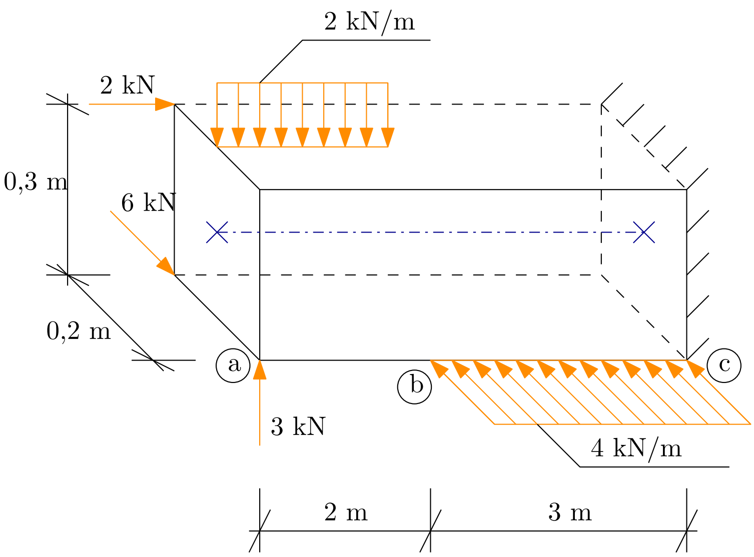
Vnitřní síly ve 3D



Obrázek 1: Zatěžovací schéma.

Úkol: Určete analytické průběhy vnitřních sil na konstrukci a vykreslete jejich průběhy.

Řešení:

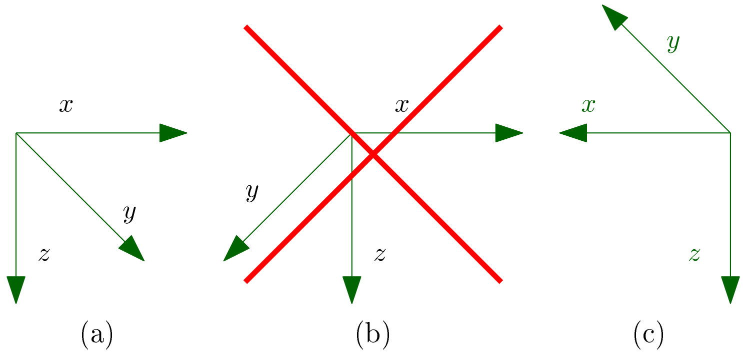
- Znaménka vnitřních sil jsou dána volbou souřadného systému. Proto musíme začít jeho volbou a respektovat následující pravidla:

  1. Systém musí být pravotočivý. Použijeme pravou ruku, palec, ukazováček a prostředníček umístíme nevulgárním způsobem do vzájemně kolmé polohy. Palec pak představuje osu x, ukazováček osu y a prostředníček osu z.
  2. Osu x volíme rovnoběžně se střednicí prutu.
  3. Osu z volíme v mechanice obvykle směrem dolů.

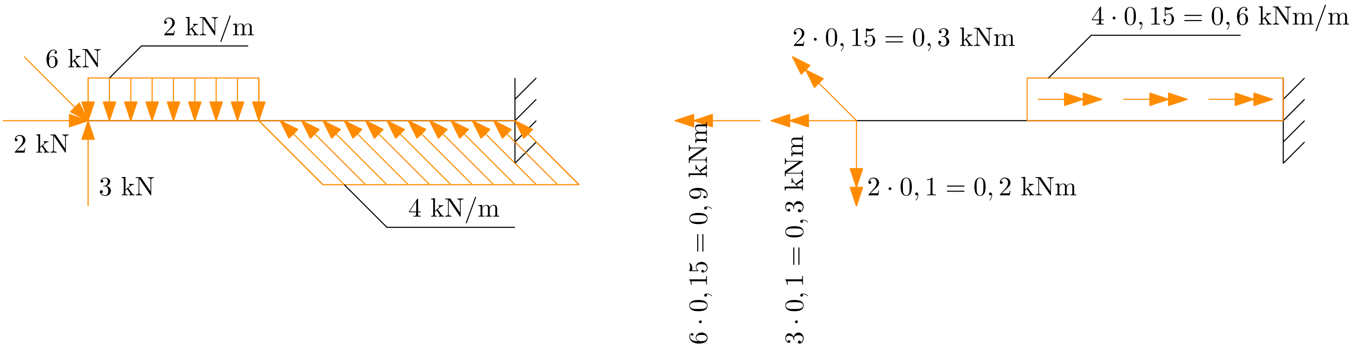
  Tato pravidla nám dávají možnost vybrat si ze dvou systémů na Obrázcích 2a a 2c.

  Všimněte si souřadného systému na Obrázku 2b. Na první pohled by se zdálo, že všechna výše uvedená pravidla splňuje. Jedná se v podstatě o stejný systém jako na Obrázku 2a, ovšem špatně zakreslený, neboť neodpovídá prostorovému uspořádání danému v zadání úkolu. Takto chybně zakreslený souřadný systém vede ke špatné interpretaci výsledných vnitřních sil.

- Provedeme redukci zatížení ke střednici. Protože všech zatížení je mnoho, rozdělíme je do dvou schémat. Silové účinky každého zatížení nejprve přeneseme ke střednici a zakreslíme je do schématu na Obrázku 3 vlevo. Pokud je nutné silové zatížením posunout jiným směrem než ve směru svého působení, znamená to, že vůči střednici působí na nenulovém rameni. Hodnota zatížení krát příslušné rameno nám dává hodnotu odpovídajícího momentového účinku, který zakreslíme do schématu na Obrázku 3 vpravo.



Obrázek 2: Volba souřadného systému.



Obrázek 3: Redukce zatížení ke střednici.

- Znaménka vnitřních sil. Na takto jednoduché konstrukci můžeme určit vnitřní síly, aniž bychom počítali reakce. Pokud ovšem s jejich výpočtem začneme od volného konce. Znaménka vnitřních sil se řídí pravidlem záporné či kladné plošky:
  - Postupujeme-li **proti kladnému směru** osy x, jsme na tzv. **kladné plošce** a kladné vnitřní síly mají **souhlasný** směr jako kladné poloosy souřadného systému.
  - Postupujeme-li **ve směru kladné poloosy** x, jsme na tzv. **záporné plošce** a kladné vnitřní síly mají **opačný** směr než kladné poloosy souřadného systému.

- Vnitřní síly v řezech. Pro ukázku si zvolíme souřadný systém na Obrázku 2a a určíme odpovídající hodnoty vnitřních sil v řezech. Abychom nepočítali reakce, budeme postupovat od volného konce. V tomto případě jsme tedy na tzv. záporné plošce a kladné vnitřní síly mají opačný směr než kladné poloosy souřadného systému. Výsledky jsou uvedeny v Tabulce 1.

řez a	řez b	řez c
$N^a = -2$ kN	$N^b = -2$ kN	$N^c = -2$ kN
$V_y^a = -6$ kN	$V_y^b = -6$ kN	$V_y^c = -6 + 4 \cdot 3 = 6$ kN
$V_z^a = 3$ kN	$V_z^b = 3 - 2 \cdot 2 = -1$ kN	$V_z^c = -1$ kN
$M_x^a = 0,9 + 0,3 = 1,2$ kNm	$M_x^b = 1,2$ kNm	$M_x^c = 1,2 - 0,6 \cdot 3 = -0,6$ kNm
$M_y^a = 0,3$ kNm	$M_y^b = 0,3 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 2,3$ kNm	$M_y^c = 2,3 - 1 \cdot 3 = -0,7$ kNm
$M_z^a = -0,2$ kNm	$M_z^b = -0,2 + 6 \cdot 2 = 11,8$ kNm	$M_z^c = 11,8 + 6 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 11,8$ kNm

Tabulka 1: Vnitřní síly v řezech.

- Výpočet analytických průběhů podle Schwedlerovy věty je uveden v Tabulkách 2 a 3. Znaménka spojitých silových zatížení f_x, f_y a f_z a spojitých momentových zatížení m_x, m_y a m_z se volí jako kladná, pokud jsou v souladu s kladnými směry zvoleného souřadného systému (bez ohledu na to, zda jsme na kladné či záporné plošce). Dejte pozor na to, že kladná posouvající síla V_z vyvolává **kladný** moment M_y, zatímco kladná síla V_y vyvolává **záporný** moment M_z!!!

$f_x(x) = 0$ kN/m $N(x) = -\int f_x(x)\mathrm{d}x = 0 + C_1$ $N(x=0) = C_1 = N^a = -2 \Rightarrow C_1 = -2$ kN $N(x) = -2$ kN	$m_x(x) = 0$ kNm/m $M_x(x) = -\int m_x(x)\mathrm{d}x = 0 + C_2$ $M_x(x=0) = C_2 = M_x^a = 1,2 \Rightarrow C_2 = 1,2$ kNm $M_x(x) = 1,2$ kNm
$f_z(x) = 2$ kN/m $V_z(x) = -\int f_z(x)\mathrm{d}x = -2x + C_3$ $V_z(x=0) = C_3 = V_z^a = 3 \Rightarrow C_3 = 3$ kN $V_z(x) = -2x + 3$ kN $m_y(x) = 0$ $M_y(x) = -\int m_y(x)\mathrm{d}x + \int V_z(x)\mathrm{d}x = -x^2 + 3x + C_5$ $M_y(x=0) = C_5 = M_y^a = 0,3 \Rightarrow C_5 = 0,3$ kNm $M_y(x) = -x^2 + 3x + 0,3$ kNm	$f_y(x) = 0$ kN/m $V_y(x) = -\int f_y(x)\mathrm{d}x = 0 + C_4$ $V_y(x=0) = C_4 = V_y^a = -6 \Rightarrow C_4 = -6$ kN $V_y(x) = -6$ kN $m_z(x) = 0$ $M_z(x) = -\int m_z(x)\mathrm{d}x - \int V_y(x)\mathrm{d}x = 6x + C_6$ $M_z(x=0) = C_6 = M_z^a = -0,2 \Rightarrow C_6 = -0,2$ kNm $M_z(x) = 6x - 0,2$ kNm

Tabulka 2: Analytické průběhy vnitřních sil na intervalu (a ;b) zleva

$f_x(x) = 0$ kN/m $N(x) = -\int f_x(x)\mathrm{d}x = 0 + D_1$ $N(x=0) = D_1 = N^b = -2 \Rightarrow D_1 = -2$ kN $N(x) = -2$ kN	$m_x(x) = 0,6$ kNm/m $M_x(x) = -\int m_x(x)\mathrm{d}x = -0,6x + D_2$ $M_x(x=0) = D_2 = M_x^a = 1,2 \Rightarrow D_2 = 1,2$ kNm $M_x(x) = -0,6x + 1,2$ kNm
$f_z(x) = 0$ kN/m $V_z(x) = -\int f_z(x)\mathrm{d}x = 0 + D_3$ $V_z(x=0) = D_3 = V_z^b = -1 \Rightarrow D_3 = -1$ kN $V_z(x) = -1$ kN $m_y(x) = 0$ $M_y(x) = -\int m_y(x)\mathrm{d}x + \int V_z(x)\mathrm{d}x = -x + D_5$ $M_y(x=0) = D_5 = M_y^b = 2,3 \Rightarrow D_5 = 2,3$ kNm $M_y(x) = -x + 2,3$ kNm	$f_y(x) = -4$ kN/m $V_y(x) = -\int f_y(x)\mathrm{d}x = 4x + D_4$ $V_y(x=0) = D_4 = V_y^b = -6 \Rightarrow D_4 = -6$ kN $V_y(x) = 4x - 6$ kN $m_z(x) = 0$ $M_z(x) = -\int m_z(x)\mathrm{d}x - \int V_y(x)\mathrm{d}x = -2x^2 + 6x + D_6$ $M_z(x=0) = D_6 = M_z^b = 11,8 \Rightarrow D_6 = 11,8$ kNm $M_z(x) = -2x^2 + 6x + 11,8$ kNm

Tabulka 3: Analytické průběhy vnitřních sil na intervalu (b; c) zleva

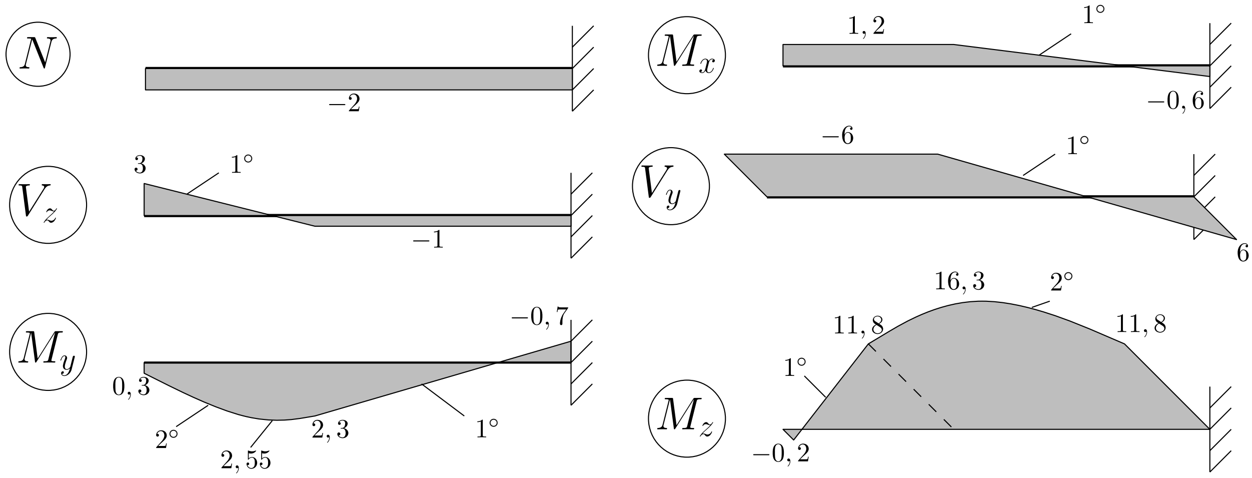
- Protože posouvající síla V_z protíná na intervalu (a; b) nulu, znamená to, že v daném řezu dosahuje ohybový moment M_y maxima, které určíme následujícím způsobem:

$$V_z(x) = -2x + 3 = 0 \Rightarrow x_1^{MAX} = 1,5\mathrm{m} \tag{1}$$
$$M_y^{MAX} = M_y(x_1^{MAX}) = -1,5^2 + 3 \cdot 1,5 + 0,3 = 2,55\mathrm{kNm} \tag{2}$$

Obdobným způsobem zjistíme maximální hodnotu momentu M_z na intervalu (b; c):

$$V_y(x) = 4x - 6 = 0 \Rightarrow x_2^{MAX} = 1,5\mathrm{m} \tag{3}$$
$$M_z^{MAX} = M_z(x_2^{MAX}) = -2 \cdot 1,5^2 + 6 \cdot 1,5 + 11,8 = 16,3\mathrm{kNm} \tag{4}$$

- Průběhy vnitřních sil jsou vykresleny na Obrázku 4. Pro správné grafické znázornění průběhu vnitřních sil je třeba dbát na následující zásady:
  - pro normálovou sílu je rozhodující znaménko,
  - posouvájící síly vykreslujeme ve směru příslušné osy (či proti ní) - V_z nahoru nebo dolů, zatímco V_y dopředu nebo dozadu,
  - ohybové momenty vykreslujeme na stranu tažených vláken - M_y nahoru nebo dolů, zatímco M_z dopředu či dozadu.



Obrázek 4: Průběhy vnitřních sil.