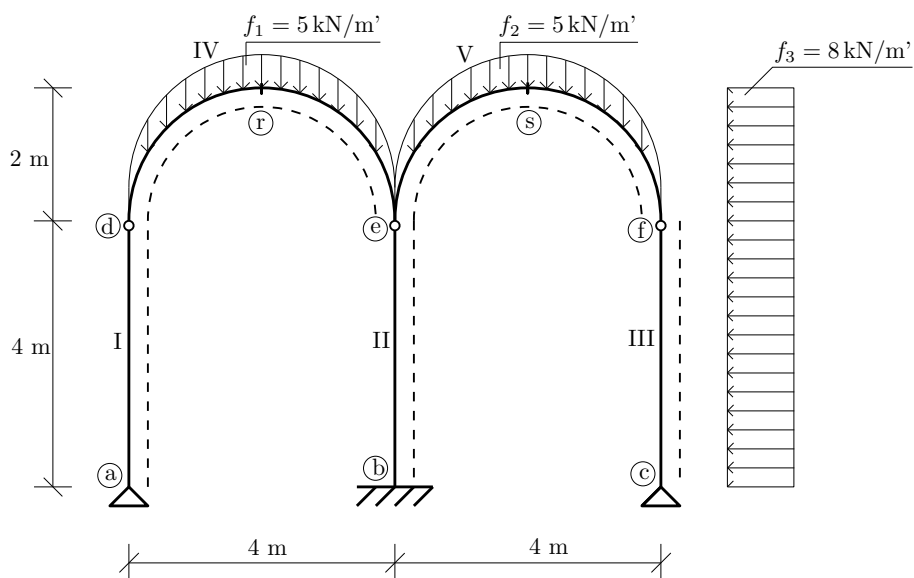


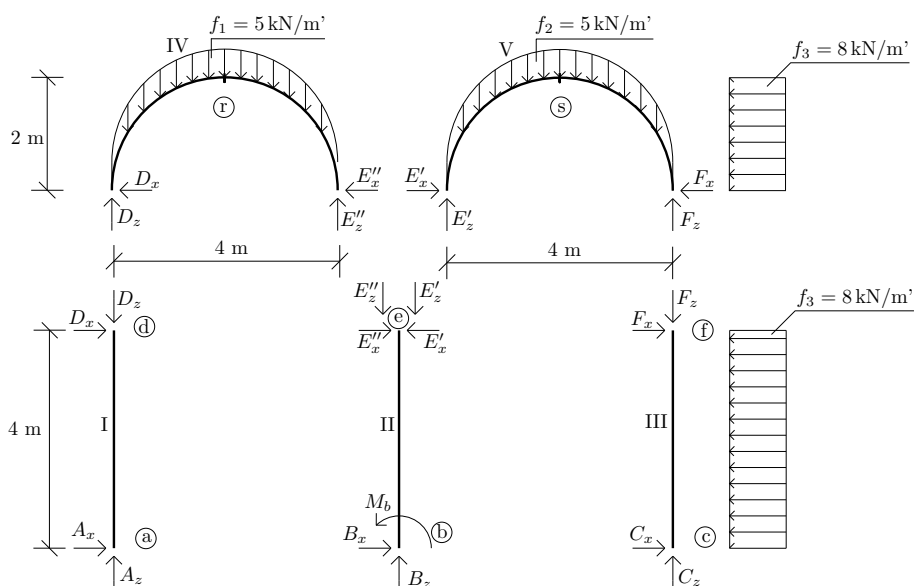
# Výpočet vnitřních sil na obloukové konstrukci

9. července 2010



Obrázek 1: Schéma konstrukce.

**Úkol:** Vypočítejte reakce a nakreslete průběh normálové síly  $N$ , posouvající síly  $V$  a ohybového momentu  $M$  na celé konstrukci.



Obrázek 2: Rozdělení konstrukce na jednotlivé desky.

---

## ŘEŠENÍ:

### 1) Výpočet reakcí:

deska č.III

$$F_x = C_x = 16 \text{ kN} \quad (1)$$

$$F_z = C_z \quad (2)$$

deska č.V

$$\rightarrow : E'_x - F_x - 2 \cdot f_3 = 0 \Rightarrow \underline{E'_x = 32 \text{ kN}} \quad (3)$$

$$\circlearrowleft e : F_z \cdot 4 - f_2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2 + f_3 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \underline{F_z = 11,7 \text{ kN}} \Rightarrow \underline{C_z = 11,7 \text{ kN}} \quad (4)$$

$$\uparrow : E'_z + F_z - f_2 \cdot \pi \cdot r = 0 \Rightarrow \underline{E'_z = 19,7 \text{ kN}} \quad (5)$$

$$(6)$$

deska č.I

$$D_x = A_x = 0 \text{ kN} \quad (7)$$

$$D_z = A_z \quad (8)$$

deska č.IV

$$D_z = E''_z = 15,7 \text{ kN} \Rightarrow A_z = 15,7 \text{ kN} \quad (9)$$

$$\leftarrow : D_x + E''_x = 0 \quad (10)$$

$$E''_x = 0 \text{ kN} \quad (11)$$

celkově

$$\circlearrowleft b : M_b - 4 \cdot A_z + 4 \cdot C_z + f_3 \cdot 6 \cdot 3 + f_1 \cdot \pi \cdot r \cdot 2 - f_2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2 = 0 \Rightarrow \underline{M_b = -128 \text{ kNm}} \quad (12)$$

$$\circlearrowleft a : B_z \cdot 4 + C_z \cdot 8 + M_b + f_3 \cdot 6 \cdot 3 - \pi \cdot r \cdot f_1 \cdot 2 - \pi \cdot r \cdot f_2 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \underline{B_z = 35,4 \text{ kN}} \quad (13)$$

$$\rightarrow : A_x + B_x + C_x - f_3 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \underline{B_x = 32 \text{ kN}} \quad (14)$$

kontrolní podmínky :

$$\uparrow : A_z + B_z + C_z - f_1 \cdot \pi \cdot r - f_2 \cdot \pi \cdot r = 0 \Rightarrow \underline{0 = 0} \quad (15)$$

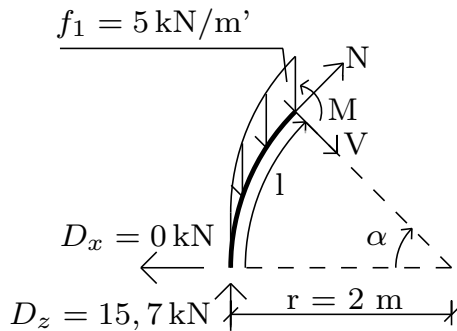
$$\circlearrowleft c : -A_z \cdot 8 - B_z \cdot 4 + f_3 \cdot 6 \cdot 3 + f_1 \cdot \pi \cdot r \cdot 6 + f_2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2 + M_b = 0 \Rightarrow \underline{0 = 0} \quad (16)$$

---

## 2) Analytické vyjádření průběhu vnitřních sil:

### interval (d, r)

- Délka oblouku  $l$  v závislosti na  $\alpha$  :  $l = r \cdot \alpha$



Obrázek 3: Interval (d, r)

### Normálová síla

$$N + D_z \cdot \cos \alpha - f_1 \cdot l \cdot \cos \alpha = 0 \quad (17)$$

$$N = -D_z \cdot \cos \alpha + f_1 \cdot l \cdot \cos \alpha \quad (18)$$

### Posouvající síla

$$V - D_z \cdot \sin \alpha + f_1 \cdot l \cdot \sin \alpha = 0 \quad (19)$$

$$V = D_z \cdot \sin \alpha - f_1 \cdot l \cdot \sin \alpha \quad (20)$$

### Ohybový moment

$$M = \int_l V(l) dl = \left| \frac{l=r \cdot \alpha}{dl=r \cdot d\alpha} \right| = \int_{\alpha} V(\alpha) \cdot r \cdot d\alpha \quad (21)$$

$$M = \int_{\alpha} (D_z \cdot \sin \alpha - f_1 \cdot r \cdot \alpha \cdot \sin \alpha) \cdot r \cdot d\alpha \quad (22)$$

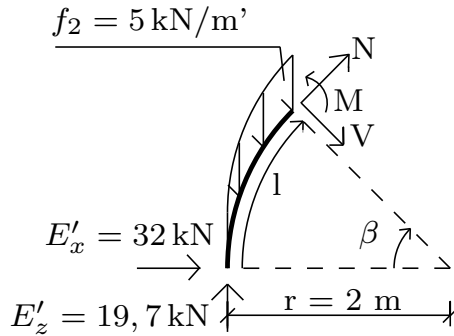
$$M = -D_z \cdot r \cdot \cos \alpha + f_1 \cdot r^2 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha - f_1 \cdot r^2 \cdot \sin \alpha + C \quad (23)$$

- Integrační konstantu  $C$  vypočteme z podmínky, že na počátku intervalu (d,e) je moment roven nule  
 $\Rightarrow C = 31,4$

$$M = -D_z \cdot r \cdot \cos \alpha + f_1 \cdot r^2 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha - f_1 \cdot r^2 \cdot \sin \alpha + 31,4 \quad (24)$$

### interval (e, s)

- Délka oblouku  $l$  v závislosti na  $\beta$  :  $l = r \cdot \beta$



Obrázek 4: Interval (e, s)

### Normálová síla

$$N + E'_x \cdot \sin \beta + E'_z \cdot \cos \beta - f_2 \cdot l \cdot \cos \beta = 0 \quad (25)$$

$$N = -E'_x \cdot \sin \beta - E'_z \cos \beta + f_2 \cdot l \cdot \cos \beta \quad (26)$$

### Posouvající síla

$$V + E'_x \cdot \cos \beta - E'_z \sin \beta + f_2 \cdot l \cdot \sin \beta = 0 \quad (27)$$

$$V = -E'_x \cdot \cos \beta + E'_z \sin \beta - f_2 \cdot l \cdot \sin \beta \quad (28)$$

### Ohybový moment

$$M = \int_l V(l) dl = \left| \frac{dl=r \cdot d\beta}{dl=r \cdot d\beta} \right| = \int_{\beta} V(\beta) \cdot r \cdot d\beta \quad (29)$$

$$M = \int_{\beta} (-E'_x \cdot \cos \beta + E'_z \cdot \sin \beta - f_2 \cdot r \cdot \beta \cdot \sin \beta) \cdot r \cdot d\beta \quad (30)$$

$$M = -E'_x \cdot r \cdot \sin \beta - E'_z \cdot r \cdot \cos \beta + f_2 \cdot r^2 \cdot \beta \cos \beta - f_2 \cdot r^2 \cdot \sin \beta + C \quad (31)$$

$$(32)$$

- Integrační konstantu  $C$  vypočteme z podmínky, že na počátku intervalu (e,s) je moment roven nule  
 $\Rightarrow C = 39,4$

$$M = -E'_x \cdot r \cdot \sin \beta - E'_z \cdot r \cdot \cos \beta + f_2 \cdot r^2 \cdot \beta \cos \beta - f_2 \cdot r^2 \cdot \sin \beta + 39,4 \quad (33)$$

- Vnitřní síly v bodě s:

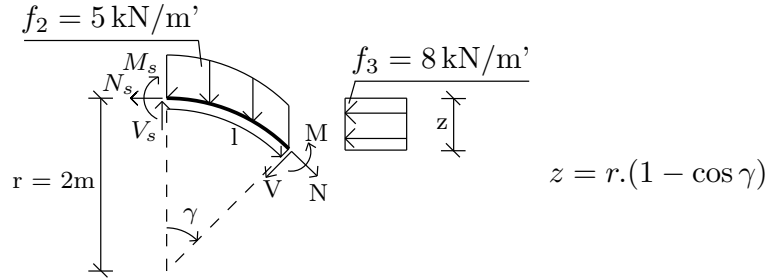
$$N_s = -32 \text{ kN}$$

$$V_s = 4 \text{ kN}$$

$$M_s = -44,6 \text{ kN}$$

interval (s, f)

- Délka oblouku  $l$  v závislosti na  $\gamma$  :  $l = r \cdot \gamma$



Obrázek 5: Interval (s, f)

**Normálová síla**

$$N - V_s \cdot \sin \gamma - N_s \cdot \cos \gamma + f_2 \cdot l \cdot \sin \gamma - f_3 \cdot z \cdot \cos \gamma = 0 \quad (34)$$

$$N = 4 \cdot \sin \gamma - 32 \cdot \cos \gamma - f_2 \cdot l \cdot \sin \gamma + f_3 \cdot r \cdot (1 - \cos \gamma) \cdot \cos \gamma \quad (35)$$

**Posouvající síla**

$$V - V_s \cdot \cos \gamma + N_s \cdot \sin \gamma + f_2 \cdot l \cdot \cos \gamma + z \cdot f_3 \cdot \sin \gamma = 0 \quad (36)$$

$$V = 4 \cdot \cos \gamma + 32 \cdot \sin \gamma - f_2 \cdot l \cdot \cos \gamma - f_3 \cdot \sin \gamma \cdot r \cdot (1 - \cos \gamma) \quad (37)$$

**Ohybový moment**

$$M = \int_l V(l) dl = \Big|_{dl=r \cdot d\gamma}^{l=r \cdot \gamma} = \int_{\gamma} V(\gamma) \cdot r \cdot d\gamma \quad (38)$$

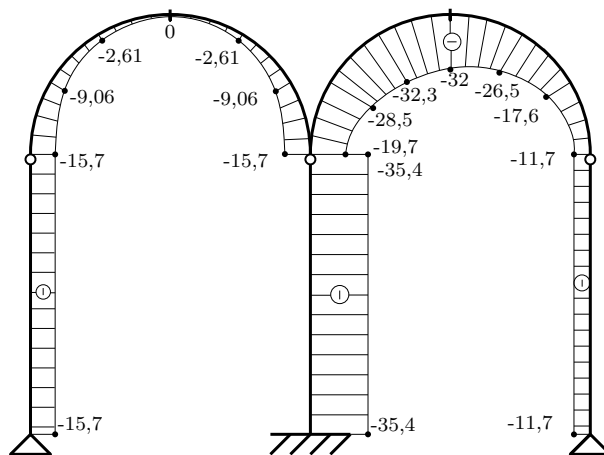
$$M = \int_{\gamma} [4 \cdot \cos \gamma + 32 \sin \gamma - f_2 \cdot r \cdot \gamma \cdot \cos \gamma - f_3 \cdot r \cdot \sin \gamma \cdot (1 - \cos \gamma)] \cdot r \cdot d\gamma \quad (39)$$

$$M = 4 \cdot r \cdot \sin \gamma - 32 \cdot r \cdot \cos \gamma + f_3 \cdot r^2 \cdot \cos \gamma + f_3 \cdot r^2 \cdot \frac{\sin^2 \gamma}{2} - f_2 \cdot r^2 \cdot \gamma \cdot \sin \gamma - f_2 \cdot r^2 \cdot \cos \gamma + C \quad (40)$$

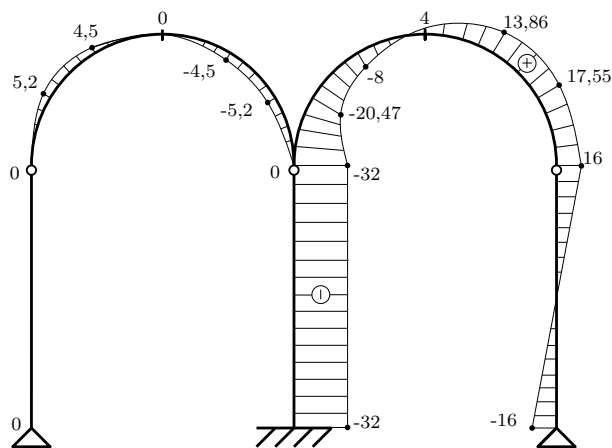
$$(41)$$

- Integrační konstantu  $C$  vypočteme z podmínky, že na počátku intervalu (s,f) je moment roven  $-44.6 \text{ kNm} \Rightarrow C = 7,4$

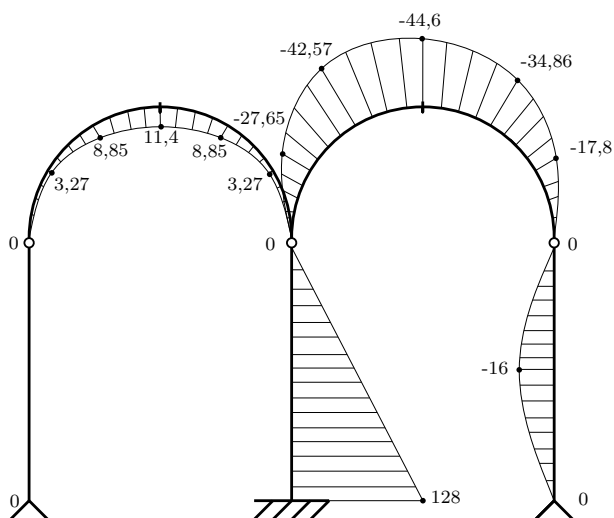
$$M = 4 \cdot r \cdot \sin \gamma - 32 \cdot r \cdot \cos \gamma + f_3 \cdot r^2 \cdot \cos \gamma + f_3 \cdot r^2 \cdot \frac{\sin^2 \gamma}{2} - f_2 \cdot r^2 \cdot \gamma \cdot \sin \gamma - f_2 \cdot r^2 \cdot \cos \gamma + C \quad (42)$$



Obrázek 6: Normálová síla [kN]



Obrázek 7: Posouvající síla [kN]



Obrázek 8: Ohybový moment [kNm]