b) homogenizovaný model, (c) inženýrská interpretace homogenizace

2.2.2 Homogenizace pomocí limitního přechodu

Modul pružnosti E_H odvodíme z rovnosti absolutního protažení homogenního a heterogenního prutu

$$\Delta l_H = \Delta l. \quad (2.30)$$

Nejprve vyjádříme protažení homogenního prutu

$$\Delta l_H = l \varepsilon_H = l \frac{F}{AE_H}, \quad (2.31)$$

kde Δl_H je absolutní protažení celého prutu, l délka prutu, ε_H poměrné protažení prutu, F konstantní tahová síla na konci prutu a A konstantní plocha průřezu prutu.

Při určení celkového protažení heterogenní konstrukce vyřešíme zvlášť případ, kdy je počet intervalů sudý a lichý. Protažení jednotlivých intervalů s odlišnými moduly pružnosti jsou

$$\Delta \hat{l}_A = \hat{l} \hat{\varepsilon}_A = \frac{l}{n} \frac{F}{AE_A}, \quad \Delta \hat{l}_B = \hat{l} \hat{\varepsilon}_B = \frac{l}{n} \frac{F}{AE_B}.$$

Pro n liché se absolutní protažení prutu vypočte

$$\Delta l = \frac{n}{2} \left(\Delta \hat{l}_A + \Delta \hat{l}_B \right) + \frac{1}{2} \Delta \hat{l}_A - \frac{1}{2} \Delta \hat{l}_B = \frac{l}{2} \frac{F}{A} \left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B} \right) + \frac{l}{2n} \frac{F}{A} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right).$$

Limita tohoto výrazu pro $n \rightarrow \infty$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{l F}{2 A} \left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B} \right) + \frac{l F}{2n A} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \right) = \frac{l F}{2 A} \left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B} \right). \quad (2.32)$$

Při výpočtu protažení prutu pro n sudé se obejdeme bez limitního přechodu a výsledný vztah

$$\Delta l = \frac{n}{2} \left(\Delta \hat{l}_A + \Delta \hat{l}_B \right) = \frac{l F}{2 A} \left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B} \right) \quad (2.33)$$

je tedy stejný jako pro n liché.

Porovnáme absolutní protažení homogenního a heterogenního prutu (viz (2.30))

$$l \frac{F}{A E_H} = \frac{l F}{2 A} \left(\frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_B} \right)$$

a získáváme vztah pro homogenizovaný modul pružnosti

$$E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}.$$

2.2.3 Inženýrský přístup k homogenizaci

Postupovat budeme stejně jako v předchozím příkladu s těmito úpravami (viz obrázek 2.10c):

- Jednotkovou buňku zatížíme makroskopickou (průměrnou) hodnotou deformace

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\hat{l}} \int_0^{2\hat{l}} \hat{\varepsilon}(\hat{x}) d\hat{x}. \quad (2.34)$$

- Pro toto zatížení určíme průběh normálového napětí $\hat{\sigma}(\hat{x})$ na úrovni buňky.
- Objemovým průměrováním získáme makroskopickou hodnotu napětí

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\hat{l}} \int_0^{2\hat{l}} \hat{\sigma}(\hat{x}) d\hat{x}. \quad (2.35)$$

- K odvození vztahu pro homogenizovaný modul pružnosti E_H využijeme Hookeův zákon na makroúrovni

$$\sigma(x) = \varepsilon(x) E_H. \quad (2.36)$$

Při zatížení jednotkové buňky makroskopickou deformací $\varepsilon(x) = \text{konst}$, bude průběh normálového napětí konstantní, protože je konstrukce staticky určitá:

$$\hat{\sigma}(\hat{x}) = \hat{\varepsilon}_A(\hat{x}) E_A = \hat{\varepsilon}_B(\hat{x}) E_B = \sigma(x).$$

Vyjádříme odtud deformace jednotlivých intervalů, které použijeme v rovnici (2.34)

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\hat{l}} \int_0^{\hat{l}} \hat{\varepsilon}_A(\hat{x}) d\hat{x} + \frac{1}{2\hat{l}} \int_{\hat{l}}^{2\hat{l}} \hat{\varepsilon}_B(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{\sigma(x)}{2E_A} + \frac{\sigma(x)}{2E_B}.$$

Makroskopickou hodnotu napětí dosadíme do Hookeova zákona (2.36)

$$\sigma(x) = 2\varepsilon(x) \frac{E_A E_B}{E_A + E_B} = \varepsilon(x) E_H.$$

Vztah pro homogenizovaný modul pružnosti je opět

$$E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}.$$

Pokud bychom řešili složitější úlohu na počítači a nemohli jsme zadat do numerického programu zatížení konstantními deformacemi, předepsali bychom na okrajích buňky odpovídající posunutí a postupovali bychom obdobně jako v předchozím příkladu.⁵

2.3 Shrnutí základních principů

Již při takto jednoduchých příkladech, kdy lze určit přesné řešení, jsou patrné výhody homogenizace konstrukcí skládajících se z materiálů o rozdílných modulech pružnosti. Mezi hlavní přednosti homogenizace patří zejména urychlení výpočtu při dosažení dostatečně přesného řešení. Naopak přístupy založené na průměrování materiálových charakteristik jsou zatíženy značnou chybou, především pro vyšší rozdíl hodnot modulů pružnosti jednotlivých materiálů.

Jak plyne z demonstrováných příkladů, reprezentativnost a přesnost homogenizovaného řešení závisí především na následujících faktorech:

- „počtu intervalů“ konstrukce (poměru velikosti jednotkové buňky a konstrukce),
- poměru tuhostí jednotlivých materiálů,
- poloze v makroskopické oblasti (okolí podpor, koncentrovaných zatížení).

Na určení homogenizovaných vlastností naopak nemá vliv:

- intenzita zatížení,
- absolutní rozměr jednotkové buňky,

neboť ani jedna z těchto veličin nevystupuje ve výrazu pro homogenizovaný modul pružnosti E_H . Všechny tyto poznatky lze přímo zobecnit na řešení složitějších nehomogenních konstrukcí, kde přesné řešení není dosažitelné.

Z uvedených příkladů by se mohlo zdát, že homogenizované parametry jsou stejné bez ohledu na způsob zatížení (ohyb, tah, ...). To ovšem platí jen u takových jednorozměrných konstrukcí, kdy můžeme při výpočtu použít Bernoulliovu-Navierovu hypotézu (tj. průřezy zůstávají i po deformaci rovinné a kolmé na střednici prutu). Pro ostatní konstrukce je toto tvrzení nepravdivé, což je zřejmé například z následující kapitoly, která se věnuje stabilitě rovinných konstrukcí. I při studiu odborné literatury zabývající se homogenizačními metodami lze nalézt řadu příkladů, ve kterých autoři využívají tento mylný předpoklad.

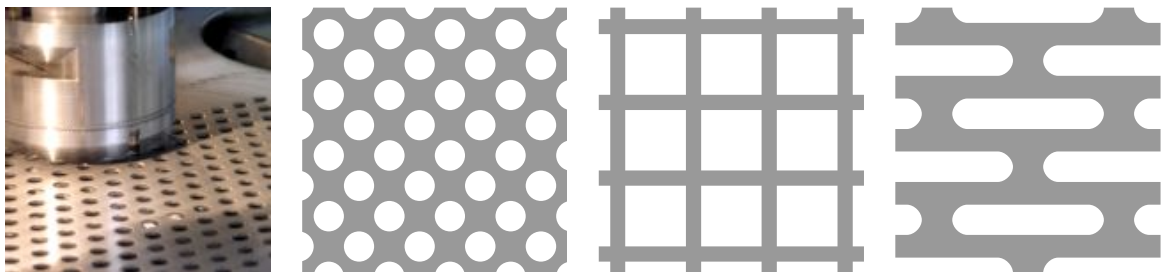
⁵ Posunutí by se skládalo z homogenní a periodické složky, v našem případě posunutí ve směru osy prutu $\hat{u}(\hat{x}) = \hat{u}^{\text{hmg}}(\hat{x}) + \hat{u}^*(\hat{x})$.

Kapitola 3

Aplikace homogenizačních principů

Homogenizační metody jsou použitelné ve stavební praxi při modelování značné části heterogenních materiálů a konstrukčních prvků s periodickou strukturou. Zatímco homogenizace v tahu, tlaku a smyku našla četné praktické aplikace, použití této metody při analýze ohýbaných konstrukcí není příliš frekventované. V této kapitole se budeme zabývat homogenizací perforovaných desek, tedy desek oslabených celou řadou malých otvorů.

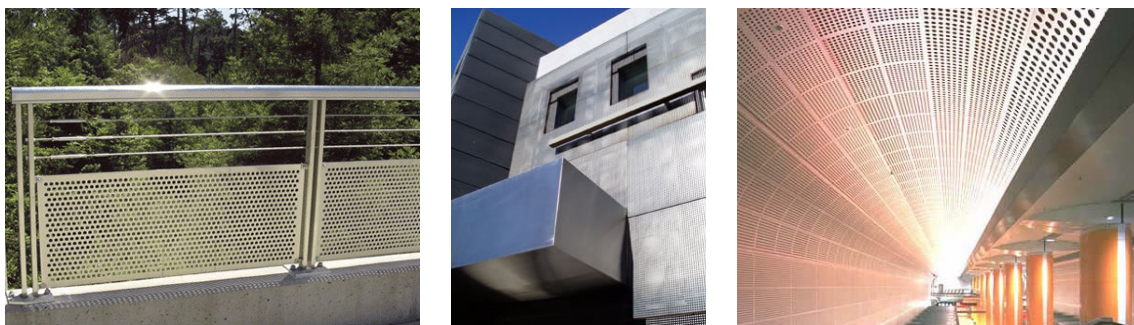
Nejčastěji se v praxi uplatňují děrované plechy (viz obrázek 3.1). Do formátové tabule se na lisovacích strojích vyrábějí otvory. Vysokotlakých lisů je několik typů a umožňují děrovat nejen kovy, ale také ostatní nekřehké materiály, například umělé hmoty. U plechů o větší tloušťce se otvory obvykle vypalují. Vyrobit lze desky s různou velikostí a tvarem vylehčujících otvorů (kruh, čtverec, ovál, křížek, trojúhelník atd.).



Obrázek 3.1: Způsob výroby a nejpoužívanější tvary vylehčujících otvorů

Možnosti použití perforovaných desek jsou značné (viz obrázky 3.2 a [13]). Jako příklady lze uvést:

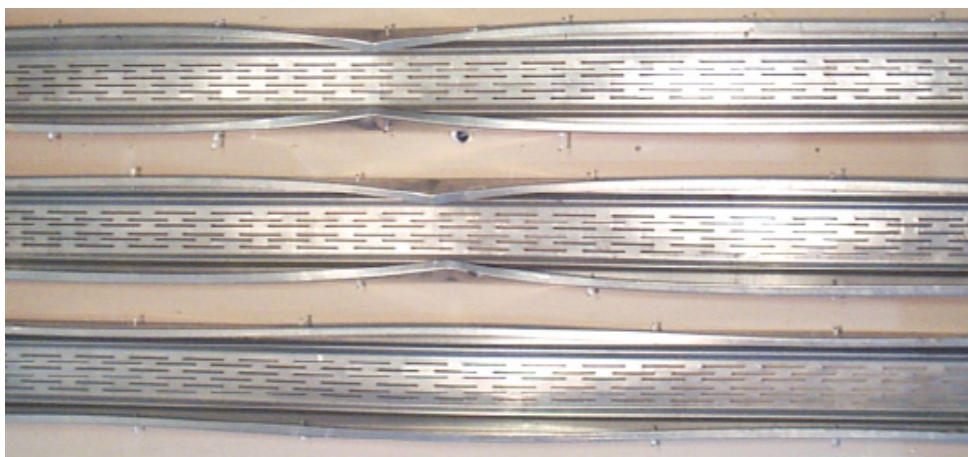
- architektonické prvky (opláštění, pohledy, rošty, výztuže, výplně, mříže, větrací víka, přepážky, mezistěny, schodišťové stupně),
- akustické účely (použití pro zvukovou izolaci, tlumiče hluku, protihlukové stěny),
- omítkové a zateplovací profily,
- ve vzduchotechnice, kabelové žlaby pro elektrorozvody,
- filtry, filtrační koše,
- kryty (ve všech oborech techniky - nejen bezpečnostní, ale i ozdobné),
- dopravní pásy ve zvláště náročných provozech,



Obrázek 3.2: Příklady použití perforovaných desek

- kovové sedačky z děrovaného plechu (například pro stadiony a sportoviště).

Perforované desky mohou také přinést materiálové úspory při navrhování tenkostěnných konstrukcí, viz obrázek 3.3 a [14]. Výsledkem je atraktivní konstrukční prvek, jehož kritické zatížení je několikanásobně vyšší než kritické zatížení plné stěny o stejné hmotnosti (tedy s redukovanou tloušťkou).



Obrázek 3.3: Perforace tenkostěnného profilu

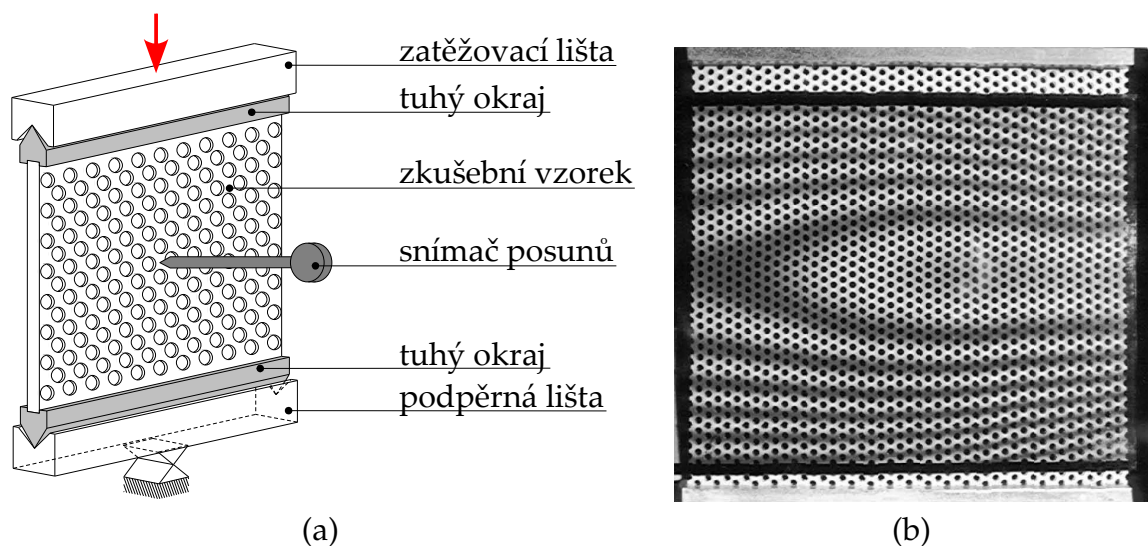
Únosnost perforovaných desek vyrobených z plexiskla byla experimentálně zkoumána v Ústavu teoretické a aplikované mechaniky AV ČR. Využitím experimentálních dat lze ověřit výstižnost matice tuhosti získané navrženými homogenizačními přístupy. Cílem této kapitoly je provést numerickou simulaci experimentů, prezentovaných v [15] a [16], na základě teorie homogenizace heterogenních deskových konstrukcí. Výhodnou tohoto postupu je snížení náročnosti vlastního výpočtu, na druhé straně je však tento přístup založen na jistých zjednodušujících předpokladech, které mohou mít negativní vliv na přesnost výsledků. Proto může porovnání provedené v předkládané práci sloužit jako názorná demonstrace výhod i nevýhod praktické aplikace homogenizačních postupů.

Kapitola je uspořádána následujícím způsobem. V prvním oddílu je představen průběh a výsledky experimentu. Numerický model a porovnání vypočtené kritické síly s experimentálními daty je uvedeno v druhém oddílu. Dále jsou shrnuty základní vztahy teorie tenkých a tlustých desek a výpočet kritické síly. Formulací homogenizačního problému pro tenké a tlusté desky se zabývají následující tři oddíly. Homogenizované vlastnosti získané navrženými metodami jsou porovnány s výsledky experimentů a numerického modelování v závěrečném oddílu.

3.1 Shrnutí experimentálních výsledků

Při praktickém návrhu konstrukcí z perforovaných desek je, obdobně jako u plnostěnných desek, nutno posoudit chování desky při jejím vybočení. To může být pro danou konstrukci rozhodujícím stavem namáhání. Příkladem studie, která se touto otázkou zabývá, je experimentální práce prováděná v Ústavu teoretické a aplikované mechaniky AV ČR [15]. Autoři systematicky zkoumali vliv tvaru otvorů, tloušťky stěny a stupně perforace na velikost kritického zatížení desky vyrobené z plexiskla pro zatížení v jednosměrném tlaku.

Schéma experimentu je uvedeno na obrázku 3.4a. Modely perforovaných desek měly rozměry 200×200 mm a byly vyrobeny z plexiskla s hodnotou modulu pružnosti $E = 3\,000$ MPa a Poissonova čísla $\nu = 0,4$. Zkušební vzorky se lišily tloušťkou desky (od 3 mm do 6 mm) a počtem, velikostí a typem vylehčujících otvorů (kruh, čtverec a trojúhelník se zaoblenými rohy). Tyto vzorky byly kloubově uloženy na dvou protilehlých hranách do tuhého rámu a zbylé okraje byly volné. Pomocí rámu bylo vneseno do desky rovnoměrné zatížení tlakovou silou a následně byla určena kritická síla, při které došlo k vybočení konstrukce (viz obrázek 3.4b). Vzdálenost kloubových uložení byla 230 mm (z toho tuhý rám 2×15 mm).



Obrázek 3.4: Experiment: (a) schéma zatěžování, (b) tvar vybočení

Byla provedena analýza čtrnácti různých zkušebních vzorků perforovaných desek. Pro jednotlivé geometrické varianty bylo použito označení $PW\alpha\beta\gamma$. Symbol α může nabývat hodnot C pro kruhový tvar otvoru, S pro čtvercový tvar otvoru a T pro trojúhelníkový tvar otvoru, β označuje tloušťku desky zaokrouhlenou na celé milimetry a γ charakteristický rozměr otvoru v milimetrech.¹ Geometrické uspořádání vylehčujících otvorů všech zkoušených vzorků je shrnuto v příloze A.

Hodnoty kritických zatížení jsou uvedeny spolu s geometrickými charakteristikami v tabulce 3.1. U kruhových vylehčení značí velikost otvoru průměr kružnice, u čtvercových značí délku strany čtverce.

¹Tedy například označení PWC 3-12 označuje desku o tloušťce 3,08 mm, která je perforována kruhovými otvory o průměru 12 mm.

Označení perforované desky	Geometrie				Kritická síla
	tloušťka [mm]	otvor [mm]	vylehčení [%]	tl. reduk. [mm]	F_{cr}^{exp} [N]
PWC 3-3	3,05	3,3	40	1,82	107,7
PWC 3-4	3,05	4	33	2,04	154,4
PWC 3-12	3,08	12	34	2,03	147,4
PWC 4-3	4,30	3,1	53	2,02	146,3
PWC 4-12	4,07	12	55	1,83	169,3
PWC 5-3	5,16	3,2	69	1,62	118,8
PWC 5-4	4,90	4	60	1,94	186,0
PWC 5-12	5,03	12	59	2,07	249,7
PWC 6-12	6,12	12	67	2,00	271,6
PWC 6-24a	5,89	24	72	1,64	178,4
PWC 6-24b	6,02	24	67	2,00	294,6
PWS 5-26	5,16	26	60	2,06	282,3
PWS 6-27	6,04	27	65	2,12	396,4
PWT 6-20	5,95	-	66	2,03	293,6

Tabulka 3.1: Geometrie a kritické zatížení perforovaných desek

3.2 Numerický model perforované desky

Vzhledem k tomu, že rozměr analyzované konstrukce (200×200 mm) je relativně malý, můžeme v tomto případě provést detailní stabilitní výpočet pro celou konstrukci bez zjednodušujících geometrických předpokladů. Výhodou tohoto přístupu je přesnost získaných výsledků, jeho aplikace je však značně výpočetně náročná (obzvláště pro větší konstrukce).

Kritická síla byla určena lineárním stabilitním výpočtem v konečněprvkovém systému ADINA® verze 8.1. Vymodelováno bylo všech čtrnáct geometrií. Desky z plexiskla byly drženy a také zatěžovány prostřednictvím ocelových okrajů.

Chování materiálů (s parametry uvedenými v tabulce) bylo uvažováno pružné.

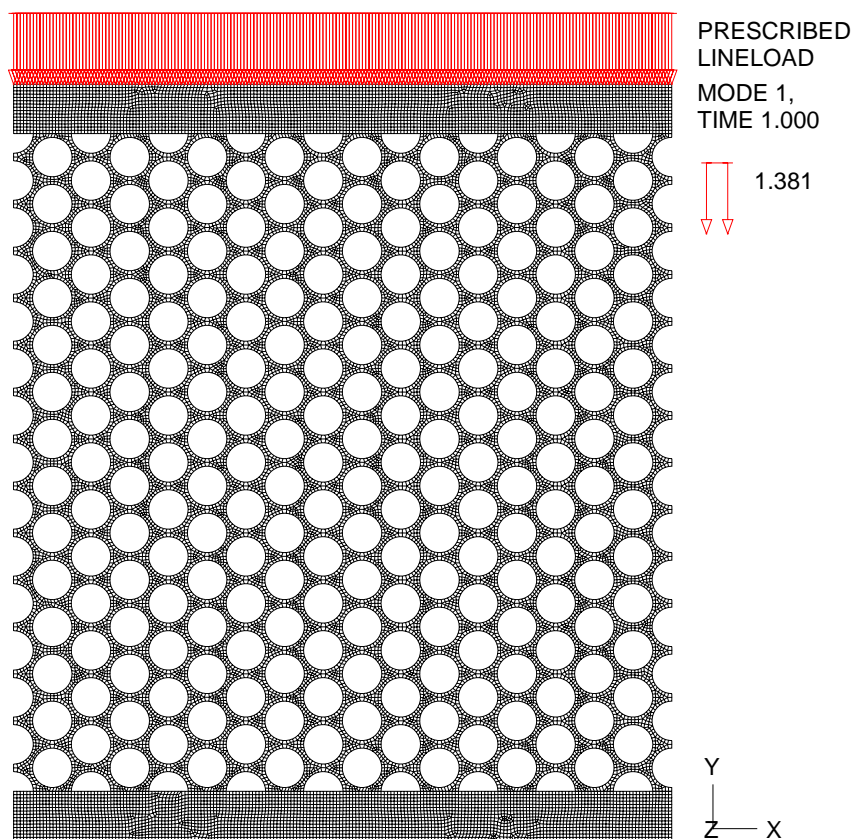
Materiál	Modul pružnosti E [MPa]	Poissonovo číslo ν [-]
plexisklo	3 000	0,4
ocel	210 000	0,3

Tabulka 3.2: Parametry materiálů použité při výpočtu

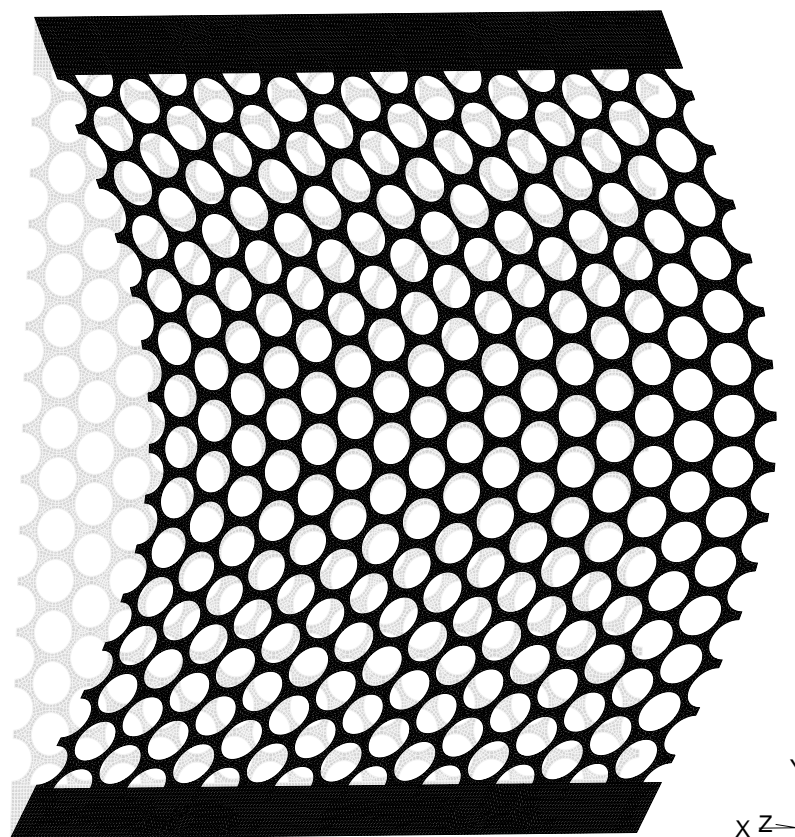
Konstrukce byla modelována jako tlustá deska se sítí tvořenou čtyřuzlovými prvky MITC,² které vycházejí z Mindlinovy deskové teorie (viz [18]). Formulace je založena na těchto dvou předpokladech:

- Normály ke střednicové rovině desky zůstávají rovinnými i po deformaci, nejsou však nezbytně kolmé ke střednicové rovině desky.
- Změna průhybu po tloušťce desky je vůči jeho hodnotě zanedbatelná, a tudíž je uvažována jako nulová.

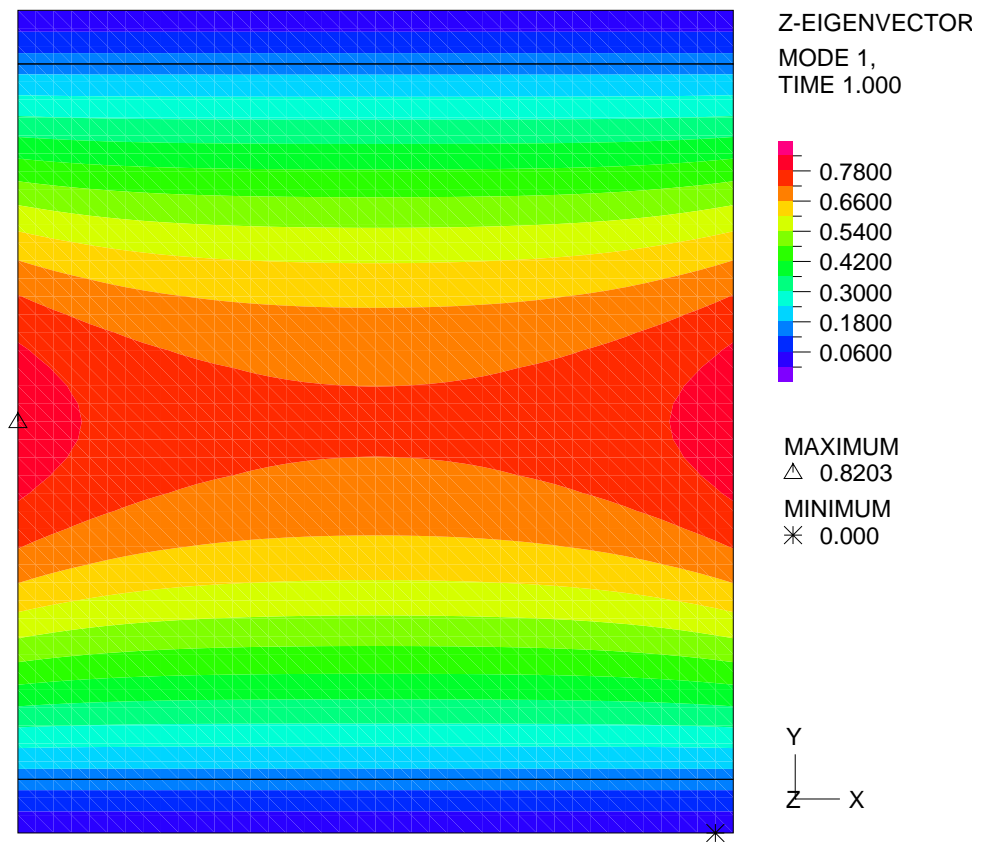
² V programu ADINA® je tento prvek označen SHELL, viz manuál [17].



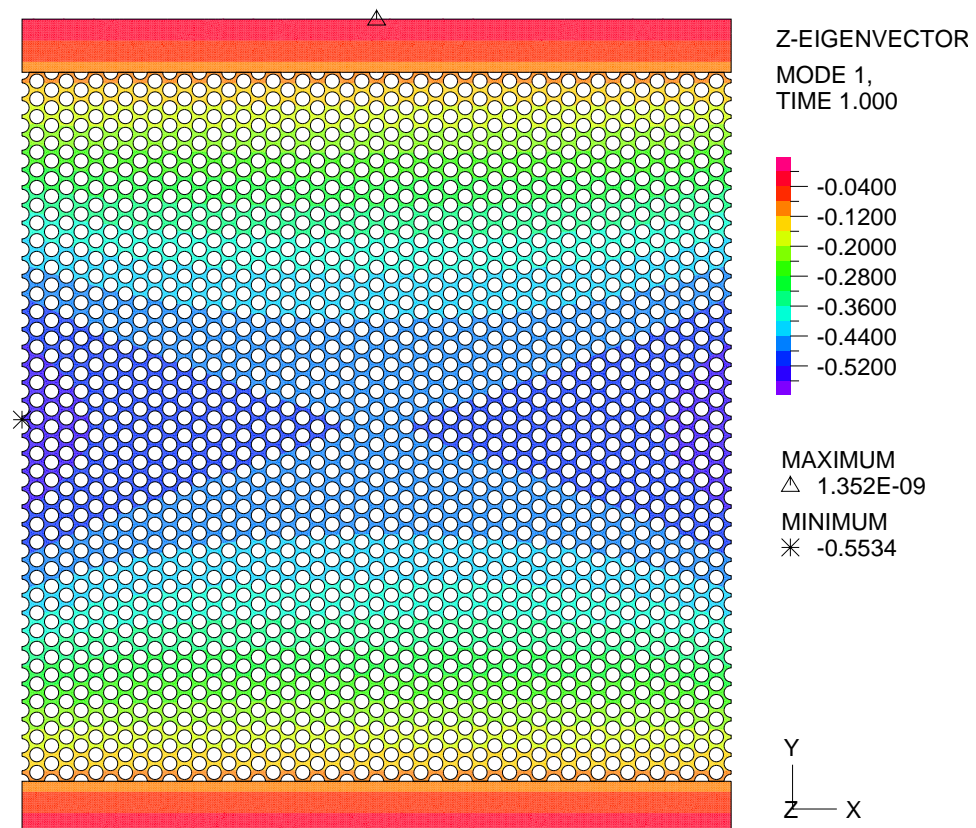
Obrázek 3.5: Numerický model zatížení desky odpovídající experimentu



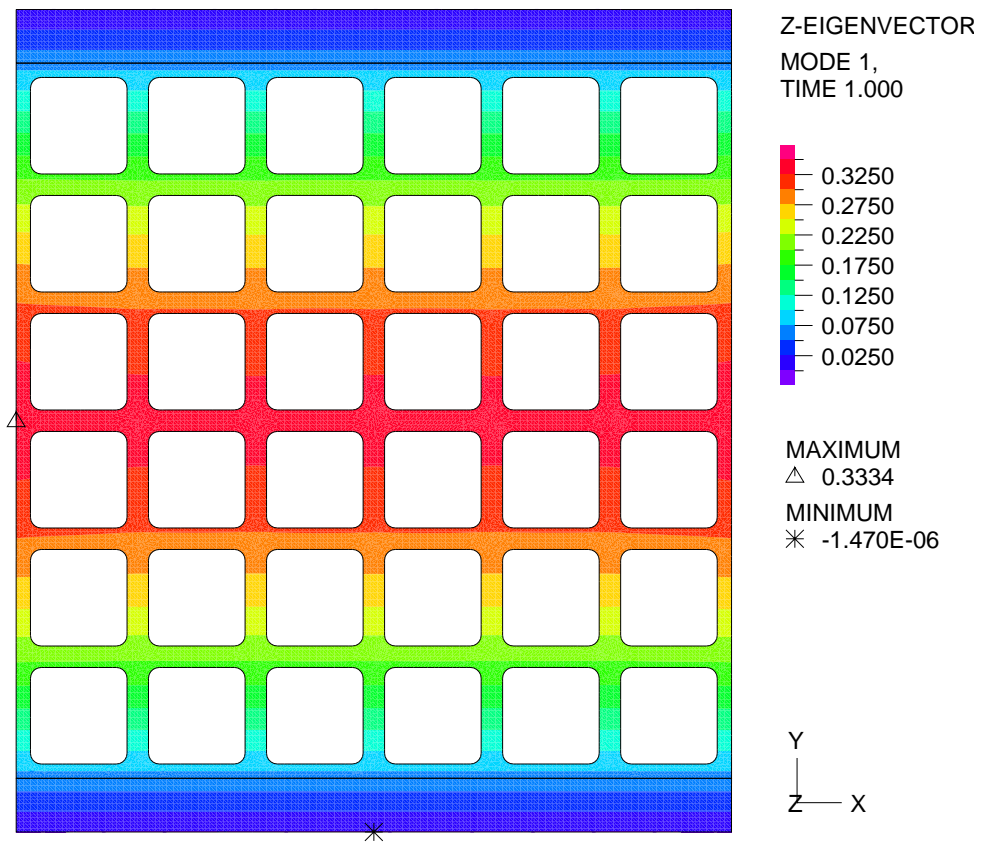
Obrázek 3.6: Tvar vybočení desky PWC 6-12



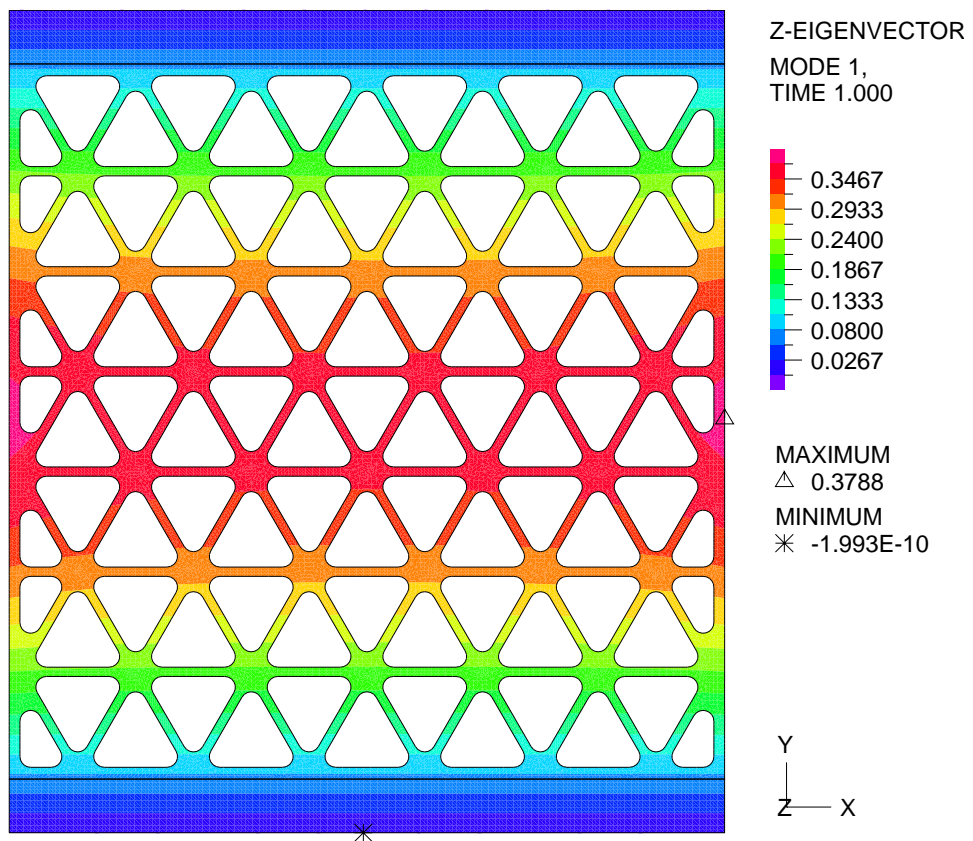
Obrázek 3.7: Vybočení plné desky o tloušťce 2 mm



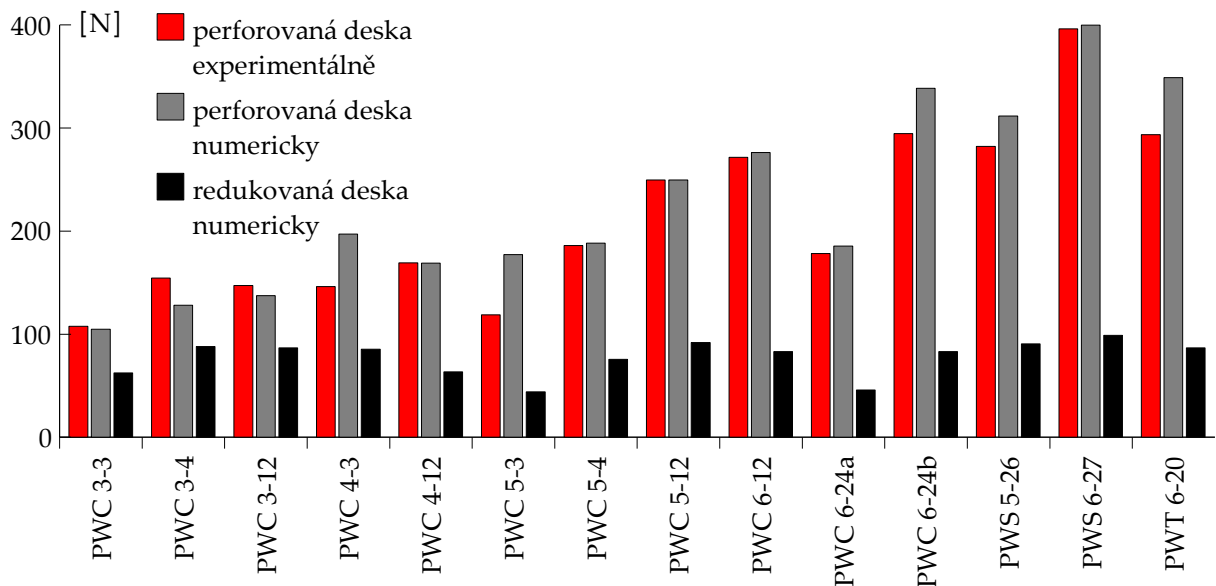
Obrázek 3.8: Vybočení perforované desky PWC 5-4



Obrázek 3.9: Vybočení perforované desky PWS 6-27



Obrázek 3.10: Vybočení perforované desky PWT 6-20



Obrázek 3.11: Graf kritického zatížení

V grafu 3.11 jsou červeně vyneseny experimentálně získané hodnoty kritických sil perforovaných desek F_{cr}^{exp} . Tyto hodnoty jsou porovnány s kritickým zatížením perforované desky F_{cr}^{num} (šedě) a redukované desky F_{cr}^{red} (černě) určené stabilitním výpočtem v programu ADINA®. Redukovanou deskou rozumíme plnou desku, která má sníženou tloušťku tak, aby celková hmotnost konstrukce zůstala zachována. Hodnoty kritických zatížení a jejich odchylka či poměr (pro porovnání efektivity perforace) jsou uvedeny v tabulce 3.3.

Označení perforované desky	Kritické síly					
	F_{cr}^{num} [N]	F_{cr}^{exp} [N]	η [%]	F_{cr}^{red} [N]	$F_{cr}^{num} / F_{cr}^{red}$ [-]	$F_{cr}^{exp} / F_{cr}^{red}$ [-]
PWC 3-3	104,8	107,7	2,73	62,6	1,68	1,72
PWC 3-4	128,1	154,4	20,52	88,1	1,45	1,75
PWC 3-12	137,5	147,4	7,24	86,8	1,58	1,70
PWC 4-3	197,2	146,3	25,80	85,5	2,31	1,71
PWC 4-12	169,1	169,3	0,14	63,6	2,66	2,66
PWC 5-3	177,3	118,8	33,01	44,1	4,02	2,69
PWC 5-4	188,3	186,0	1,23	75,8	2,49	2,46
PWC 5-12	249,7	249,7	0,01	92,0	2,71	2,71
PWC 6-12	276,2	271,6	1,66	83,0	3,33	3,27
PWC 6-24a	185,7	178,4	3,92	45,8	4,06	3,90
PWC 6-24b	338,7	294,6	13,02	83,0	4,08	3,55
PWS 5-26	311,8	282,3	9,46	90,7	3,44	3,11
PWS 6-27	427,4	396,4	7,25	98,9	4,32	4,01
PWT 6-20	349,1	293,6	15,89	86,8	4,02	3,38

Tabulka 3.3: Porovnání experimentálních a numerických kritických sil

Z hodnot v posledních dvou sloupcích tabulky 3.3 je zřejmé, že využití materiálu v perforovaných stěnách je až čtyřikrát efektivnější než u plných stěn o stejné hmotnosti. Ve čtvrtém sloupci jsou uvedeny odchylky experimentálních dat od numericky

určených kritických sil. U pěti ze čtrnácti zkoušených desek je chyba větší než deset procent. Důvodem těchto odchylek mohou být:³

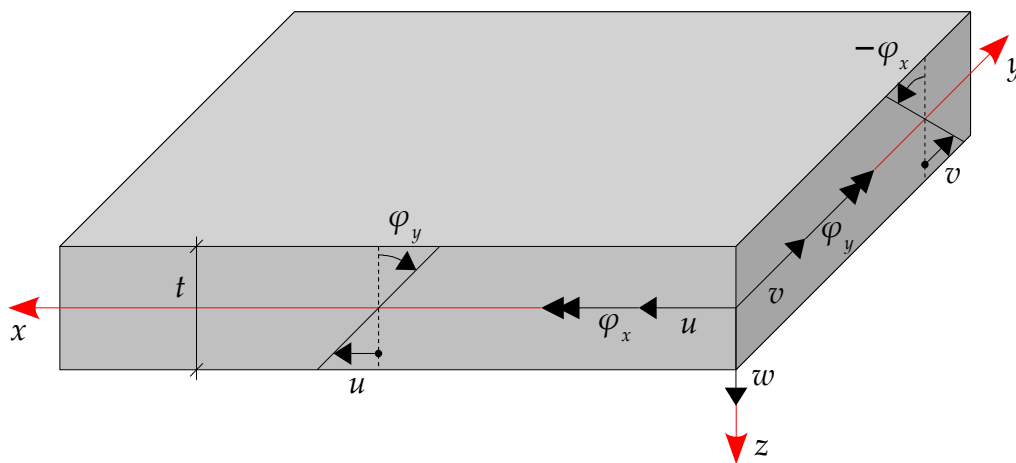
- odchylka zatížení od uvažovaného stavu (excentricita, nerovnoměrnost, viz obrázek 3.4b),
- geometrické imperfekce desky (tloušťka desky, velikost a rozmístění vylehčujících otvorů),
- nedostatečně tuhé spojení perforované desky s ocelovými okraji.

3.3 Základní vztahy pro homogenizované desky

Připomeňme, že principem homogenizace je nahrazení původní heterogenní konstrukce konstrukcí homogenní. Vztah pro kritické zatížení tedy odvodíme pro případ analýzy homogenní desky.

V tomto oddílu budou představeny základní vztahy pro výpočet kritické síly a zavedeny pojmy použité v dalším textu. Výsledné rovnice budou uváděny pro obecnější Mindlinovu teorii s příslušným zjednodušením pro analýzu kirchhoffovských desek. Detailní odvození těchto vztahů a jejich podrobnější diskuzi lze nalézt například v [19, 20].

3.3.1 Kinematické předpoklady a pole deformací



Obrázek 3.12: Kinematické předpoklady

Jak je zřejmé z obrázku 3.12, posunutí libovolného bodu o souřadnicích (x, y, z) lze vyjádřit vztahy

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \varphi_y(x, y)z, \\ v(x, y, z) &= -\varphi_x(x, y)z, \\ w(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \quad (3.1)$$

³Pokud by byla konstrukce modelována jako trojrozměrné těleso, pravděpodobně bychom získali ještě přesnější řešení. Nepředpokládám však, že chyba způsobená použitím Mindlinova deskového modelu je výrazná. Navíc by bylo 3D-modelování značně časově náročné.

kde osy x a y definují rovinu desky a osa z má směr normály desky. Symboly u , v a w označují posun daného bodu ve směru souřadných os, φ_x a φ_y mají význam pootočení střednicové roviny kolem příslušných os. Připomeňme, že v teorii tlustých desek jsou proměnné w , φ_x a φ_y uvažovány jako nezávislé, v případě tenkých desek jsou svázány vztahy

$$\varphi_x(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y}(x, y), \quad \varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x}(x, y). \quad (3.2)$$

Za předpokladu malých posunů u , v a w lze odvodit následující vztahy pro nenulové složky membránové deformace

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, z) &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} z = \kappa_x(x, y)z, \\ \varepsilon_y(x, y, z) &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} z = \kappa_y(x, y)z, \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) z = \kappa_{xy}(x, y)z, \end{aligned}$$

kde κ označuje (pseudo)křivost střednicové roviny desky. Pro další použití přepíšeme tyto rovnice do vektorového zápisu

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \kappa_x(x, y) \\ \kappa_y(x, y) \\ \kappa_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}(x, y) \end{Bmatrix}, \quad (3.3)$$

tedy

$$\varepsilon(x, y, z) = z\kappa(x, y). \quad (3.4)$$

Vztah pro smykové složky deformace lze napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_y(x, y) + \frac{\partial w}{\partial x}(x, y), \\ \gamma_{yz}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\varphi_x(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Pro případ tenkých desek (tedy platnosti vztahů (3.2)) jsou tyto složky nulové, zatímco vektor křivostí κ lze vyjádřit v závislosti na průhybu w jako

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x(x, y) \\ \kappa_y(x, y) \\ \kappa_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y) \end{Bmatrix}. \quad (3.5)$$

3.3.2 Fyzikální rovnice

V souladu s tradičním přístupem teorie desek [20] vycházíme z vrstvičkového modelu ohýbané desky. Za předpokladu, že normálové napětí σ_z v každé vrstvě je zanedbatelné,

můžeme v každé vrstvě uvažovat stav rovinné napjatosti. Při zanedbání počátečních deformací a předpokladu, že materiálové vlastnosti desky se po tloušťce nemění, můžeme psát vztah pro rovinnou napjatost ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(x, y) & L_{12}(x, y) & L_{16}(x, y) \\ L_{21}(x, y) & L_{22}(x, y) & L_{26}(x, y) \\ L_{61}(x, y) & L_{62}(x, y) & L_{66}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix},$$

kde indexy u matice materiálových vlastností se řídí zvyklostmi vektorového zápisu rovnic pružnosti (viz například [21]). Tedy

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = \mathbf{L}_m(x, y)\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z). \quad (3.6)$$

Obdobné vztahy platí i pro smykové složky

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}(x, y) \\ \tau_{yz}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{55}(x, y) & L_{54}(x, y) \\ L_{45}(x, y) & L_{44}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}(x, y) \\ \gamma_{yz}(x, y) \end{Bmatrix},$$

což ve vektorovém formátu zapíšeme jako

$$\boldsymbol{\tau}(x, y) = \mathbf{L}_s(x, y)\boldsymbol{\gamma}(x, y). \quad (3.7)$$

3.3.3 Měrné vnitřní síly

V analýze desek jsou často využívány měrné vnitřní síly namísto složek napětí. Měrné ohybové a kroučící momenty jsou definovány vztahy

$$\begin{Bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix} z \, dz, \quad (3.8)$$

kde t označuje tloušťku desky, viz obrázek 3.12. Tedy

$$\mathbf{m}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\sigma}(x, y, z) z \, dz. \quad (3.9)$$

Obdobným způsobem definujeme měrné posouvající síly

$$\mathbf{q}(x, y) = \begin{Bmatrix} q_x(x, y) \\ q_y(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz}(x, y) \\ \tau_{yz}(x, y) \end{Bmatrix} dz = \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\tau}(x, y) dz.$$

Vzhledem k zavedení měrných vnitřních sil je nutné příslušným způsobem modifikovat fyzikální rovnice. Dosazením fyzikálních rovnic pro membránové složky (3.6) do vztahu pro měrné momenty (3.9) získáváme výraz

$$\mathbf{m}(x, y) = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{L}_m(x, y)\boldsymbol{\kappa}(x, y)z^2 \, dz = \frac{t^3(x, y)}{12}\mathbf{L}_m(x, y)\boldsymbol{\kappa}(x, y) = \mathbf{D}_\kappa(x, y)\boldsymbol{\kappa}(x, y), \quad (3.10)$$

kde \mathbf{D}_κ je matice deskové tuhosti. V případě měrné posouvající síly platí obdobný vztah

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, y) &= k(x, y) \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{L}_s(x, y)\boldsymbol{\gamma}(x, y) \, dz = k(x, y)t(x, y)\mathbf{L}_s(x, y)\boldsymbol{\gamma}(x, y) \\ &= \mathbf{D}_\gamma(x, y)\boldsymbol{\gamma}(x, y), \end{aligned} \quad (3.11)$$

kde $k(x, y)$ je součinitel zohledňující vliv rozložení smykových napětí.

3.3.4 Princip virtuálních prací a podmínky rovnováhy

Z hlediska další analýzy i formulace homogenizačního problému má zásadní význam princip virtuálních prací. Uvažujme pro jednoduchost po obvodě vetknutou desku, charakterizovanou střednicovou plochou $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a zatíženou plošným spojitým zatížením o intenzitě \bar{p} . Princip virtuálních prací je v tomto případě vyjádřen následující rovností (viz např. [21, 20] pro detailnější odvození)

$$\int_{\Omega} \left(\delta \boldsymbol{\kappa}^T(x, y) \mathbf{m}(x, y) + \delta \boldsymbol{\gamma}^T(x, y) \mathbf{q}(x, y) \right) d\Omega = \int_{\Omega} \delta w(x, y) \bar{p}(x, y) d\Omega, \quad (3.12)$$

kteřá musí být splněna pro všechny kinematicky přípustné virtuální křivosti $\delta \boldsymbol{\kappa}$ a virtuální průhyby δw . Poznamenejme, že podmínka (3.12) je ekvivalentní dvěma momentovým a jedné silové podmínce rovnováhy

$$\frac{\partial m_x}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}(x, y) - q_x(x, y) = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial m_y}{\partial y}(x, y) - q_y(x, y) = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial q_y}{\partial y}(x, y) + \bar{p}(x, y) = 0. \quad (3.15)$$

Při analýze tenkých desek se výraz pro virtuální práci zjednodušuje na tvar

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\kappa}^T(x, y) \mathbf{m}(x, y) d\Omega = \int_{\Omega} \delta w(x, y) \bar{p}(x, y) d\Omega \quad (3.16)$$

a rovnice (3.13)–(3.15) se zredukuje na jednu silovou podmínku rovnováhy vyjádřenou v měrných momentech

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}(x, y) + \bar{p}(x, y) = 0. \quad (3.17)$$

3.3.5 Základní vztahy stabilitní analýzy

Předchozí rovnice byly odvozeny za předpokladů malých posunů v rovině desky u, v a malých průhybů kolmo na střednicovou rovinu w . Při analýze vybočení je však nezbytné uvažovat velké hodnoty průhybů w . Předpokládáme-li, že je deska ve střednicové rovině namáhána zatížením, které vyvozuje měrné normálové síly \bar{n}_x, \bar{n}_y a \bar{n}_{xy} , má silová podmínka rovnováhy (3.17) sestavená na deformované konstrukci tvar

$$\bar{n}_x(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) + 2 \bar{n}_{xy}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y) + \bar{n}_y(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) + \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}(x, y) + \bar{p}(x, y) = 0.$$

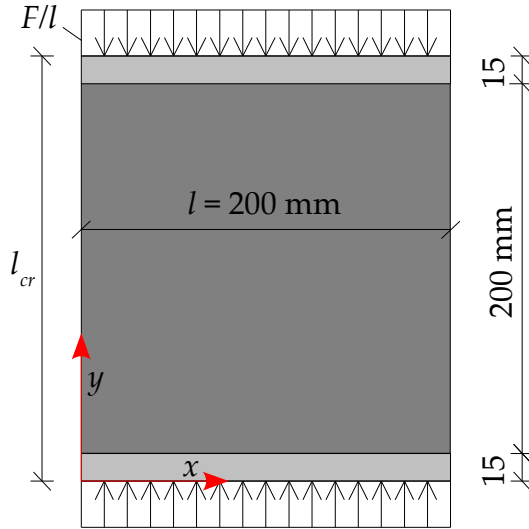
Podrobnější rozbor této rovnice lze nalézt například v [20], zde bude využita pouze pro výpočet kritického zatížení homogenní desky v jednoosém tlaku, viz pododíl 3.3.6.

3.3.6 Vztah pro kritické zatížení

Při určení hodnoty kritického zatížení vyjdeme z rovnice (3.18), popisující podmínku rovnováhy na deformované deskové konstrukci. Hodnoty měrných normálových sil jsou v tomto případě dány výrazy (viz obrázek 3.13)

$$\bar{n}_x(x, y) = 0, \quad \bar{n}_y(x, y) = -\frac{F}{l}, \quad \bar{n}_{xy}(x, y) = 0. \quad (3.19)$$

Vzhledem k působícímu zatížení a způsobu podepření konstrukce uvažujeme zjedno-



Obrázek 3.13: Schéma zatížení desky

dušeně vztah pro vybočení ve tvaru

$$w(x, y) = w_0 \sin\left(\frac{\pi y}{l_{cr}}\right).$$

Vypočítáme druhé derivace průhybu

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) = -w_0 \left(\frac{\pi}{l_{cr}}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{l_{cr}}\right), \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

a odtud určíme jednotlivé křivosti, viz (3.5),

$$\kappa_x(x, y) = 0, \quad \kappa_y(x, y) = w_0 \left(\frac{\pi}{l_{cr}}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{l_{cr}}\right), \quad \kappa_{xy}(x, y) = 0.$$

Z rovnice (3.10) vyjádříme měrné ohybové a kroucí momenty a jejich derivace

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 m}{\partial y^2}(x, y) = -(D_\kappa)_{22} w_0 \left(\frac{\pi}{l_{cr}}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi y}{l_{cr}}\right), \quad 2 \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

Dosazením do podmínek rovnováhy (3.18) získáváme rovnici

$$w_0 \left(\frac{\pi}{l_{cr}}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi y}{l_{cr}}\right) \left(\frac{F}{l} - (D_\kappa)_{22} \left(\frac{\pi}{l_{cr}}\right)^2\right) = 0,$$

ze které plyne hledaný vztah pro kritické zatížení

$$F_{cr} = l (D_\kappa)_{22} \left(\frac{\pi}{l_{cr}}\right)^2. \quad (3.20)$$

Prvek deskové matice tuhosti $(D_\kappa)_{22}$ určíme pomocí homogenizačních metod.

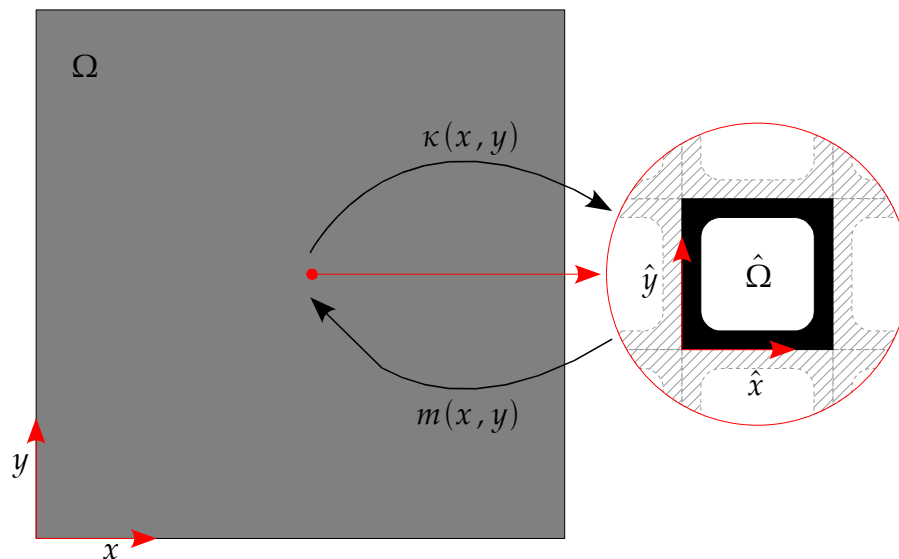
3.4 Homogenizace desek - obecné principy

Připomeňme, že v oddílu 3.2 byla perforovaná konstrukce analyzována jako celek se všemi geometrickými detaily. Tento postup se však stává výpočetně velmi náročným, především pokud je rozsáhlejší konstrukce perforována celou řadou malých otvorů. V tomto případě se jako velmi výhodné jeví použití homogenizačních metod, kdy nahradíme původní komplikovanou perforovanou desku deskou homogenní, jejíž vlastnosti v sobě zahrnují vliv tvaru jednotlivých otvorů a stupně perforace konstrukce.

V problému homogenizace tuhosti může být deska s periodickou strukturou uvažována jako:

- trojrozměrné těleso nebo může být její deformace popsána jako
- dvourozměrný deskový problém s použitím
 - Kirchhoffových předpokladů (pro tenkou desku) nebo
 - Mindlinova modelu (tlusté desky s vlivem zkosení).

Dvourozměrný problém je výpočetně efektivnější. V dalších oddílech jsou odvozeny vztahy pro homogenizaci desek pomocí kirchhoffovských a mindlinovských předpokladů a bude diskutována výstižnost výsledků vzhledem k experimentálním datům. Modelování trojrozměrné úlohy je značně náročné (především z hlediska generování sítě), a proto není v rámci této práce realizováno.



Obrázek 3.14: Schéma homogenizace deskové konstrukce

Z hlediska analýzy rozdělíme řešený problém na dvě úrovně:

- makroúroveň, která odpovídá analýze na úrovni desky Ω jako celku,
- mikroúroveň, popisující chování konstrukce na úrovni jednotkové buňky $\hat{\Omega}$.

Pro výstižnost tohoto řešení je nutno zajistit spolupůsobení mezi jednotlivými úrovněmi. Pokud je rozměr jednotkové buňky dostatečně malý vůči rozměrům konstrukce,

analýza uvedená v [22] ukazuje, že vhodným modelem na makroúrovni je model tenké desky, nezávisle na modelu použitým na mikroúrovni.⁴

Vlastní homogenizaci lze interpretovat názorným způsobem (viz též 2.1.3 pro obdobnou analýzu v případě prutové konstrukce):

- Každému materiálovému bodu $\boldsymbol{x} = \{x, y\}^T \in \Omega$ na makroúrovni přisoudíme jednotkovou buňku $\widehat{\Omega}$.
- Jednotkovou buňku „zatížíme“ makroskopickou (průměrnou) hodnotou křivosti $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{x}) = \{\kappa_x(\boldsymbol{x}), \kappa_y(\boldsymbol{x}), \kappa_{xy}(\boldsymbol{x})\}^T$, tj. specifikujeme kinematické okrajové podmínky na mikroúrovni tak, aby platilo

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\widehat{\Omega}|} \int_{\widehat{\Omega}} \hat{\boldsymbol{\kappa}}(\hat{\boldsymbol{x}}) d\widehat{\Omega}, \quad (3.21)$$

kde $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ označuje křivost v daném bodu jednotkové buňky $\hat{\boldsymbol{x}} = \{\hat{x}, \hat{y}\}^T \in \widehat{\Omega}$.

- V závislosti na předepsaných podmínkách určíme průběh měrných ohybových momentů $\hat{\boldsymbol{m}}$ na úrovni jednotkové buňky.
- Průměrná hodnota ohybových momentů

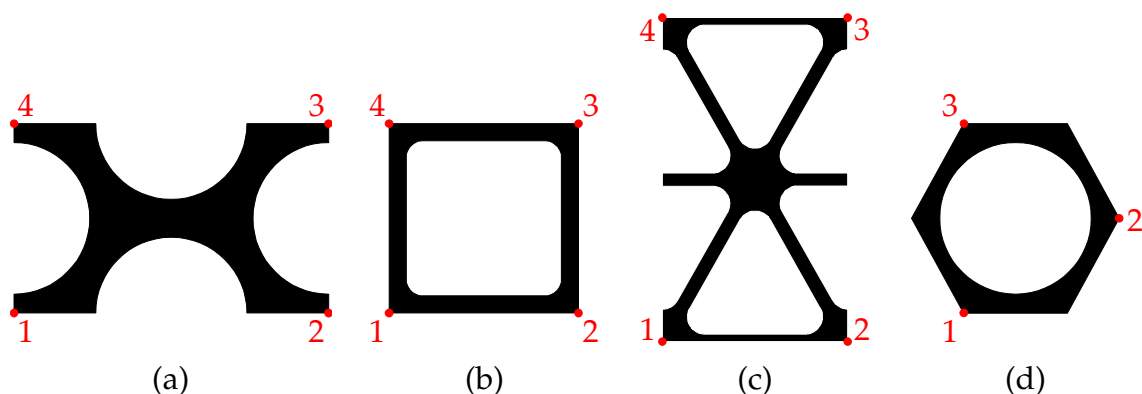
$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\widehat{\Omega}|} \int_{\widehat{\Omega}} \hat{\boldsymbol{m}}(\hat{\boldsymbol{x}}) d\widehat{\Omega} \quad (3.22)$$

pak definuje vztah na makroúrovni ve tvaru

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{D}_\kappa(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{x}), \quad (3.23)$$

kde \mathbf{D}_κ označuje homogenizovanou matici deskové tuhosti, porovnej s (3.10).

Poznamenejme, že vlastní výpočet průběhu ohybových momentů se liší v závislosti na tom, zda na mikroúrovni uvažujeme model tenké nebo tlusté desky. Tato analýza je předmětem následujících dvou oddílů.



Obrázek 3.15: Periodické jednotkové buňky

Na obrázku 3.15 jsou uvedeny periodické jednotkové buňky (PUC) pro kruhové, čtvercové a trojúhelníkové vylehčující otvory. První tři byly použity pro výpočet homogenizovaných vlastností, protože lze jednodušeji zadávat periodické okrajové podmínky pro průhyby do programu ADINA®, což bude zřejmé z následujících oddílů. Šestiúhelníková buňka byla použita pouze pro kontrolu u některých geometriích.

⁴Původní odvození uvedené v [22] je spíše založeno na intuitivních argumentech, rigorózní odvození v [19] je naopak značně technicky komplikované.

3.5 Homogenizace kirchhoffovských desek

V případě kirchhoffovských desek zatížených předepsanou makroskopickou hodnotou křivosti κ můžeme vyjádřit pootočení kolem jednotlivých os \hat{x} a \hat{y} ve tvaru⁵

$$\hat{\phi}_{\hat{x}}(\hat{x}) = \hat{\phi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}(\hat{x}) + \hat{\phi}_{\hat{x}}^*(\hat{x}), \quad \hat{\phi}_{\hat{y}}(\hat{x}) = \hat{\phi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}(\hat{x}) + \hat{\phi}_{\hat{y}}^*(\hat{x}), \quad (3.24)$$

kde $\hat{\phi}^{\text{hmg}}$ označuje pootočení, která by vznikla v homogenní jednotkové buňce pod účinky předepsané křivosti κ , zatímco $\hat{\phi}^*$ označují členy vzniklé v důsledku perforace na mikroúrovni. Protože jsou vylehčující otvory uspořádány periodicky, jsou navíc tyto členy $\widehat{\Omega}$ -periodické, tj. nabývají stejných hodnot na protilehlých stranách jednotkové buňky.

3.5.1 Zatěžování prostřednictvím pootočení řídicích bodů

V případě homogenní jednotkové buňky by pro zatížení makroskopickou křivostí byla v každém bodu $\hat{x} \in \widehat{\Omega}$ konstantní hodnota křivosti. Platily by tedy rovnosti, viz (3.3)

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) = \kappa_x = \text{konst}, \quad (3.25)$$

$$-\frac{\partial \hat{\phi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) = \kappa_y = \text{konst}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) - \frac{\partial \hat{\phi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) = \kappa_{xy} = \text{konst}. \quad (3.27)$$

Z podmínek (3.25) a (3.26) můžeme vyjádřit pootočení $\hat{\phi}^{\text{hmg}}$ ve tvaru

$$\hat{\phi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}(\hat{x}, \hat{y}) = \kappa_x \hat{x} + f_1(\hat{y}), \quad (3.28)$$

$$\hat{\phi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}(\hat{x}, \hat{y}) = -\kappa_y \hat{y} + f_2(\hat{x}). \quad (3.29)$$

Funkce f_1 a f_2 určíme z rovnice (3.27). Musí tedy splňovat

$$\frac{df_1}{d\hat{y}}(\hat{y}) - \frac{df_2}{d\hat{x}}(\hat{x}) = \kappa_{xy}. \quad (3.30)$$

Konkrétní volba funkcí f_1 a f_2 pak určuje způsob podepření buňky ve vlastních výpočtech. V našem případě volíme

$$f_1(\hat{y}) = \frac{1}{2} \kappa_{xy} \hat{y}, \quad f_2(\hat{x}) = -\frac{1}{2} \kappa_{xy} \hat{x}.$$

To vede k vyjádření jednotlivých pootočení ve tvaru

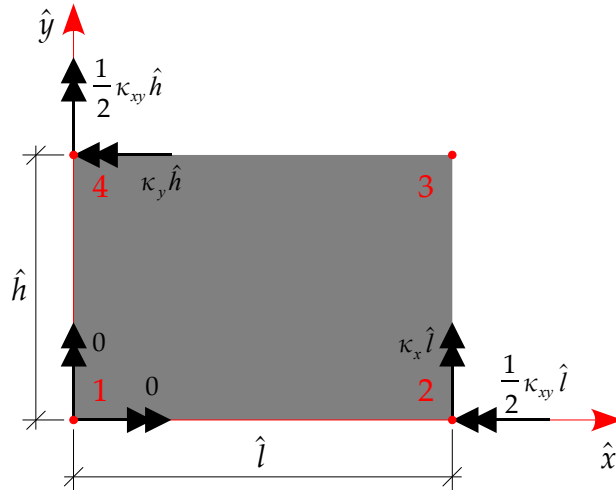
$$\hat{\phi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}(\hat{x}, \hat{y}) = \kappa_x \hat{x} + \frac{1}{2} \kappa_{xy} \hat{y}, \quad (3.31)$$

$$\hat{\phi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}(\hat{x}, \hat{y}) = -\kappa_y \hat{y} - \frac{1}{2} \kappa_{xy} \hat{x}. \quad (3.32)$$

⁵Tyto vztahy byly poprvé představeny v [23]. Jejich detailní odvození lze nalézt v [19]. Pro případ ohybu nosníků byly využity v předchozí kapitole.

Z hlediska dalších výpočtů se jeví výhodné parametrizovat průběh pootočení pomocí vybraných řídicích bodů **1,2** a **4**, viz obrázek 3.16. Vzhledem k předpokládanému průběhu pootočení, viz (3.31)–(3.32), můžeme hodnoty pootočení v těchto bodech vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_x^{\text{hmg}(1)} &= \hat{\phi}_x^{\text{hmg}}(0,0) = 0, & \hat{\phi}_y^{\text{hmg}(1)} &= \hat{\phi}_y^{\text{hmg}}(0,0) = 0, \\ \hat{\phi}_x^{\text{hmg}(2)} &= \hat{\phi}_x^{\text{hmg}}(\hat{l},0) = -\frac{1}{2}\kappa_{xy}\hat{l}, & \hat{\phi}_y^{\text{hmg}(2)} &= \hat{\phi}_y^{\text{hmg}}(\hat{l},0) = \kappa_x\hat{l}, \\ \hat{\phi}_x^{\text{hmg}(4)} &= \hat{\phi}_x^{\text{hmg}}(0,\hat{h}) = -\kappa_y\hat{h}, & \hat{\phi}_y^{\text{hmg}(4)} &= \hat{\phi}_y^{\text{hmg}}(0,\hat{h}) = \frac{1}{2}\kappa_{xy}\hat{h}.\end{aligned}$$



Obrázek 3.16: Předepsaná pootočení řídicích bodů PUC

To nám umožňuje přepsat rovnice (3.31)–(3.32) pro vztah mezi makroskopickou křivostí κ a pootočeními v bodech **2** a **4** ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{l}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\hat{h}} \\ 0 & -\frac{1}{\hat{l}} & \frac{1}{\hat{h}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_y^{\text{hmg}(2)} \\ \hat{\phi}_x^{\text{hmg}(2)} \\ \hat{\phi}_y^{\text{hmg}(4)} \\ \hat{\phi}_x^{\text{hmg}(4)} \end{Bmatrix}, \quad (3.33)$$

což budeme zkracovat jako

$$\kappa = B_{\hat{\phi}} \hat{r}_{\hat{\phi}}.$$

Inverzní vztah mezi uzlovými pootočeními a průměrnou křivostí pak má tvar

$$\hat{r}_{\hat{\phi}} = B_{\hat{\kappa}} \kappa, \quad (3.34)$$

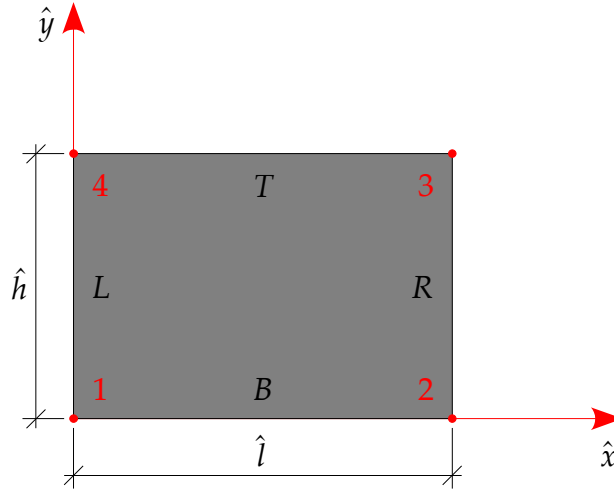
kde matice $B_{\hat{\kappa}}$ je definována vztahem

$$B_{\hat{\kappa}} = \begin{bmatrix} \hat{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\hat{l}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\hat{h}}{2} \\ 0 & -\hat{h} & \frac{\hat{l}}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Poznamenejme, že zatím byly specifikovány pouze podmínky pro pootočení $\hat{\phi}$. Aby bylo zabráněno posunutí celé konstrukce ve směru osy \hat{z} jako tuhého celku, předepíšeme například v bodu **1** nulovou hodnotu průhybu \hat{w} .

3.5.2 Periodické okrajové podmínky pro pootočení

Po specifikaci průběhu pootočení $\hat{\varphi}^{\text{hmg}}$ nyní přistoupíme k předepsání periodických okrajových podmínek. Pro tyto účely rozdělíme hranici řešené oblasti na čtyři části: horní T , spodní B , levou L a pravou R , viz obrázek 3.17.



Obrázek 3.17: Rozdělení hranice jednotkové buňky

Pro levou část hranice jednotkové buňky má pole rotací tvar

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_x^L(\hat{y}) &= \hat{\varphi}_x(0, \hat{y}) = \hat{\varphi}_x^{\text{hmg}}(0, \hat{y}) + \hat{\varphi}_x^*(0, \hat{y}), \\ \hat{\varphi}_y^L(\hat{y}) &= \hat{\varphi}_y(0, \hat{y}) = \hat{\varphi}_y^{\text{hmg}}(0, \hat{y}) + \hat{\varphi}_y^*(0, \hat{y}),\end{aligned}$$

zatímco pro pravou část platí

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_x^R(\hat{y}) &= \hat{\varphi}_x(\hat{l}, \hat{y}) = \hat{\varphi}_x^{\text{hmg}}(\hat{l}, \hat{y}) + \hat{\varphi}_x^*(\hat{l}, \hat{y}), \\ \hat{\varphi}_y^R(\hat{y}) &= \hat{\varphi}_y(\hat{l}, \hat{y}) = \hat{\varphi}_y^{\text{hmg}}(\hat{l}, \hat{y}) + \hat{\varphi}_y^*(\hat{l}, \hat{y}).\end{aligned}$$

Odečtením předchozích vztahů a uvážením identity $\hat{\varphi}^*(0, \hat{y}) = \hat{\varphi}^*(\hat{l}, \hat{y})$ dostáváme⁶

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_x^R(\hat{y}) - \hat{\varphi}_x^L(\hat{y}) &= \hat{\varphi}_x^{\text{hmg}}(\hat{l}, \hat{y}) + \hat{\varphi}_x^*(\hat{l}, \hat{y}) - \hat{\varphi}_x^{\text{hmg}}(0, \hat{y}) - \hat{\varphi}_x^*(0, \hat{y}) \\ &= \hat{\varphi}_x^{\text{hmg}}(\hat{l}, \hat{y}) - \hat{\varphi}_x^{\text{hmg}}(0, \hat{y}) = -\frac{1}{2}\kappa_{xy}\hat{l} = \hat{\varphi}_x^{(2)}.\end{aligned}$$

Můžeme tedy psát

$$\hat{\varphi}_x^R(\hat{y}) = \hat{\varphi}_x^L(\hat{y}) + \hat{\varphi}_x^{(2)}. \quad (3.36)$$

Pro pootočení $\hat{\varphi}_y$ platí obdobný vztah

$$\hat{\varphi}_y^R(\hat{y}) - \hat{\varphi}_y^L(\hat{y}) = \hat{\varphi}_y(\hat{l}, \hat{y}) - \hat{\varphi}_y(0, \hat{y}) = \kappa_x\hat{l} = \hat{\varphi}_y^{(2)},$$

⁶Pro úplnost poznamenejme, že fluktuující části polí pootočení $\hat{\varphi}^*$ jsou homogenizačním problémem určeny až na libovolnou konstantu. V našem případě tuto konstantu určíme podmínkou v bodu 1

$$\hat{\varphi}^{*(1)} = \hat{\varphi}^*(0, 0) = 0.$$

Z podmínek periodicity vyplývá, že tato hodnota fluktuujících složek rotací platí i pro zbývající body 2–4. Proto v těchto bodech můžeme psát $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^{\text{hmg}}$.

tedy

$$\hat{\phi}_y^R(\hat{y}) = \hat{\phi}_y^L(\hat{y}) + \hat{\phi}_y^{(2)}. \quad (3.37)$$

Obdobnou analýzou pro horní a dolní část hranice jednotkové buňky $\hat{\Omega}$ získáváme vztahy

$$\hat{\phi}_x^T(\hat{x}) = \hat{\phi}_x^B(\hat{x}) + \hat{\phi}_x^{(4)}, \quad \hat{\phi}_y^T(\hat{x}) = \hat{\phi}_y^B(\hat{x}) + \hat{\phi}_y^{(4)}. \quad (3.38)$$

Shrneme-li důsledky předchozích úprav a odvození, deformační stav příslušný dané hodnotě makroskopické křivosti κ můžeme předepsat tak, že v bodu **1** jednotkové buňky podepřeme všechny stupně volnosti \hat{w} , $\hat{\phi}_x$ a $\hat{\phi}_y$, předepíšeme hodnoty rotací v uzlech **2** a **4** na základě vztahu (3.34) a pootočení na protějších hranách svážeme podmínkami (3.36), (3.37) a (3.38). Poznamenejme, že pro průhyby \hat{w} žádné další podmínky nepotřebujeme, protože v případě analýzy tenké desky jsou s pootočeními $\hat{\phi}_x$ a $\hat{\phi}_y$ svázány vztahy (3.2).

3.5.3 Průměrné hodnoty měrných momentů

Posledním krokem homogenizačního procesu je určení hodnoty měrných ohybových a krouticích momentů. V tomto případě opět vyjdeme z principu virtuálních prací, tentokrát psaného na úrovni jednotkové buňky $\hat{\Omega}$. Ten má v tomto případě tvar

$$\int_{\hat{\Omega}} \delta \hat{\kappa}(\hat{x})^T \hat{m}(\hat{x}) d\hat{\Omega} = 0,$$

kde křivost $\hat{\kappa}$ vyplývá z volby pole pootočení ve tvaru (3.24). Pro další analýzu rozdělíme pole křivostí na průměrnou část, odpovídající předepsané hodnotě $\kappa(x)$, a na fluktuující část $\hat{\kappa}^*(\hat{x})$

$$\hat{\kappa}(\hat{x}) = \kappa(x) + \hat{\kappa}^*(\hat{x}).$$

Obdobným způsobem můžeme provést rozdělení měrných momentů

$$\hat{m}(\hat{x}) = m(x) + \hat{m}^*(\hat{x}).$$

Dostáváme tedy

$$\int_{\hat{\Omega}} \delta \hat{\kappa}(\hat{x})^T \hat{m}(\hat{x}) d\hat{\Omega} = \int_{\hat{\Omega}} (\delta \kappa(x) + \delta \hat{\kappa}^*(\hat{x}))^T (m(x) + \hat{m}^*(\hat{x})) d\hat{\Omega}.$$

Uvážením

$$\int_{\hat{\Omega}} \hat{\kappa}^*(\hat{x}) d\hat{\Omega} = \mathbf{0}, \quad \int_{\hat{\Omega}} \hat{m}^*(\hat{x}) d\hat{\Omega} = \mathbf{0}, \quad \int_{\hat{\Omega}} \hat{\kappa}^*(\hat{x})^T \hat{m}^*(\hat{x}) d\hat{\Omega} = 0,$$

získáváme vztah mezi makroskopickými veličinami κ a m a odpovídajícími veličinami na mikroúrovni

$$\int_{\hat{\Omega}} \delta \hat{\kappa}(\hat{x})^T \hat{m}(\hat{x}) d\hat{\Omega} = |\hat{\Omega}| \delta \kappa(x)^T m(x),$$

kde $|\hat{\Omega}|$ označuje plochu jednotkové buňky. Nyní přistoupíme k vyjádření předchozích vztahů pomocí předepsaných uzlových sil. Platí

$$\delta \hat{r}_\phi^T \hat{R}_M = \int_{\hat{\Omega}} \delta \hat{\kappa}(\hat{x})^T \hat{m}(\hat{x}) d\hat{\Omega} = |\hat{\Omega}| \delta \kappa(x)^T m(x),$$

kde $\hat{\mathbf{r}}_\phi$ je vektor předepsaných uzlových rotací (viz (3.34)), vektor $\hat{\mathbf{R}}_{\hat{M}}$ označuje vektor reakcí v uzlech **2** a **4**, ve kterých byly předepsány hodnoty uzlových rotací,

$$\hat{\mathbf{R}}_{\hat{M}} = \begin{Bmatrix} \hat{M}_{\hat{x}}^{(2)} \\ \hat{M}_{\hat{y}}^{(2)} \\ \hat{M}_{\hat{x}}^{(4)} \\ \hat{M}_{\hat{y}}^{(4)} \end{Bmatrix}.$$

Uvážením vztahu mezi makroskopickou křivostí κ a rotacemi řídicích uzlů $\hat{\mathbf{r}}_\phi$ dostáváme

$$\delta\kappa(\mathbf{x})^\top \mathbf{B}_\kappa^\top \hat{\mathbf{R}}_{\hat{M}} = \hat{l}\hat{h}\delta\kappa(\mathbf{x})^\top \mathbf{m}(\mathbf{x}),$$

průměrné hodnoty ohybových a krouticích momentů lze tedy určit přímo z hodnot uzlových reakcí jako

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\hat{l}\hat{h}} \mathbf{B}_\kappa^\top \hat{\mathbf{R}}_{\hat{M}},$$

tedy

$$\begin{Bmatrix} m_x(\mathbf{x}) \\ m_y(\mathbf{x}) \\ m_{xy}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{h}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\hat{l}} \\ 0 & -\frac{1}{2\hat{h}} & \frac{1}{2\hat{l}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{\hat{x}}^{(2)} \\ \hat{M}_{\hat{y}}^{(2)} \\ \hat{M}_{\hat{x}}^{(4)} \\ \hat{M}_{\hat{y}}^{(4)} \end{Bmatrix}. \quad (3.39)$$

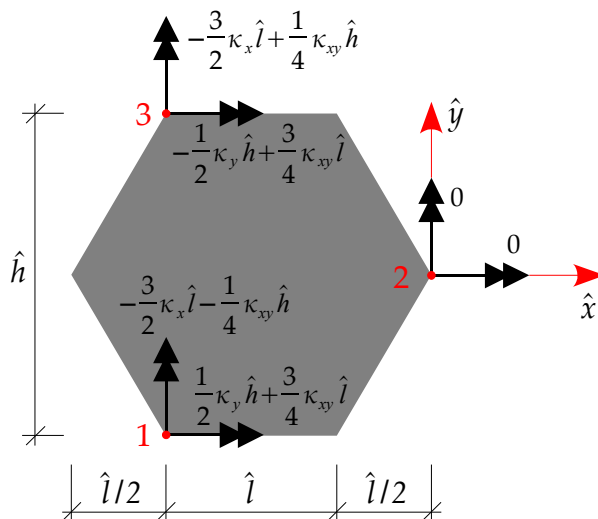
3.5.4 Homogenizační vztahy pro šestiúhelníkovou PUC

Obdélníková periodická buňka, která byla použita v předchozím textu, je nejvýhodnější jednotkovou buňkou pro formulaci podmínek periodicity. Nejmenší jednotkovou buňkou pro kruhové vylehčení je však šestiúhelník.⁷ Tato buňka byla použita pro kontrolu některých výsledků, a proto pro ni také odvodíme homogenizační vztahy.

Nejprve vyjádříme ze vztahů (3.31) a (3.32) pootočení řídicích bodů (viz obrázek 3.18)

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}(1)} &= \hat{\phi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}\left(-\frac{3}{2}\hat{l}, -\frac{1}{2}\hat{h}\right) = \frac{1}{2}\kappa_y\hat{h} + \frac{3}{4}\kappa_{xy}\hat{l}, \\ \hat{\phi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}(1)} &= \hat{\phi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}\left(-\frac{3}{2}\hat{l}, -\frac{1}{2}\hat{h}\right) = -\frac{3}{2}\kappa_x\hat{l} - \frac{1}{4}\kappa_{xy}\hat{h}, \\ \hat{\phi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}(2)} &= \hat{\phi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}(0, 0) = 0, \\ \hat{\phi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}(2)} &= \hat{\phi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}(0, 0) = 0, \\ \hat{\phi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}(3)} &= \hat{\phi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}\left(-\frac{3}{2}\hat{l}, \frac{1}{2}\hat{h}\right) = -\frac{1}{2}\kappa_y\hat{h} + \frac{3}{4}\kappa_{xy}\hat{l}, \\ \hat{\phi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}(3)} &= \hat{\phi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}\left(-\frac{3}{2}\hat{l}, \frac{1}{2}\hat{h}\right) = -\frac{3}{2}\kappa_x\hat{l} + \frac{1}{4}\kappa_{xy}\hat{h}. \end{aligned}$$

⁷ Pro trojúhelníkové perforace je nejmenší jednotkovou buňkou kosočtverec. Rovnice pro homogenizaci bychom získali redukcí vztahů pro šestiúhelník.



Obrázek 3.18: Předepsaná pootočení řídicích bodů šestiúhelníkové PUC

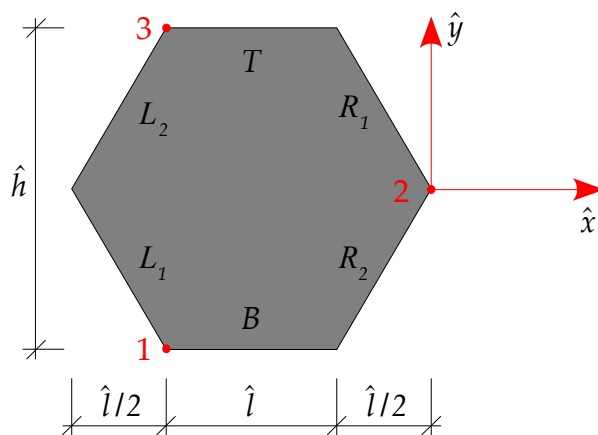
Vztah mezi uzlovými pootočeními a průměrnou křivostí pak můžeme vyjádřit pomocí maticového zápisu takto

$$\begin{Bmatrix} \hat{\varphi}_y^{\text{hmg}(1)} \\ \hat{\varphi}_x^{\text{hmg}(1)} \\ \hat{\varphi}_y^{\text{hmg}(3)} \\ \hat{\varphi}_x^{\text{hmg}(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\hat{l} & 0 & -\frac{1}{4}\hat{h} \\ 0 & \frac{1}{2}\hat{h} & \frac{3}{4}\hat{l} \\ -\frac{3}{2}\hat{l} & 0 & \frac{1}{4}\hat{h} \\ 0 & -\frac{1}{2}\hat{h} & \frac{3}{4}\hat{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

nebo ve zkráceném tvaru jako

$$\hat{\mathbf{r}}_{\hat{\varphi}} = \mathbf{B}_{\hat{\kappa}} \boldsymbol{\kappa}.$$

Nyní svážeme protilehlé strany periodickými okrajovými podmínkami. Rozdělení a označení hranice šestiúhelníkové buňky je zřejmé z obrázku 3.19.



Obrázek 3.19: Rozdělení hranice šestiúhelníkové PUC

Vyjádříme rotace pro body pravé horní a levé dolní hranice

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_x^{R_1}(\hat{x}^{R_1}, \hat{y}^{R_1}) &= \hat{\phi}_x^{\text{hmg}}(\hat{x}^{R_1}, \hat{y}^{R_1}) + \hat{\phi}_x^*(\hat{x}^{R_1}, \hat{y}^{R_1}), \\ \hat{\phi}_y^{R_1}(\hat{x}^{R_1}, \hat{y}^{R_1}) &= \hat{\phi}_y^{\text{hmg}}(\hat{x}^{R_1}, \hat{y}^{R_1}) + \hat{\phi}_y^*(\hat{x}^{R_1}, \hat{y}^{R_1}), \\ \hat{\phi}_x^{L_1}(\hat{x}^{R_1} - \frac{3\hat{l}}{2}, \hat{y}^{R_1} - \frac{\hat{h}}{2}) &= \hat{\phi}_x^{\text{hmg}}(\hat{x}^{R_1} - \frac{3\hat{l}}{2}, \hat{y}^{R_1} - \frac{\hat{h}}{2}) + \hat{\phi}_x^*(\hat{x}^{R_1} - \frac{3\hat{l}}{2}, \hat{y}^{R_1} - \frac{\hat{h}}{2}), \\ \hat{\phi}_y^{L_1}(\hat{x}^{R_1} - \frac{3\hat{l}}{2}, \hat{y}^{R_1} - \frac{\hat{h}}{2}) &= \hat{\phi}_y^{\text{hmg}}(\hat{x}^{R_1} - \frac{3\hat{l}}{2}, \hat{y}^{R_1} - \frac{\hat{h}}{2}) + \hat{\phi}_y^*(\hat{x}^{R_1} - \frac{3\hat{l}}{2}, \hat{y}^{R_1} - \frac{\hat{h}}{2}).\end{aligned}$$

Odečtením předchozích vztahů a uvážením $\hat{\phi}^*(\hat{x}^{R_1}, \hat{y}^{R_1}) = \hat{\phi}^*(\hat{x}^{R_1} - \frac{3\hat{l}}{2}, \hat{y}^{R_1} - \frac{\hat{h}}{2})$ dostáváme po několika úpravách

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_x^{R_1}(\hat{x}^{R_1}, \hat{y}^{R_1}) - \hat{\phi}_x^{L_1}(\hat{x}^{R_1} - \frac{3\hat{l}}{2}, \hat{y}^{R_1} - \frac{\hat{h}}{2}) &= \hat{\phi}_x^{\text{hmg}}(\hat{x}^{R_1}, \hat{y}^{R_1}) - \hat{\phi}_x^{\text{hmg}}(\hat{x}^{R_1} - \frac{3\hat{l}}{2}, \hat{y}^{R_1} - \frac{\hat{h}}{2}) \\ &= -\frac{1}{2}\kappa_y\hat{h} - \frac{3}{4}\kappa_{xy}\hat{l} = -\hat{\phi}_x^{(1)}.\end{aligned}$$

Můžeme tedy psát

$$\hat{\phi}_x^{R_1} = \hat{\phi}_x^{L_1} - \hat{\phi}_x^{(1)}.$$

Pro pootočení $\hat{\phi}_y$ platí obdobný vztah

$$\hat{\phi}_y^{R_1} = \hat{\phi}_y^{L_1} - \hat{\phi}_y^{(1)}.$$

Stejným postupem získáváme vztahy pro ostatní hranice jednotkové buňky $\hat{\Omega}$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_x^{R_2} &= \hat{\phi}_x^{L_2} - \hat{\phi}_x^{(3)}, \\ \hat{\phi}_y^{R_2} &= \hat{\phi}_y^{L_2} - \hat{\phi}_y^{(3)}, \\ \hat{\phi}_x^T &= \hat{\phi}_x^B + \hat{\phi}_x^{(3)} - \hat{\phi}_x^{(1)}, \\ \hat{\phi}_y^T &= \hat{\phi}_y^B + \hat{\phi}_y^{(3)} - \hat{\phi}_y^{(1)}.\end{aligned}$$

Zbývá určit průměrné hodnoty měrných momentů z hodnot uzlových reakcí podle vztahu

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \frac{2}{3\hat{l}\hat{h}}\mathbf{B}_\kappa^T \hat{\mathbf{R}}_{\hat{M}},$$

což po úpravách můžeme zapsat takto

$$\left\{ \begin{array}{l} m_x(\mathbf{x}) \\ m_y(\mathbf{x}) \\ m_{xy}(\mathbf{x}) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{1}{\hat{h}} & 0 & -\frac{1}{\hat{h}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3\hat{l}} & 0 & -\frac{1}{3\hat{l}} \\ -\frac{1}{6\hat{l}} & \frac{1}{2\hat{h}} & \frac{1}{6\hat{l}} & \frac{1}{2\hat{h}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \hat{M}_x^{(1)} \\ \hat{M}_y^{(1)} \\ \hat{M}_x^{(3)} \\ \hat{M}_y^{(3)} \end{array} \right\}.$$

Deskové tuhosti získané homogenizací obdélníkové a šestiúhelníkové periodické buňky se shodují, a proto jsou v následujícím pododdílu uvedeny pouze příklady modelování obdélníkové buňky.

3.5.5 Numerické modelování kirchhoffovských desek

Předchozí vztahy jsou velmi vhodné pro numerické modelování na úrovni jednotkové buňky metodou konečných prvků. Všechny výsledky prezentované v této studii byly získány pomocí komerčního konečněprvkového programu ADINA®. Pro modelování kirchhoffovských desek byl použit tříuzlový prvek DKT⁸ (viz [24] pro další informace). Okrajové podmínky byly do programu zavedeny pomocí svázání příslušných pootočení příkazem *constraint equation*. Při výpočtech bylo uvažováno lineárně pružné chování materiálu.

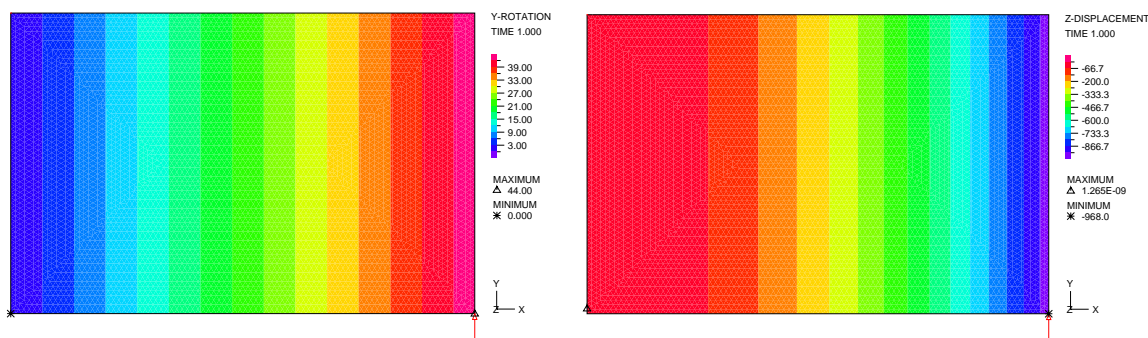
Správnost odvozených homogenizačních vztahů lze ověřit na homogenní obdélníkové buňce. Pro tuto buňku s rozměry $\hat{l} \times \hat{h} = 44 \times 28,5$ mm a tloušťkou $t = 5,89$ mm byly uvažovány materiálové jako $E = 3\,000$ MPa a $\nu = 0,4$.

Tuto buňku „zatížíme“ třemi makroskopickými křivostmi

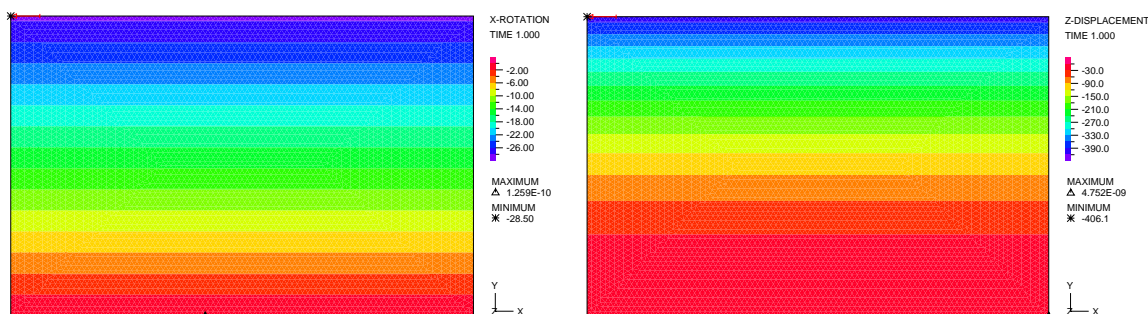
$$\kappa^x = \{1; 0; 0\}^T, \quad \kappa^y = \{0; 1; 0\}^T, \quad \kappa^{xy} = \{0; 0; 1\}^T,$$

prostřednictvím pootočení řídicích bodů dle obrázku 3.16, a na hranách předepíšeme podmínky periodicity (viz pododíl 3.5.2).

Na obrázcích 3.20–3.22 je vykreslena odezva buňky odpovídající jednotlivým zatěžovacím stavům.



Obrázek 3.20: Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^x = \{1; 0; 0\}^T$

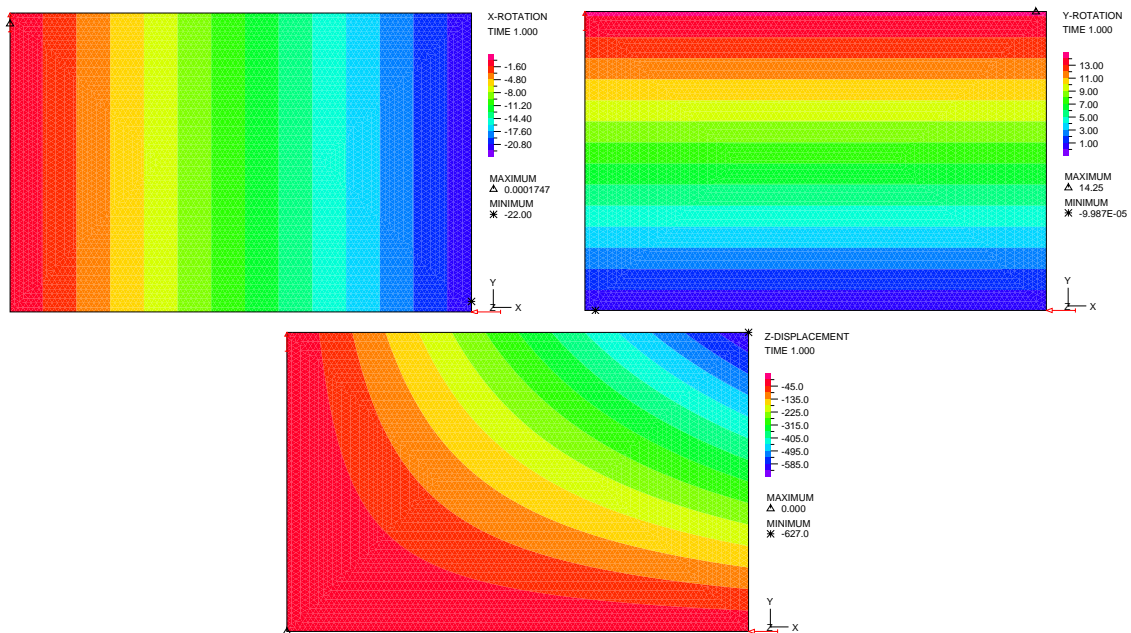


Obrázek 3.21: Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

Vektory průměrných momentů m^x , m^y a m^{xy} (viz (3.39)) pak umožňují sestavit homogenizovanou matici deskové tuhosti

$$D_\kappa = \begin{bmatrix} m_x^x & m_y^x & m_{xy}^x \\ m_x^y & m_y^y & m_{xy}^y \\ m_x^{xy} & m_y^{xy} & m_{xy}^{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D_\kappa)_{11} & (D_\kappa)_{12} & (D_\kappa)_{13} \\ (D_\kappa)_{21} & (D_\kappa)_{22} & (D_\kappa)_{23} \\ (D_\kappa)_{31} & (D_\kappa)_{32} & (D_\kappa)_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60,81 & 24,33 & 0 \\ 24,33 & 60,81 & 0 \\ 0 & 0 & 18,17 \end{bmatrix}.$$

⁸ V programu ADINA® je tento prvek označen PLATE, viz manuál [17].



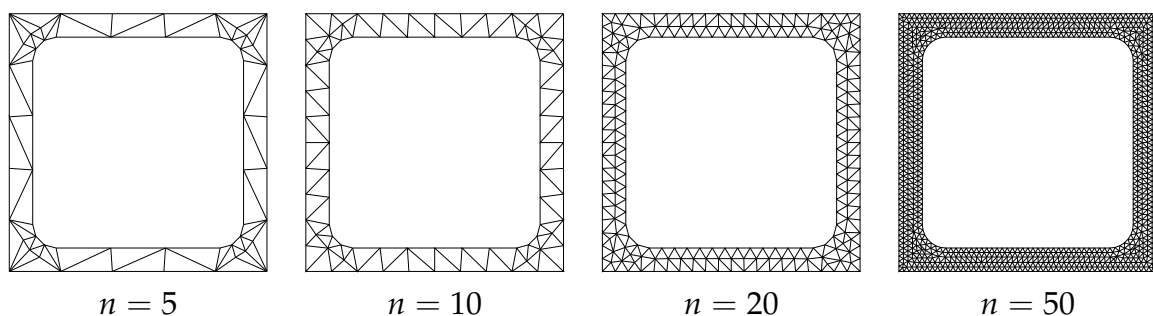
Obrázek 3.22: Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^{xy} = \{0; 0; 1\}^T$

Protože se jedná o homogenní buňku, lze určit jednotlivé členy deskové matice tuhosti také podle následujících vztahů

$$D_{\kappa} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60,81 & 24,33 & 0 \\ 24,33 & 60,81 & 0 \\ 0 & 0 & 18,24 \end{bmatrix} \text{ Nm.}$$

Porovnáním těchto dvou matic tuhosti je zřejmé, že odezva pro zatížení makroskopickými křivostmi κ_x a κ_y , určená pomocí navrženého homogenizačního postupu, odpovídá přesné hodnotě. Při zatížení křivostí κ_{xy} již použitý konečný prvek (DKT) není schopen poskytnout přesné řešení, chyba 0,5% je ale zanedbatelná. Tuto chybu lze minimalizovat použitím jemnější sítě.

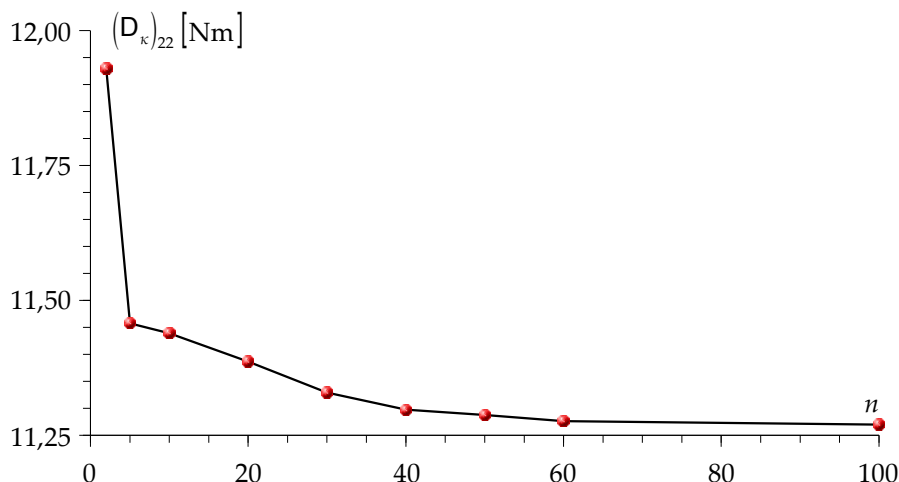
V dalším kroku přistoupíme k výpočtu požadovaného členu homogenizované matice tuhosti $(D_{\kappa})_{22}$ pro čtrnáct různých geometrií otvorů. Pro jednotlivé geometrické varianty bylo použito označení $PW\alpha\beta\gamma$. Jednotkové buňky byly zatěžovány pouze křivostí $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$. Pro ověření výstižnosti numerických hodnot získaných metodou konečných prvků byla provedena série výpočtů na sítích konečných prvků se vzrůstající hustotou sítě pro jednotkovou buňku PWS 6-27 (viz obrázek 3.23).



Obrázek 3.23: Příklady sítí konečných prvků (n značí počet intervalů na straně PUC)

Závislost relevantního členu homogenizované matice tuhosti na jemnosti sítě konečných prvků je uvedena na následujícím obrázku. V daném případě byl jako ukazatel

jemnosti sítě zvolen počet intervalů na jedné straně čtvercové buňky. Jak je zřejmé z konvergenčního grafu na obrázku 3.24, síť konečných prvků odpovídající rozdělení strany na 40 dílků, což odpovídá délce strany prvku 0,825 mm, dává výsledky s dostatečnou přesností (odchylka od ustálené hodnoty je 0,1%). Následující výpočty jsou prováděny na sítích konečných prvků s rozměrem hrany prvku cca 0,5 mm.



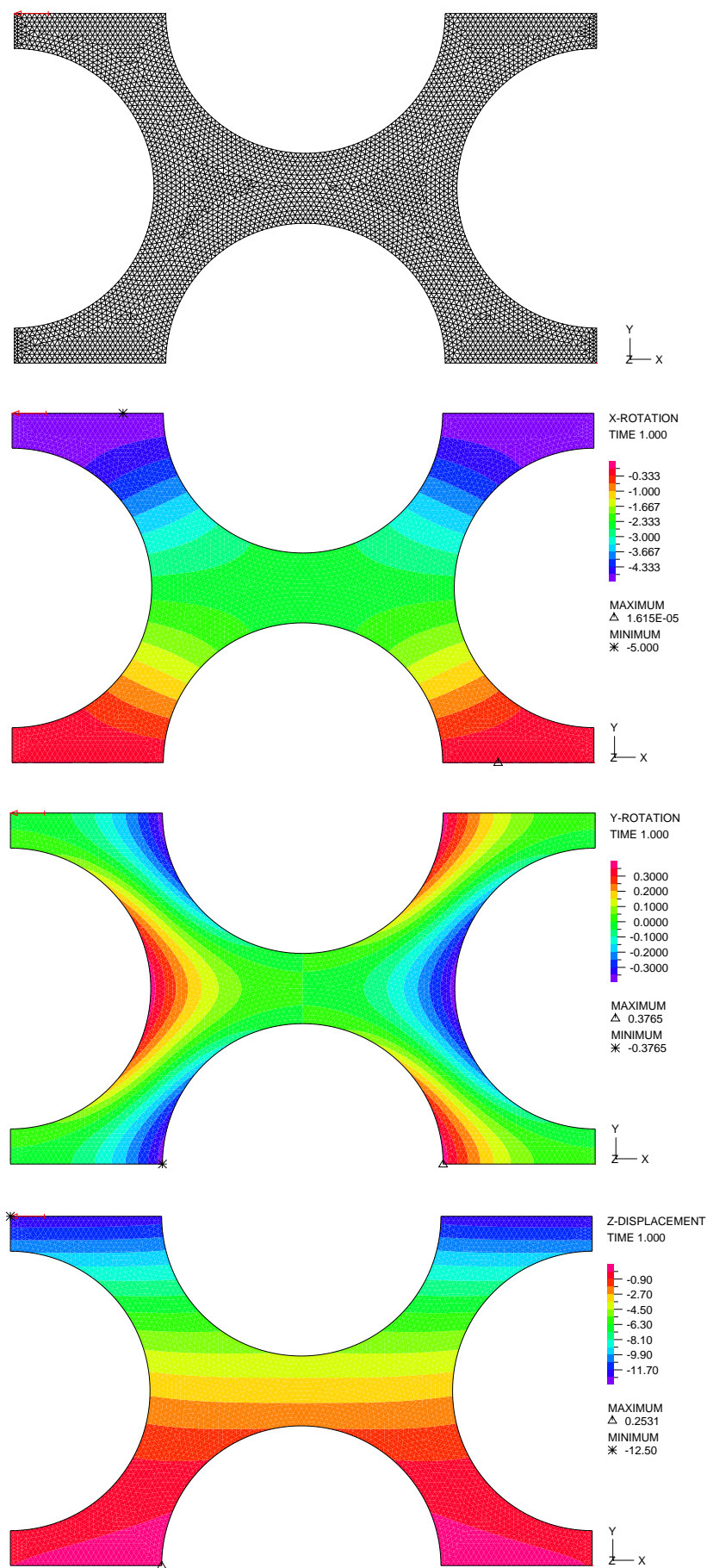
Obrázek 3.24: Graf závislosti homogenizované matice tuhosti na jemnosti sítě

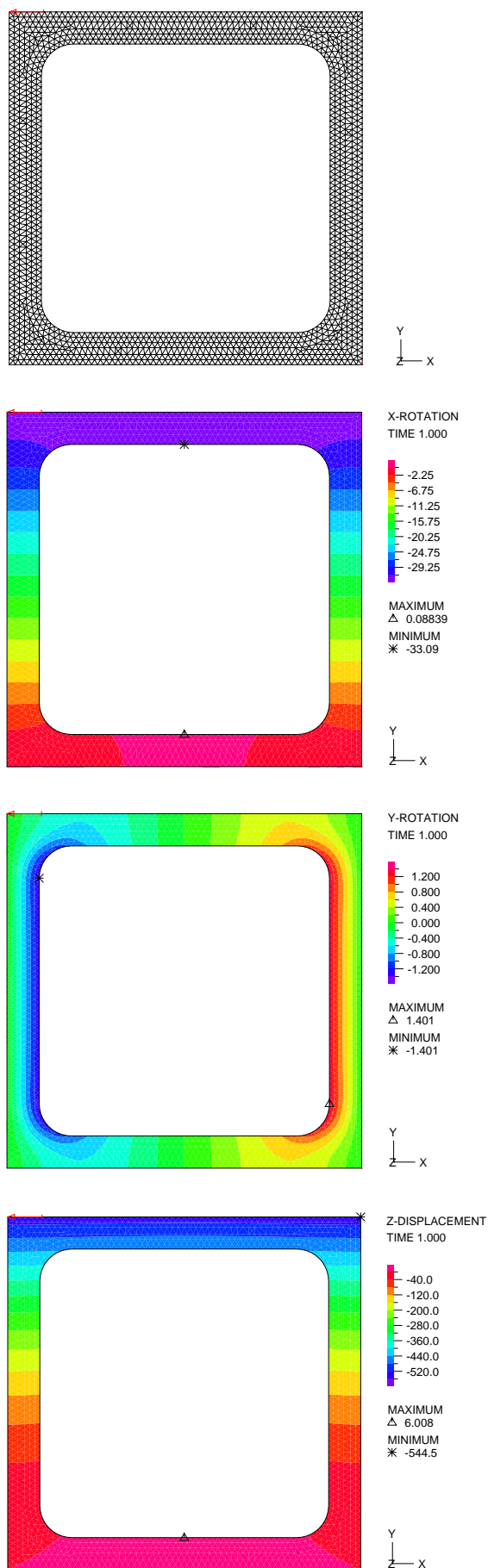
Pro ilustraci získaných výsledků jsou na obrázcích 3.25–3.27 uvedeny příklady průběhů průhybu a rotací pro zatížení makroskopickou křivostí $\kappa_x = \kappa_{xy} = 0$, $\kappa_y = 1$. Výsledné hodnoty prvku homogenizované matice deskové tuhosti $(D_\kappa)_{22}$ jsou uvedeny v tabulce 3.4 spolu s poměrem rozměru konstrukce vzhledem k rozměru jednotkové buňky.

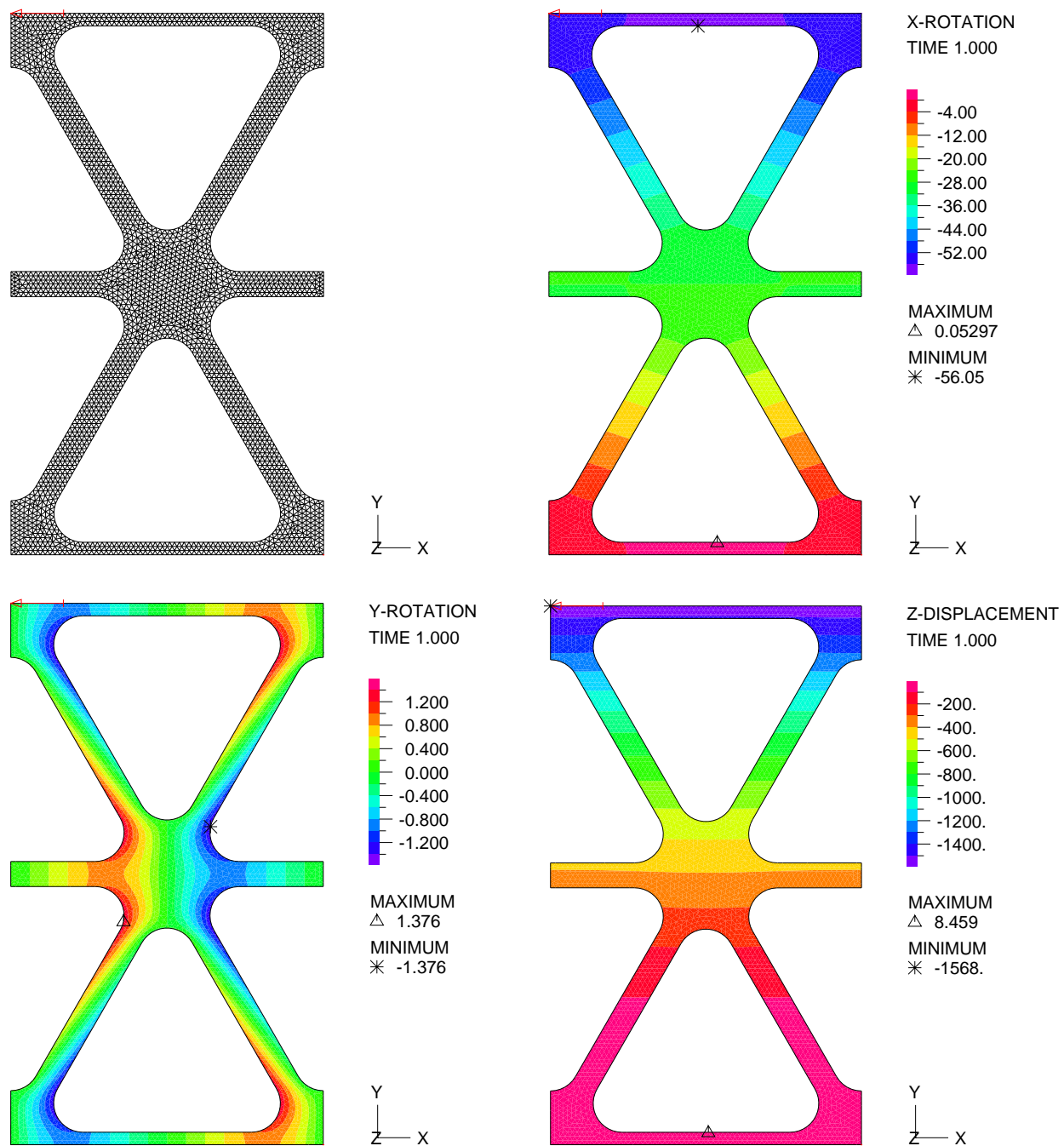
Označení perforované desky	Geometrie			Počet buněk		Člen $(D_\kappa)_{22}$ [Nm]
	t [mm]	\hat{l} [mm]	\hat{h} [mm]	směr x	směr y	
PWC 3-3	3,05	8,696	4,878	23	41	3,240
PWC 3-4	3,05	11,429	6,667	17,5	30	3,841
PWC 3-12	3,08	33,333	20	6	10	3,861
PWC 4-3	4,3	7,273	3,922	27,5	51	6,665
PWC 4-12	4,07	26,667	15,385	7,5	13	5,192
PWC 5-3	5,16	6,557	3,571	30,5	56	7,035
PWC 5-4	4,9	8,333	5	24	40	7,603
PWC 5-12	5,03	25	15,385	8	13	8,560
PWC 6-12	6,12	23,529	14,286	8,5	14	11,394
PWC 6-24a	5,89	44	28,5	4,5	7	7,305
PWC 6-24b	6,02	47	28,5	4,3	7	10,742
PWS 5-26	5,16	33	33	6	6	8,288
PWS 6-27	6,04	33	33	6	6	11,277
PWT 6-20	5,95	32,333	56	6	3,5	9,879

Tabulka 3.4: Hodnoty členu $(D_\kappa)_{22}$ pro Kirchhoffův model desky

V okamžiku, kdy jsou z numerického modelování známy hodnoty ohybové tuhosti, můžeme přistoupit k výpočtu kritické síly F_{cr} na základě vztahu (3.20). V grafu 3.28 jsou

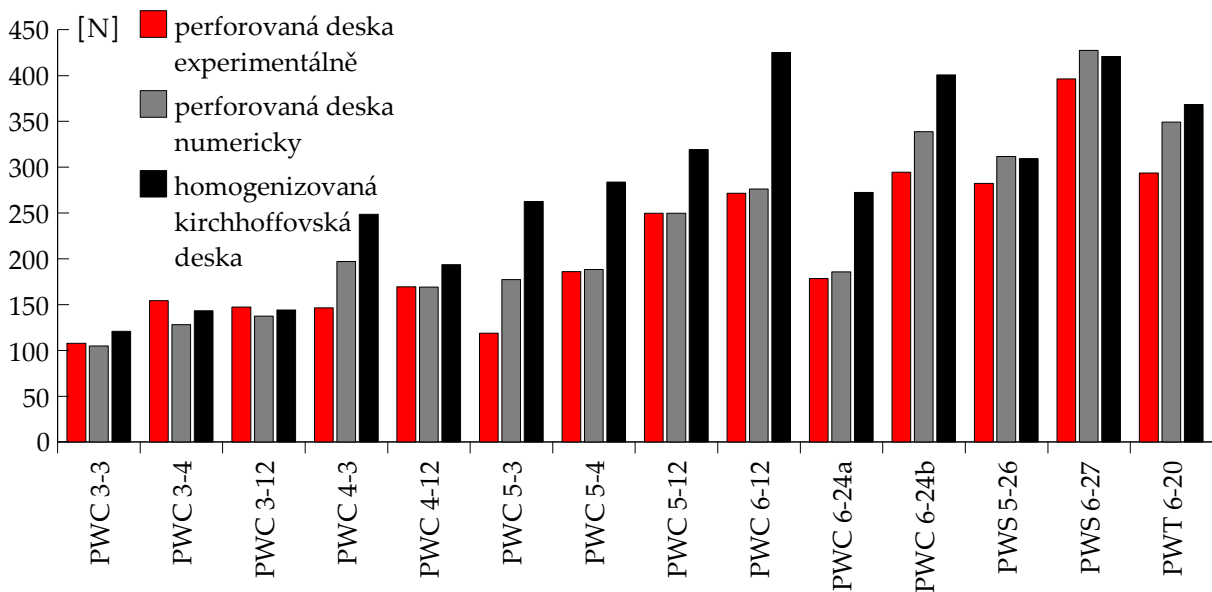
Obrázek 3.25: Síť a odezva jednotkové buňky PWC 5-4 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

Obrázek 3.26: Síť a odezva jednotkové buňky PWS 6-27 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$



Obrázek 3.27: Síť a odezva jednotkové buňky PWT 6-20 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

černě vyneseny hodnoty kritických sil homogenizované kirchhoffovské desky F_{cr}^{kirch} . Tyto hodnoty jsou porovnány s kritickým zatížením perforované desky F_{cr}^{num} (šedě) a experimentálně získanými daty F_{cr}^{exp} (červeně). Hodnoty kritických zatížení a jejich odchylky jsou uvedeny spolu v tabulce 3.5.



Obrázek 3.28: Graf kritického zatížení

Jak je na první pohled z grafu zřejmé, je model kirchhoffovské desky pro většinu geometrií příliš „tuhý“. Rozměry jednotkové buňky \hat{l} a \hat{h} nejsou dostatečně velké oproti tloušťce t , a proto není vliv smyku zanedbatelný. Tuto skutečnost lze částečně zohlednit použitím Mindlinova modelu desky.

Označení perforované desky	Kritické síly					
	F_{cr}^{num} [N]	F_{cr}^{exp} [N]	η_{num}^{exp} [%]	F_{cr}^{kirch} [N]	η_{num}^{kirch} [%]	η_{exp}^{kirch} [%]
PWC 3-3	104,8	107,7	2,73	120,9	15,32	12,26
PWC 3-4	128,1	154,4	20,52	143,3	11,85	7,19
PWC 3-12	137,5	147,4	7,24	144,1	4,84	2,24
PWC 4-3	197,2	146,3	25,80	248,7	26,14	69,99
PWC 4-12	169,1	169,3	0,14	193,7	14,57	14,41
PWC 5-3	177,3	118,8	33,01	262,5	48,01	120,96
PWC 5-4	188,3	186,0	1,23	283,7	50,65	52,53
PWC 5-12	249,7	249,7	0,01	319,4	27,93	27,91
PWC 6-12	276,2	271,6	1,66	425,2	53,95	56,55
PWC 6-24a	185,7	178,4	3,92	272,6	46,82	52,80
PWC 6-24b	338,7	294,6	13,02	400,8	18,33	36,05
PWS 5-26	311,8	282,3	9,46	309,3	0,80	9,56
PWS 6-27	427,4	396,4	7,25	420,8	1,54	6,16
PWT 6-20	349,1	293,6	15,89	368,6	5,59	25,54

Tabulka 3.5: Výstižnost kritické síly určené použitím Kirchhoffova modelu

3.6 Homogenizace mindlinovských desek

V případě, kdy je na mikroúrovni jednotková buňka modelována jako tlustá mindlinovská deska, jsou pootočení $\hat{\varphi}_{\hat{x}}$ a $\hat{\varphi}_{\hat{y}}$ nezávislá na průhybu \hat{w} . Proto je nutné k okrajovým podmínkám představeným v předchozím oddíle přidat podmínky pro průhyby \hat{w} . Obdobně jako v případě pootočení budeme předpokládat následující rozklad průhybů

$$\hat{w}(\hat{x}) = \hat{w}^{\text{hmg}}(\hat{x}) + \hat{w}^*(\hat{x}),$$

kde \hat{w}^{hmg} jsou průhyby odpovídající homogennímu materiálu a $\hat{\Omega}$ -periodická složka \hat{w}^* vzniká jako důsledek perforace desky.

3.6.1 Zatěžování prostřednictvím průhybů řídicích bodů

Připomeňme, že na makroúrovni je konstrukce modelována jako tenká deska, jediné kinematické informace jsou tedy reprezentovány vektorem makroskopického vektoru křivosti κ . Proto odvodíme složku \hat{w}^{hmg} ze vztahu mezi křivostí a průhyby pro tenké kirchhoffovské desky, viz (3.5). Poznamenejme, že tato spíše intuitivní úvaha vede na stejné výsledky jako detailní analýza uvedená v [22].

Pokud má být v každém bodu jednotkové buňky konstantní hodnota křivosti, musí pole průhybů \hat{w}^{hmg} splňovat vztahy

$$-\frac{\partial^2 \hat{w}^{\text{hmg}}}{\partial \hat{x}^2}(\hat{x}, \hat{y}) = \kappa_x = \text{konst}, \quad (3.40)$$

$$-\frac{\partial^2 \hat{w}^{\text{hmg}}}{\partial \hat{y}^2}(\hat{x}, \hat{y}) = \kappa_y = \text{konst}, \quad (3.41)$$

$$-2\frac{\partial^2 \hat{w}^{\text{hmg}}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) = \kappa_{xy} = \text{konst}. \quad (3.42)$$

Z podmínky (3.40) vyplývá následující tvar funkce \hat{w}

$$\hat{w}^{\text{hmg}}(\hat{x}, \hat{y}) = -\frac{1}{2}\kappa_x \hat{x}^2 + a\hat{x}\hat{y} + b\hat{x} + f_3(\hat{y}).$$

Dosazení předchozího vztahu do (3.41) získáme podmínku pro funkci f_3

$$\frac{d^2 f_3}{d\hat{y}^2}(\hat{y}) = -\kappa_y,$$

z čehož vyplývá

$$f_3(\hat{y}) = -\frac{1}{2}\kappa_y \hat{y}^2 + c\hat{y} + d.$$

Z podmínky (3.42) plyne poslední identita

$$-2a = \kappa_{xy}.$$

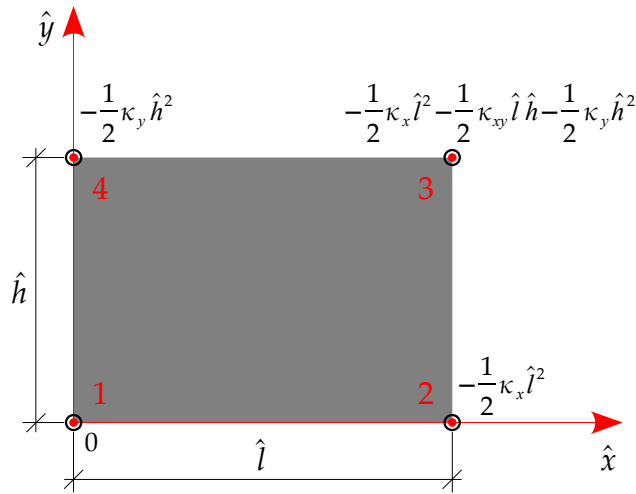
Rovnice průhybu \hat{w} příslušejícímu makroskopické křivosti κ má tedy tvar

$$\hat{w}^{\text{hmg}}(\hat{x}, \hat{y}) = -\frac{1}{2}\kappa_x \hat{x}^2 - \frac{1}{2}\kappa_{xy} \hat{x}\hat{y} - \frac{1}{2}\kappa_y \hat{y}^2 + b\hat{x} + c\hat{y} + d.$$

Zbývající konstanty b, c a d vyplývají z podepření desky. Pokud volíme hodnoty předepsaných posunů v bodech **1**, **2**, **3** a **4** v souladu s vztahy

$$\begin{aligned}\hat{w}^{\text{hmg}(1)} &= \hat{w}^{\text{hmg}}(0,0) = 0, \\ \hat{w}^{\text{hmg}(2)} &= \hat{w}^{\text{hmg}}(\hat{l},0) = -\frac{1}{2}\kappa_x\hat{l}^2, \\ \hat{w}^{\text{hmg}(3)} &= \hat{w}^{\text{hmg}}(\hat{l},\hat{h}) = -\frac{1}{2}\kappa_x\hat{l}^2 - \frac{1}{2}\kappa_{xy}\hat{l}\hat{h} - \frac{1}{2}\kappa_y\hat{h}^2, \\ \hat{w}^{\text{hmg}(4)} &= \hat{w}^{\text{hmg}}(0,\hat{h}) = -\frac{1}{2}\kappa_y\hat{h}^2\end{aligned}$$

jsou tyto konstanty nulové (viz obrázek 3.29).



Obrázek 3.29: Předepsané průhyby řídicích bodů PUC

3.6.2 Periodické okrajové podmínky pro průhyby

Stejně jako v případě pootočení odvodíme podmínky periodicity porovnáním hodnot na příslušných částech hranice jednotkové buňky. Konkrétně pro levou část hranice platí

$$\hat{w}^L(\hat{y}) = \hat{w}(0,\hat{y}) = -\frac{1}{2}\kappa_y\hat{y}^2 + \hat{w}^*(0,\hat{y}),$$

zatímco pro pravou část hranice má průhyb \hat{w} tvar

$$\hat{w}^R(\hat{y}) = \hat{w}(\hat{l},\hat{y}) = -\frac{1}{2}\kappa_x\hat{l}^2 - \frac{1}{2}\kappa_{xy}\hat{l}\hat{y} - \frac{1}{2}\kappa_y\hat{y}^2 + \hat{w}^*(\hat{l},\hat{y}).$$

Odečtením předchozích výrazů dostáváme hledaný vztah mezi průhybem levé a pravé části hranice jednotkové buňky

$$\hat{w}^R(\hat{y}) = \hat{w}^L(\hat{y}) + \hat{w}^{(2)} - \frac{1}{2}\kappa_{xy}\hat{l}\hat{y}.$$

Vztah mezi průhyby horní a dolní části hranice jednotkové buňky odvodíme obdobným způsobem

$$\hat{w}^T(\hat{x}) = \hat{w}^B(\hat{x}) + \hat{w}^{(4)} - \frac{1}{2}\kappa_{xy}\hat{h}\hat{x}.$$

3.6.3 Průměrné hodnoty měrných momentů

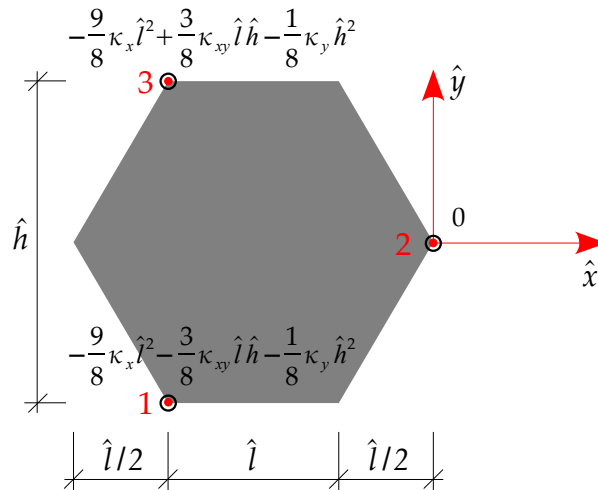
Sodvoláním na výsledky publikované v [22] je další postup pro určení homogenizované odezvy konstrukce identický případu tenkých desek.

Vektor průměrných momentů \mathbf{m} se opět určí z momentových reakcí odpovídajících předepsaným rotačním uzlových bodů

$$\begin{Bmatrix} m_x(\mathbf{x}) \\ m_y(\mathbf{x}) \\ m_{xy}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{h}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\hat{l}} \\ 0 & -\frac{1}{2\hat{h}} & \frac{1}{2\hat{l}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{\hat{x}}^{(2)} \\ \hat{M}_{\hat{y}}^{(2)} \\ \hat{M}_{\hat{x}}^{(4)} \\ \hat{M}_{\hat{y}}^{(4)} \end{Bmatrix}.$$

3.6.4 Homogenizační vztahy pro šestiúhelníkovou PUC

Šestiúhelníkovou jednotkovou buňku zatížíme průhyby v souladu s obrázkem 3.30.



Obrázek 3.30: Předepsané průhyby řídicích bodů šestiúhelníkové PUC

Podmínky periodicity pro průhyby bychom mohli vyjádřit stejným postupem jako pro pootočení. Pro zjednodušení výpočetních rovnic budeme uvažovat pouze zatížení křivostí κ_y , tedy

$$\{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\} = \{0, 1, 0\}.$$

Vyjádříme průhyb pro horní a dolní okraj

$$\hat{w}^T(\hat{x}) = \hat{w}\left(\hat{x}, \frac{\hat{h}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\kappa_y \left(\frac{\hat{h}}{2}\right)^2 + \hat{w}^*\left(\hat{x}, \frac{\hat{h}}{2}\right),$$

$$\hat{w}^B(\hat{x}) = \hat{w}\left(\hat{x}, -\frac{\hat{h}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\kappa_y \left(-\frac{\hat{h}}{2}\right)^2 + \hat{w}^*\left(\hat{x}, -\frac{\hat{h}}{2}\right)$$

a odečtením předchozích vztahů s uvážením $\hat{w}^*\left(\hat{x}, \frac{\hat{h}}{2}\right) = \hat{w}^*\left(\hat{x}, -\frac{\hat{h}}{2}\right)$ získáme podmínku

$$\hat{w}^T(\hat{x}) = \hat{w}^B(\hat{x}).$$

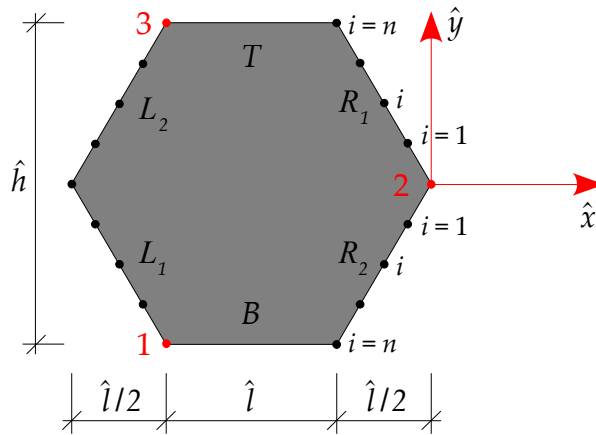
Pro svázání pravých a odpovídajících levých stran využijeme vztahy mezi jejich souřadnicemi $\hat{y}^{L1} = (\hat{y}^{R1} - \frac{\hat{h}}{2})$ a $\hat{y}^{L2} = (\hat{y}^{R2} + \frac{\hat{h}}{2})$. Stejným postupem, jakým jsme odvodili podmínky periodicity mezi horní a dolní hranicí, obdržíme rovnice

$$\begin{aligned}\hat{w}^{R1}(\hat{x}, \hat{y}^{R1}) &= \hat{w}^{L1}(\hat{x}, \hat{y}^{R1} - \frac{\hat{h}}{2}) - \frac{1}{2}\kappa_y \hat{h} \hat{y}^{R1} + \frac{1}{2}\kappa_y \left(-\frac{\hat{h}}{2}\right)^2, \\ \hat{w}^{R2}(\hat{x}, \hat{y}^{R2}) &= \hat{w}^{L2}(\hat{x}, \hat{y}^{R1} + \frac{\hat{h}}{2}) + \frac{1}{2}\kappa_y \hat{h} \hat{y}^{R2} + \frac{1}{2}\kappa_y \left(\frac{\hat{h}}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Použití takto formulovaných podmínek periodicity v programu ADINA® je obtížnější. Pokud však rozdělíme hrany na n stejných intervalů, pak pro souřadnice y takto vzniklých bodů platí

$$y^{R1} = \frac{\hat{h}i}{2n}, \quad y^{R2} = -\frac{\hat{h}i}{2n},$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$ (viz obrázek 3.31).



Obrázek 3.31: Rozdělení hranice šestiúhelníkové PUC na intervaly

Nyní můžeme podmínky periodicity pro levé a pravé strany přepsat do výhodnějšího tvaru

$$\begin{aligned}\hat{w}^{R1}(\hat{x}, \hat{y}^{R1}) &= \hat{w}^{L1}(\hat{x}, \hat{y}^{R1} - \frac{\hat{h}}{2}) + \frac{1}{2}\kappa_y \left(-\frac{\hat{h}}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2i}{n}\right] \\ &= \hat{w}^{L1}(\hat{x}, \hat{y}^{R1} - \frac{\hat{h}}{2}) - \hat{w}^{(1)} \left[1 - \frac{2i}{n}\right], \\ \hat{w}^{R2}(\hat{x}, \hat{y}^{R2}) &= \hat{w}^{L2}(\hat{x}, \hat{y}^{R1} + \frac{\hat{h}}{2}) + \frac{1}{2}\kappa_y \left(\frac{\hat{h}}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2i}{n}\right] \\ &= \hat{w}^{L2}(\hat{x}, \hat{y}^{R1} + \frac{\hat{h}}{2}) - \hat{w}^{(3)} \left[1 - \frac{2i}{n}\right].\end{aligned}$$

Obdobně bychom získali podmínky periodicity pro ostatní složky křivosti.

3.6.5 Numerické modelování mindlinovských desek

Mindlinovské desky byly opět modelovány v programu ADINA®. Tentokrát byl použit čtyřuzlový prvek MITC⁹ (viz [18] pro další informace). Okrajové podmínky byly do programu zavedeny pomocí svázání příslušných stupňů volnosti příkazem *constraint equation*. Při výpočtech bylo uvažováno lineárně pružné chování materiálu.

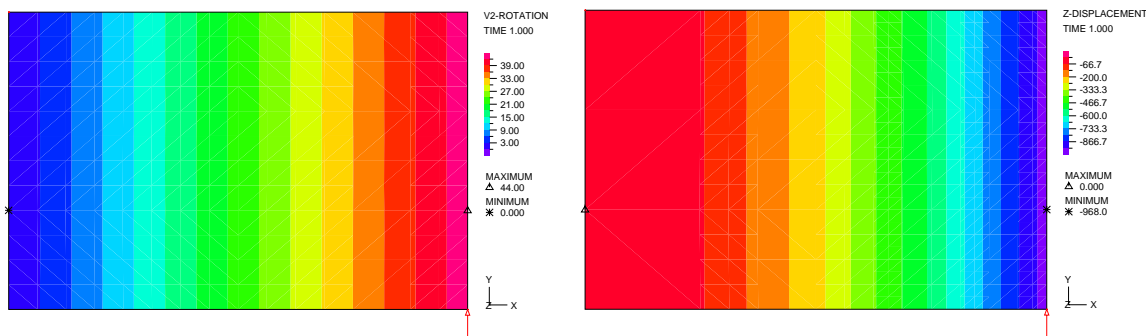
Správnost odvozených homogenizačních vztahů můžeme opět ověřit na homogenní obdélníkové buňce s rozměry $\hat{l} \times \hat{h} = 44 \times 28,5$ mm, tloušťkou $t = 5,89$ mm, modulem pružnosti $E = 3\,000$ MPa a Poissonovým číslem $\nu = 0,4$.

Tuto buňku „zatížíme“ třemi makroskopickými křivostmi

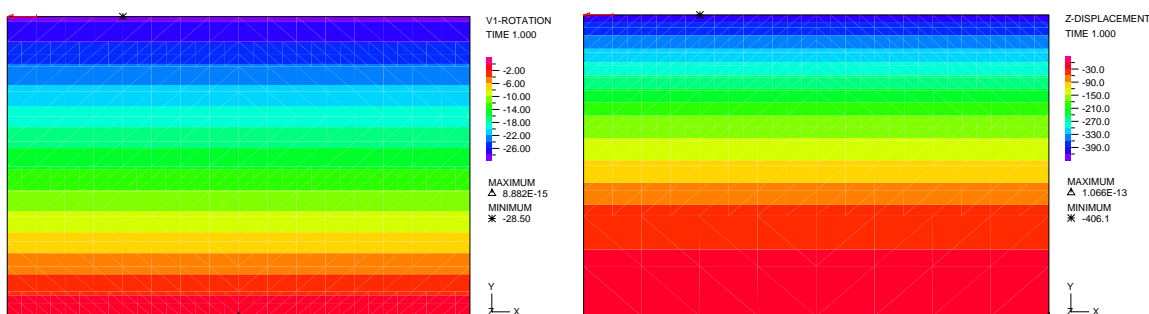
$$\kappa^x = \{1; 0; 0\}^T, \quad \kappa^y = \{0; 1; 0\}^T, \quad \kappa^{xy} = \{0; 0; 1\}^T,$$

prostřednictvím pootočení (viz obrázek 3.16) a průhybů řídicích bodů (obrázek 3.29). Na hranách předepíšeme podmínky periodicity (viz pododdíly 3.5.2 a 3.6.2).

Na obrázcích 3.32–3.34 je vykreslena odezva buňky odpovídající jednotlivým zatěžovacím stavům.



Obrázek 3.32: Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^x = \{1; 0; 0\}^T$

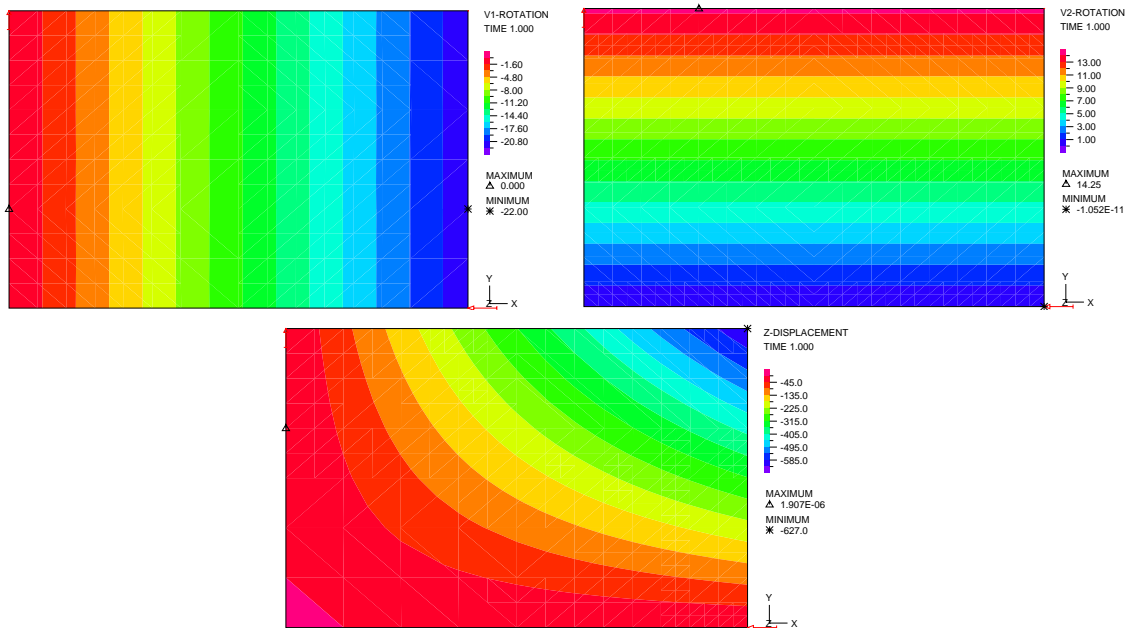


Obrázek 3.33: Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

Sestrojíme homogenizovanou matici deskové tuhosti odpovídající vektorům průměrných momentů m^x , m^y a m^{xy} (viz (3.39))

$$D_\kappa = \begin{bmatrix} m_x^x & m_y^x & m_{xy}^x \\ m_x^y & m_y^y & m_{xy}^y \\ m_x^{xy} & m_y^{xy} & m_{xy}^{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D_\kappa)_{11} & (D_\kappa)_{12} & (D_\kappa)_{13} \\ (D_\kappa)_{21} & (D_\kappa)_{22} & (D_\kappa)_{23} \\ (D_\kappa)_{31} & (D_\kappa)_{32} & (D_\kappa)_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60,81 & 24,33 & 0 \\ 24,33 & 60,81 & 0 \\ 0 & 0 & 18,24 \end{bmatrix}.$$

⁹ V programu ADINA® je tento prvek označen SHELL, viz manuál [17].



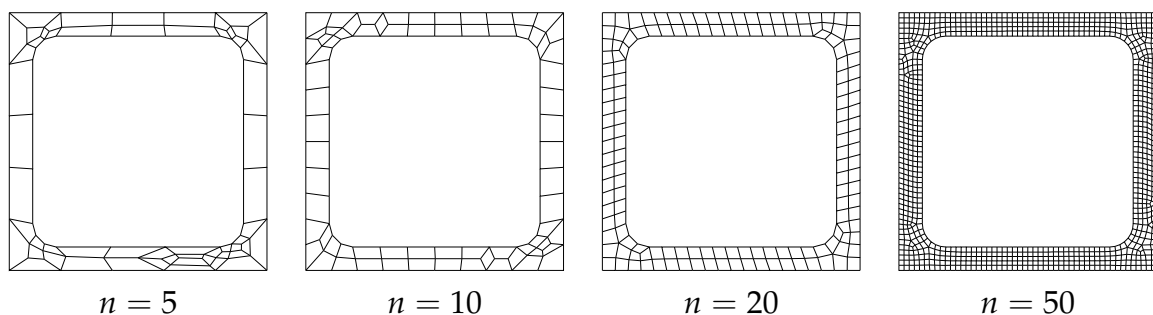
Obrázek 3.34: Odezva homogenní jednotkové buňky na zatížení $\kappa^{xy} = \{0; 0; 1\}^T$

Protože se jedná o homogenní buňku, lze určit jednotlivé členy deskové matice tuhosti také podle následujících vztahů

$$D_{\kappa} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60,81 & 24,33 & 0 \\ 24,33 & 60,81 & 0 \\ 0 & 0 & 18,24 \end{bmatrix} \text{ Nm.}$$

Porovnáním těchto dvou matic tuhosti je zřejmé, že odezva pro zatížení jednotlivými makroskopickými křivostmi, určená pomocí navrženého homogenizačního postupu, odpovídá přesné hodnotě.

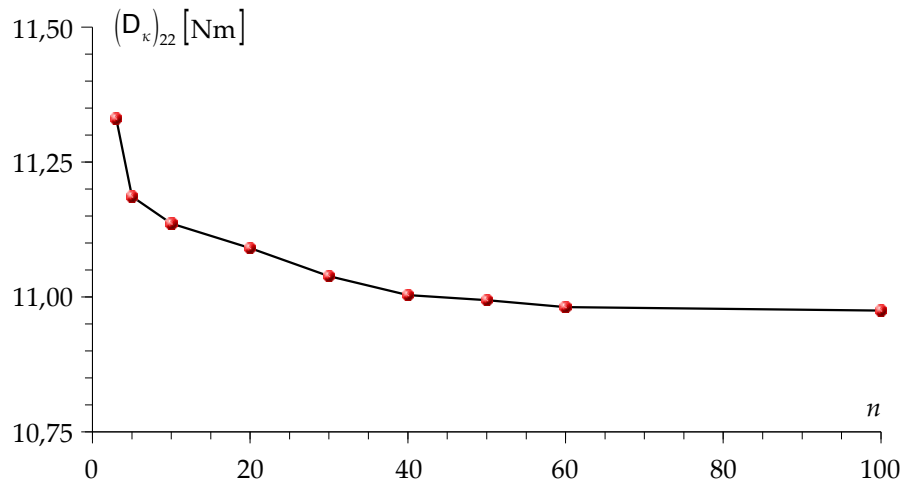
V dalším kroku přistoupíme k výpočtu požadovaného členu homogenizované matice tuhosti $(D_{\kappa})_{22}$ pro čtrnáct různých geometrií otvorů. Jednotkové buňky byly zatěžovány pouze křivostí $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$. Pro ověření výstižnosti numerických hodnot získaných metodou konečných prvků byla opět provedena série výpočtů na sítích konečných prvků se vzrůstající hustotou sítě pro buňku PWS 6-27 (viz obrázek 3.35).



Obrázek 3.35: Příklady sítí konečných prvků (n značí počet intervalů na straně PUC)

Závislost členu $(D_{\kappa})_{22}$ homogenizované matice tuhosti na jemnosti sítě konečných prvků je uvedena na následujícím obrázku. Jako ukazatel jemnosti sítě byl i v tomto případě zvolen počet intervalů n na jedné hraně čtvercové buňky. Sít' konečných prvků

odpovídající rozdělení strany na 40 dílků dává výsledky s dostatečnou přesností. Další výpočty byly prováděny na jemnější síti konečných prvků odpovídající dělení hrany na cca 60 dílů.



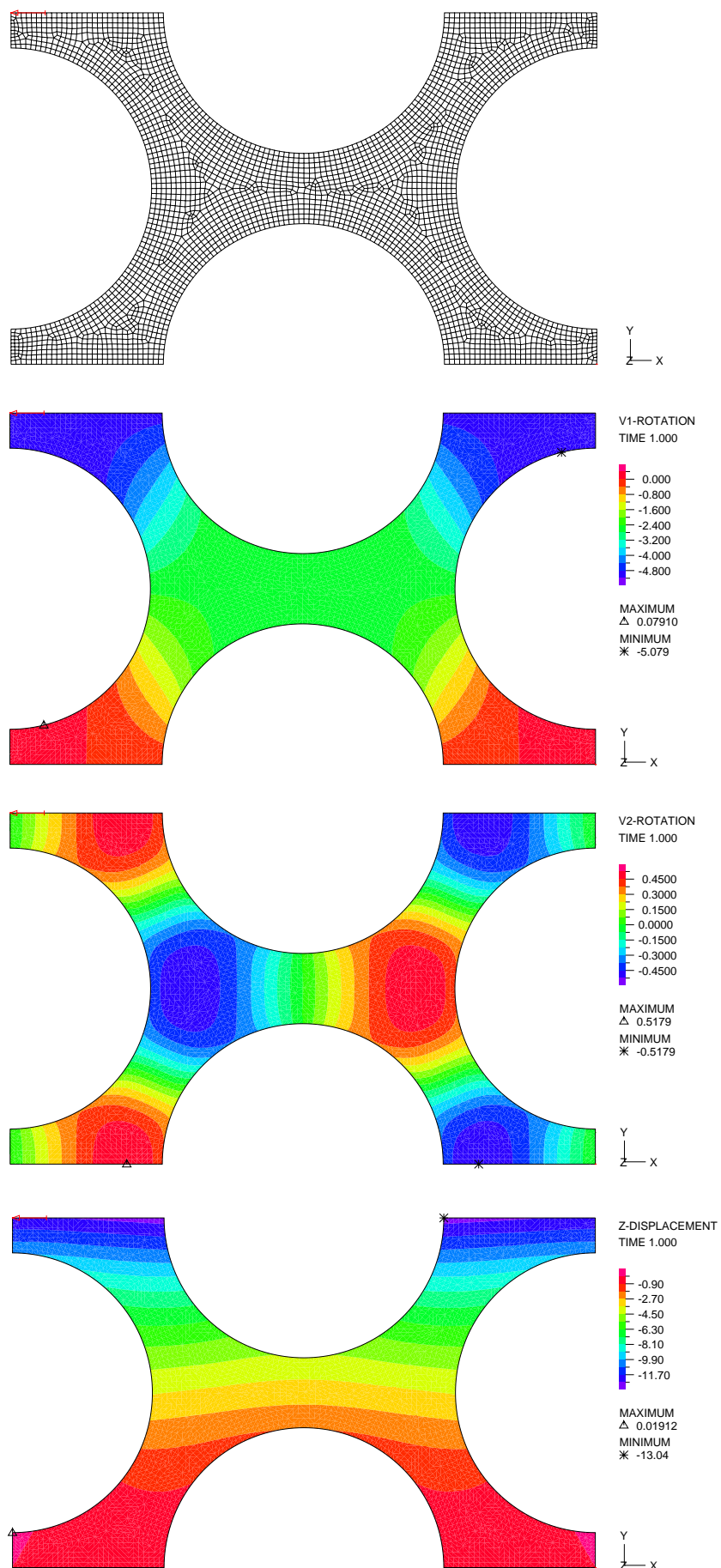
Obrázek 3.36: Graf závislosti homogenizované matice tuhosti na jemnosti sítě

Pro ilustraci získaných výsledků jsou na obrázcích 3.37–3.39 uvedeny příklady průběhů průhybu a rotací pro zatížení makroskopickou křivostí $\kappa_x = \kappa_{xy} = 0$, $\kappa_y = 1$. Výsledné hodnoty prvku homogenizované matice deskové tuhosti $(D_\kappa)_{22}$ jsou uvedeny v tabulce 3.6 spolu s poměrem rozměru konstrukce vzhledem k rozměru jednotkové buňky.

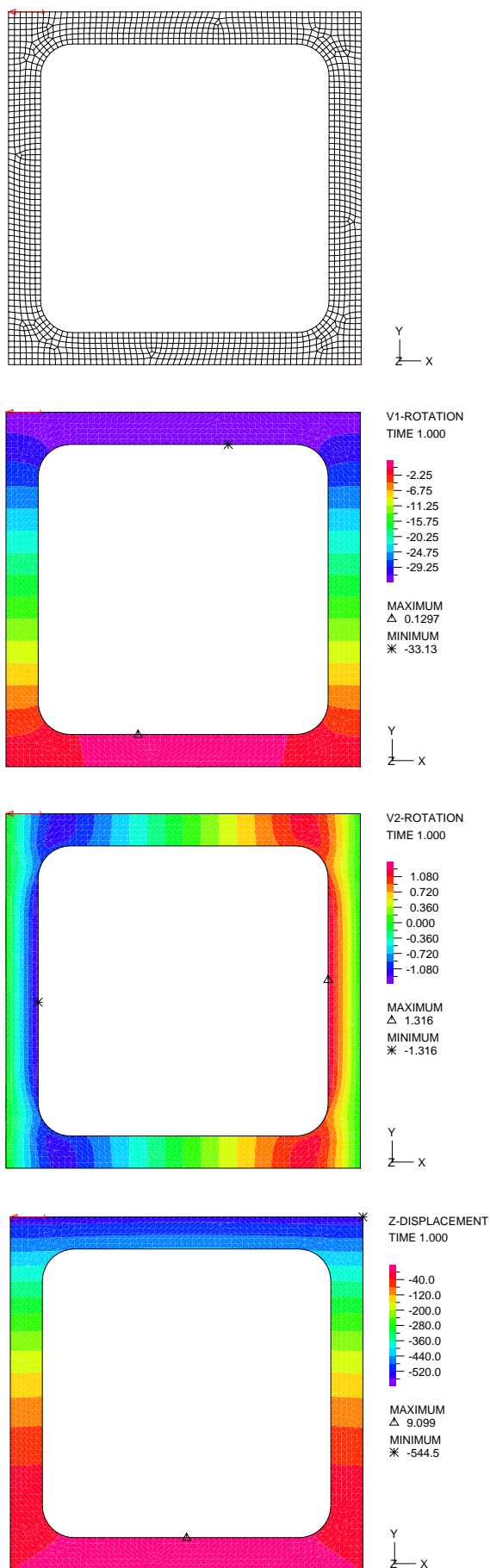
Označení perforované desky	Geometrie			Počet buněk		Člen $(D_\kappa)_{22}$ [Nm]
	t [mm]	\hat{l} [mm]	\hat{h} [mm]	směr x	směr y	
PWC 3-3	3,05	8,696	4,878	23	41	2,807
PWC 3-4	3,05	11,429	6,667	17,5	30	3,478
PWC 3-12	3,08	33,333	20	6	10	3,704
PWC 4-3	4,3	7,273	3,922	27,5	51	5,219
PWC 4-12	4,07	26,667	15,385	7,5	13	4,510
PWC 5-3	5,16	6,557	3,571	30,5	56	4,518
PWC 5-4	4,9	8,333	5	24	40	5,231
PWC 5-12	5,03	25	15,385	8	13	6,769
PWC 6-12	6,12	23,529	14,286	8,5	14	7,823
PWC 6-24a	5,89	44	28,5	4,5	7	4,996
PWC 6-24b	6,02	47	28,5	4,3	7	8,478
PWS 5-26	5,16	33	33	6	6	8,074
PWS 6-27	6,04	33	33	6	6	10,981
PWT 6-20	5,95	32,333	56	6	3,5	7,716

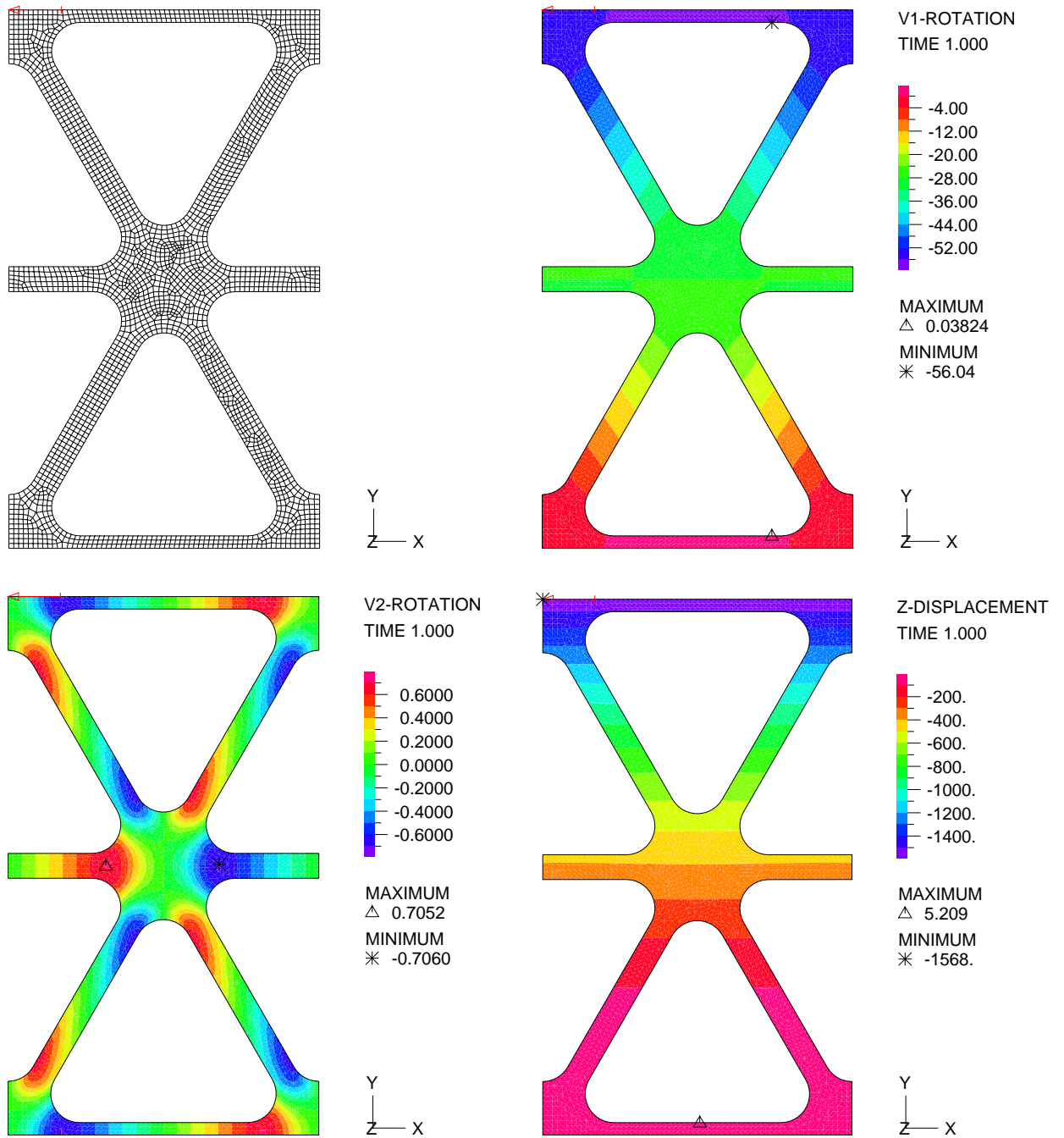
Tabulka 3.6: Hodnoty členu $(D_\kappa)_{22}$ pro Mindlinův model desky

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu kritické síly F_{cr} na základě vztahu (3.20). V grafu 3.40 jsou vyneseny hodnoty kritických sil homogenizované mindlinovské desky F_{cr}^{kirch} (černě). Tyto hodnoty jsou porovnány s kritickým zatížením perforované desky F_{cr}^{num} (šedě) a experimentálně získanými daty F_{cr}^{exp} (červeně). Hodnoty kritických zatížení a jejich odchylka jsou uvedeny v tabulce 3.7.

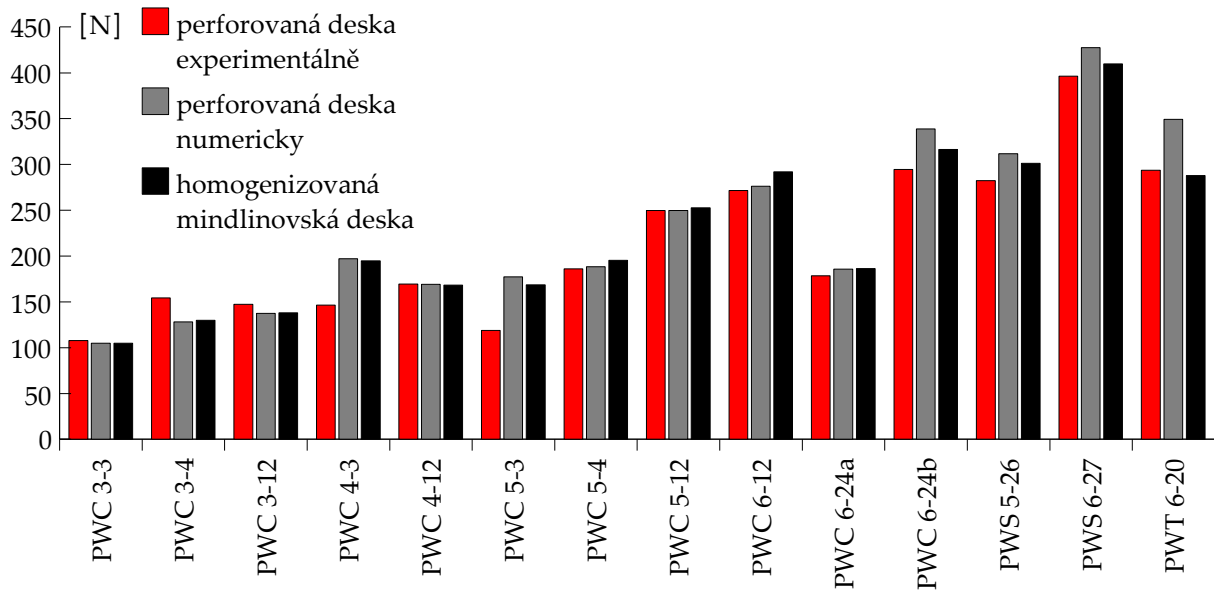


Obrázek 3.37: Síť a odezva jednotkové buňky PWC 5-4 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

Obrázek 3.38: Síť a odezva jednotkové buňky PWS 6-27 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$



Obrázek 3.39: Síť a odezva jednotkové buňky PWT 6-20 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$



Obrázek 3.40: Graf kritického zatížení

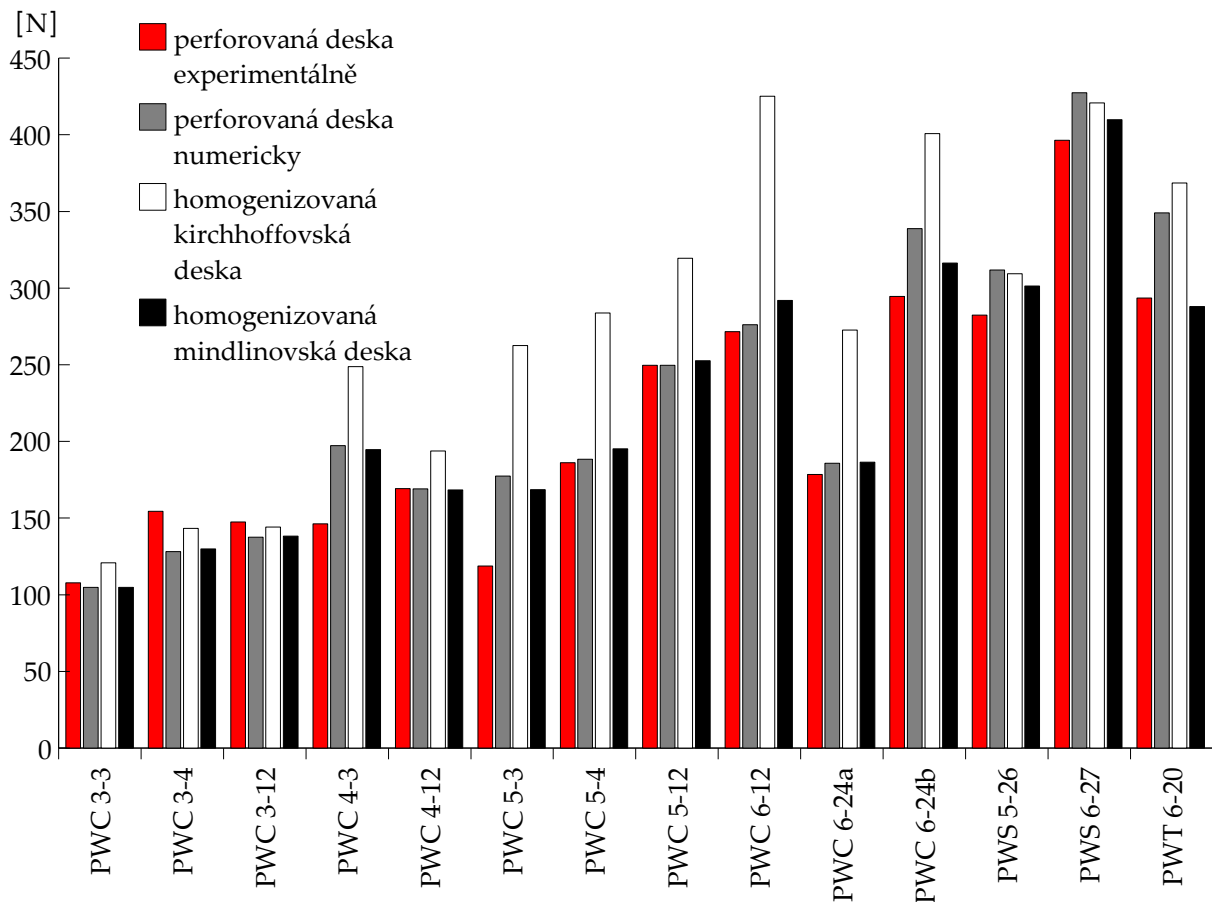
Hodnoty kritických sil, které byly získány použitím Mindlinova modelu pro desky na mikroúrovni, podstatně lépe vystihují výsledky experimentu a numerického modelování. To je způsobeno zahrnutím vlivu smyku, v důsledku předpokladu nenulových zkosení průřezů uvnitř periodické jednotkové buňky. Podrobnější diskuse výsledků získaných homogenizačními metodami je tématem následujícího oddílu.

Označení perforované desky	Kritické síly					
	F_{cr}^{num} [N]	F_{cr}^{exp} [N]	η_{num}^{exp} [%]	F_{cr}^{mind} [N]	η_{num}^{mind} [%]	η_{exp}^{mind} [%]
PWC 3-3	104,8	107,7	2,73	104,8	0,04	2,69
PWC 3-4	128,1	154,4	20,52	129,8	1,32	15,93
PWC 3-12	137,5	147,4	7,24	138,2	0,54	6,24
PWC 4-3	197,2	146,3	25,80	194,7	1,25	33,08
PWC 4-12	169,1	169,3	0,14	168,3	0,45	0,59
PWC 5-3	177,3	118,8	33,01	168,6	4,93	41,92
PWC 5-4	188,3	186,0	1,23	195,2	3,65	4,95
PWC 5-12	249,7	249,7	0,01	252,6	1,17	1,16
PWC 6-12	276,2	271,6	1,66	291,9	5,69	7,47
PWC 6-24a	185,7	178,4	3,92	186,4	0,39	4,48
PWC 6-24b	338,7	294,6	13,02	316,4	6,58	7,40
PWS 5-26	311,8	282,3	9,46	301,3	3,37	6,73
PWS 6-27	427,4	396,4	7,25	409,8	4,11	3,38
PWT 6-20	349,1	293,6	15,89	287,9	17,53	1,94

Tabulka 3.7: Výstižnost kritické síly určené použitím Mindlinova modelu

3.7 Porovnání kritických sil

V rámci obrázku 3.41 jsou porovnány kritické síly určené podle mindlinovské a kirchhoffovské teorie s experimentálními daty a hodnotou kritické síly získané numerickým modelováním celé konstrukce. Hodnoty kritického zatížení pro mindlinovský model jsou menší než v případě modelu kirchhoffovského. To je způsobeno dodatečným vlivem smyku.



Obrázek 3.41: Porovnání kritických sil

Výsledky pro Kirchhoffův deskový model jsou příliš „tuhé“ a předpověď modelu je zatížena značnou chybou. Použijeme-li však při modelování na mikroúrovni model založený na mindlinovských předpokladech, jsou kritické síly vypočtené na základě navržené homogenizační analýzy ve většině příkladů srovnatelně přesné s výsledky získanými detailním modelováním celé konstrukce. Chyba se pohybuje až na jeden případ do 7%. U geometrie PWT 6-20 je přesnost výsledku nižší (chyba je 17,53%). Tato skutečnost je způsobena tím, že okraje perforované konstrukce jsou ztužené (porovnej obrázky 3.10 a 3.39). Pokud bych numericky modelovala tuto konstrukci přesně periodicky (bez vyztužení), klesla by odchylka na 5,76%, což je dobrý výsledek vzhledem k tomu, že jednotková buňka se opakuje na výšce konstrukce jen 3,5-krát.

Chyba homogenizovaného řešení použitím Mindlinových předpokladů je dle mého názoru způsobena zejména následujícími faktory:

- Konstrukce není „dokonale periodická“ (viz například PWT 6-20), na okrajích je ztužená.

- Byl použit přibližný vztah pro kritickou sílu (pro homogenní desku je odchylka od numerického řešení na velmi jemné síti přibližně 5%).
- Rozměr jednotkové buňky je vzhledem k charakteristickému rozměru konstrukce relativně velký.
- Vlivem okrajových efektů v uložení desky není homogenizační předpoklad konstantního průběhu křivosti splněn.
- Při výpočtu byly uvažovány zjednodušující kinematické předpoklady pro desky místo plně trojrozměrné analýzy jednotkové buňky.

Také při porovnání výsledků homogenizačních metod s experimentálními daty se ukazuje, že výstižnost modelu založeného na mindlinovských předpokladech je obecně větší než pro případ tenké kirchhoffovské desky. Vyšší odchylky mohou být způsobeny vlivy, které byly podrobně diskutovány na konci oddílu 3.2.

Přesnost dosažených výsledků je uspokojivá, použijeme-li pro modelování jednotkové buňky deskový model založený na Mindlinových předpokladech. Při použití plně trojrozměrné analýzy jednotkové buňky by výstižnost kritických sil mohla být ještě vyšší. Modelování trojrozměrné jednotkové buňky je však nepoměrně náročnější než studovaný přístup.

Kapitola 4

Závěr

V rámci předkládané práce byla představena numerická homogenizace ohýbaných heterogenních konstrukcí. Hodnoty ohybových eventuálně kroutících parametrů jsou odvozovány z chování periodické jednotkové buňky po zatížení makroskopickou křivostí. Uvedený přístup je založen na parametrizaci makroskopické křivosti pomocí předepsaných posunů a pootočení vybraných „řídících“ bodů. Odvozené vztahy pro podmínky periodicity na okrajích jednotkové buňky lze zadat do výpočetních programů umožňujících svázání stupňů volnosti odpovídajících uzlů. Výhodou tohoto přístupu je jeho názornost, snadné zadání do většiny komerčně dostupných konečně-prvkových systémů a možnost přímého rozšíření pro nelineární úlohy.

Homogenizační postupy a vztahy představené v předešlých kapitolách jsou obecně platné pro ohýbané prutové a deskové konstrukce s periodickou strukturou. Nezáleží tedy na tom, zda je jednotková buňka složena z více materiálů nebo je vylehčena otvory, na tvaru perforací a podobně, při volbě obdélníkové jednotkové buňky umožňující zatěžování vrcholových bodů jsou odvozené vztahy stále stejné. Aplikace metody na konkrétní případy ohybu heterogenní prizmatické konzoly a stabilitního výpočtu perforovaných stěn slouží k diskuzi výsledků získaných:

- homogenizačním přístupem,
- přesným analytickým řešením (pro případ prutové konstrukce),
- detailním numerickým modelováním celé konstrukce a
- experimentálním měřením (pro případ perforovaných desek).

Porovnáním těchto přístupů zjistíme, že i při poměrně malém počtu opakování jednotkové buňky v rámci konstrukce je přesnost homogenizovaného řešení dostatečná. To je graficky demonstrováno na celé řadě příkladů uvedených v této práci. Oproti detailnímu numerickému výpočtu odezvy celé konstrukce je navržená homogenizační metoda časově nenáročná (z hlediska modelování a výpočtu odezvy konstrukce) i při velkém poměru rozměru konstrukce k jednotkové buňce.

Určování materiálových parametrů pomocí homogenizačních metod představuje vhodnou alternativu k experimentálním měřením. Použití těchto metod vidím zejména v oblasti návrhu konstrukčních prvků s heterogenní strukturou, pro které by laboratorní zkoumání jednotlivých variant návrhu bylo časově a finančně náročné. Určení homogenizovaných parametrů může sloužit také pro kontrolu naměřených veličin a odhalení případných nepřesností experimentu.

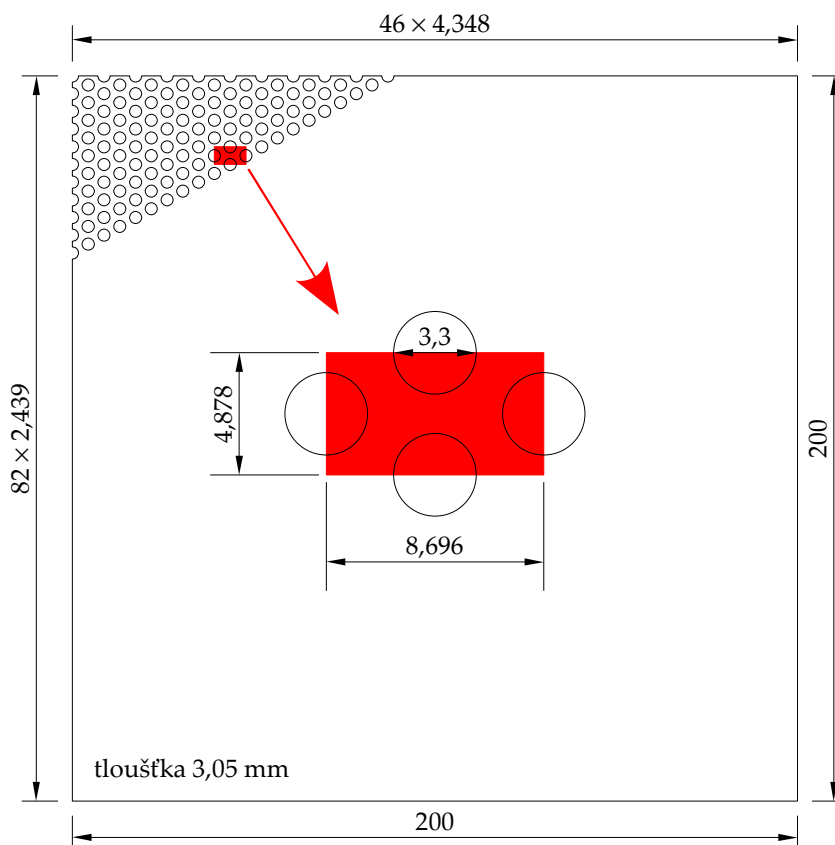
Literatura

- [1] J. Zeman, J. Novák, M. Šejnoha, and J. Šejnoha. Pragmatic multi-scale and multi-physics analysis of the Charles Bridge in Prague. In F. Matejiček, editor, *Extended Abstracts & Proceedings of the 5th International Congress of Croatian Society of Mechanics*, Trogir, Croatia, 2006. Croatian Society of Mechanics. paper No. 123.
- [2] B. Knecht. Brave new solid-state, carbon-fiber world. *Architectural Record/Innovation/Features*, October 2003.
- [3] 3D Systems. 'Extreme Textiles' exhibition, 2005.
- [4] Emergence and Design Group. High-rise / Evolution of a Helical Structure, 2003.
- [5] A. Somolová and J. Zeman. Homogenizace prizmatické konzoly. *Stavební obzor*, 13(9):282–287, 2004.
- [6] A. Somolová and J. Zeman. Numerical homogenization of perforated plates. In V. Fuis, P. Krejčí, and T. Návrát, editors, *Engineering mechanics 2005, Book of extended abstracts*, pages 287–288, Prague, 2005. Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic.
- [7] D. Cioranescu and P. Donato. *An Introduction to Homogenization*. Oxford University Press, USA, 2000.
- [8] M. Šejnoha. *Micromechanical analysis of unidirectional plies and laminates*. CTU Reports. CTU Publishing House, Prague, 1999.
- [9] J. Šejnoha and J. Bittnarová. *Pružnost a pevnost 10*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2002.
- [10] K. Terada and N. Kikuchi. A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(40–41):5427–5464, 2001.
- [11] V. Kouznetsova, W. A. M. Brekelmans, and P. T. Baaijens. An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Computational Mechanics*, 27(1):37–48, 2001.
- [12] V. Kufner and P. Kuklík. *Stavební mechanika 30*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2003.
- [13] PERFO LINEA, a. s. <http://www.perfolinea.cz>.
- [14] J. Kesti. *Local and distortional buckling of perforated steel wall studs*. PhD thesis, Laboratory of Steel Structures, Helsinki University of Technology, 2000.

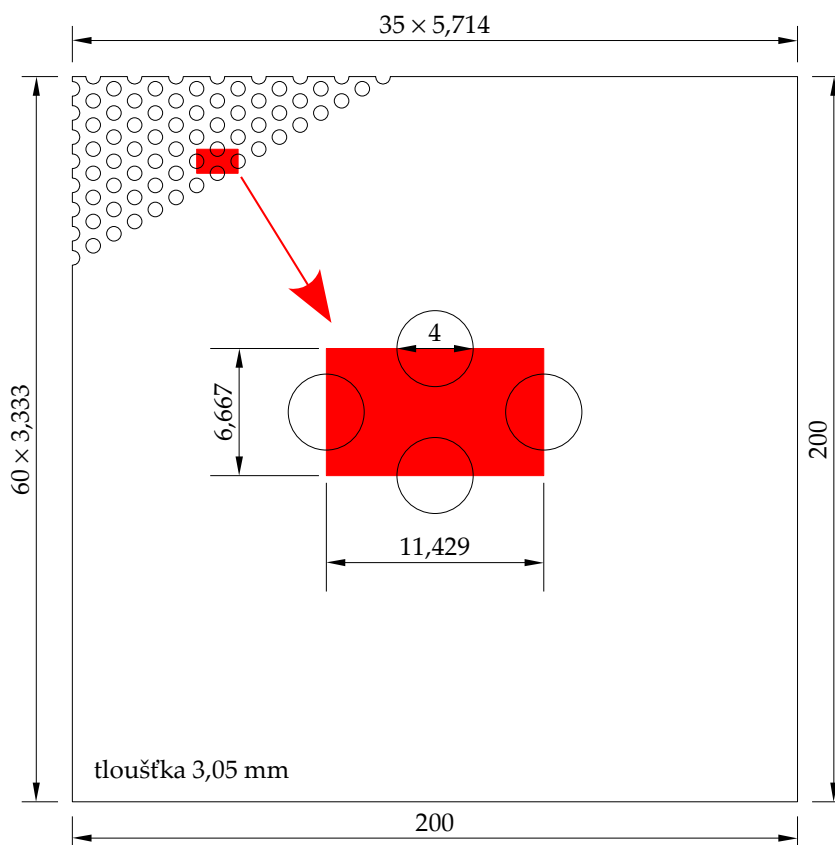
- [15] M. Drdácký and J. Lesák. Perforated plates for thin-walled structures. In *Proceedings of International Symposium "Advanced Materials for Lightweight Structures"*, pages 333–337, Noordwijk, The Netherlands, 1992. ESTEC.
- [16] J. Máca and P. Fajman. Numerical analysis of perforated webs. *Engineering Mechanics*, 3(5):331–335, 1996.
- [17] ADINA R & D, Inc. *ADINA Theory and Modeling Guide. Volume I: ADINA*, 2003. www.adina.com.
- [18] F. Brezzi and K.J. Bathe. Mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:1787–1801, 1989.
- [19] T. Lewiński and J.J. Telega. *Plates, laminates and shells : Asymptotic analysis and homogenization*, volume 52 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1999.
- [20] J. Šejnoha and J. Bittnarová. *Pružnost, pevnost, plasticita II*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1989.
- [21] Z. Bittnar and J. Šejnoha. *Numerické metody mechaniky*, volume I. ES ČVUT, Praha, 1992.
- [22] T. Lewiński. Homogenizing stiffness of plates with periodic structure. *International Journal of Solids and Structures*, 29(3):309–326, 1992.
- [23] J.F. Bourgat. Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients. *Rapport de recherche*, INRIA, Rocquencourt, 1978.
- [24] J.L. Batoz, K.J. Bathe, and L.W. Ho. A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1771–1812, 1980.

Příloha A

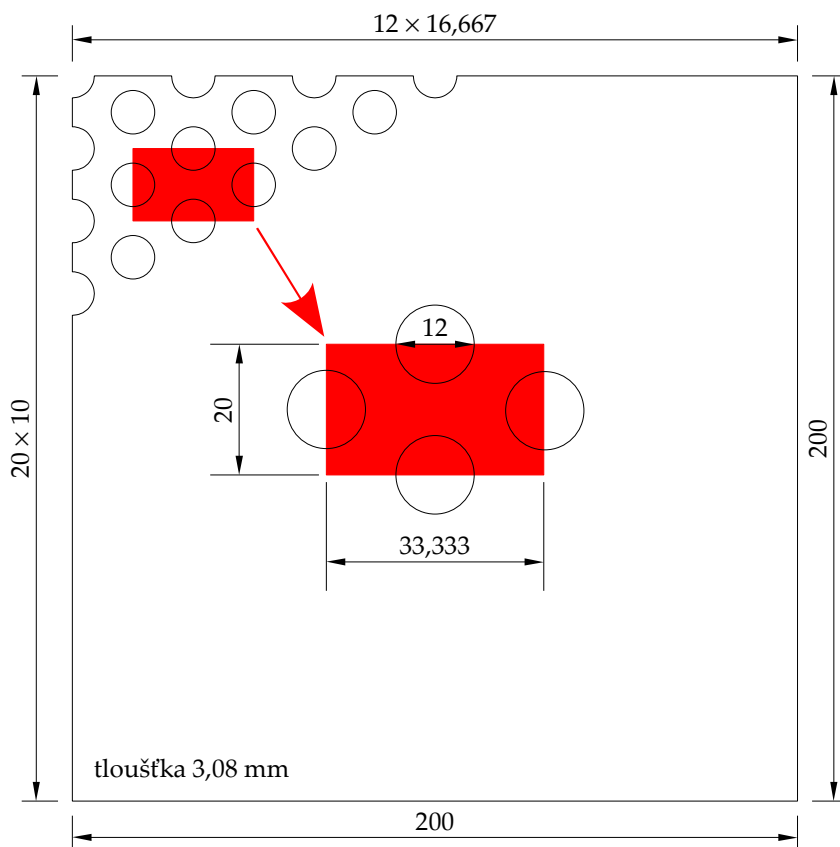
Seznam geometrií perforovaných desek



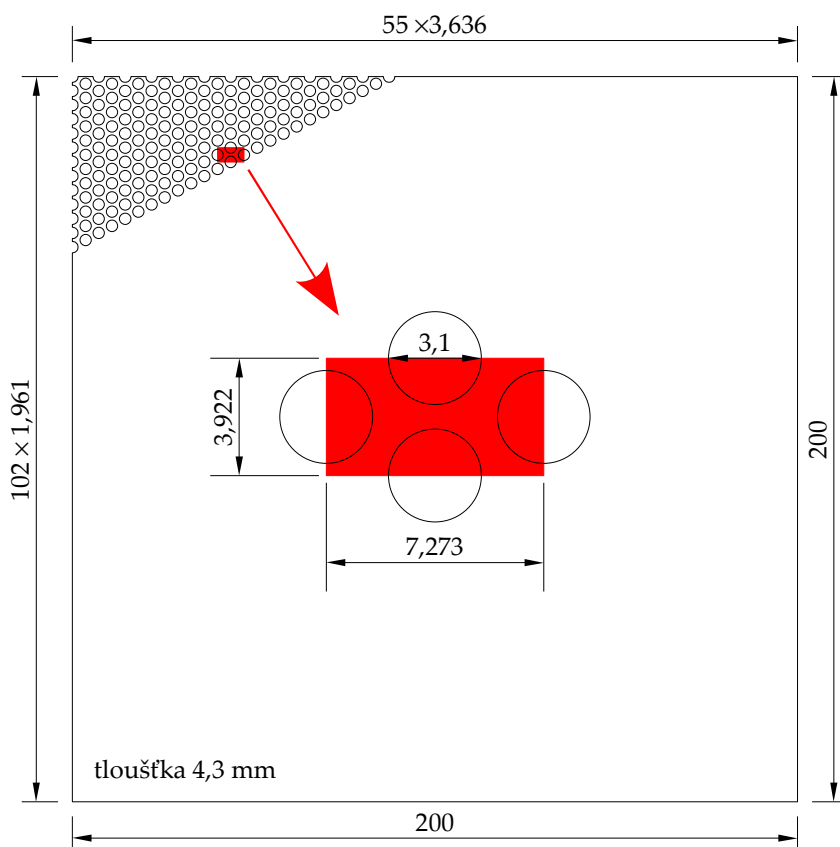
Obrázek A.1: Geometrie perforované desky PWC 3-3



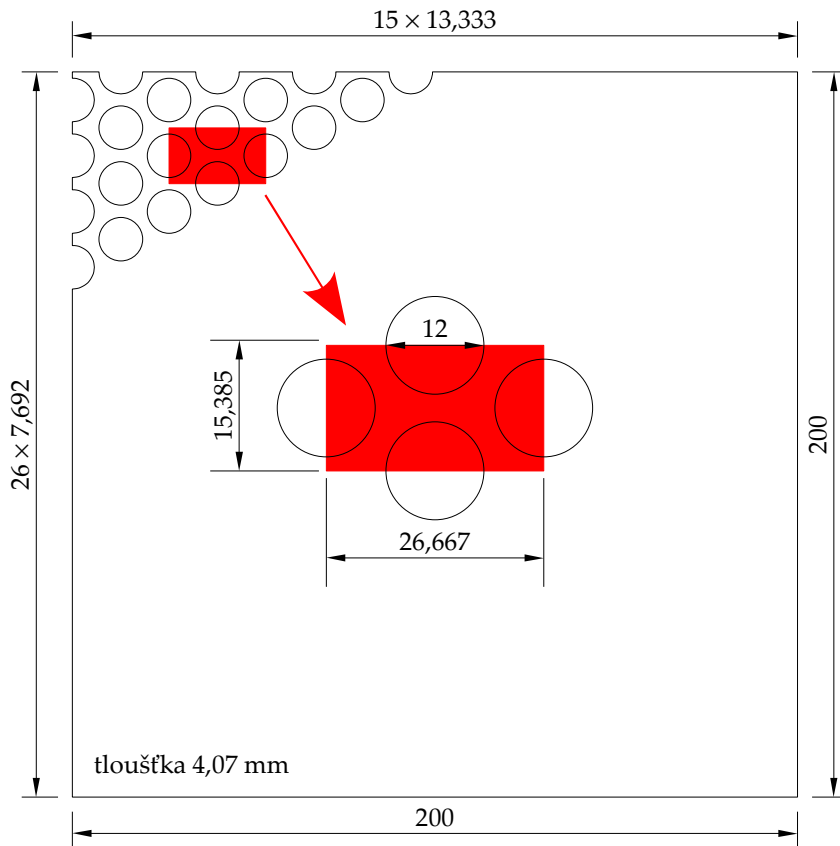
Obrázek A.2: Geometrie perforované desky PWC 3-4



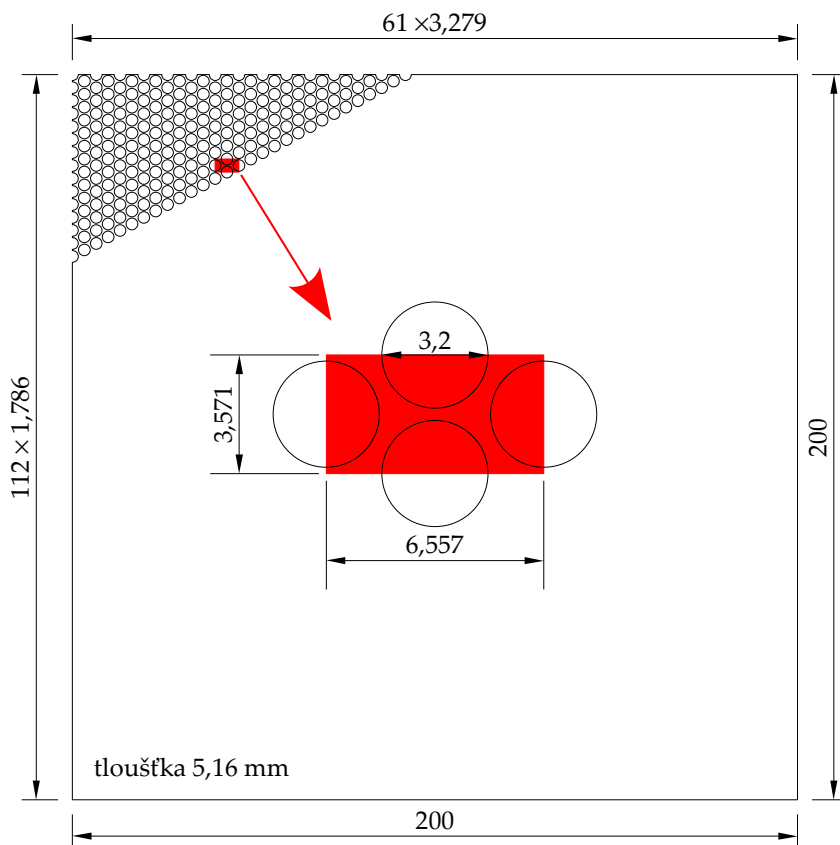
Obrázek A.3: Geometrie perforované desky PWC 3-12



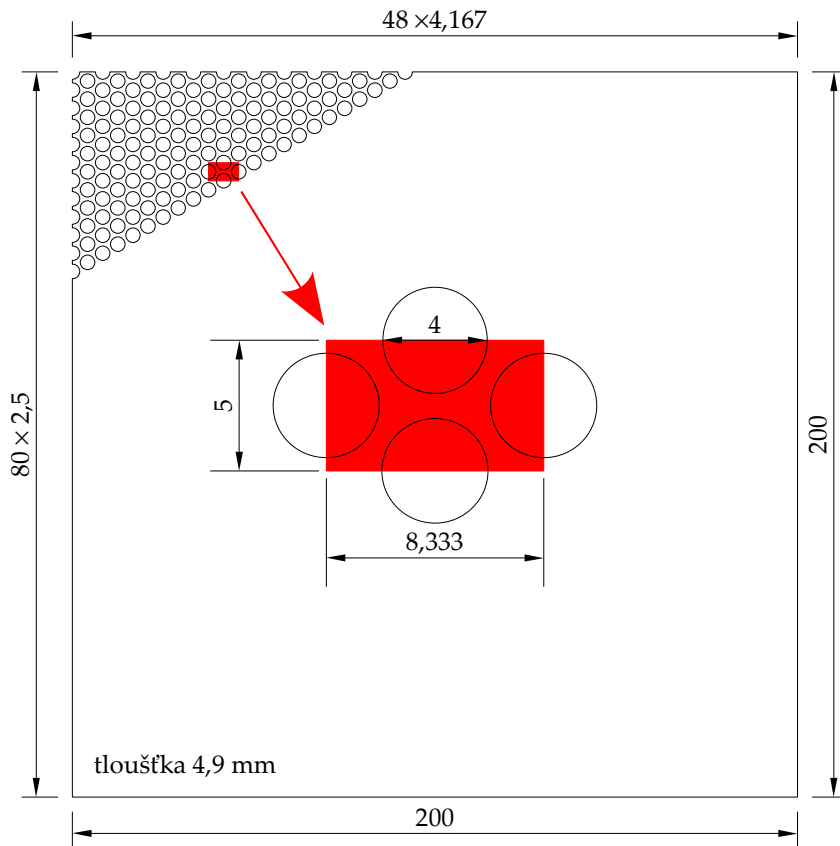
Obrázek A.4: Geometrie perforované desky PWC 4-3



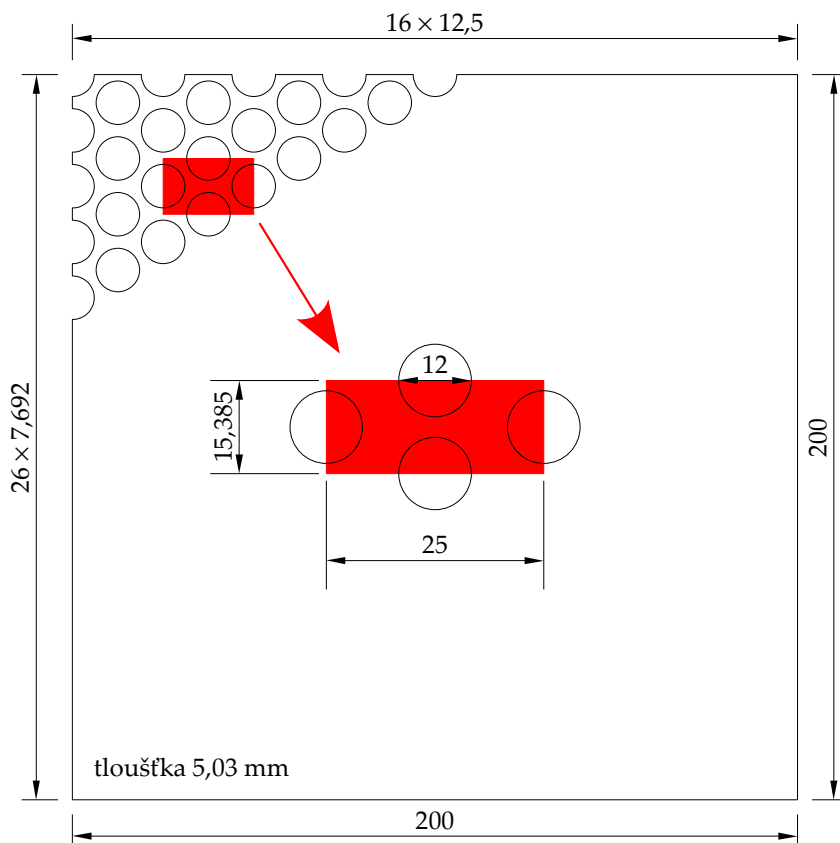
Obrázek A.5: Geometrie perforované desky PWC 4-12



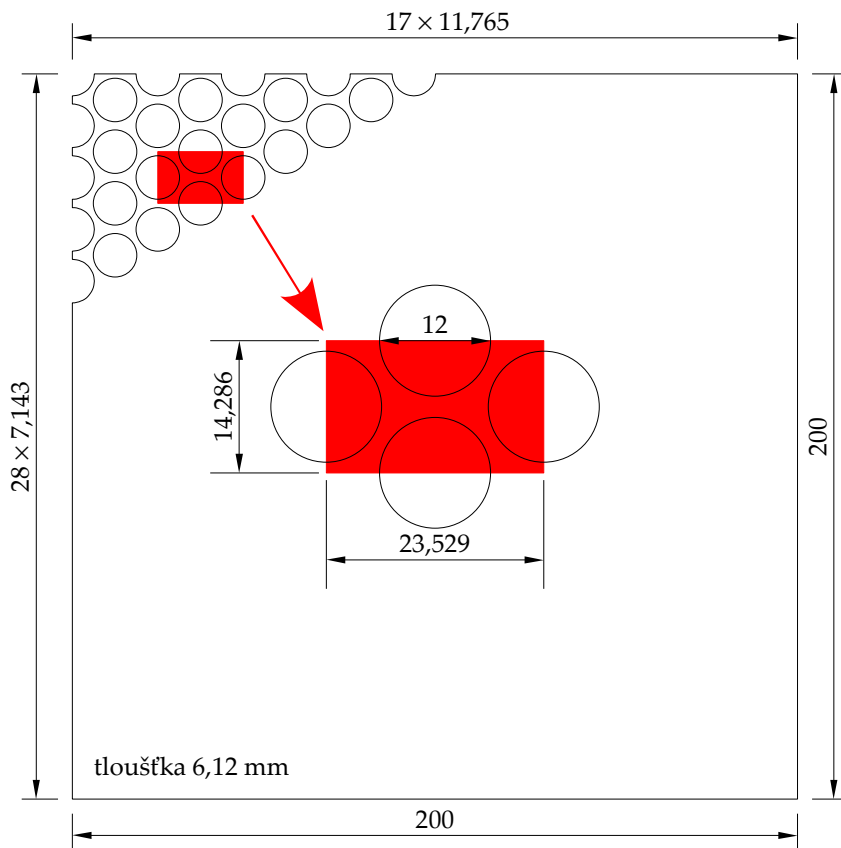
Obrázek A.6: Geometrie perforované desky PWC 5-3



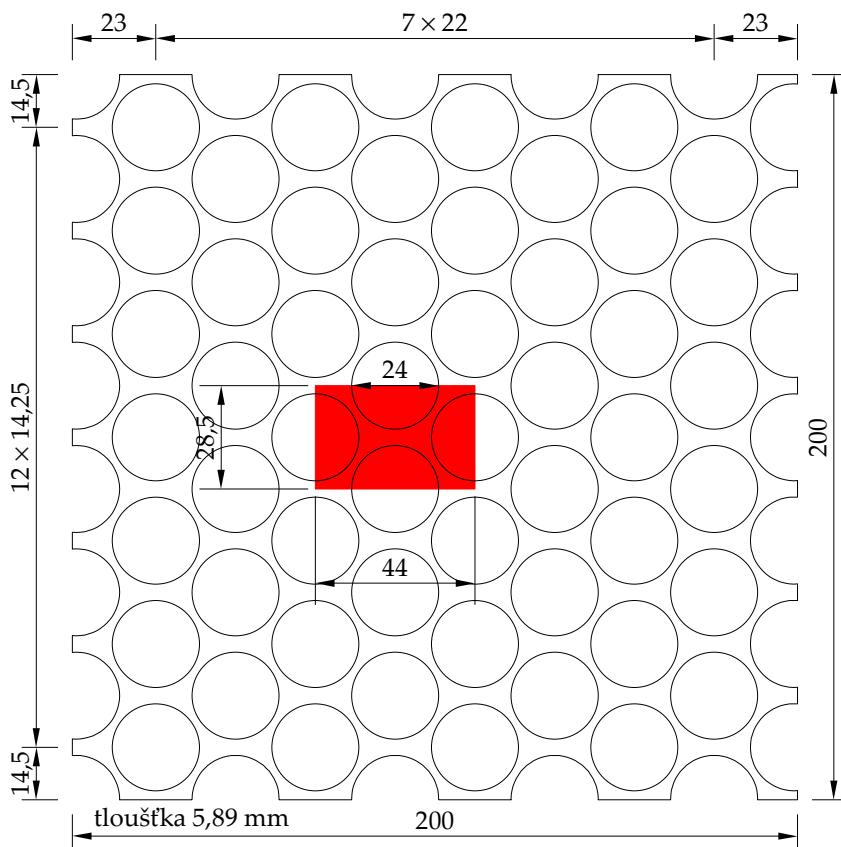
Obrázek A.7: Geometrie perforované desky PWC 5-4



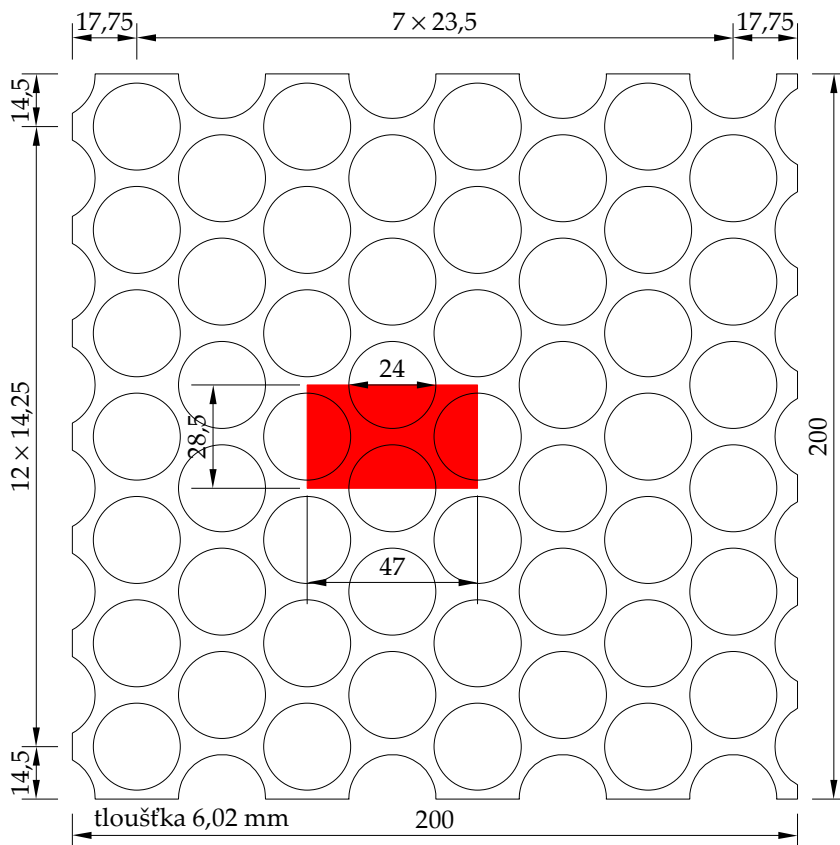
Obrázek A.8: Geometrie perforované desky PWC 5-12



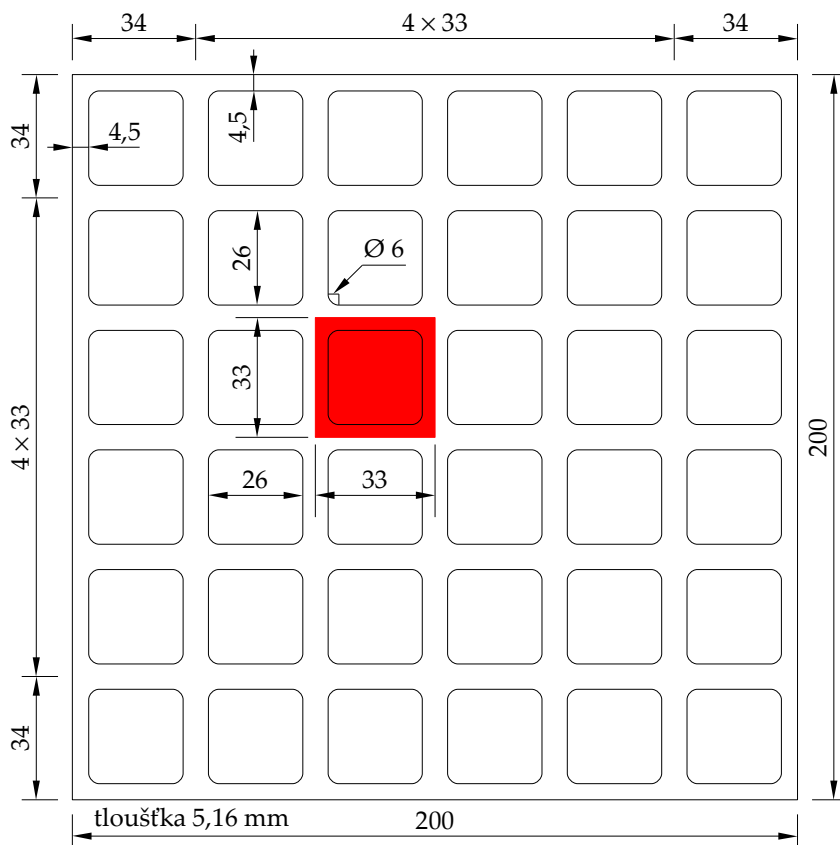
Obrázek A.9: Geometrie perforované desky PWC 6-12



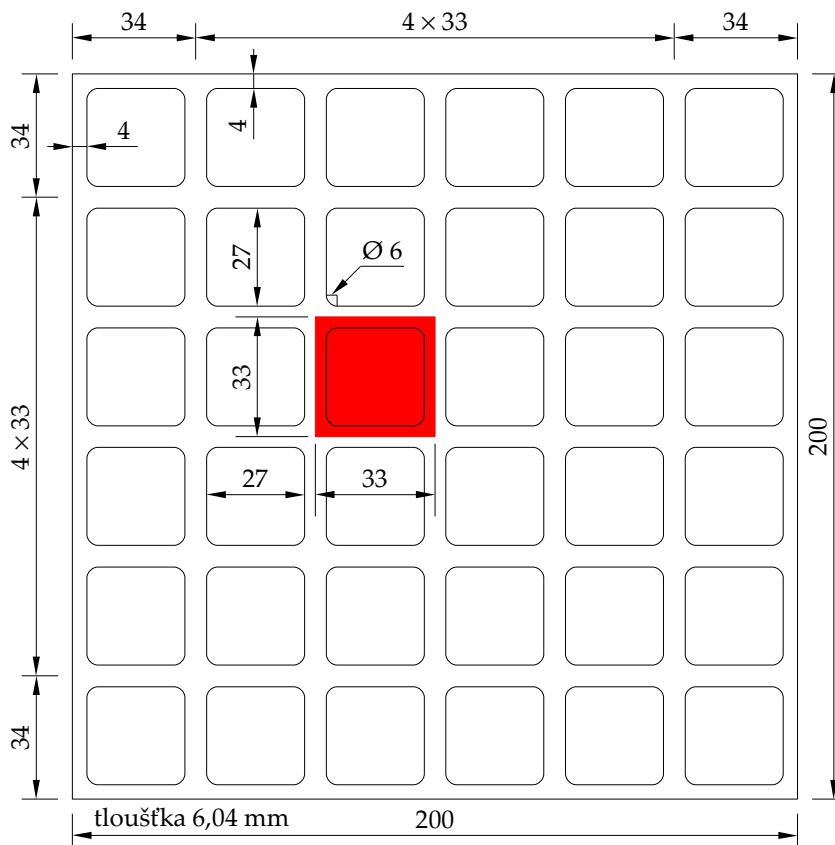
Obrázek A.10: Geometrie perforované desky PWC 6-24a



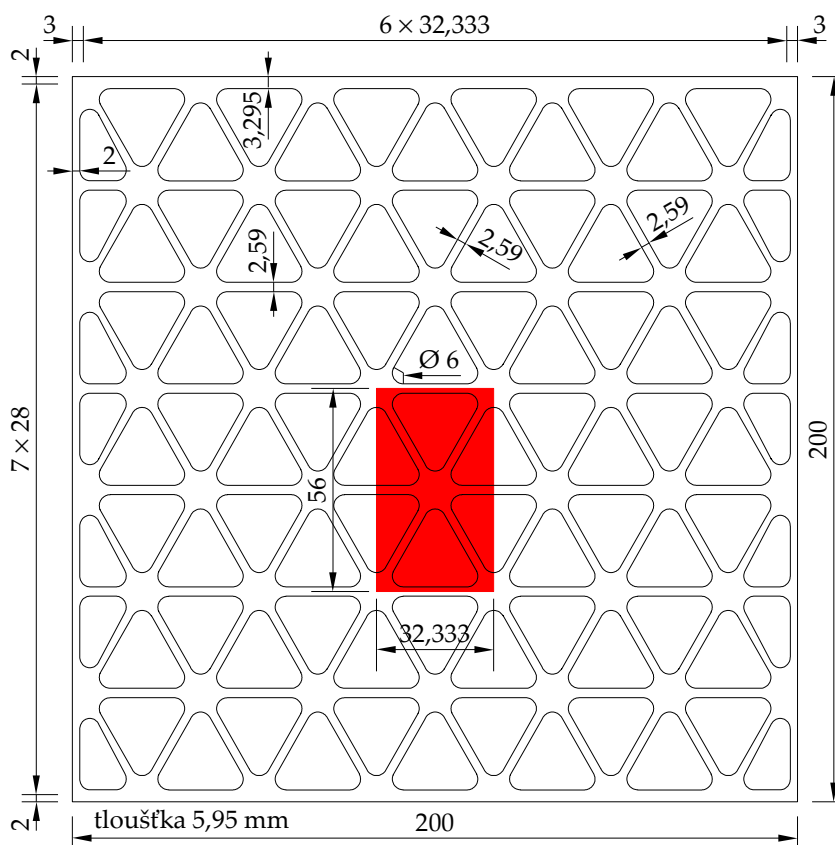
Obrázek A.11: Geometrie perforované desky PWC 6-24b



Obrázek A.12: Geometrie perforované desky PWS 5-26



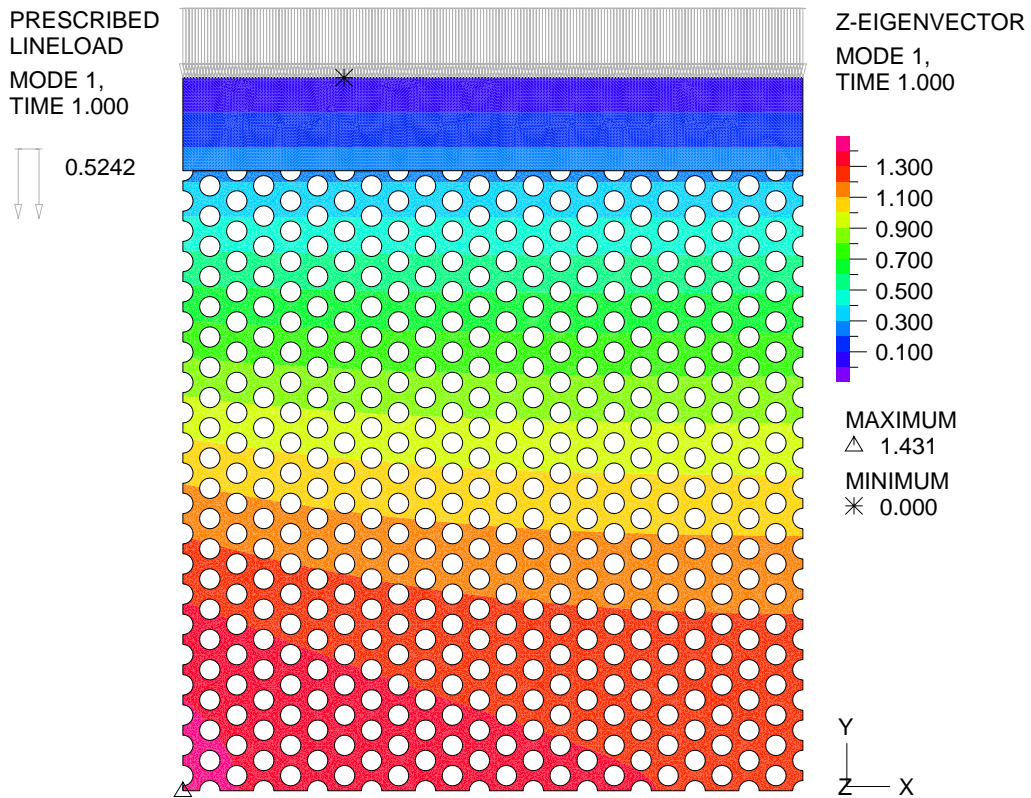
Obrázek A.13: Geometrie perforované desky PWS 6-27



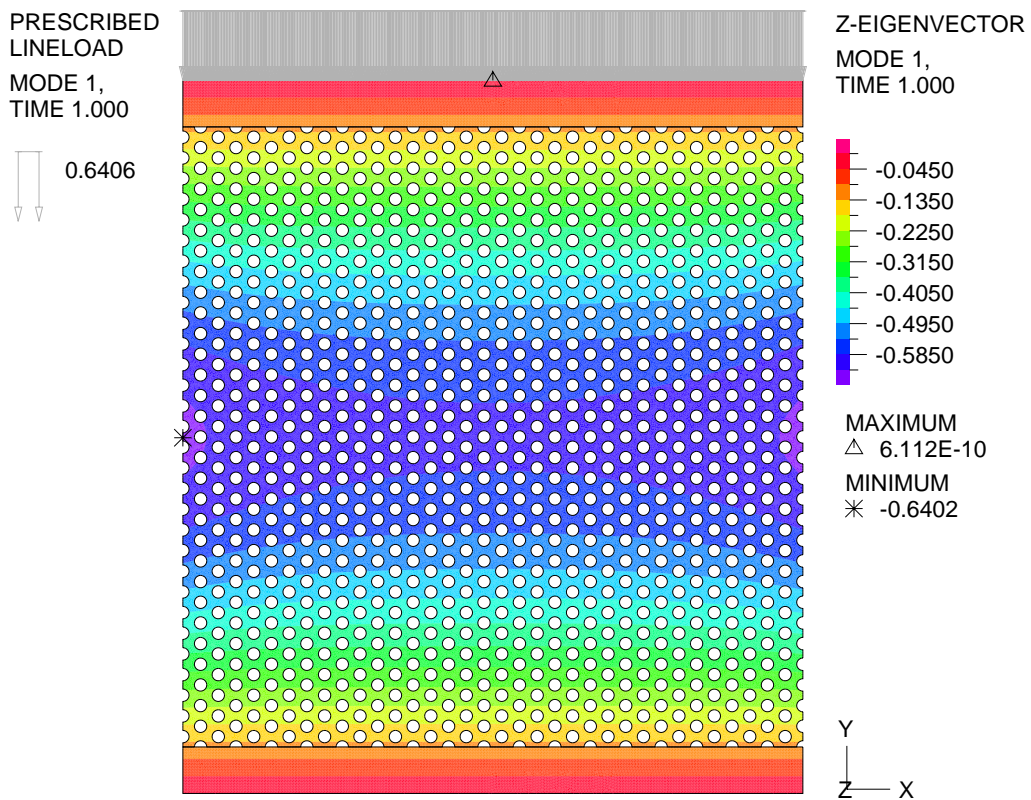
Obrázek A.14: Geometrie perforované desky PWT 6-20

Příloha B

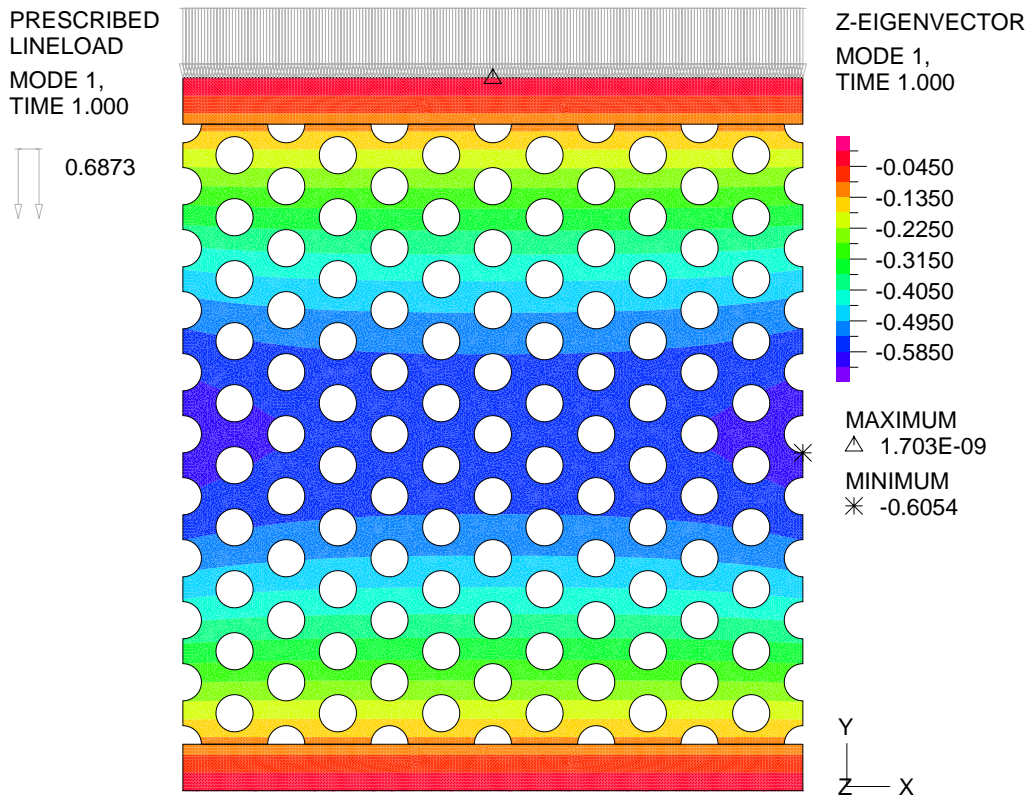
Tvary vybočení perforovaných desek



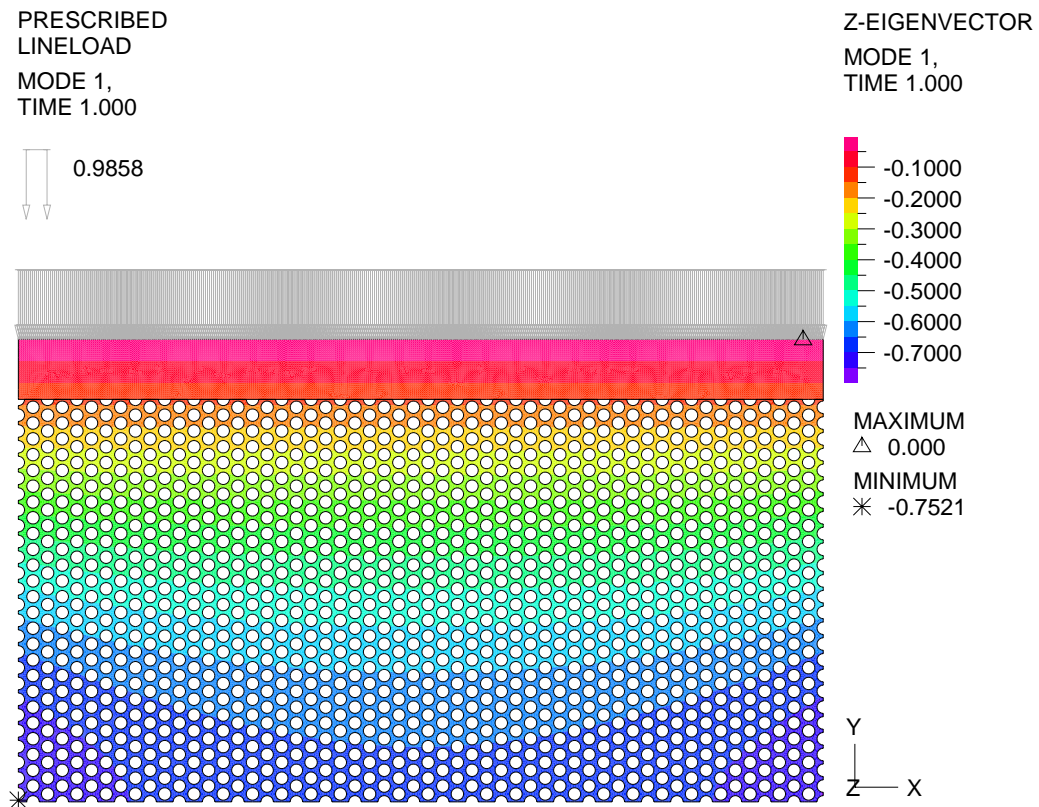
Obrázek B.1: Tvar vybočení PWC 3-3 (čtvrtina konstrukce)



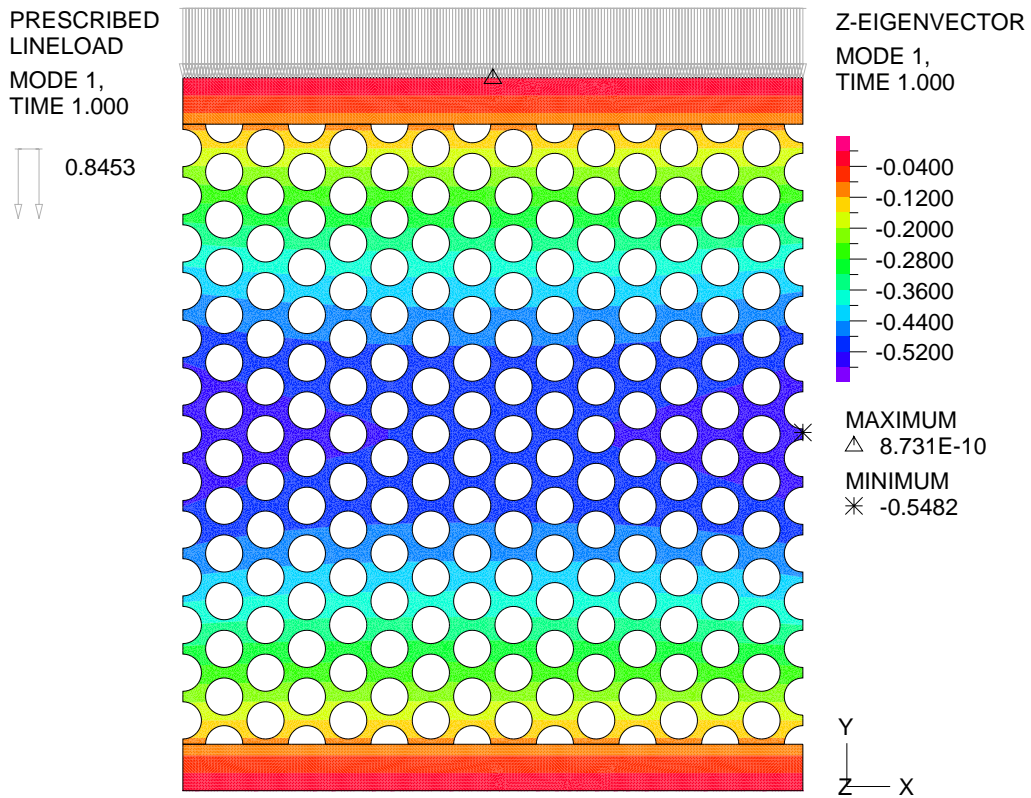
Obrázek B.2: Tvar vybočení PWC 3-4



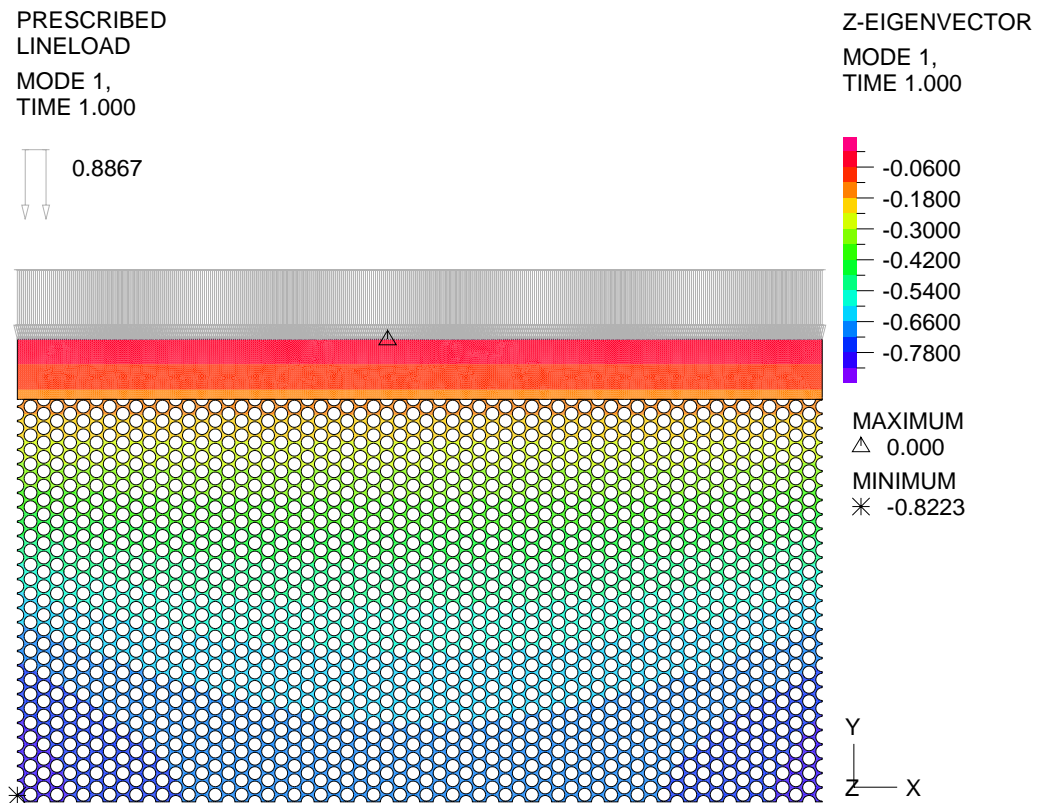
Obrázek B.3: Tvar vybočení PWC 3-12



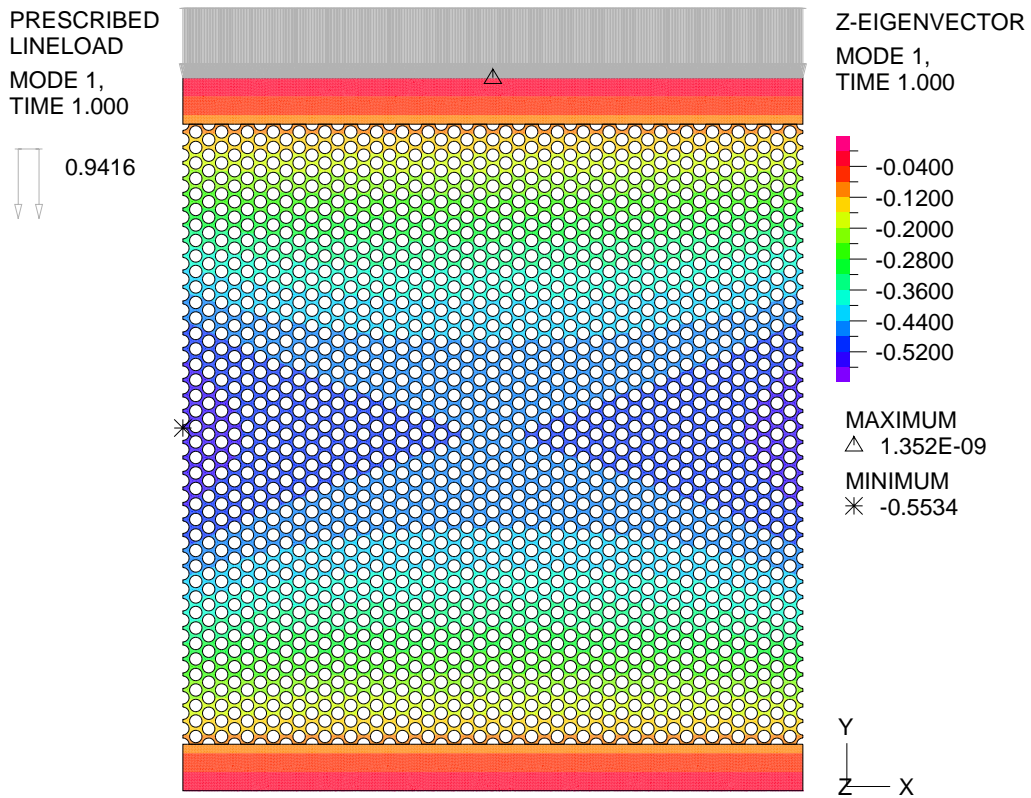
Obrázek B.4: Tvar vybočení PWC 4-3 (polovina konstrukce)



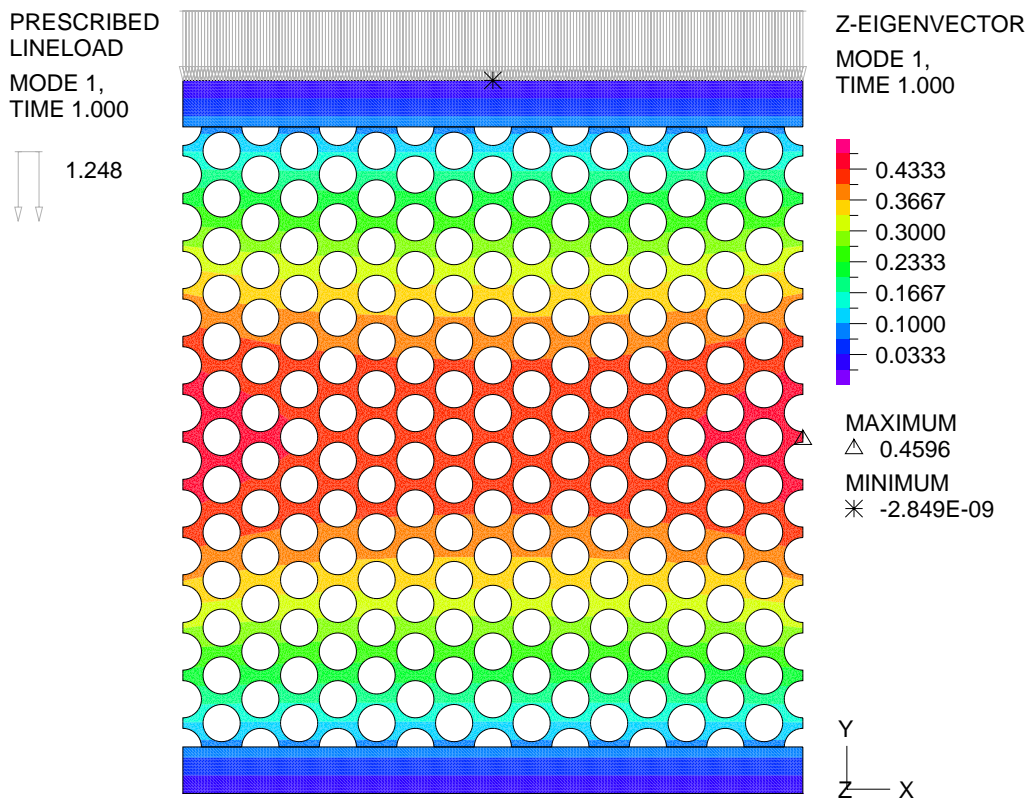
Obrázek B.5: Tvar vybočení PWC 4-12



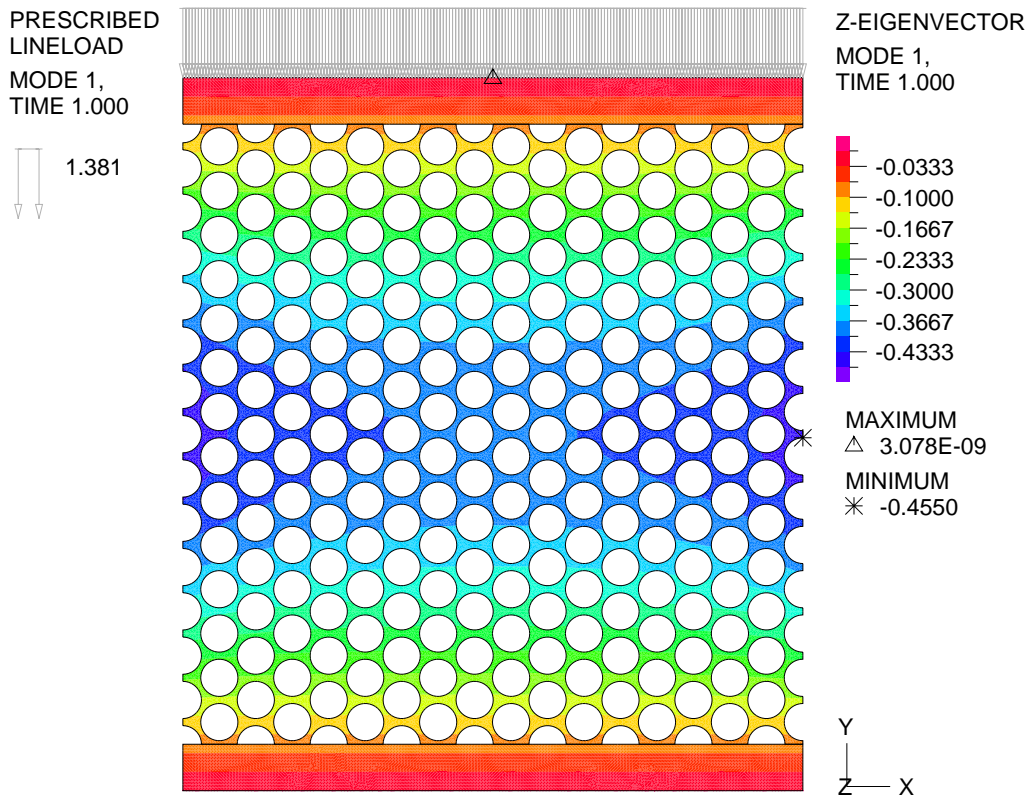
Obrázek B.6: Tvar vybočení PWC 5-3 (polovina konstrukce)



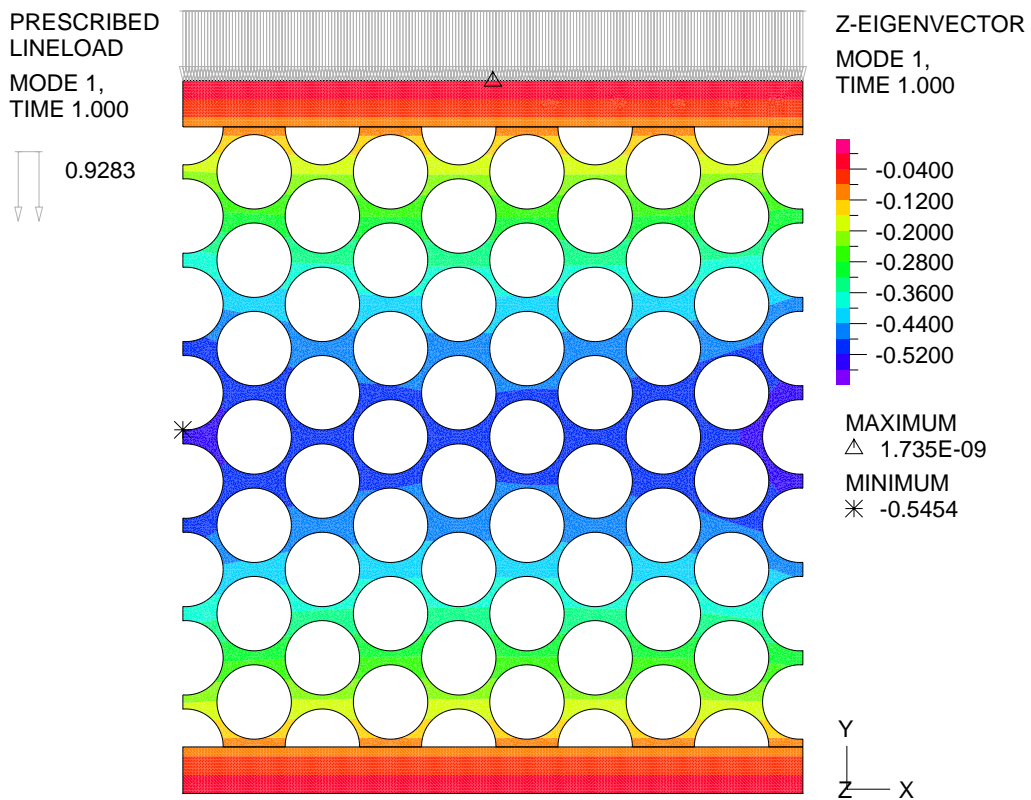
Obrázek B.7: Tvar vybočení PWC 5-4



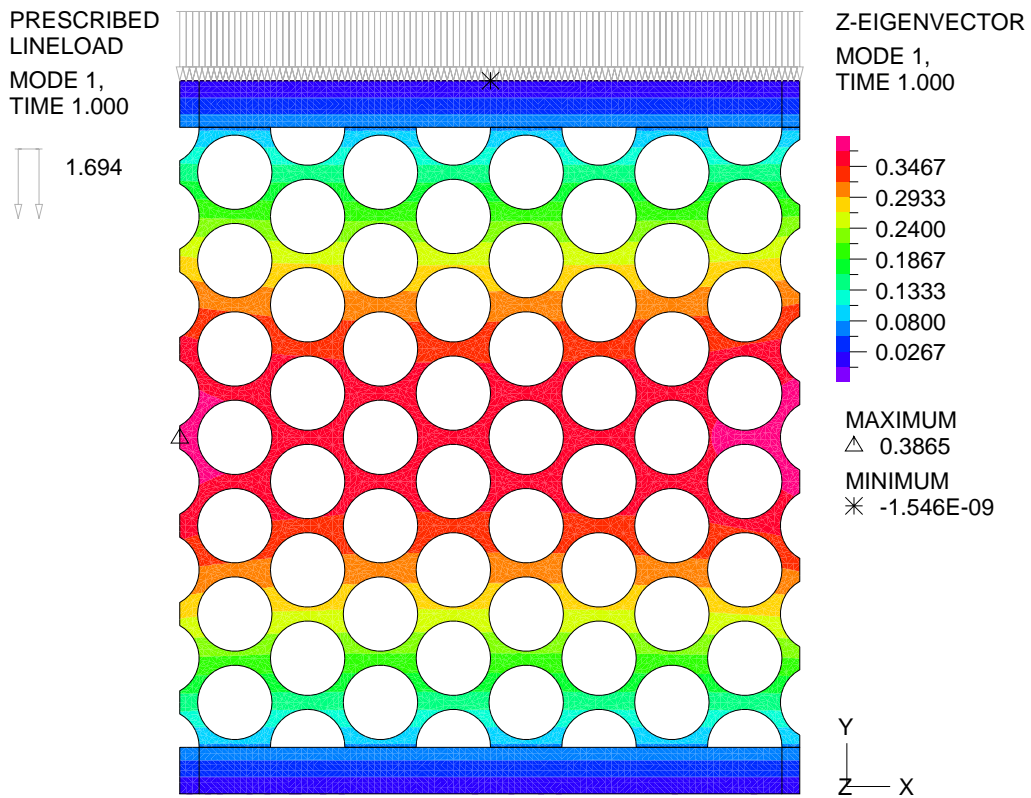
Obrázek B.8: Tvar vybočení PWC 5-12



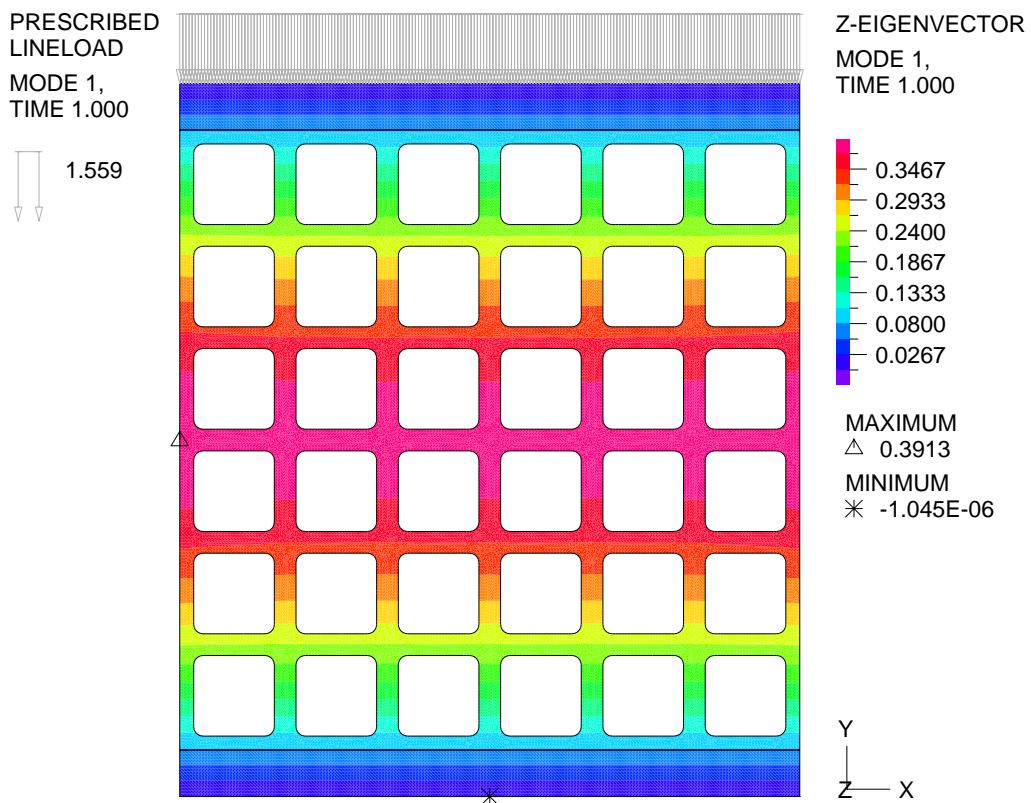
Obrázek B.9: Tvar vybočení PWC 6-12



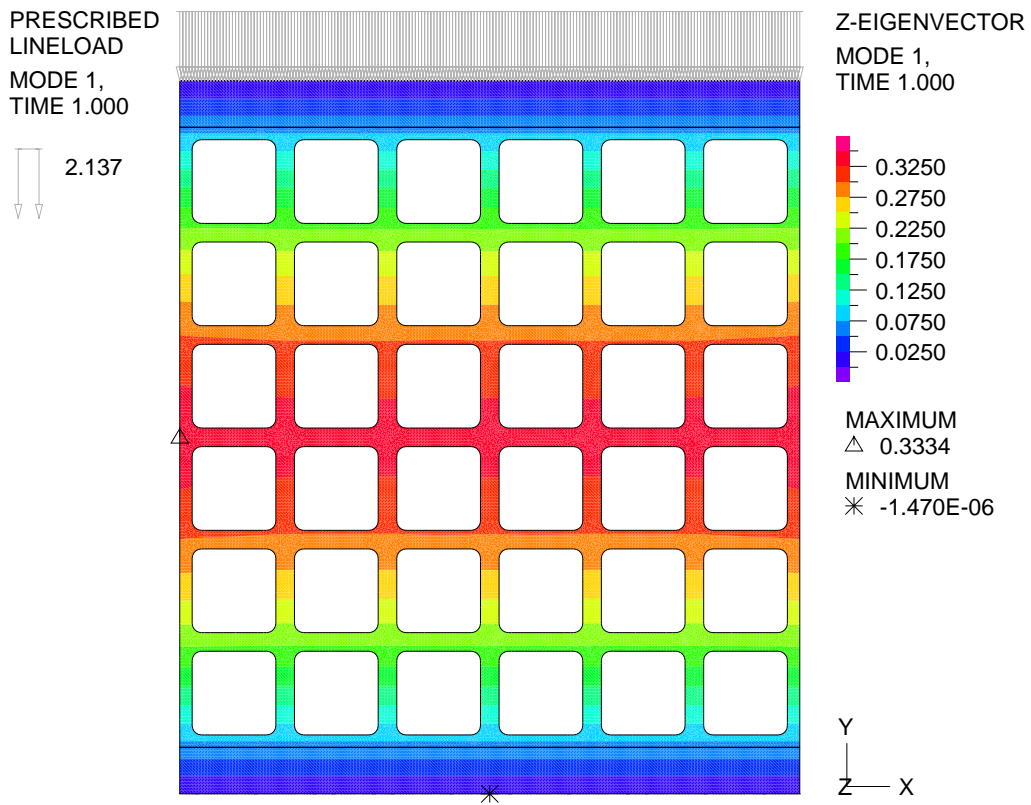
Obrázek B.10: Tvar vybočení PWC 6-24a



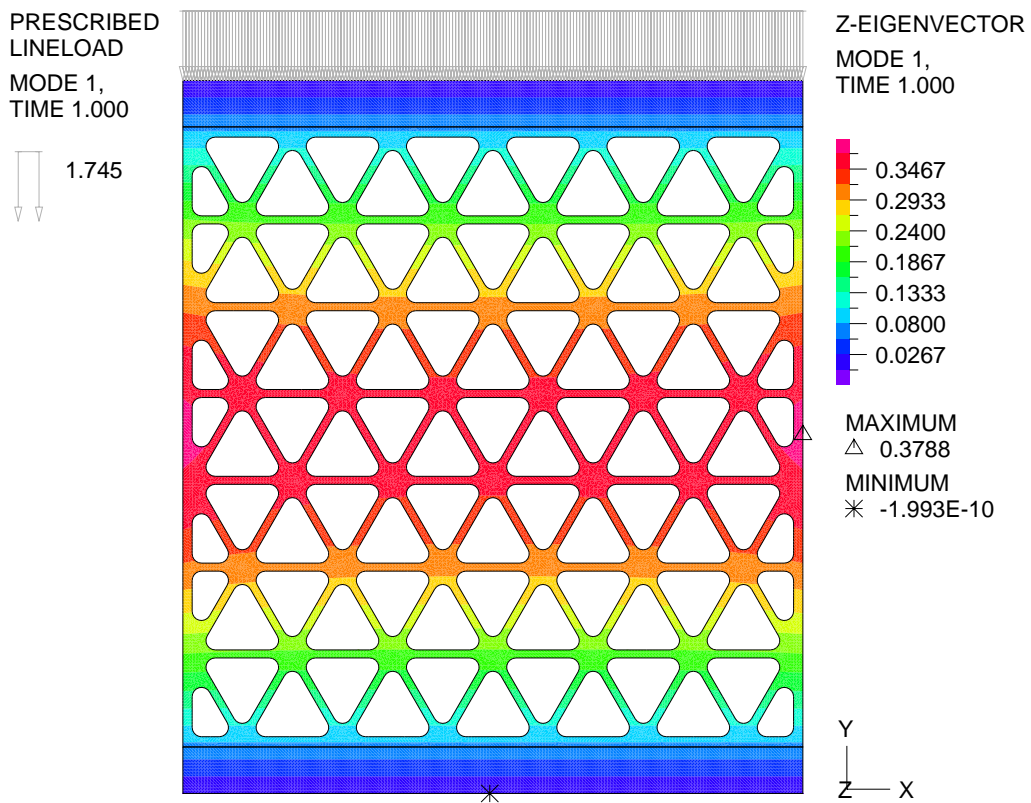
Obrázek B.11: Tvar vybočení PWC 6-24b



Obrázek B.12: Tvar vybočení PWS 5-26



Obrázek B.13: Tvar vybočení PWS 6-27



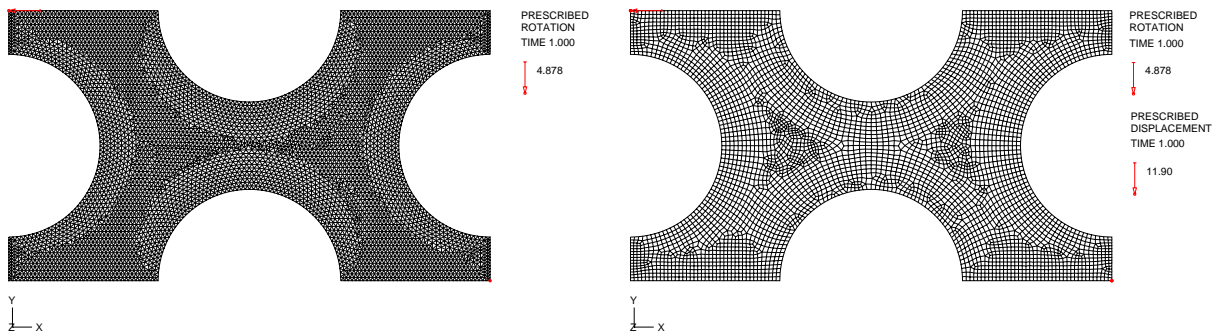
Obrázek B.14: Tvar vybočení PWT 6-20

Příloha C

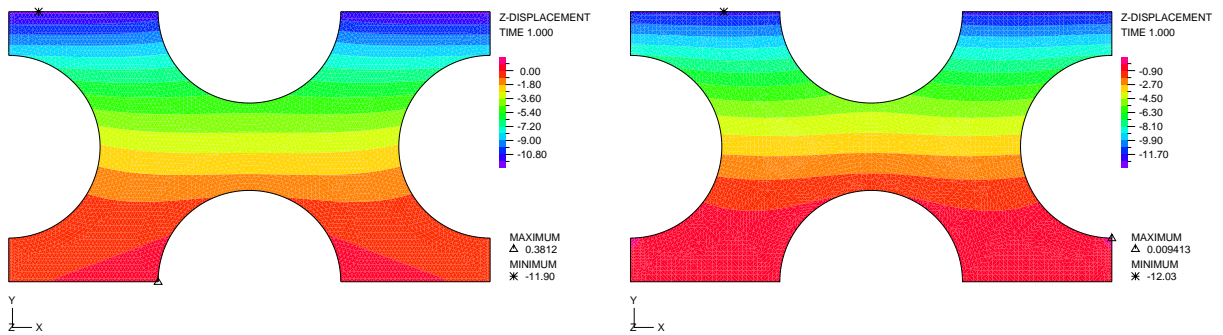
Odezva jednotkových buněk

Kirchhoff

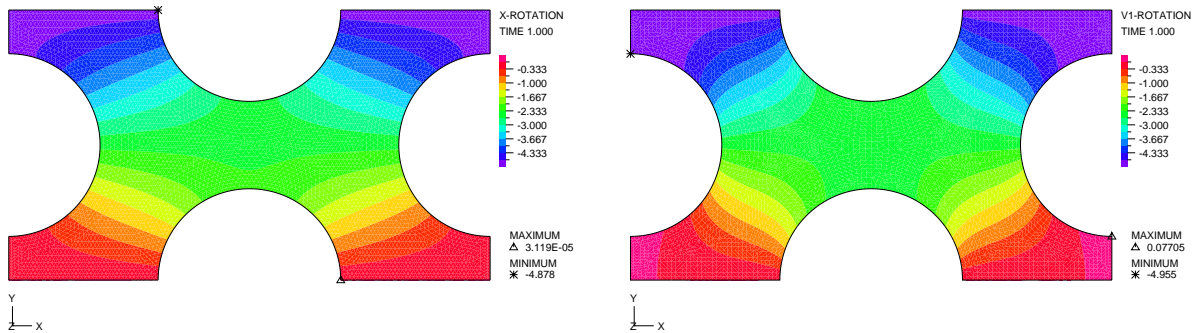
Mindlin



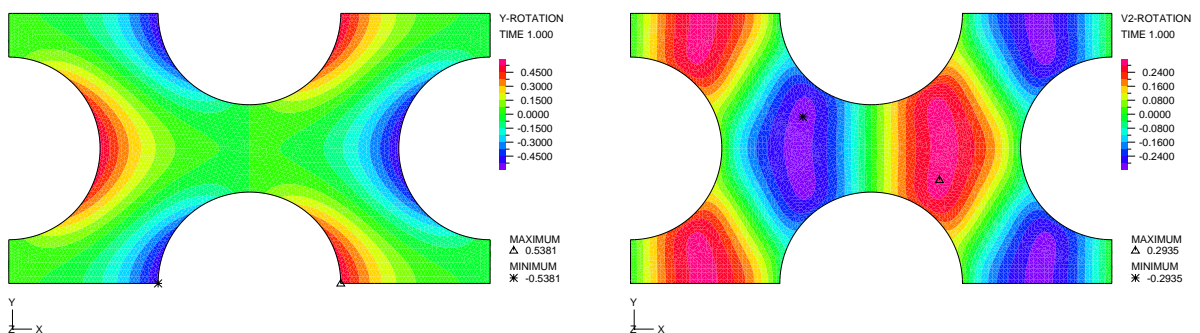
(a) síť konečných prvků a zatížení



(b) průhyb ve směru osy z



(c) pootočení kolem osy x

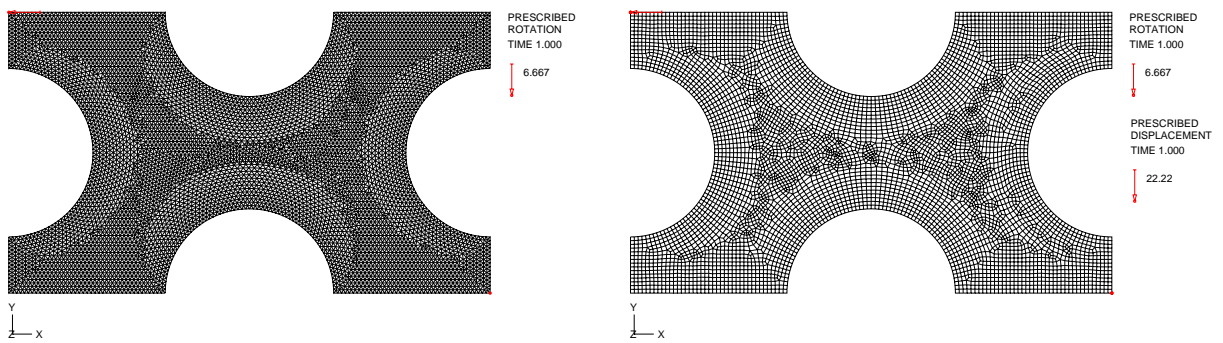


(d) pootočení kolem osy y

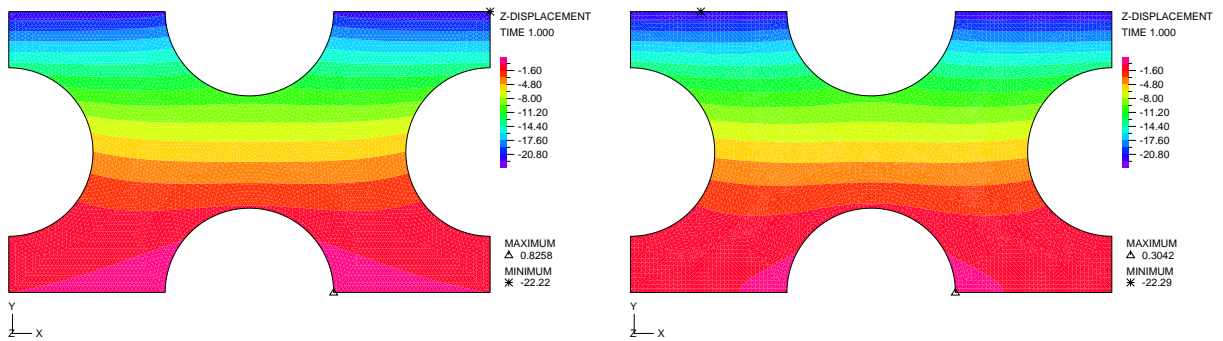
Obrázek C.1: Odezva jednotkové buňky PWC 3-3 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

Kirchhoff

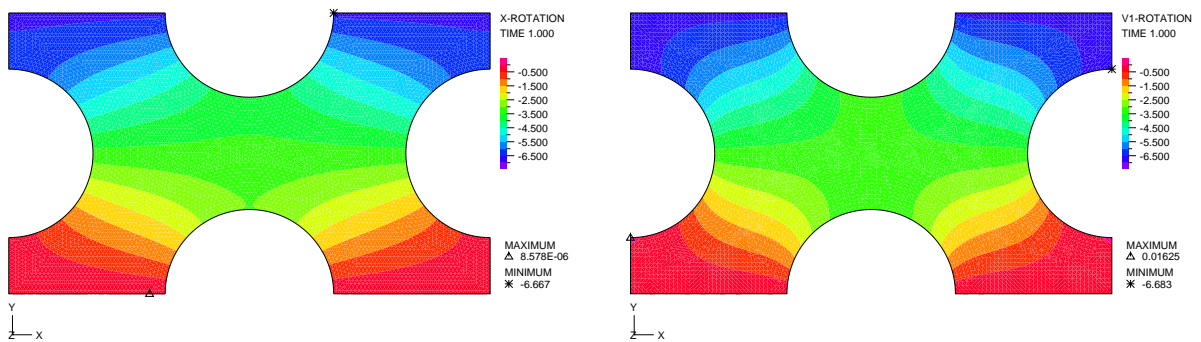
Mindlin



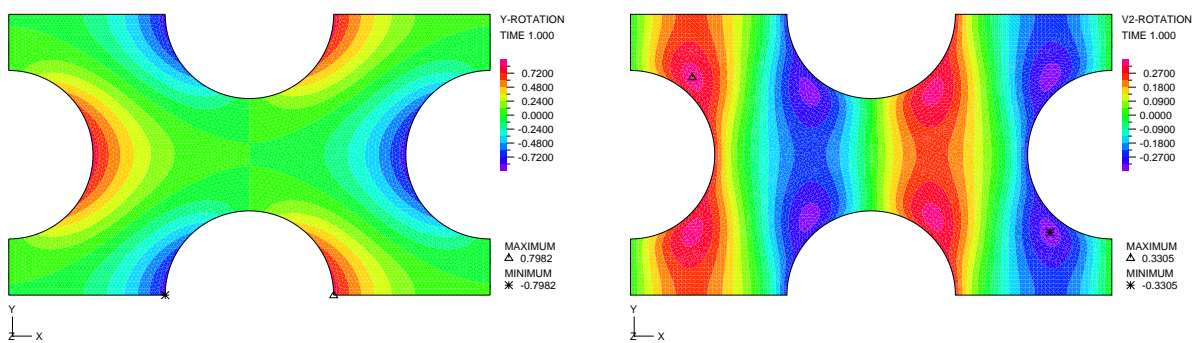
(a) síť konečných prvků a zatížení



(b) průhyb ve směru osy z



(c) pootočení kolem osy x

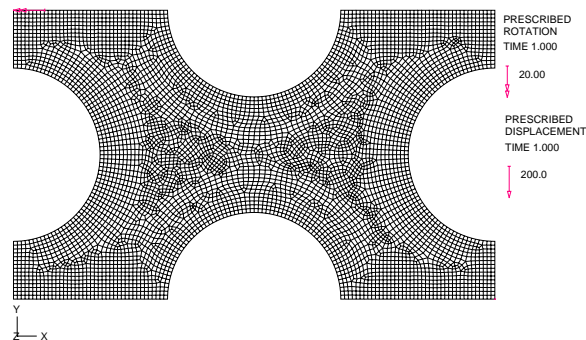
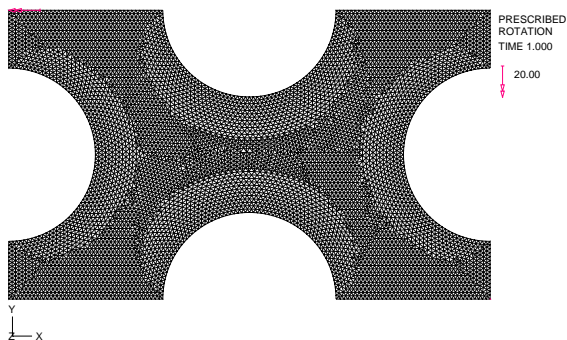


(d) pootočení kolem osy y

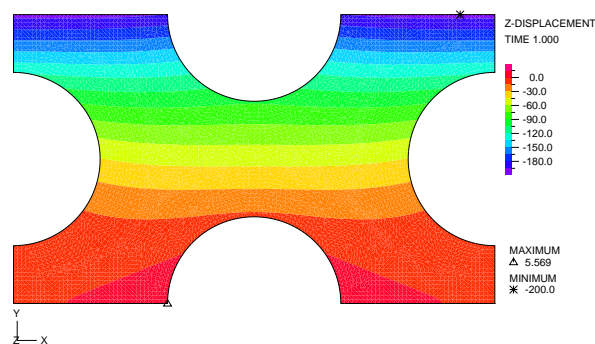
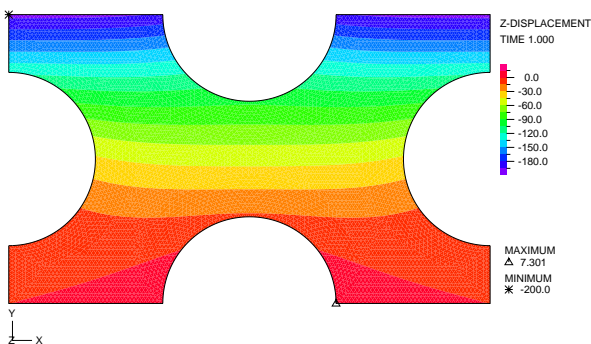
Obrázek C.2: Odezva jednotkové buňky PWC 3-4 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

Kirchhoff

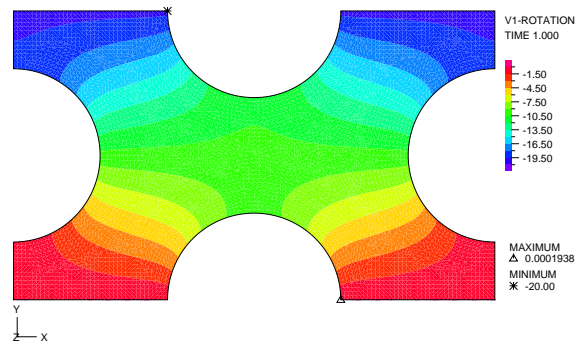
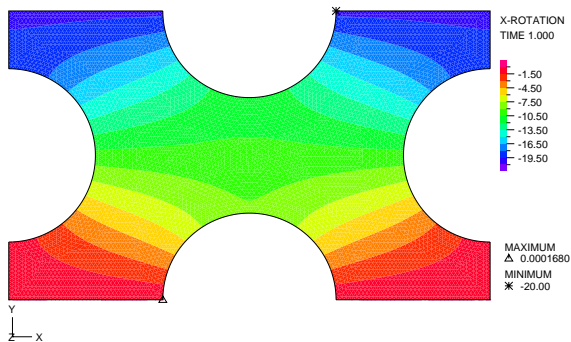
Mindlin



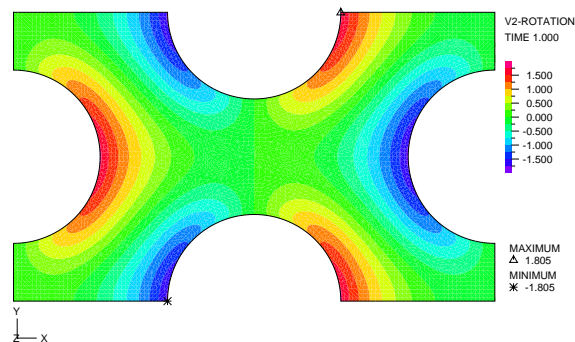
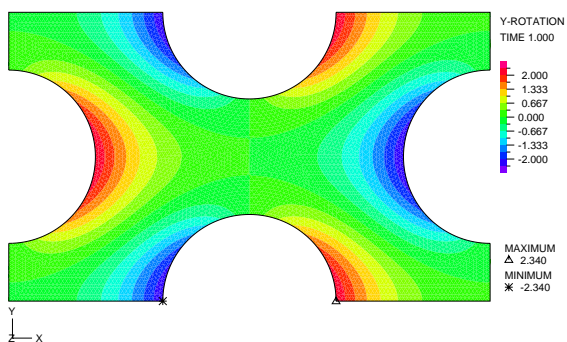
(a) síť konečných prvků a zatížení



(b) průhyb ve směru osy z



(c) pootočení kolem osy x

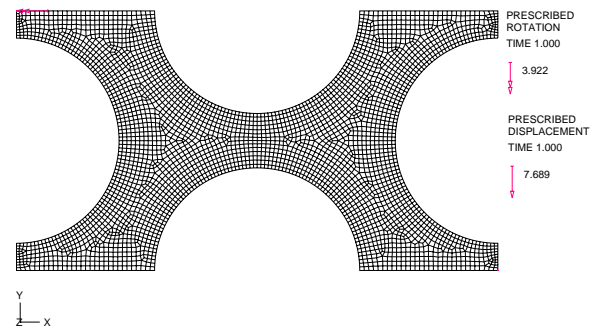
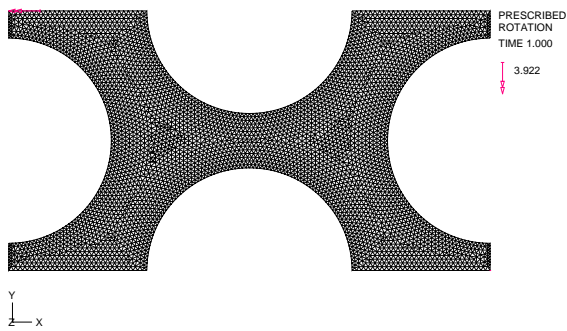


(d) pootočení kolem osy y

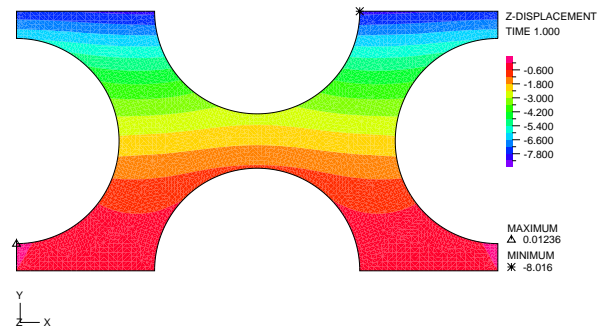
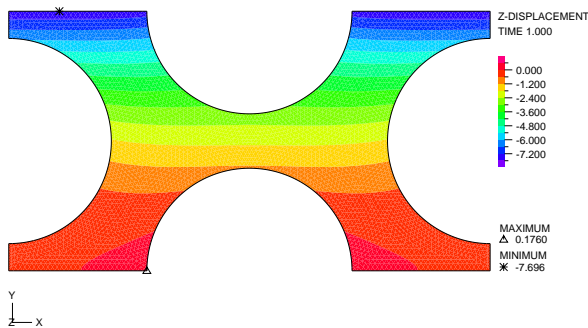
Obrázek C.3: Odezva jednotkové buňky PWC 3-12 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

Kirchhoff

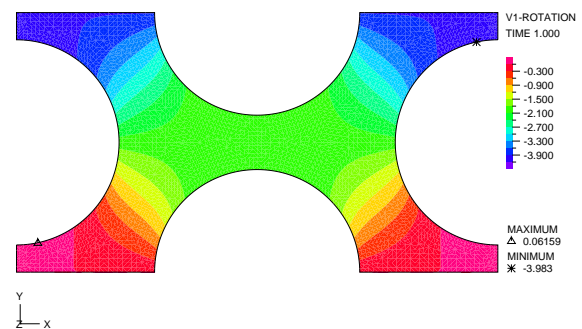
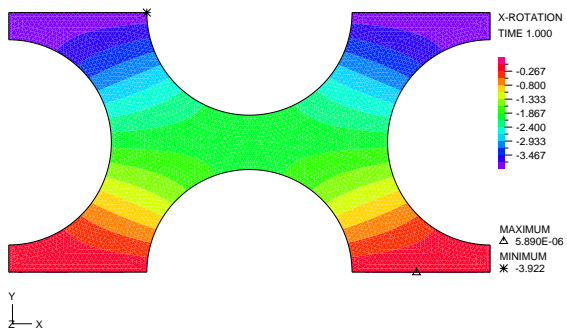
Mindlin



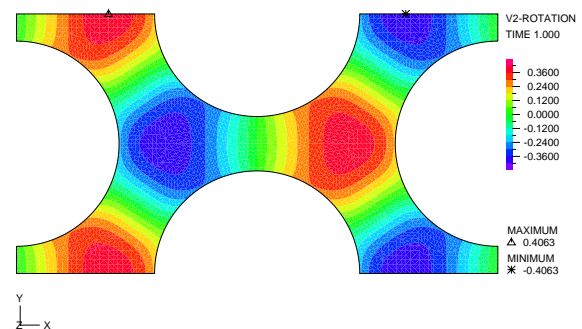
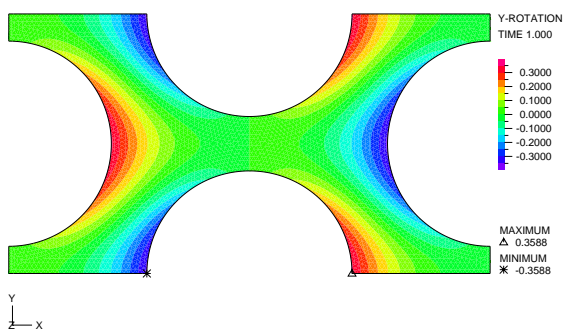
(a) síť konečných prvků a zatížení



(b) průhyb ve směru osy z



(c) pootočení kolem osy x

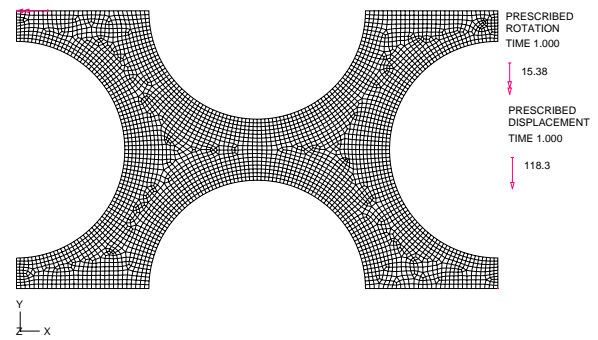
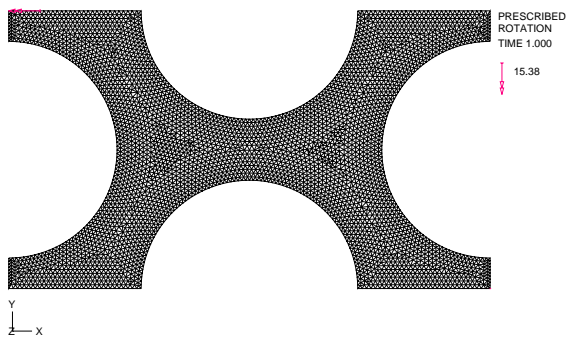


(d) pootočení kolem osy y

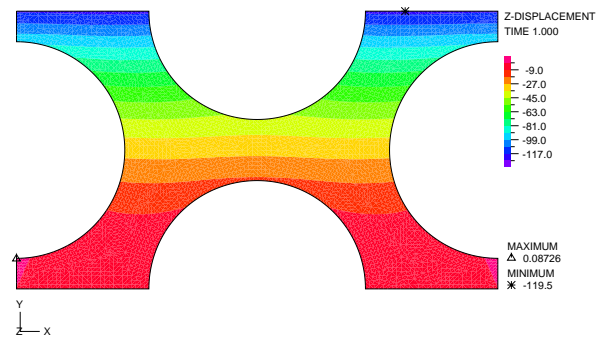
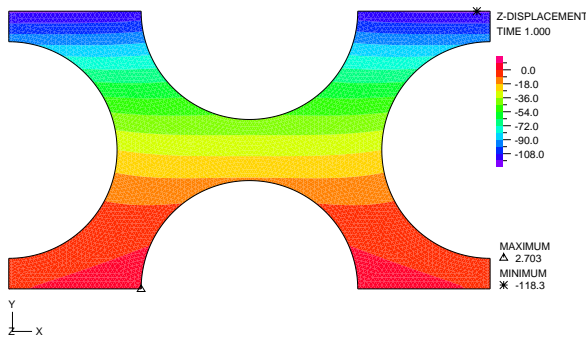
Obrázek C.4: Odezva jednotkové buňky PWC 4-3 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

Kirchhoff

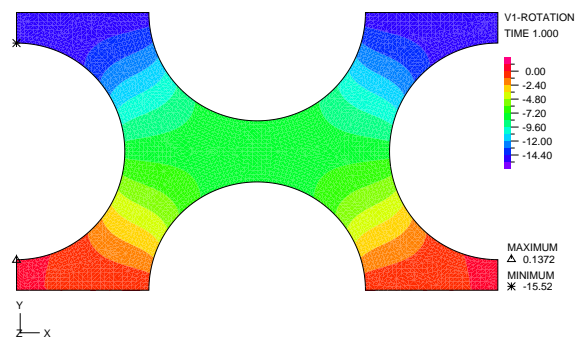
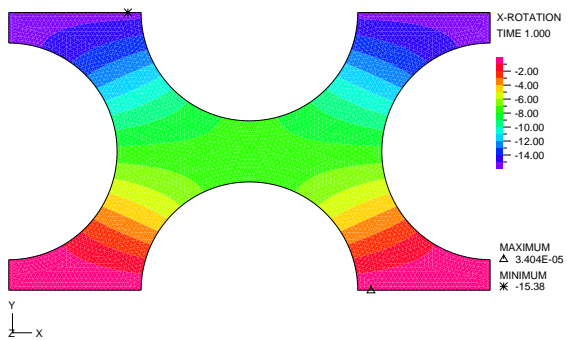
Mindlin



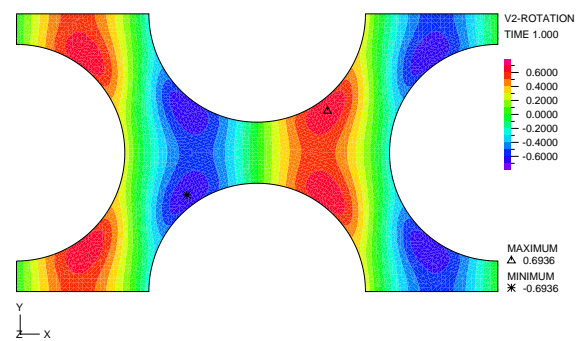
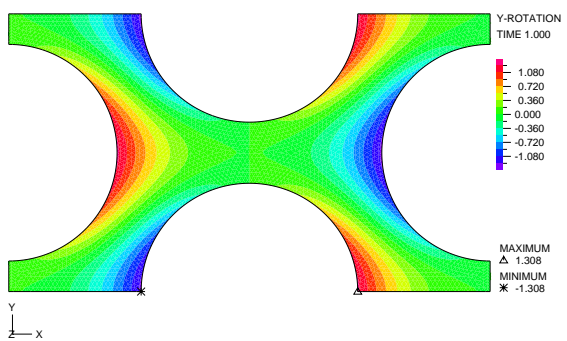
(a) síť konečných prvků a zatížení



(b) průhyb ve směru osy z



(c) pootočení kolem osy x

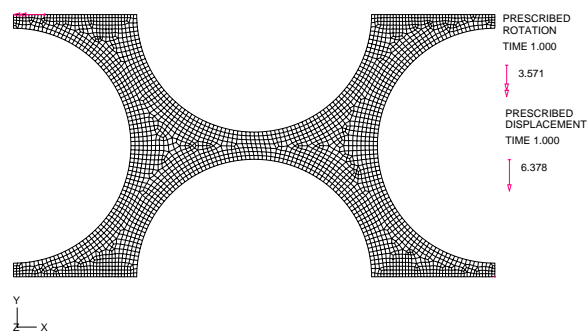
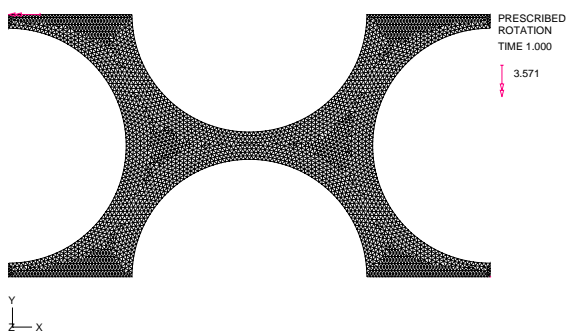


(d) pootočení kolem osy y

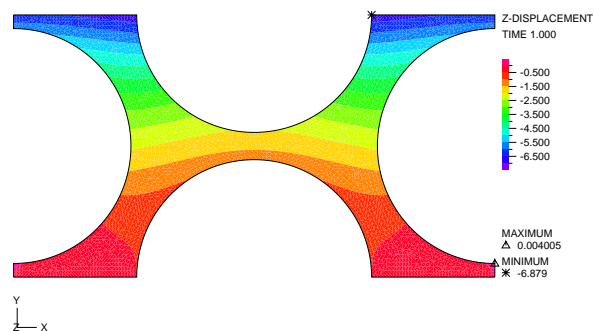
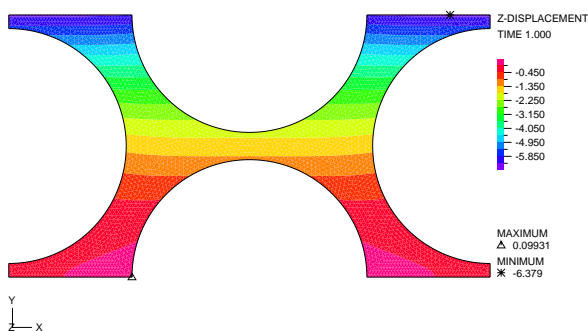
Obrázek C.5: Odezva jednotkové buňky PWC 4-12 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

Kirchhoff

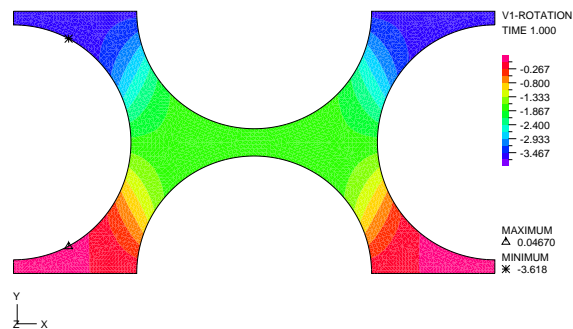
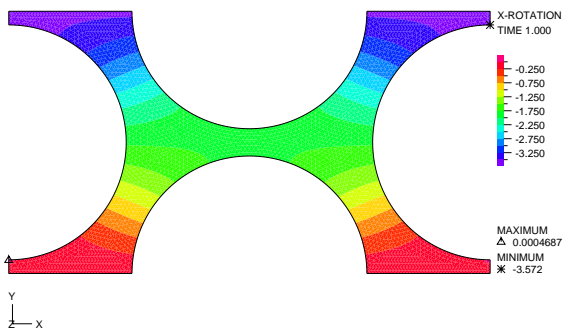
Mindlin



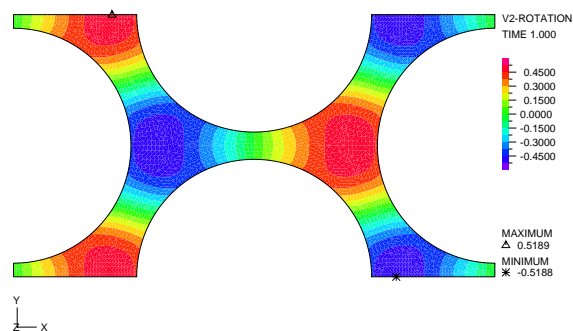
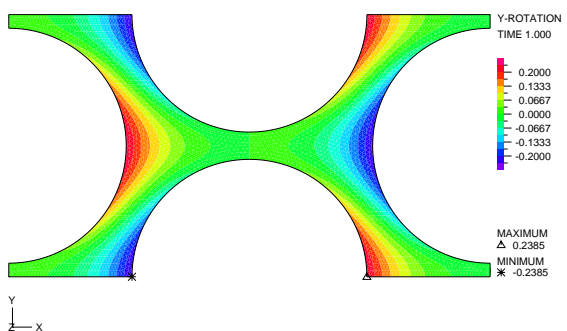
(a) síť konečných prvků a zatížení



(b) průhyb ve směru osy z



(c) pootočení kolem osy x

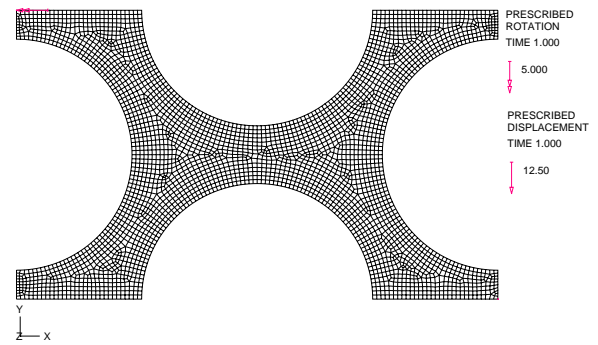
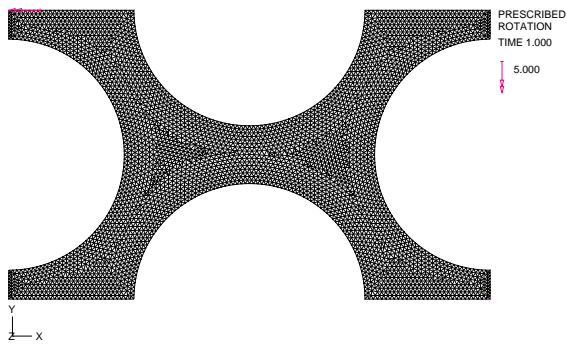


(d) pootočení kolem osy y

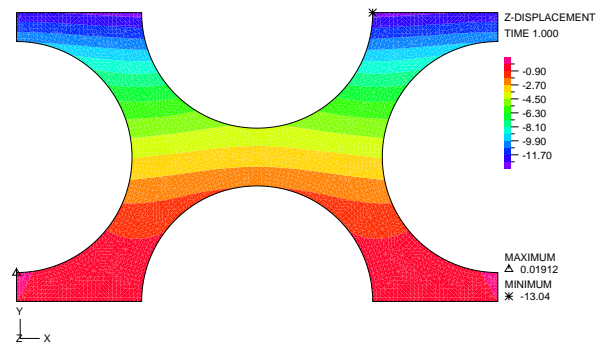
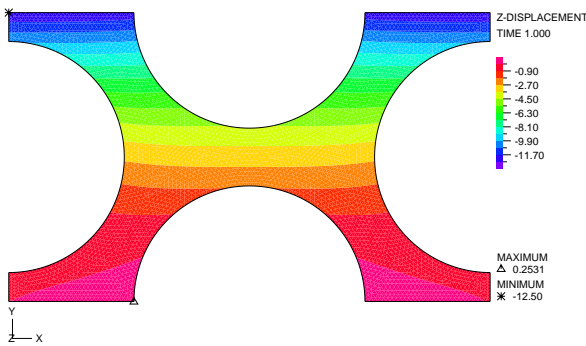
Obrázek C.6: Odezva jednotkové buňky PWC 5-3 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

Kirchhoff

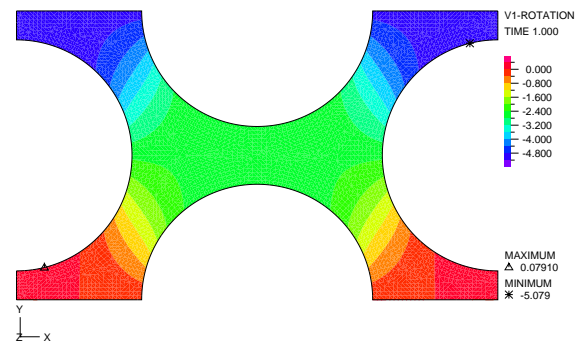
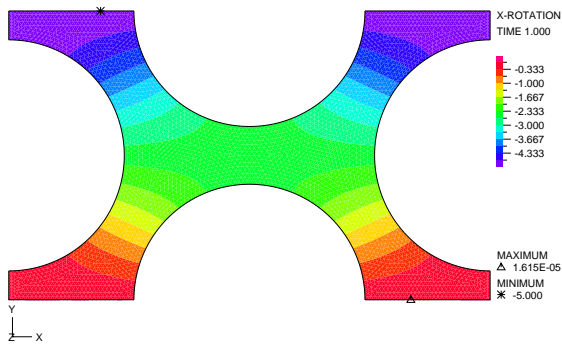
Mindlin



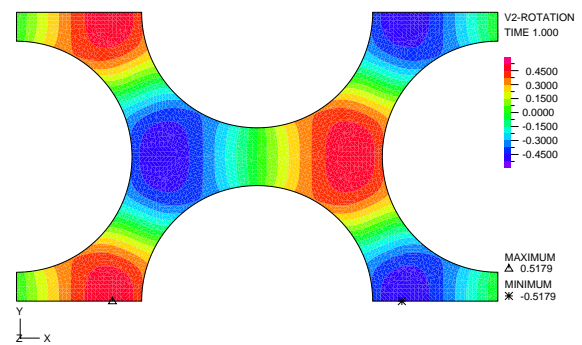
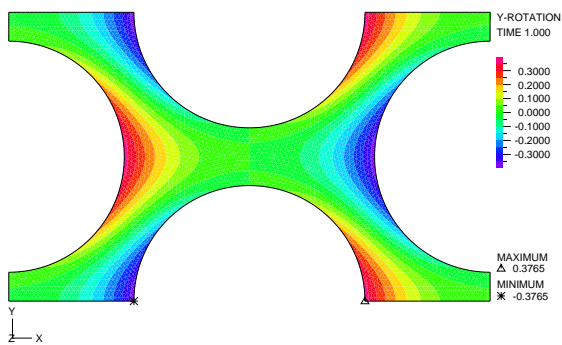
(a) síť konečných prvků a zatížení



(b) průhyb ve směru osy z



(c) pootočení kolem osy x

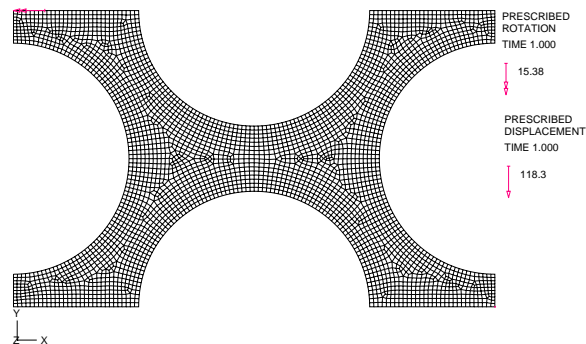
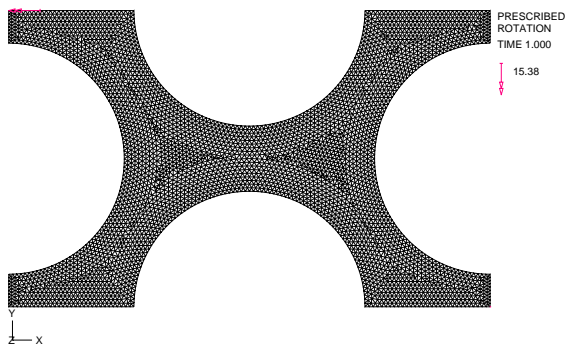


(d) pootočení kolem osy y

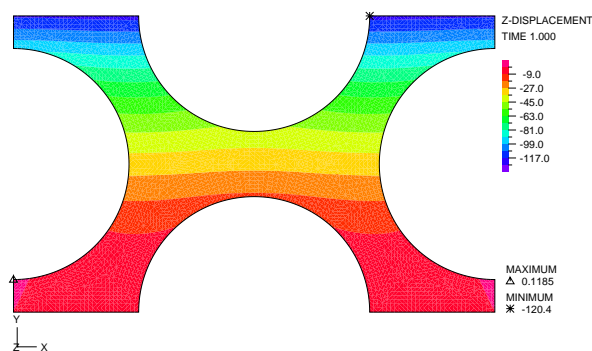
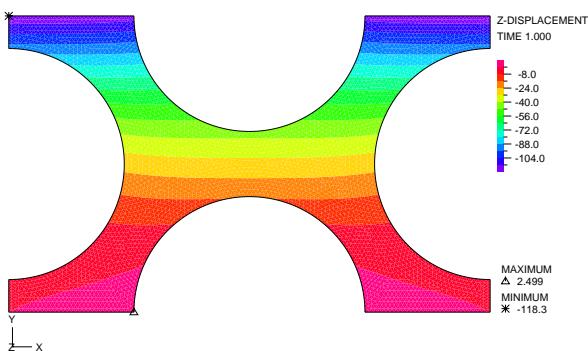
Obrázek C.7: Odezva jednotkové buňky PWC 5-4 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

Kirchhoff

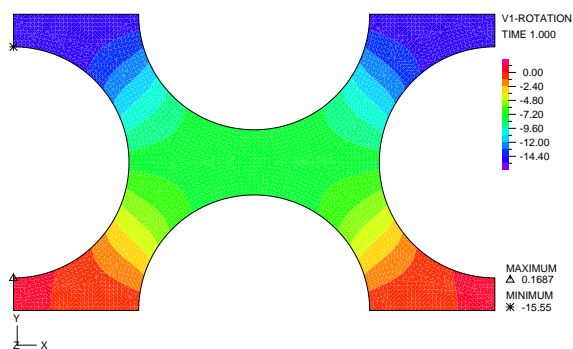
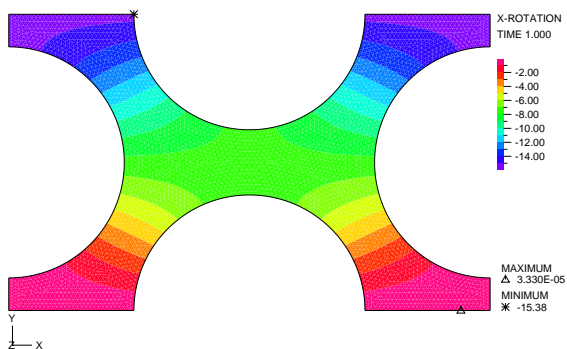
Mindlin



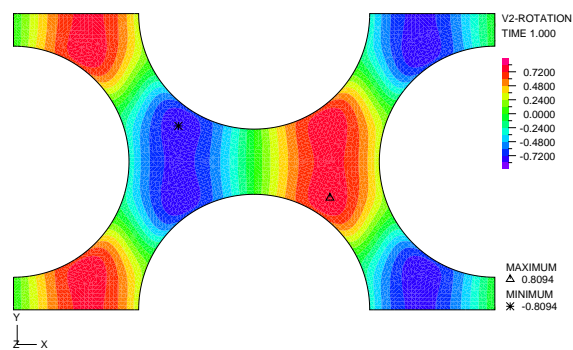
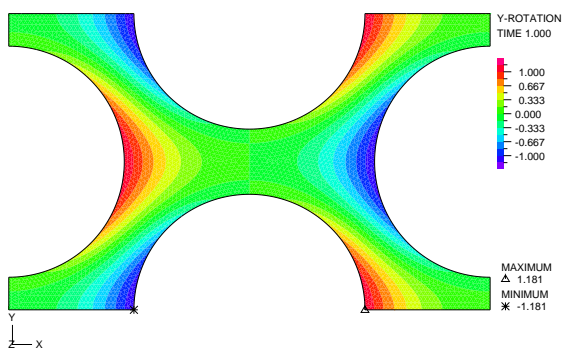
(a) síť konečných prvků a zatížení



(b) průhyb ve směru osy z

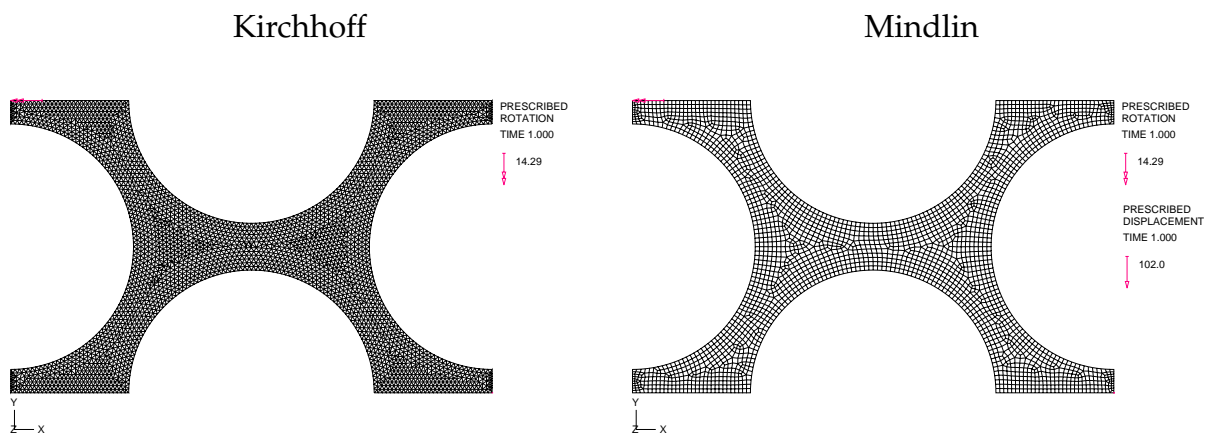


(c) pootočení kolem osy x

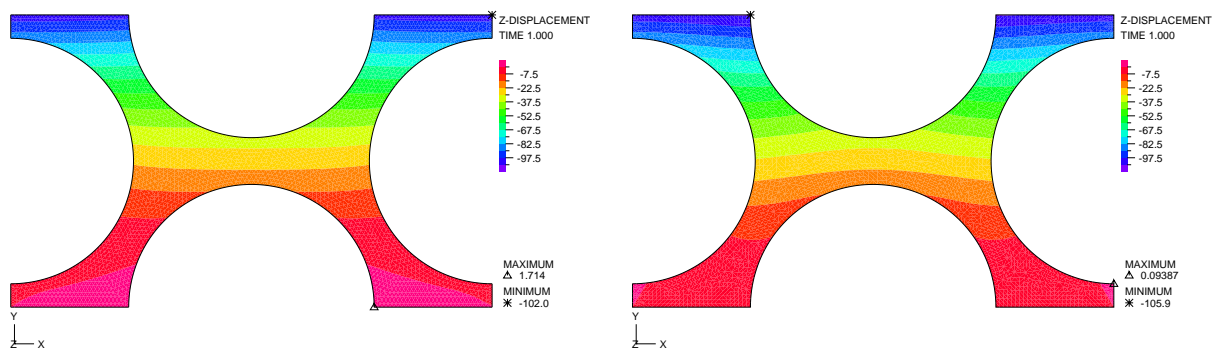


(d) pootočení kolem osy y

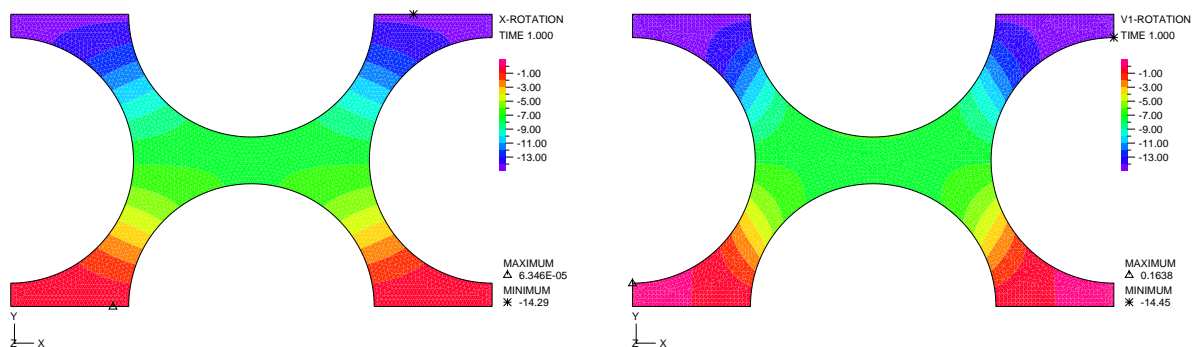
Obrázek C.8: Odezva jednotkové buňky PWC 5-12 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$



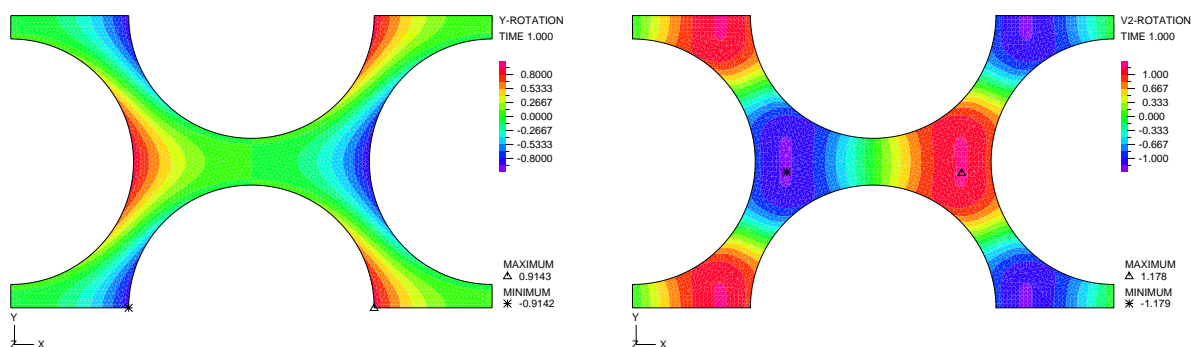
(a) síť konečných prvků a zatížení



(b) průhyb ve směru osy z

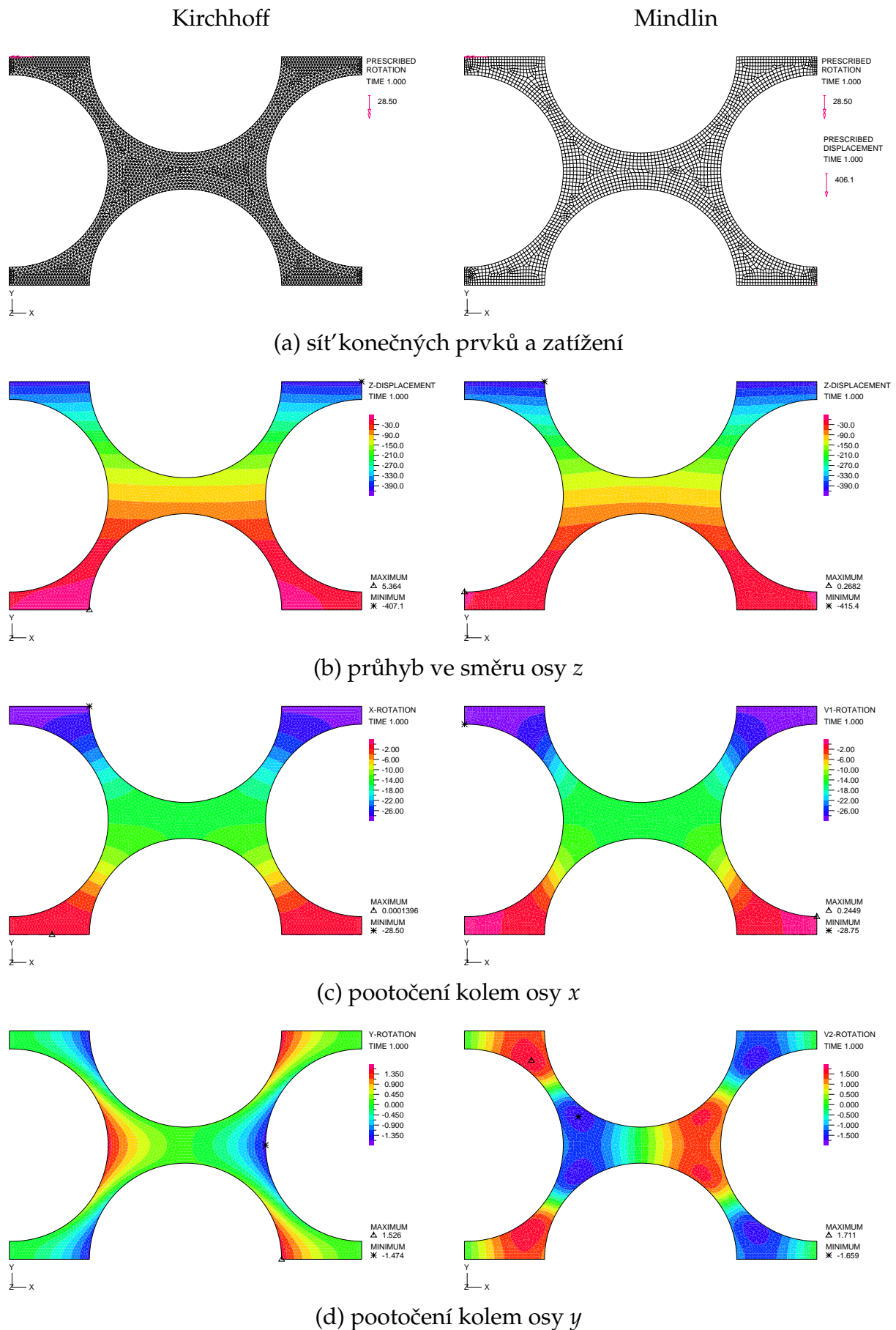


(c) pootočení kolem osy x

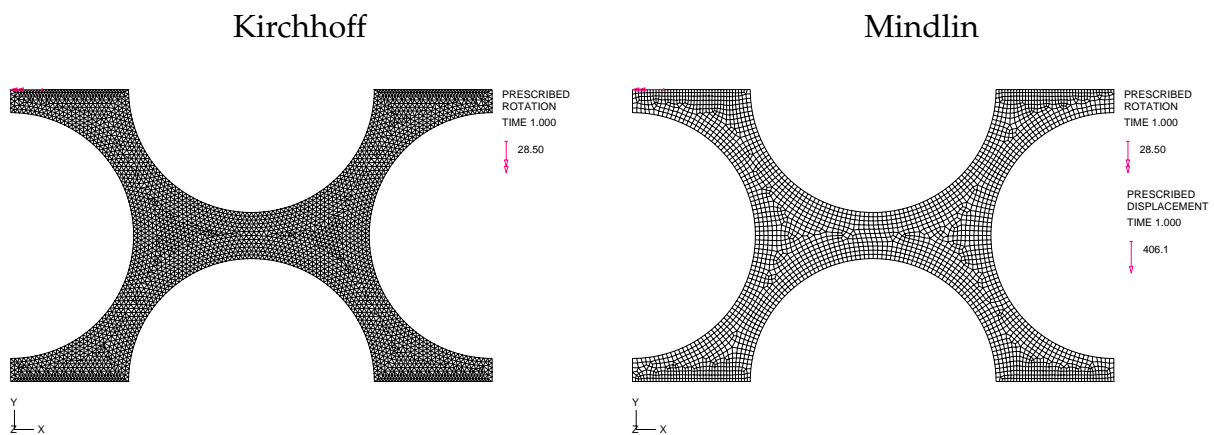


(d) pootočení kolem osy y

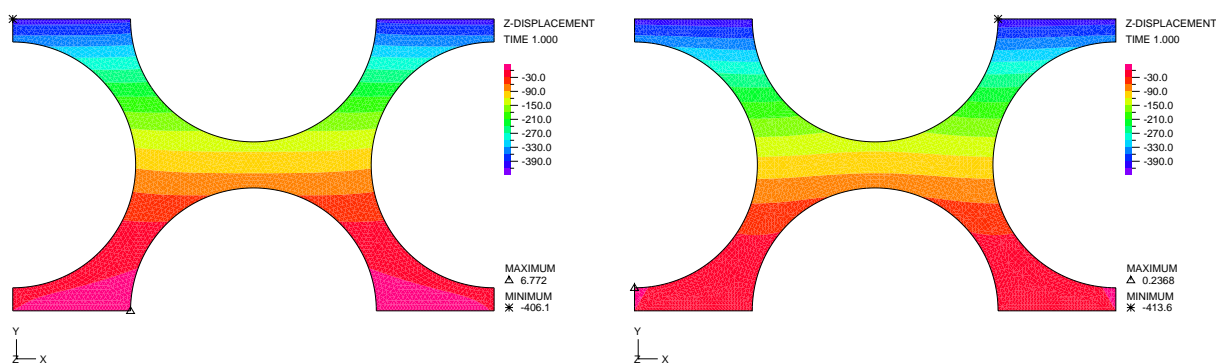
Obrázek C.9: Odezva jednotkové buňky PWC 6-12 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$



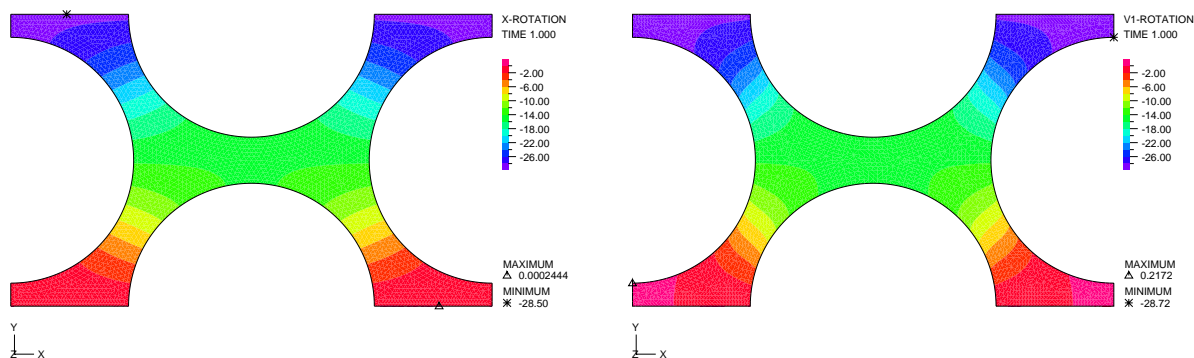
Obrázek C.10: Odezva jednotkové buňky PWC 6-24a na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$



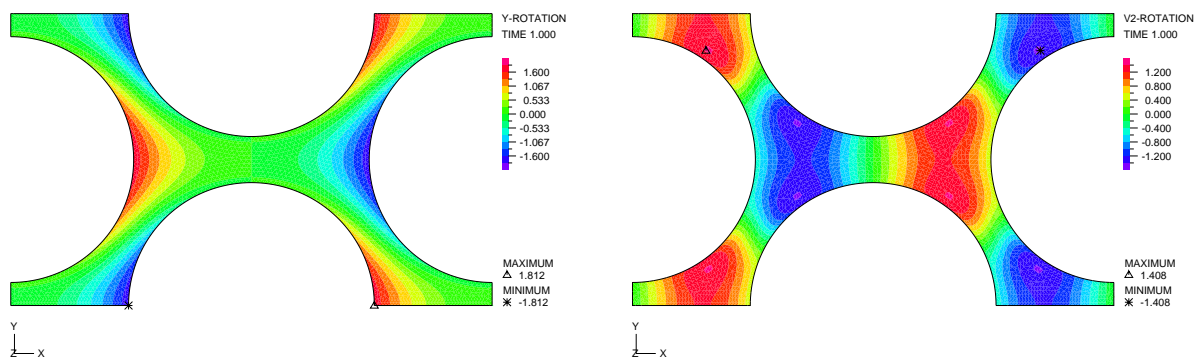
(a) síť konečných prvků a zatížení



(b) průhyb ve směru osy z

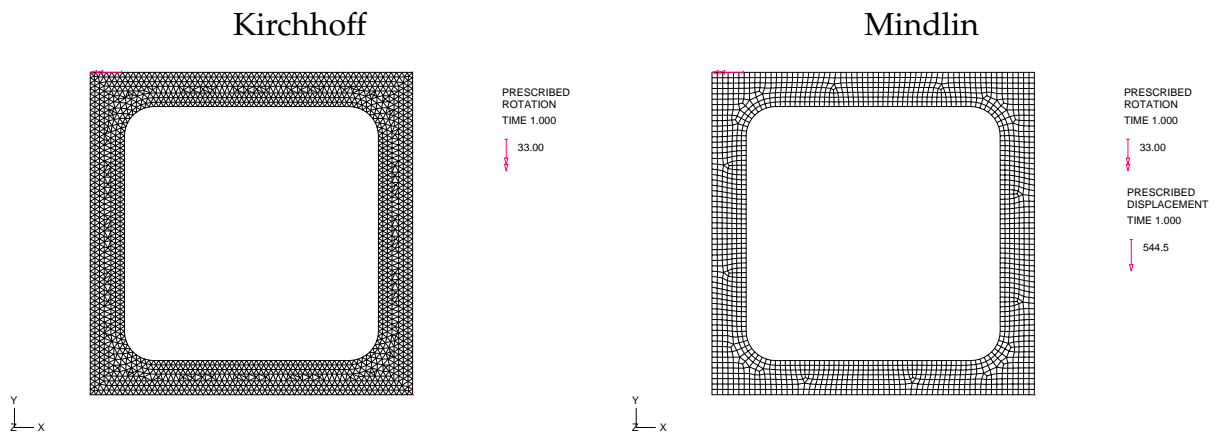


(c) pootočení kolem osy x

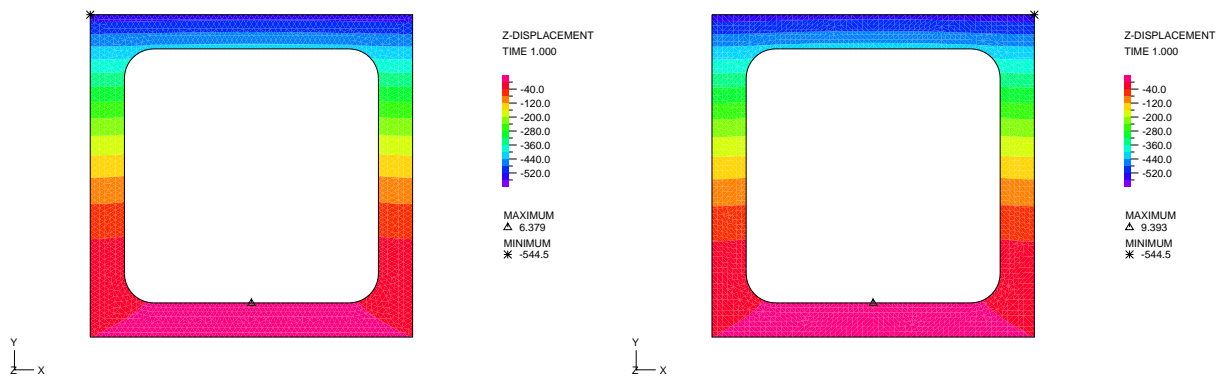


(d) pootočení kolem osy y

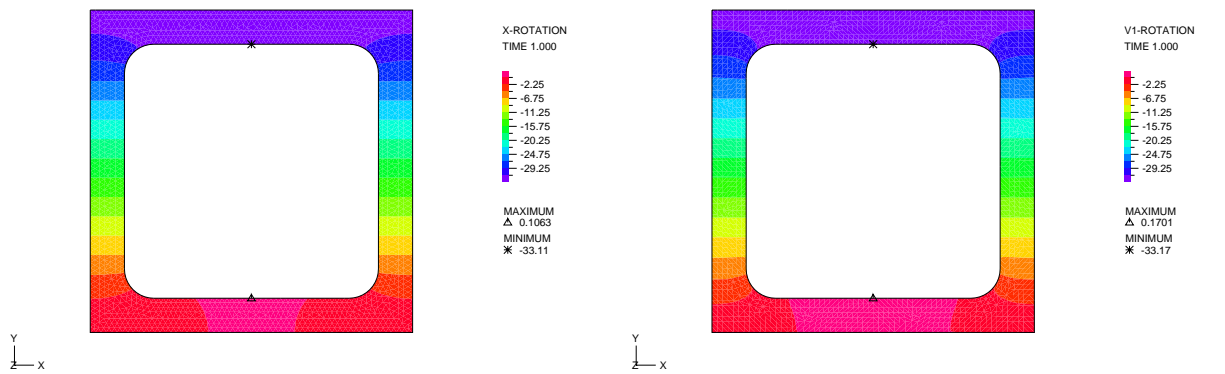
Obrázek C.11: Odezva jednotkové buňky PWC 6-24b na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$



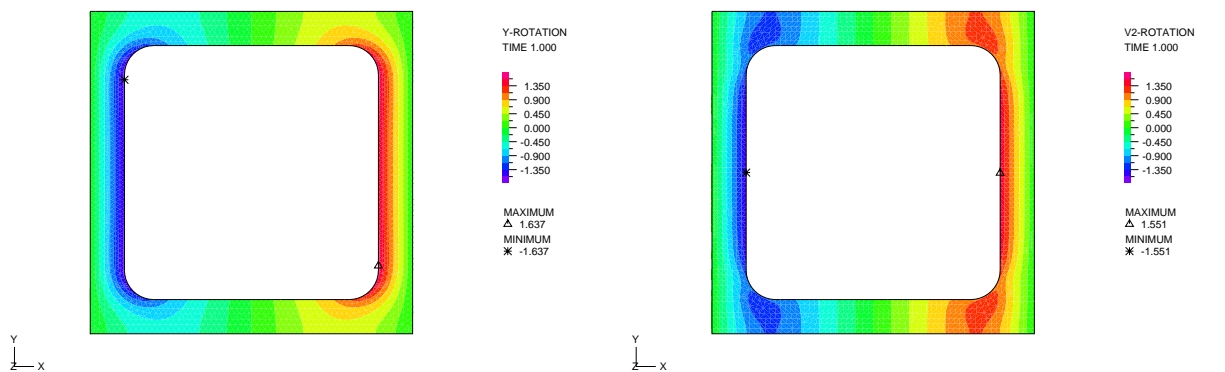
(a) síť konečných prvků a zatížení



(b) průhyb ve směru osy z

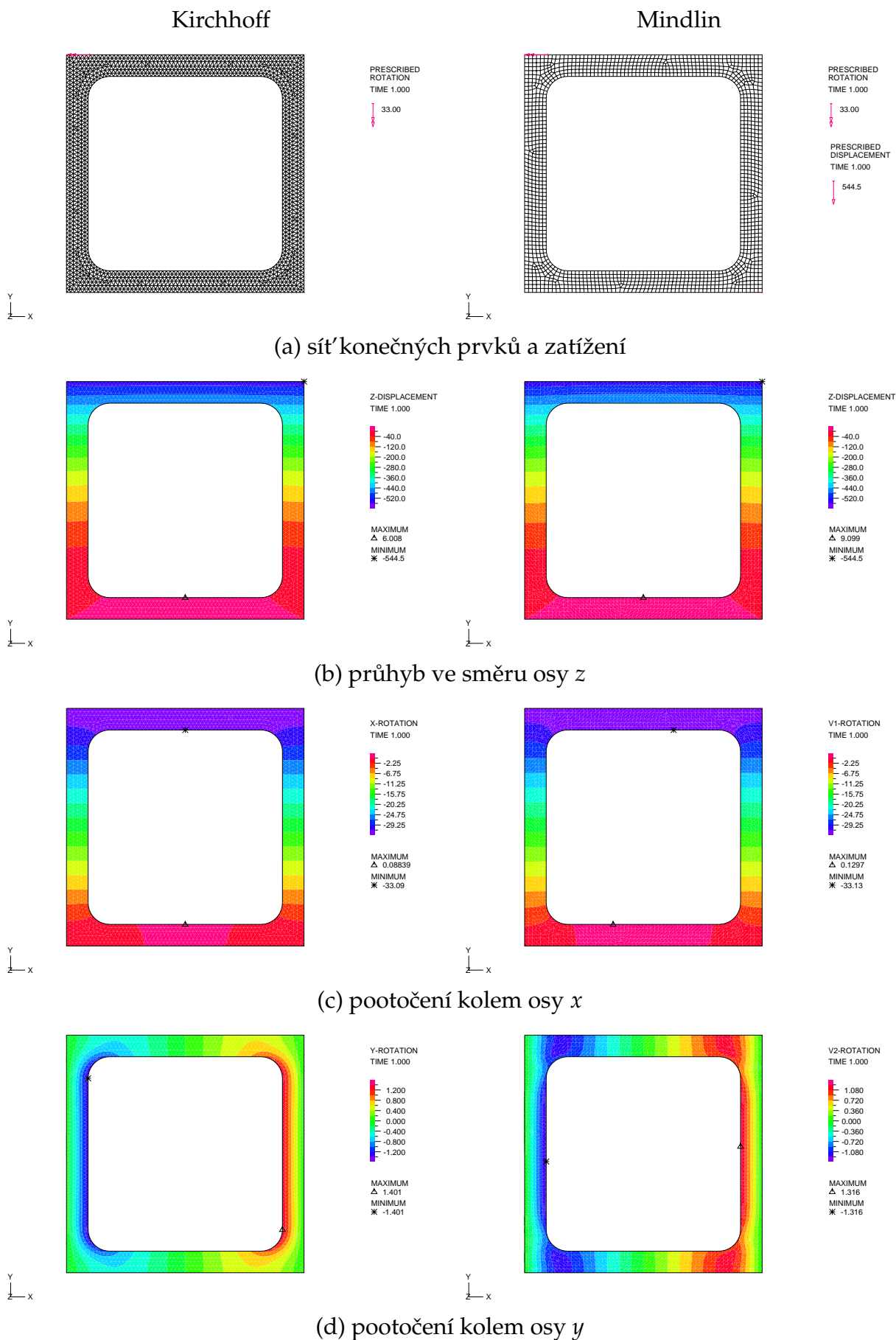


(c) pootočení kolem osy x

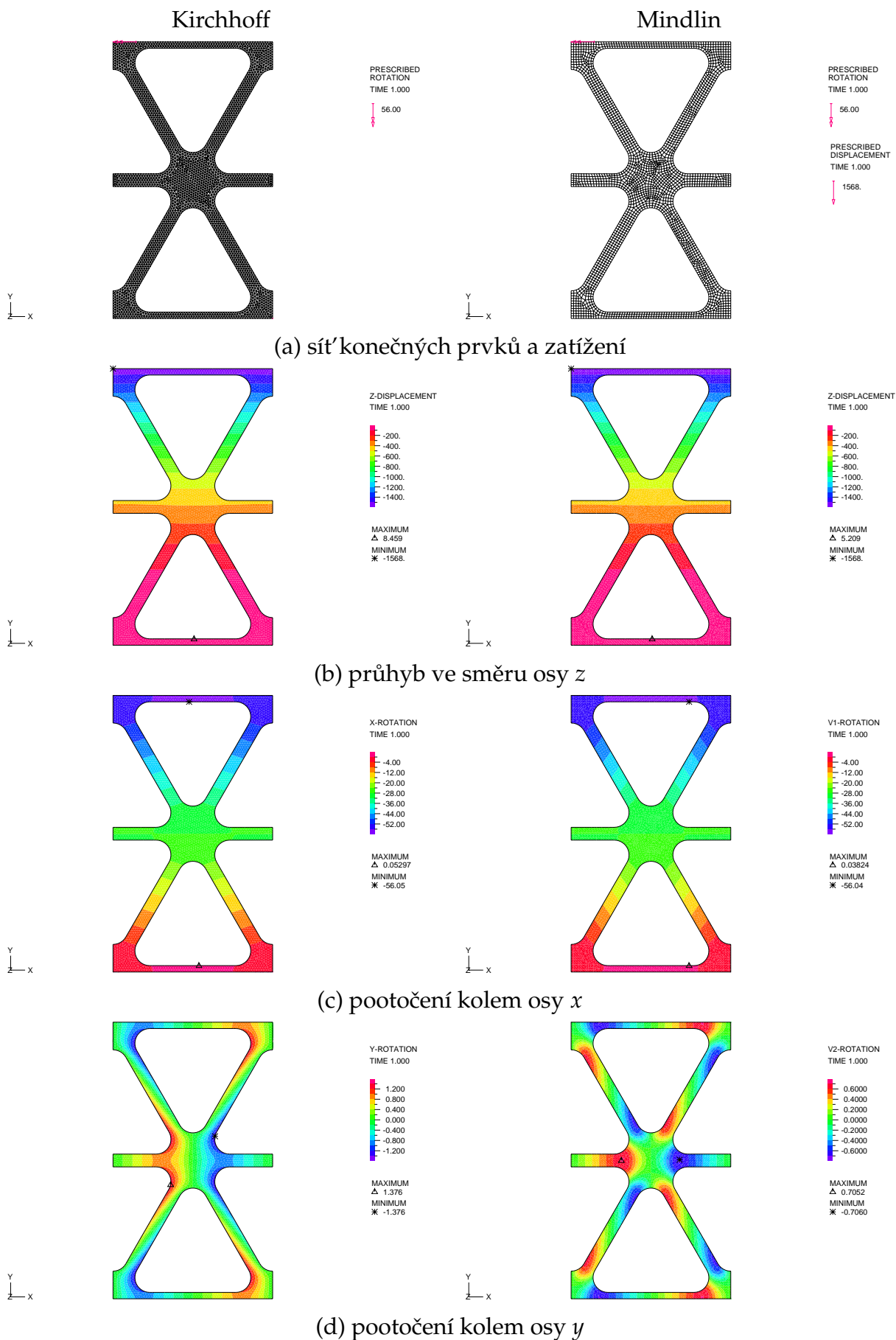


(d) pootočení kolem osy y

Obrázek C.12: Odezva jednotkové buňky PWS 5-26 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$



Obrázek C.13: Odezva jednotkové buňky PWS 6-27 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$



Obrázek C.14: Odezva jednotkové buňky PWT 6-20 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$