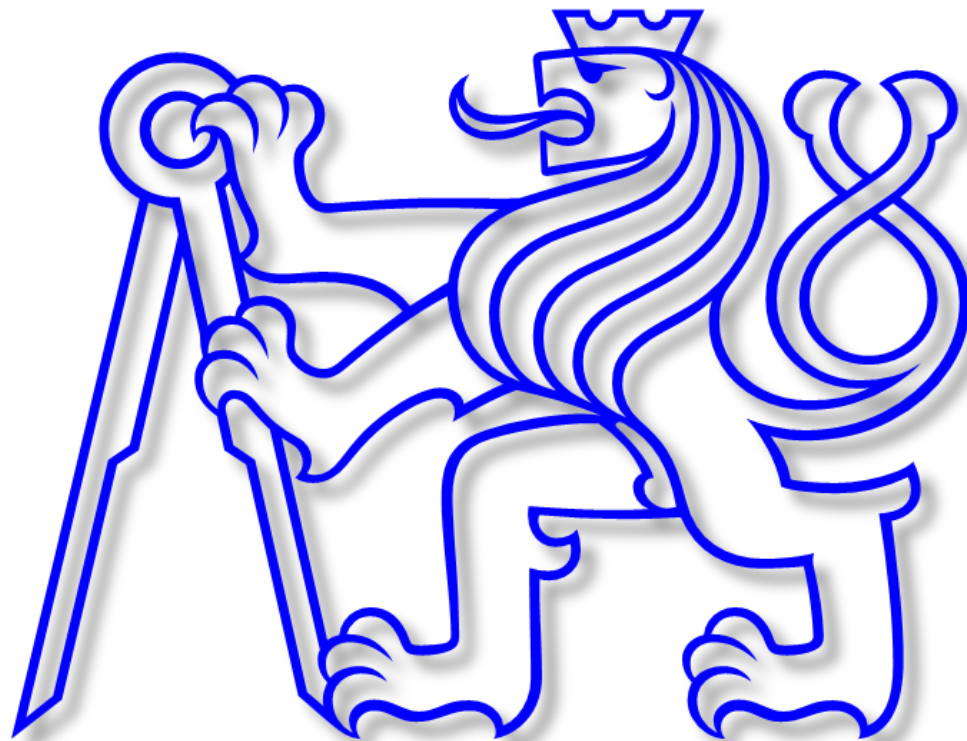


Předmět: SM02
Vnitřní síly prutu



Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze

© 2024

Přehled okruhů otázek – SM02 :

3. Vnitřní síly prutu:

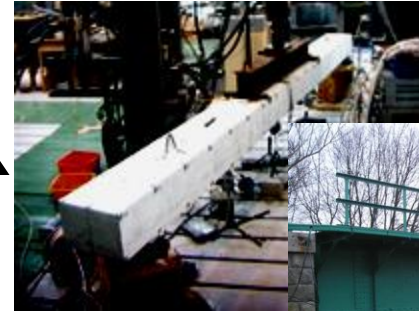
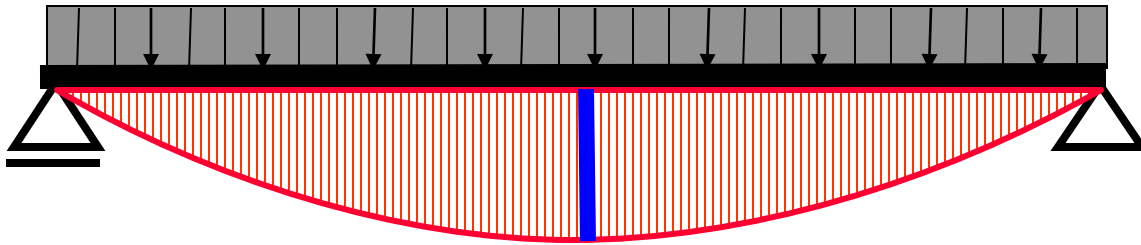
- **Definice vnitřních sil prutu v rovině a v prostoru.**
- **Postup výpočtu vnitřních sil v daném průřezu prutu (přímý, lomený prut v rovině a v prostoru) z podmínek rovnováhy nebo ekvivalence.**
- **Diferenciální vztahy mezi ohybovým momentem a posouvající silou (Schwedlerova věta) a mezi vnitřními silami a zatížením a jejich důsledky pro průběhy vnitřních sil.**
- **Vykreslení průběhů vnitřních sil na přímých a lomených prutech v rovině a v prostoru, složených prutových soustavách a spojitých nosnících v rovině – postup výpočtu i kvalifikovaný odhad (se zdůvodněním).**

Vnitřní síly prutu:

Definice vnitřních sil prutu:

Při návrhu konstrukce:

- U konstrukce s konstantní únosností (s konstantním průřezem) se hledá nejvíce namáhaný průřez.



- U konstrukce, která nemá konstantní únosnost, se hledá průřez s nejnepříznivější mírou namáhání – vztahem mezi namáháním průřezu a jeho únosností.



Vnitřní síly prutu:

Definice vnitřních sil prutu:

Při návrhu konstrukce:

- Jako míra namáhání se zpravidla používá normálové napětí σ a tangenciální napětí τ .
- U ocelové konstrukce se např. prokazuje:

$$\sigma_x = +\frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z \leq f_y$$

- U betonové konstrukce se např. prokazuje:



$$N_c = N_s$$

$$M_u = N_s \cdot r > M_{EX}$$

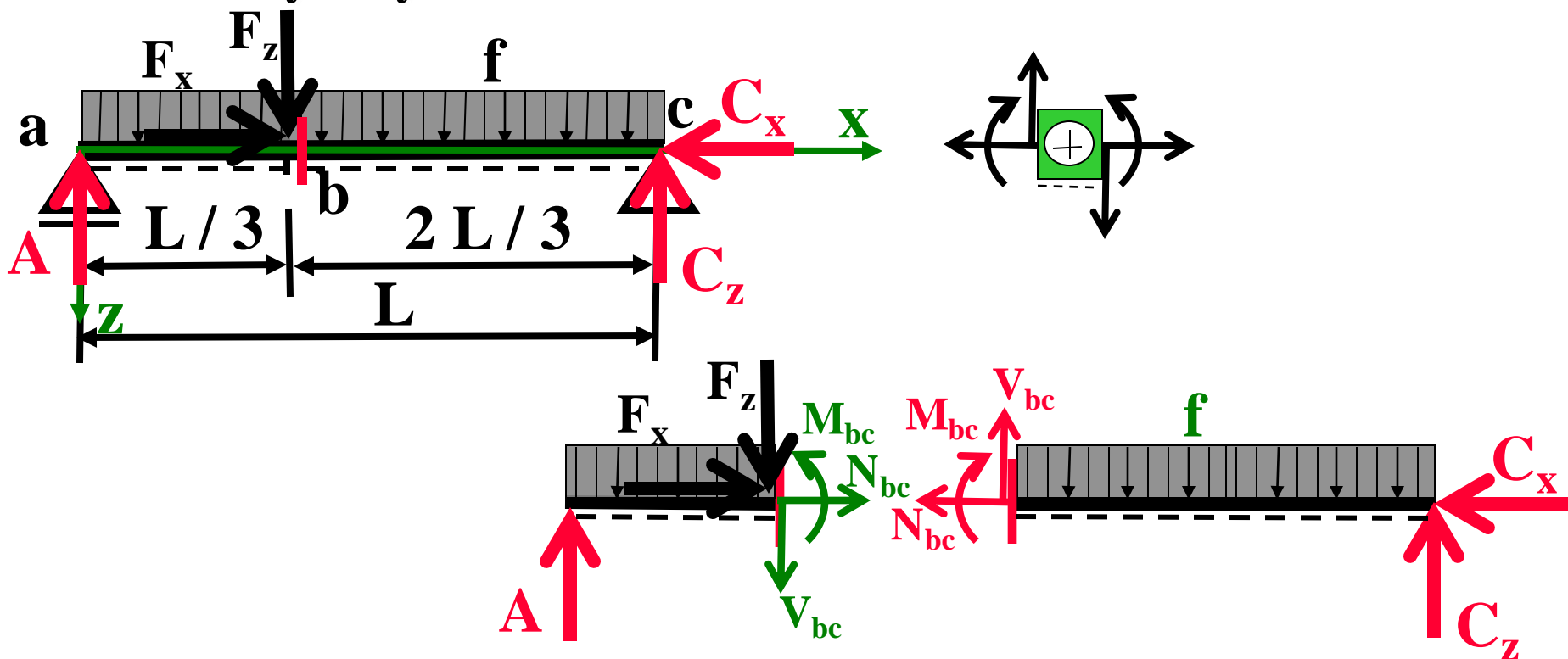
- Namáhání průřezu popisujeme pomocí vnitřních sil – M , N , V .
- Odolnost průřezu popisujeme pomocí jeho průřezových charakteristik – A , I_y , I_z .

Vnitřní síly prutu:

Definice vnitřních sil prutu v rovině (2D):

Definice vnitřních sil v průřezu rovinné prutové konstrukce:

- V průřezu rovinné prutové konstrukce působí tři vnitřní síly:
 - N – normálová síla,
 - V – posouvající síla a
 - M – ohybový moment.

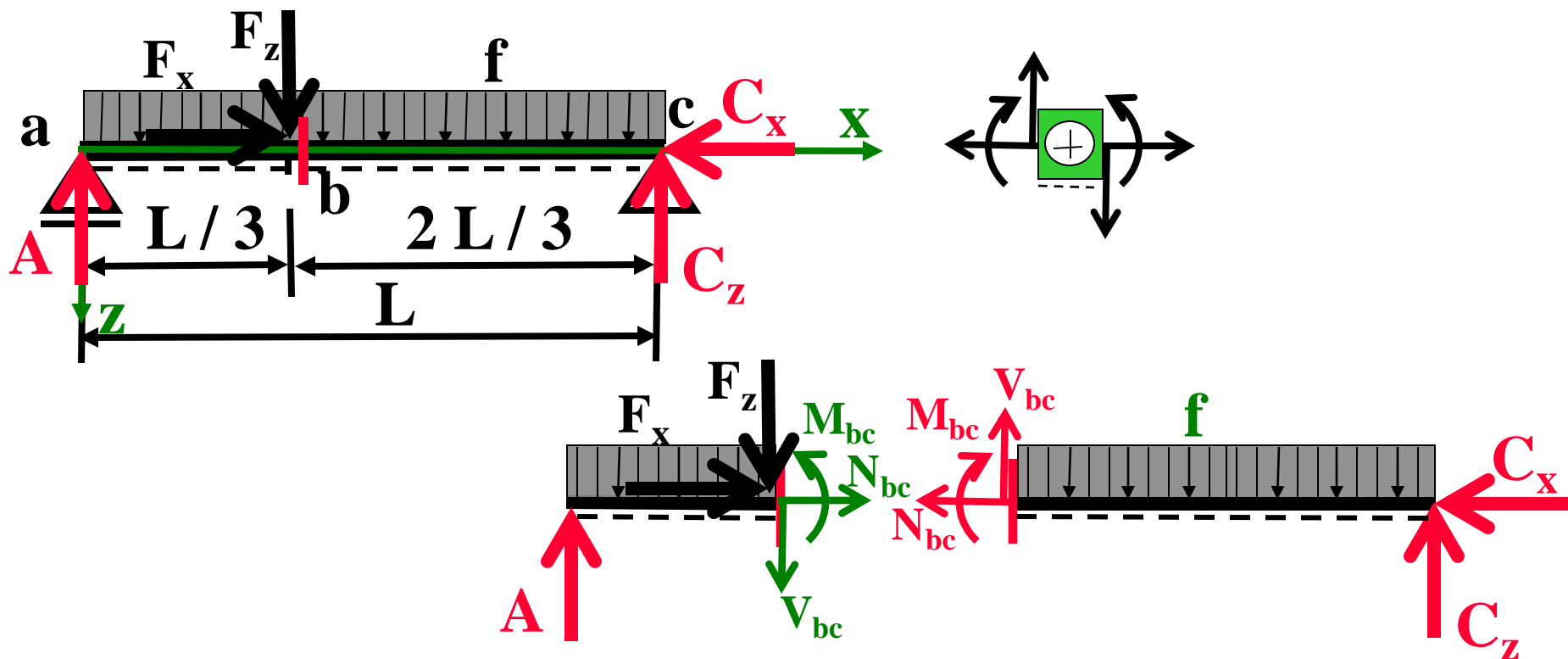


Vnitřní síly prutu:

Definice vnitřních sil prutu v rovině (2D):

Definice vnitřních sil v průřezu rovinné prutové konstrukce:

- Jedna (zelená) trojice M, N, V působí na kladném průřezu a druhá (červená) trojice M, N, V na záporném průřezu.
- Kladný směr M, N, V na kladném průřezu je dán kladnými poloosami zavedeného souřadného systému x, y, z .
- Kladný směr M, N, V na záporném průřezu je dán zápornými poloosami zavedeného souřadného systému x, y, z .

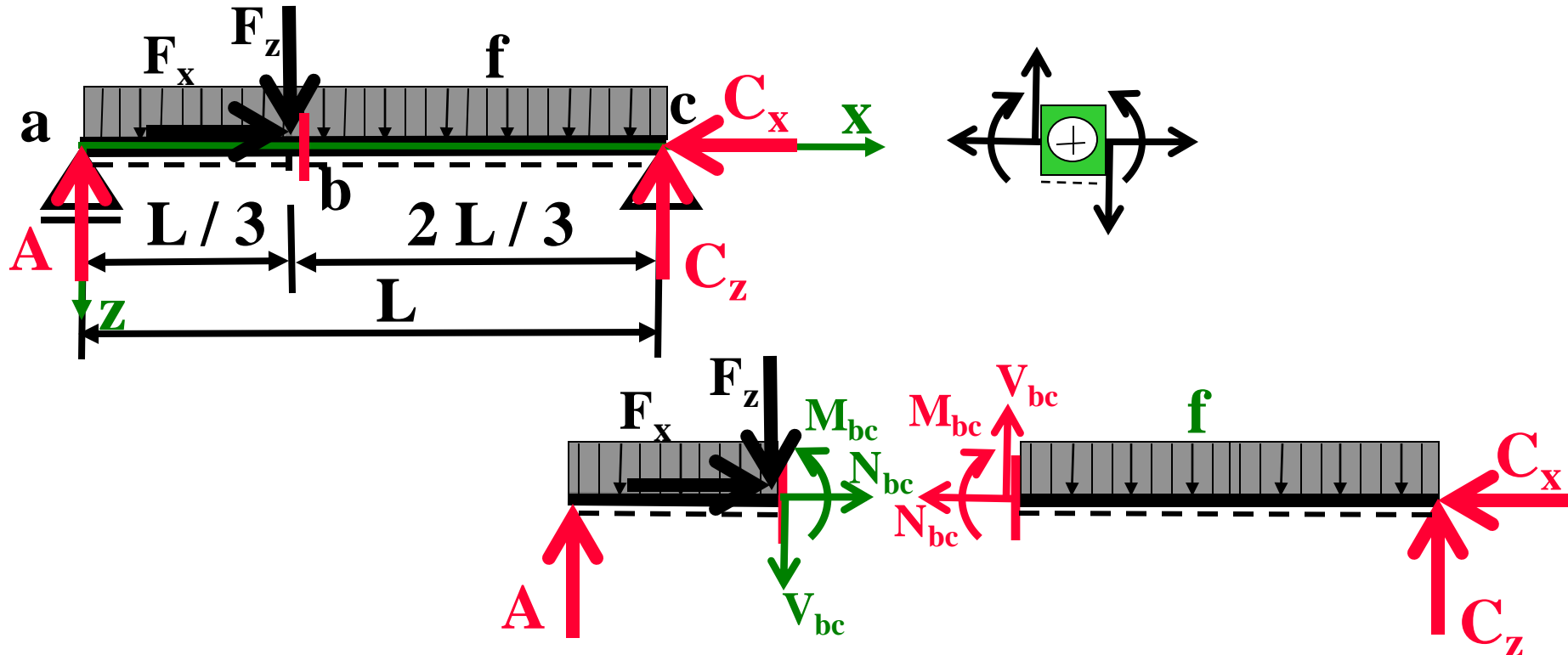


Vnitřní síly prutu:

Definice vnitřních sil prutu v rovině (2D) – princip ekvivalence:

Výpočet vnitřních sil v průřezu - princip ekvivalence:

- Vnitřní síly M , N , V jsou ekvivalentní silová soustava za všechny síly působící na části konstrukce oddělené fiktivním řezem ve vyšetřovaném průřezu.
- Vnitřní síly ve vyšetřovaném průřezu získáme jako výsledný účinek všech sil působících na části konstrukce oddělené fiktivním řezem.
- Výpočet je možné provést přes levou část konstrukce nebo přes pravou část.

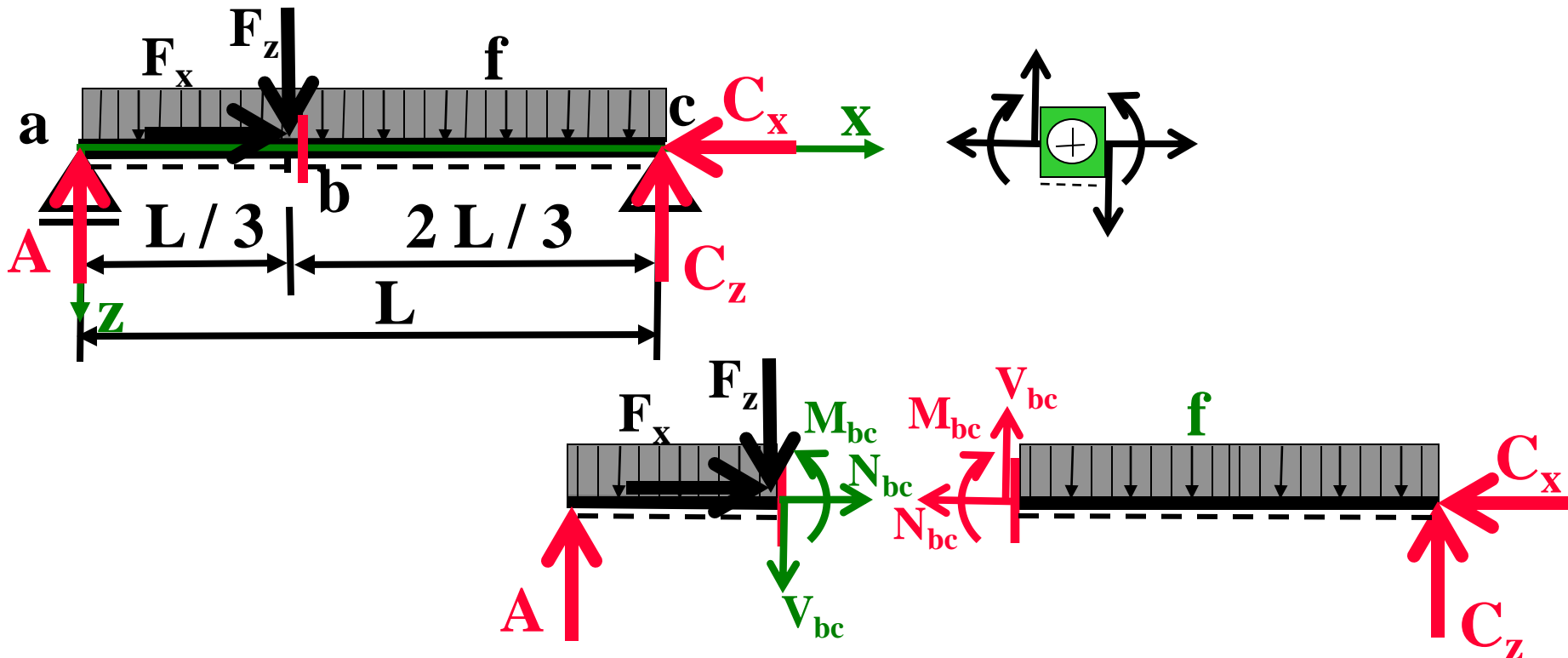


Vnitřní síly prutu:

Definice vnitřních sil prutu v rovině (2D) – princip rovnováhy:

Výpočet vnitřních sil v průřezu - princip rovnováhy:

- Konstrukce je jako celek v rovnováze, v rovnováze musí být jakákoliv její vyjmutá část.
- Fiktivní řez rozdělí konstrukci na dvě oddělené části.
- Vnitřní síly M, N, V se pak vypočtou z rovnováhy levé nebo pravé fiktivním řezem oddělené části zkoumané konstrukce.

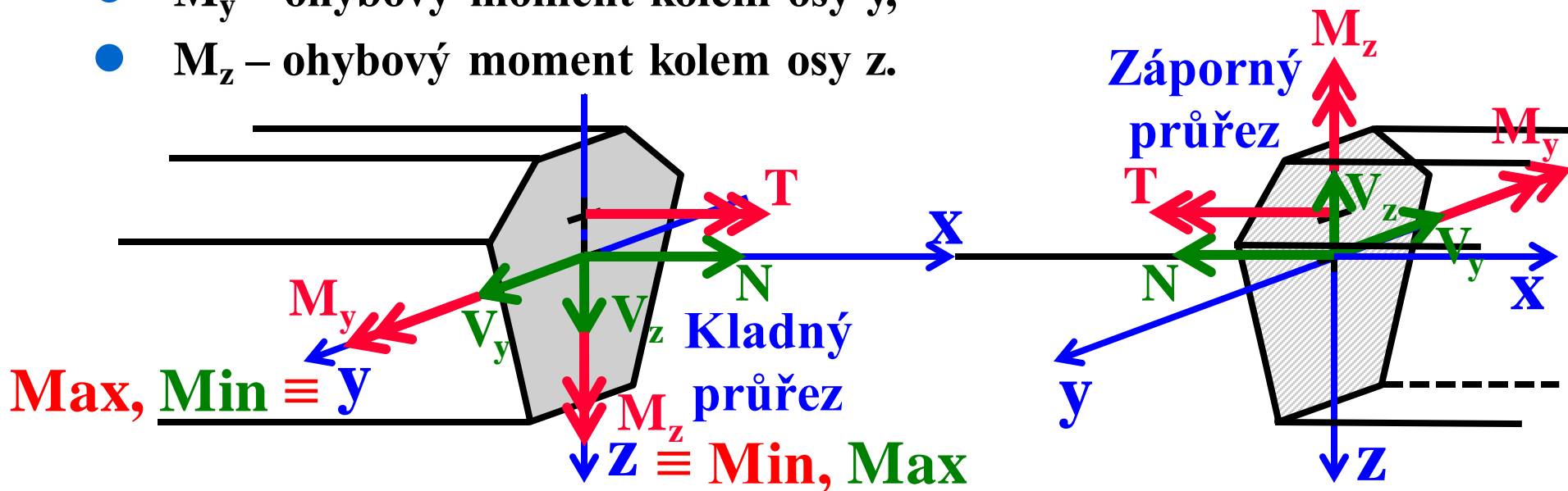


Vnitřní síly prutu:

Definice vnitřních sil prutu v prostoru (3D):

Definice vnitřních sil v průřezu prutové konstrukce v prostoru:

- V průřezu konstrukce v prostoru působí šest vnitřních sil:
 - N – normálová síla,
 - V_y – posouvající síla ve směru osy y ,
 - V_z – posouvající síla ve směru osy z ,
 - T, M_x – kroutící moment se vztahuje ke středu smyku (u průřezů se dvěma osami symetrie je střed smyku totožný s těžištěm),
 - M_y – ohybový moment kolem osy y ,
 - M_z – ohybový moment kolem osy z .



Vnitřní síly prutu:

Definice vnitřních sil prutu v prostoru (3D) – princip ekvivalence:

Výpočet vnitřních sil v průřezu - princip ekvivalence:

- **Vnitřní síly M , N , V jsou ekvivalentní silová soustava za všechny síly působící na části konstrukce oddělené fiktivním řezem ve vyšetřovaném průřezu.**
- **Vnitřní síly ve vyšetřovaném průřezu získáme jako výsledný účinek všech sil působících na části konstrukce oddělené fiktivním řezem.**
- **Výpočet je možné provést přes levou část konstrukce nebo přes pravou část.**

Definice vnitřních sil prutu v prostoru (3D) – princip rovnováhy:

Výpočet vnitřních sil v průřezu - princip rovnováhy:

- **Konstrukce je jako celek v rovnováze, v rovnováze musí být jakákoliv její vyjmutá část.**
- **Fiktivní řez rozdělí konstrukci na dvě oddělené části.**
- **Vnitřní síly N , V_y , V_z , $T(M_x)$, M_y , M_z se pak vypočtou z rovnováhy levé nebo pravé fiktivním řezem oddělené části zkoumané konstrukce.**

Vnitřní síly prutu:

Diferenciální vztahy mezi vnitřními silami $M(x)$, $N(x)$, $V(x)$ a zatížením $f_z(x)$, $f_x(x)$ v rovině (2D):

$$\frac{dN(x)}{dx} = -f_x(x)$$

$$N(x) = - \int f_x(x) dx$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -f_z(x)$$

$$V(x) = - \int f_z(x) dx$$

Schwedlerova věta:

$$\frac{dM(x)}{dx} = +V(x)$$

$$M(x) = \int V(x) dx$$

Pokud $m(x)$ není rovno 0 \Rightarrow

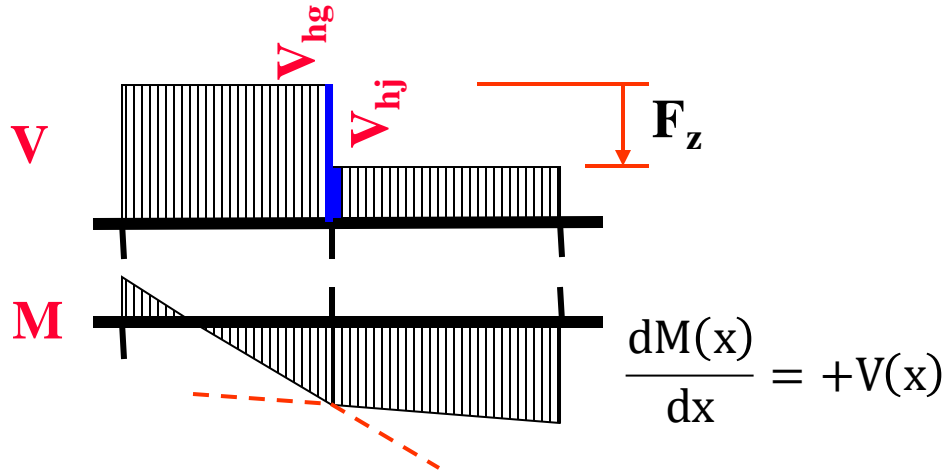
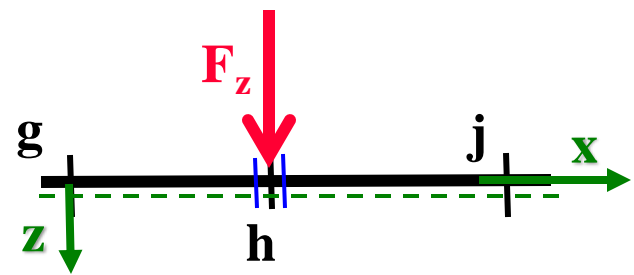
$$\frac{dM(x)}{dx} = +V(x) - m(x)$$

$$M(x) = \int (V(x) - m(x)) dx$$

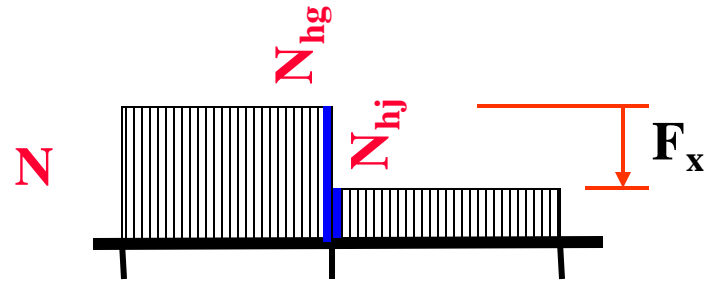
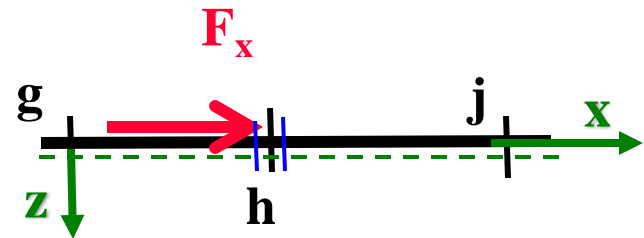
Vnitřní síly prutu:

Důsledky diferenciálních vztahů pro průběhy vnitřních sil:

- V průřezu s osamělou silou kolmou ke střednici prutu:



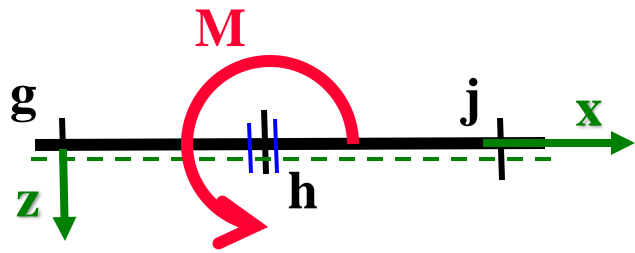
- V průřezu s osamělou silou rovnoběžnou se střednicí prutu (s tečnou ke střednici prutu):



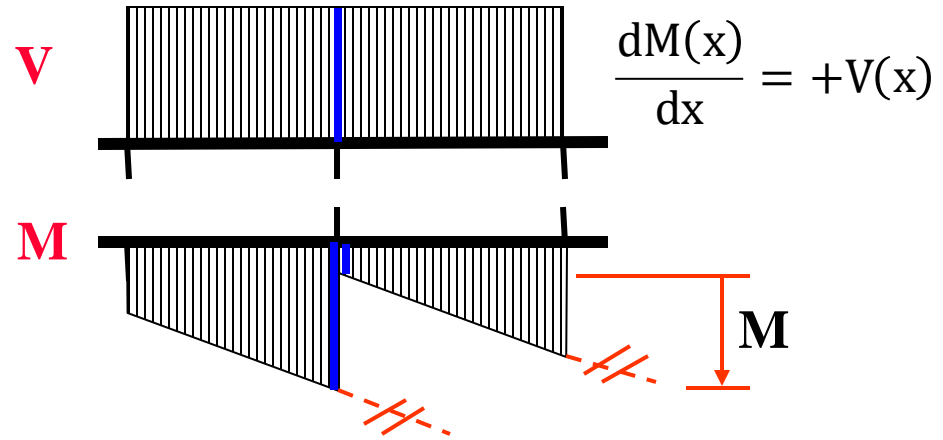
Vnitřní síly prutu:

Důsledky diferenciálních vztahů pro průběhy vnitřních sil:

- V průřezu s osamělým momentem:

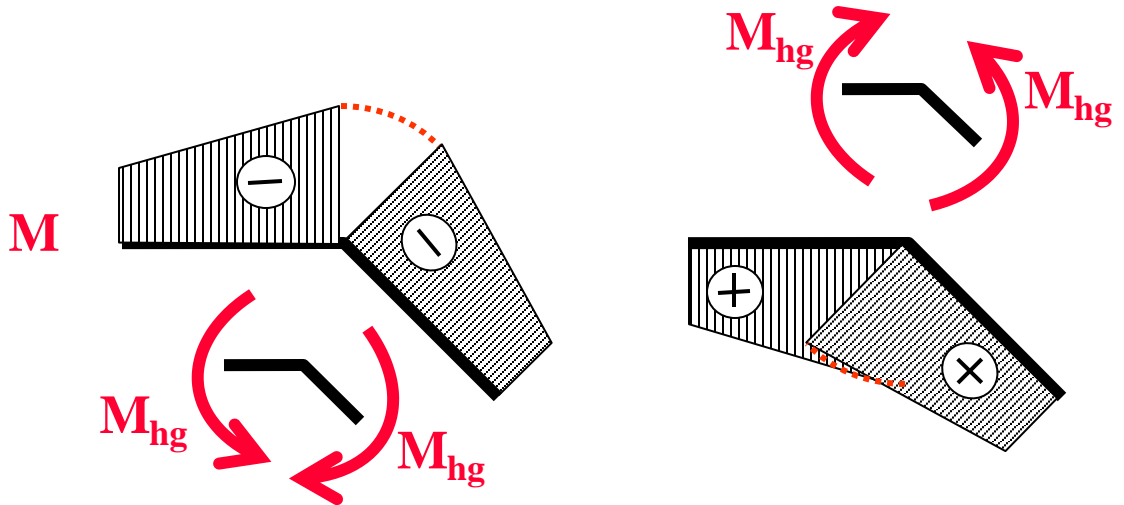
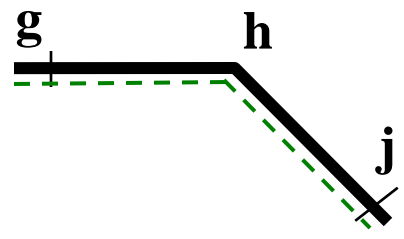


$$V_{hg} = V_{hj}$$



Důsledky rovnováhy vnitřních sil ve styčnicku pro průběh M:

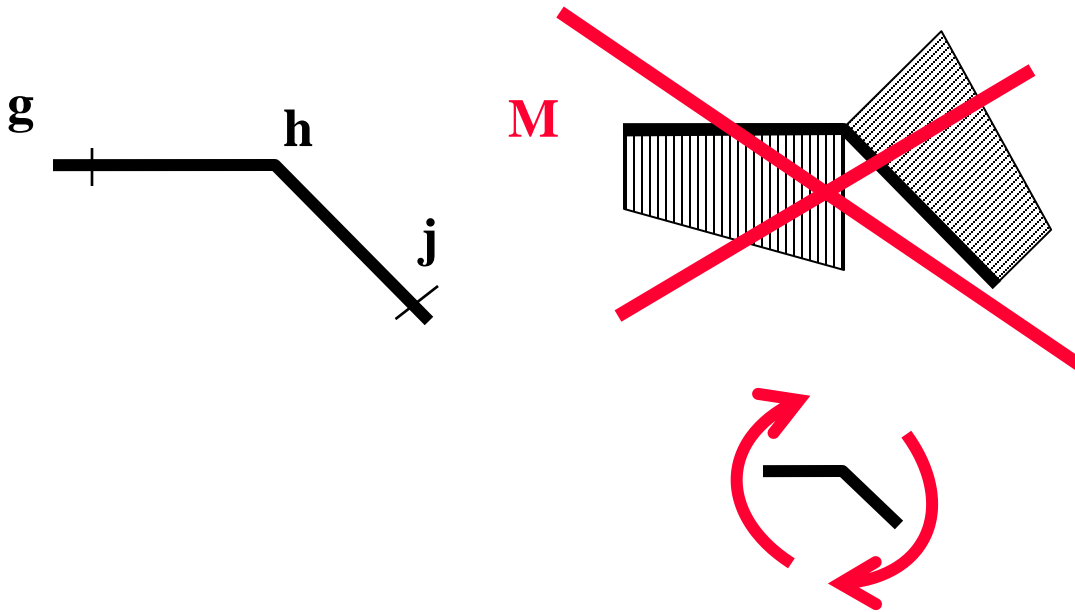
- V místě lomu střednice (ve styčnicku, v rámovém rohu):



Vnitřní síly prutu:

Důsledky rovnováhy vnitřních sil ve styčnicku pro průběh M :

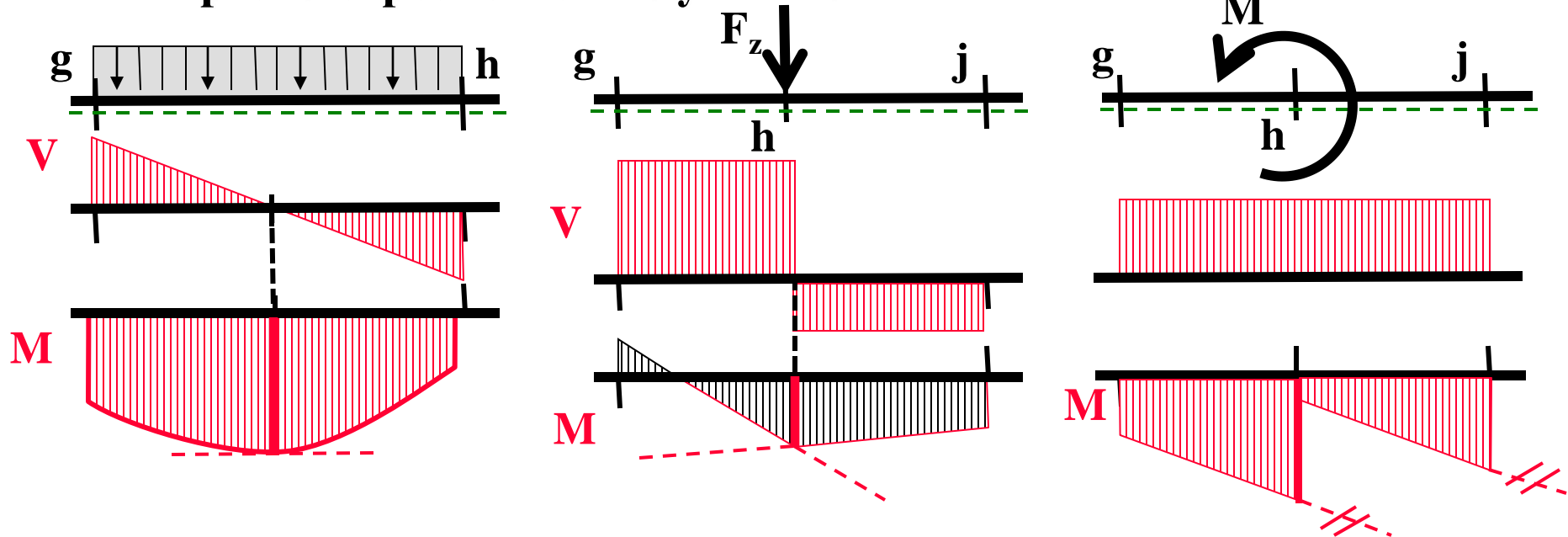
- V místě lomu střednice (ve styčnicku, v rámovém rohu) – zjevná podstatná chyba:



Vnitřní síly prutu:

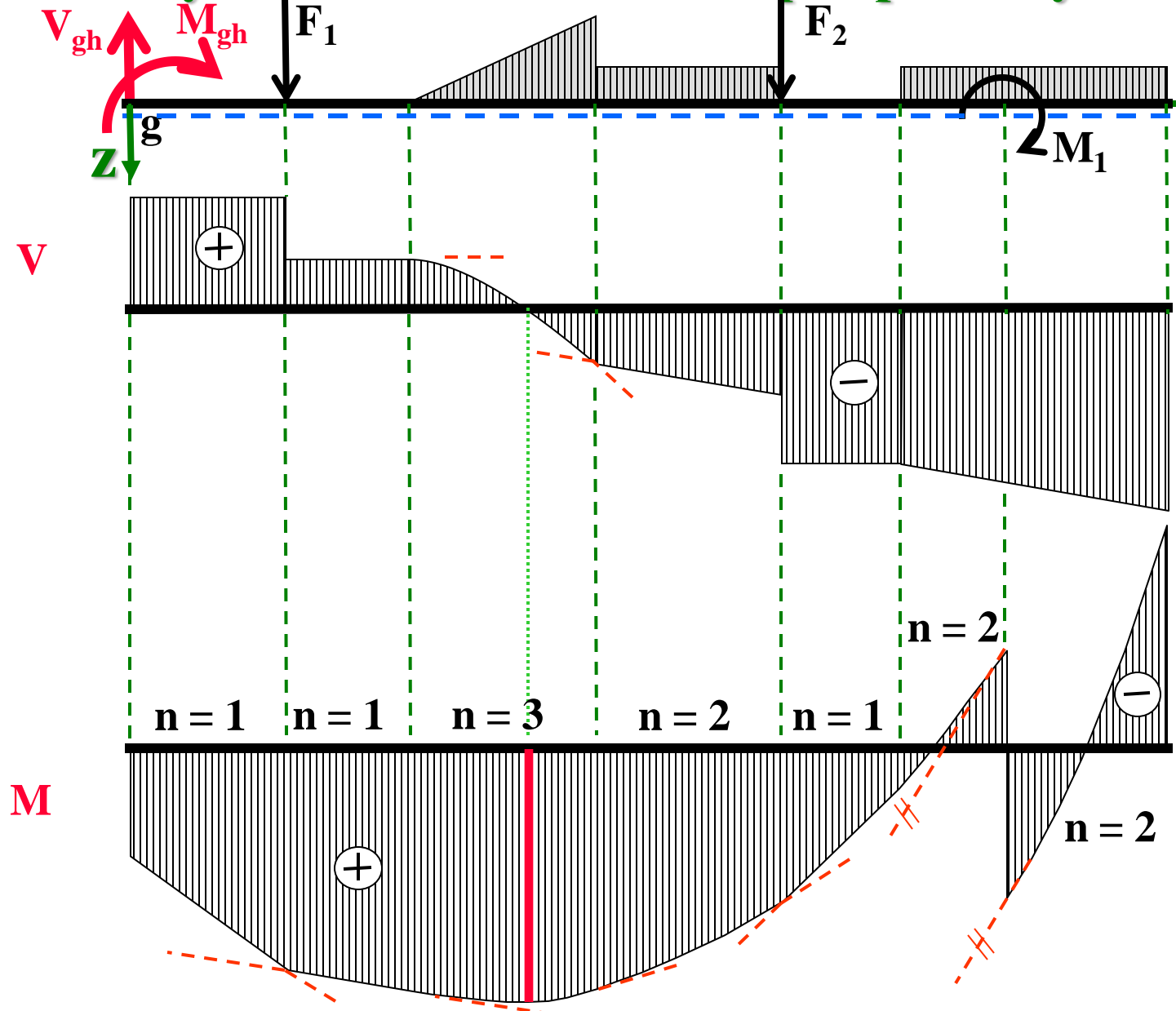
Poloha extrému ohybového momentu M :

- Při návrhu konstrukcí velice často o jejich únosnosti rozhoduje extrém ohybového momentu M .
- Průřez s extrémem ohybového momentu M je svázán s jednou z následujících podmínek:
 - posouvající síla $V(x)$ je rovna 0,
 - $V(x)$ mění skokem znaménko z + na - nebo z - na + ,
 - v průřezu působí osamělý moment.

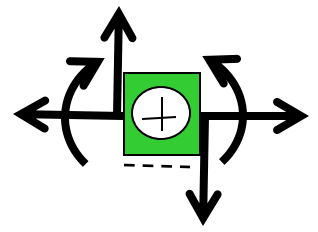


Vnitřní síly prutu:

Důsledky diferenciálních vztahů pro průběhy vnitřních sil:



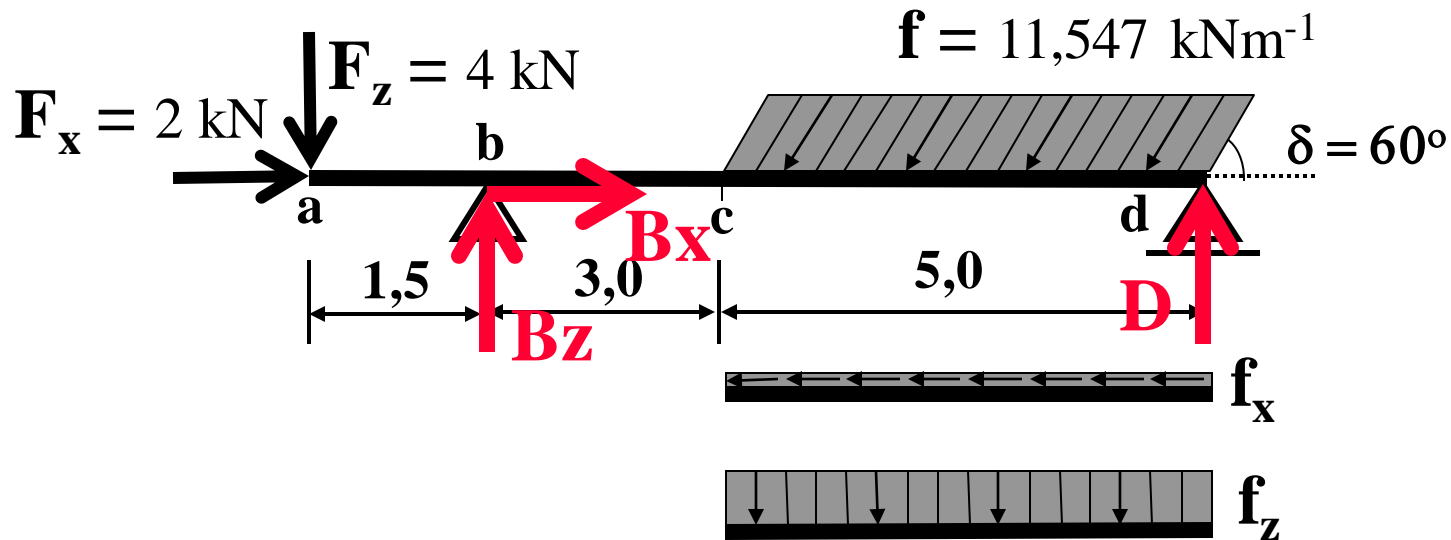
$$\frac{dV(x)}{dx} = -f_z(x)$$



$$\frac{dM(x)}{dx} = +V(x)$$

Vnitřní síly prutu:

Vykreslení průběhů M , N , V na přímém nosníku:



Rozklad zatížení:

$$f_x = f \cdot \cos 60^\circ = 11,547 \cdot \cos 60^\circ = 5,774 \text{ kNm}^{-1}$$

$$f_z = f \cdot \sin 60^\circ = 11,547 \cdot \sin 60^\circ = 10,000 \text{ kNm}^{-1}$$

Výpočet reakcí:

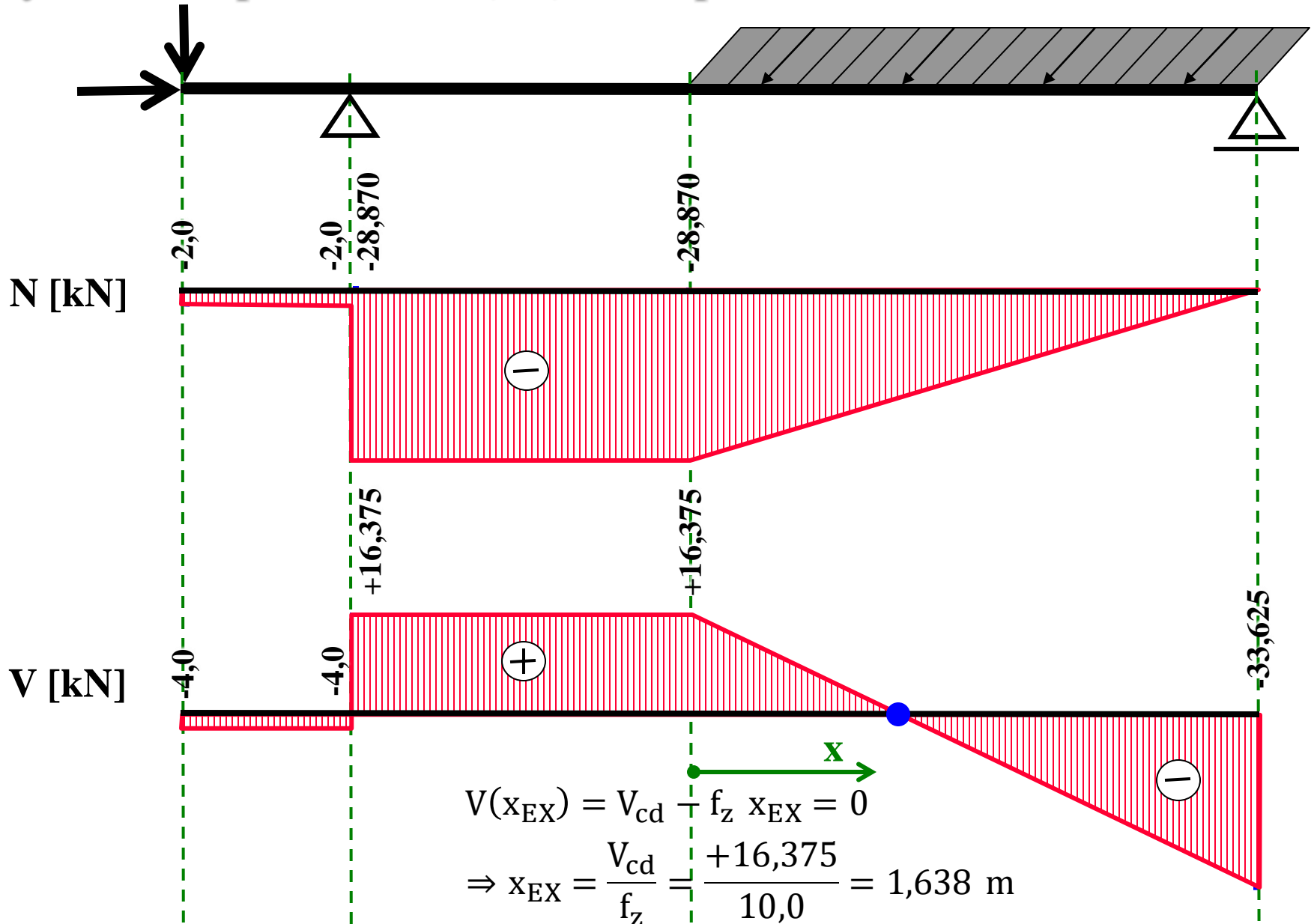
$$B_x = 26,870 \text{ kN}$$

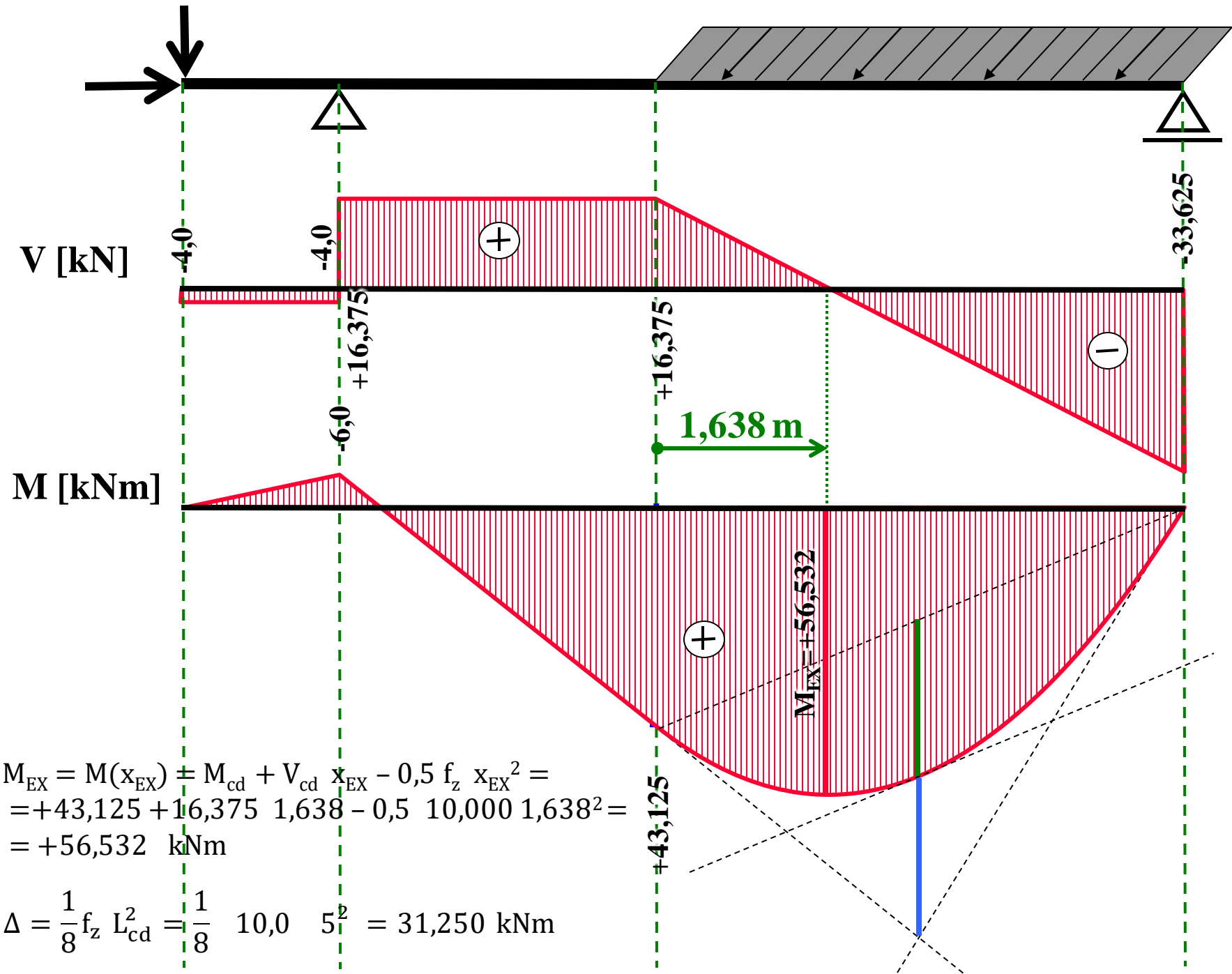
$$B_z = 20,375 \text{ kN}$$

$$D = 33,625 \text{ kN}$$

Vnitřní síly prutu:

Vykreslení průběhů M, N, V na přímém nosníku:

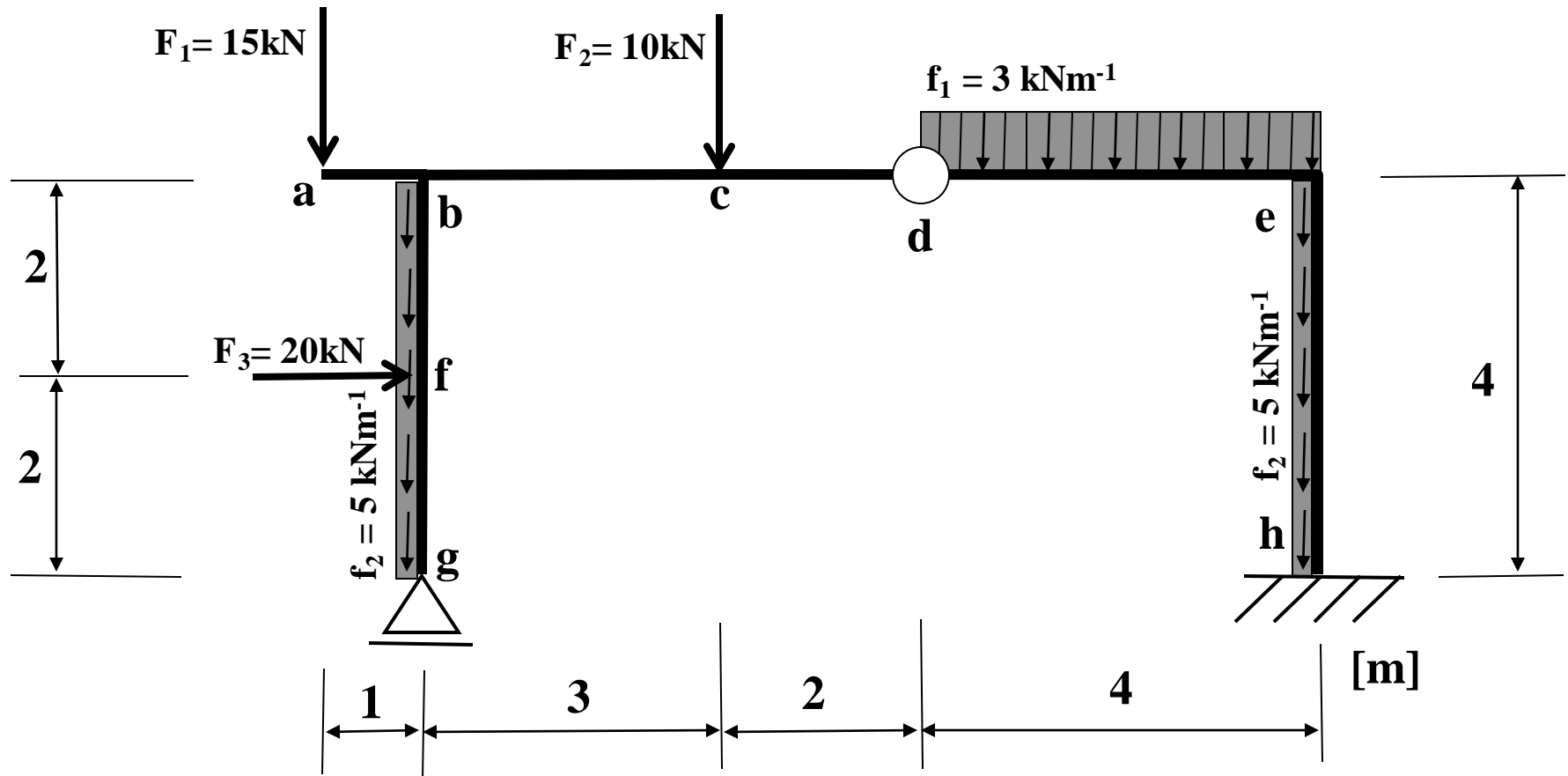




Vnitřní síly prutu:

Vykreslení průběhů M , N , V na složené soustavě:

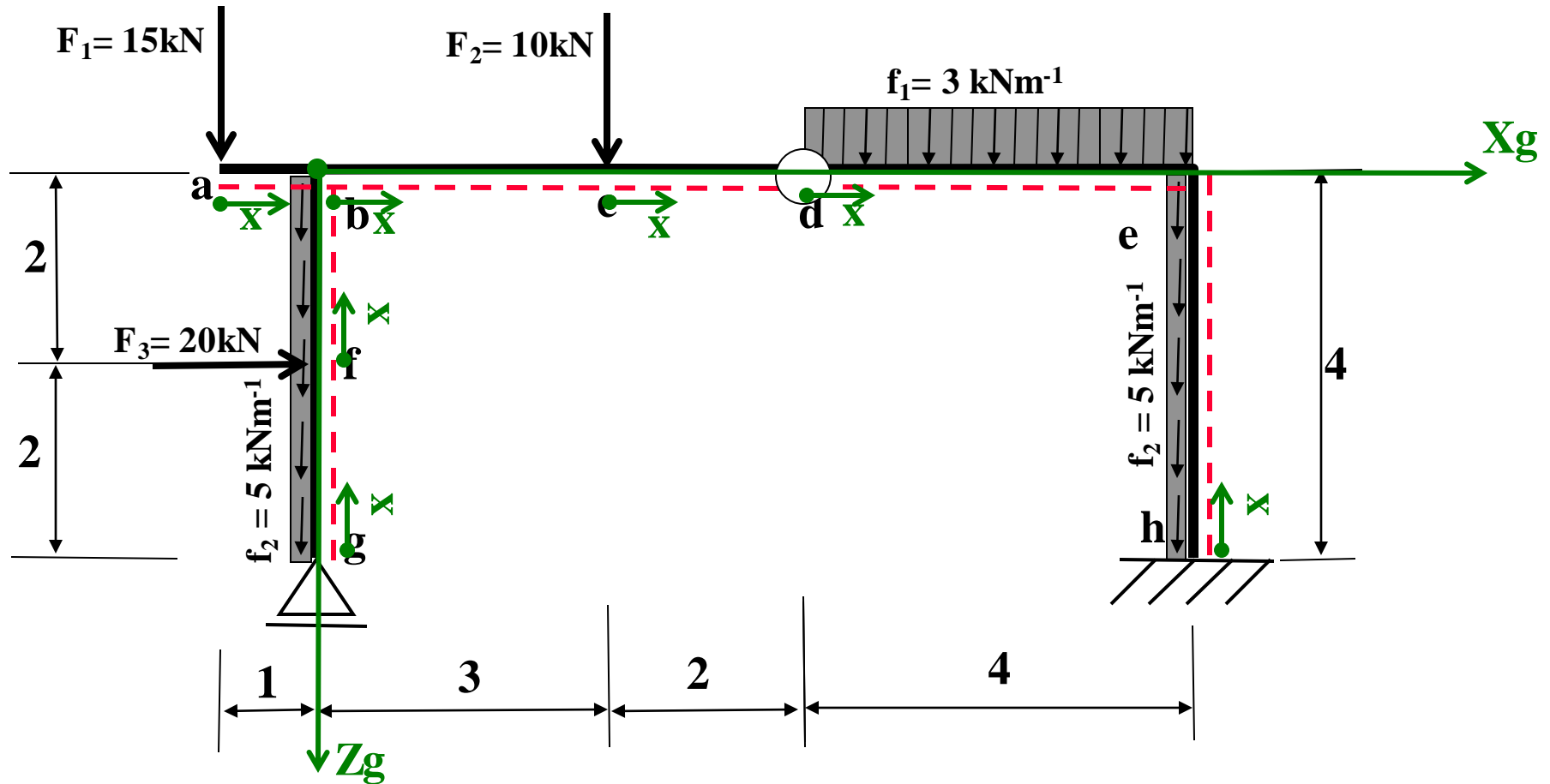
- Vykreslete průběh vnitřních sil M , N , V na zadané složené soustavě:



Vnitřní síly prutu:

Vykreslení průběhů M , N , V na složené soustavě:

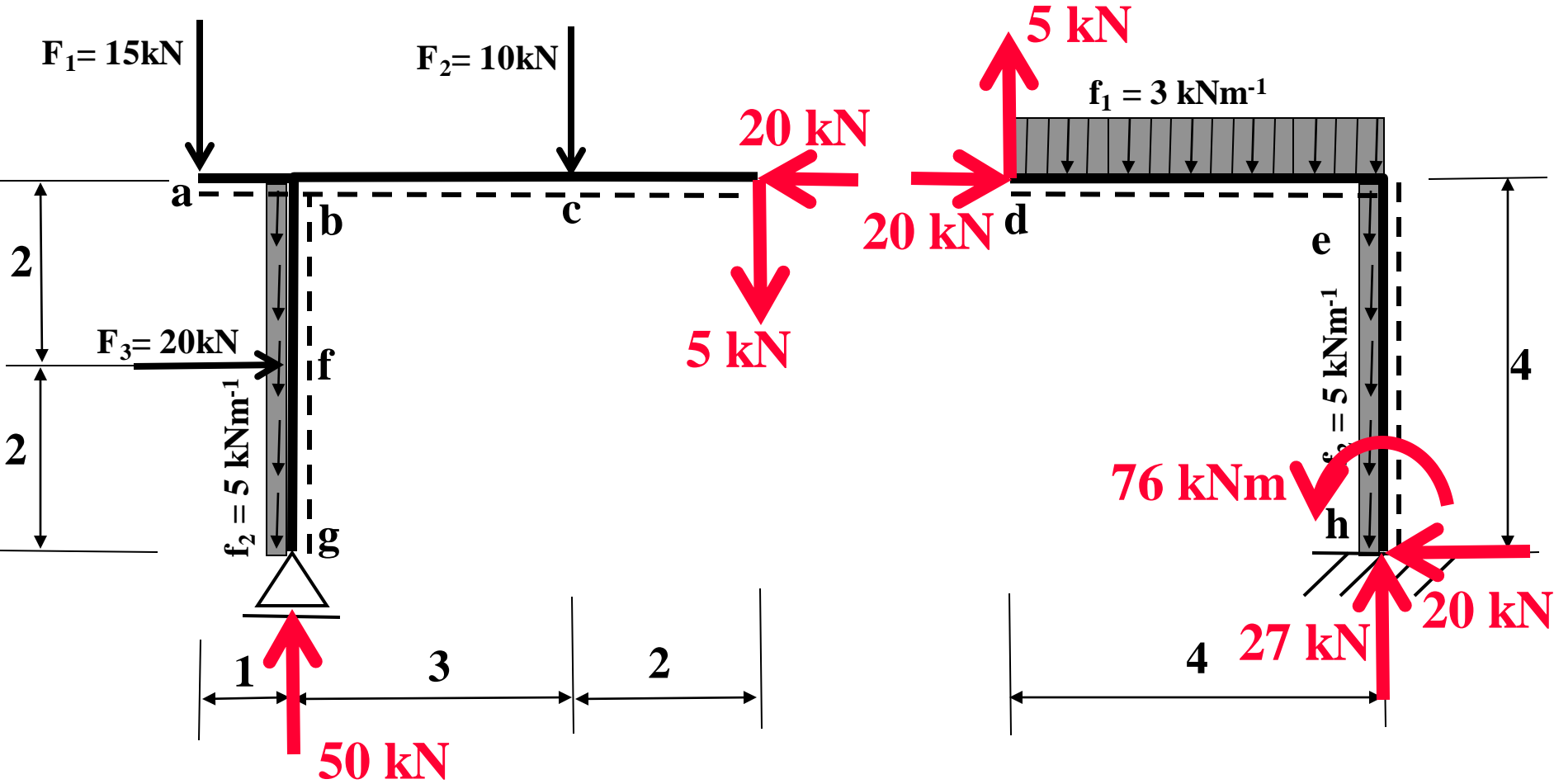
- Volba lokálních souřadných systémů (spodních vláken) a globálního souřadného systému:

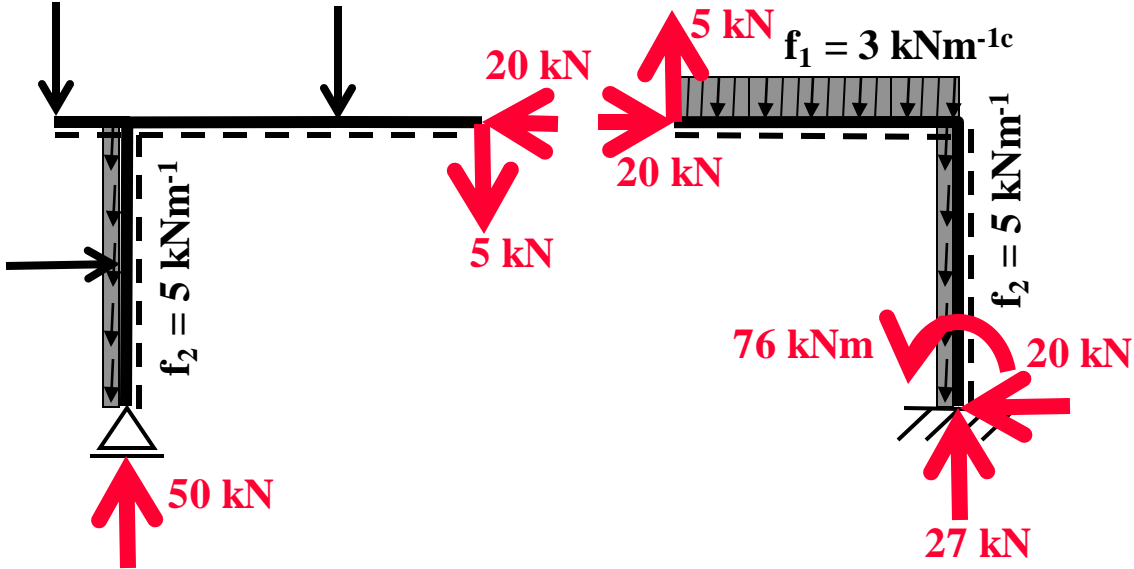
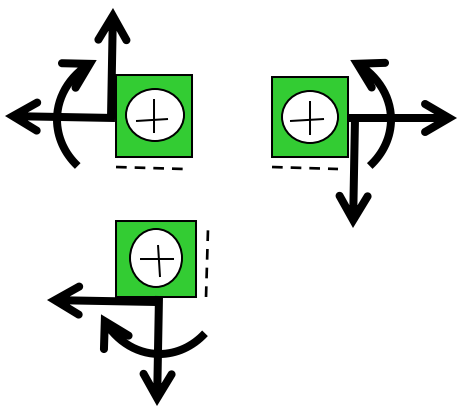


Vnitřní síly prutu:

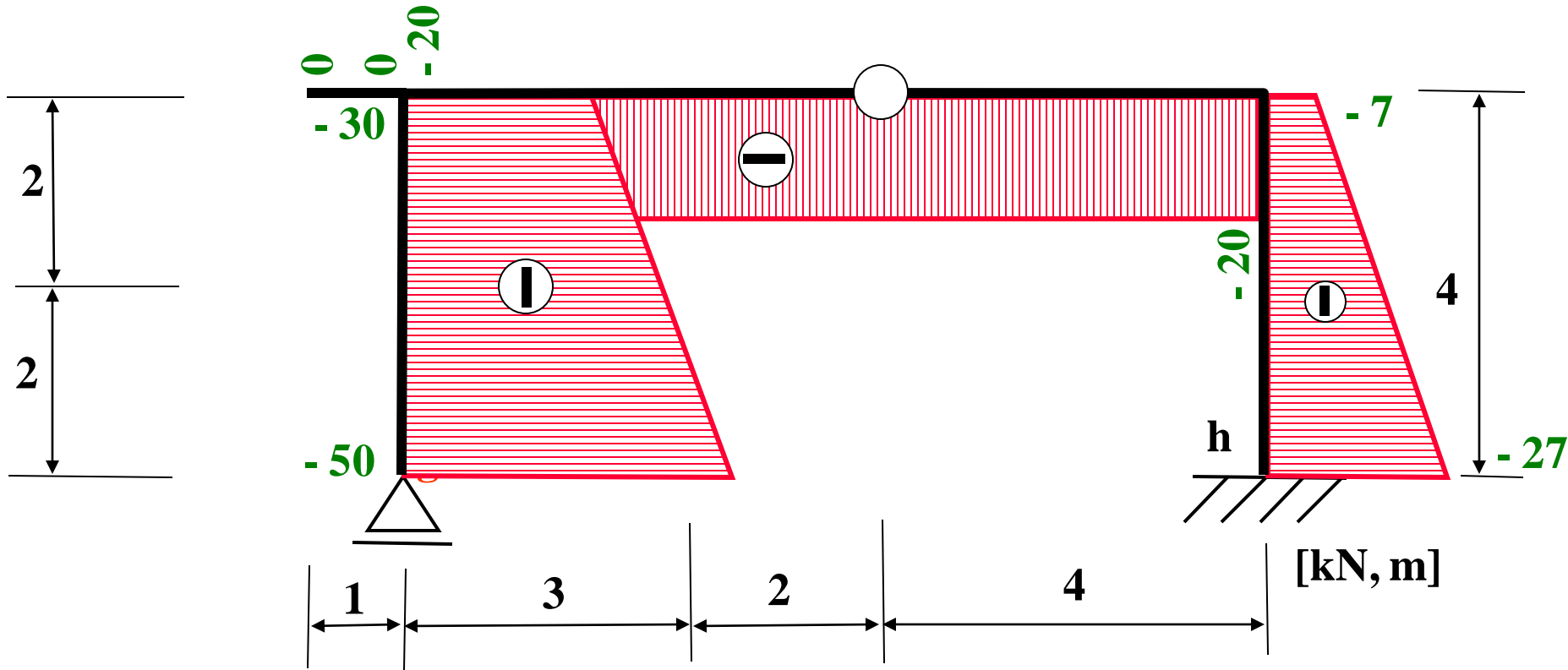
Vykreslení průběhů M, N, V na složené soustavě:

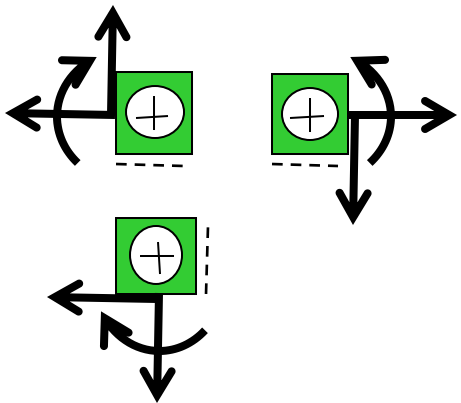
- Určení vnějších a vnitřních reakcí složené soustavy:



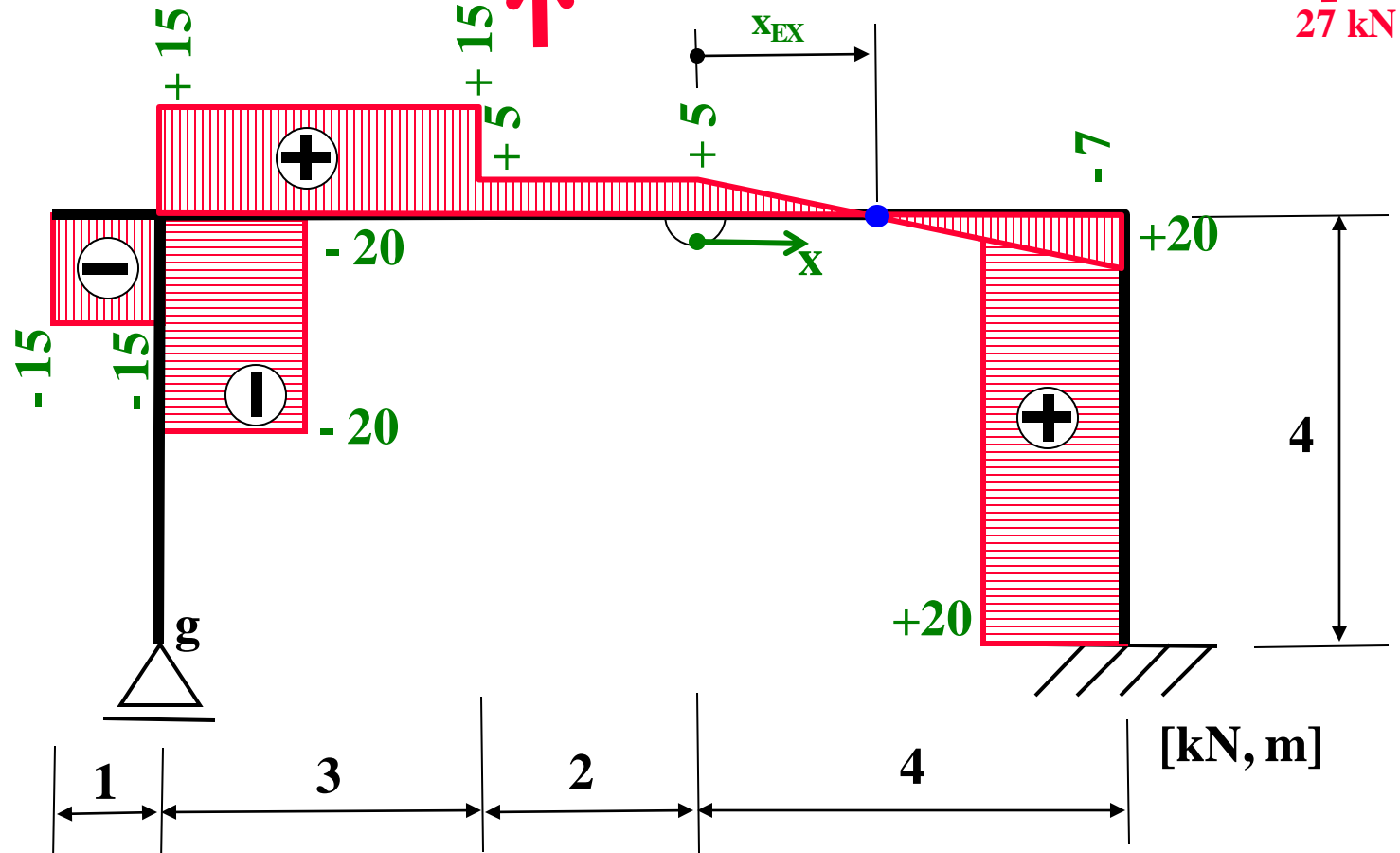
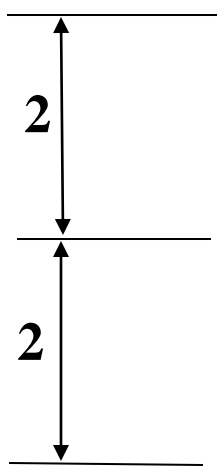
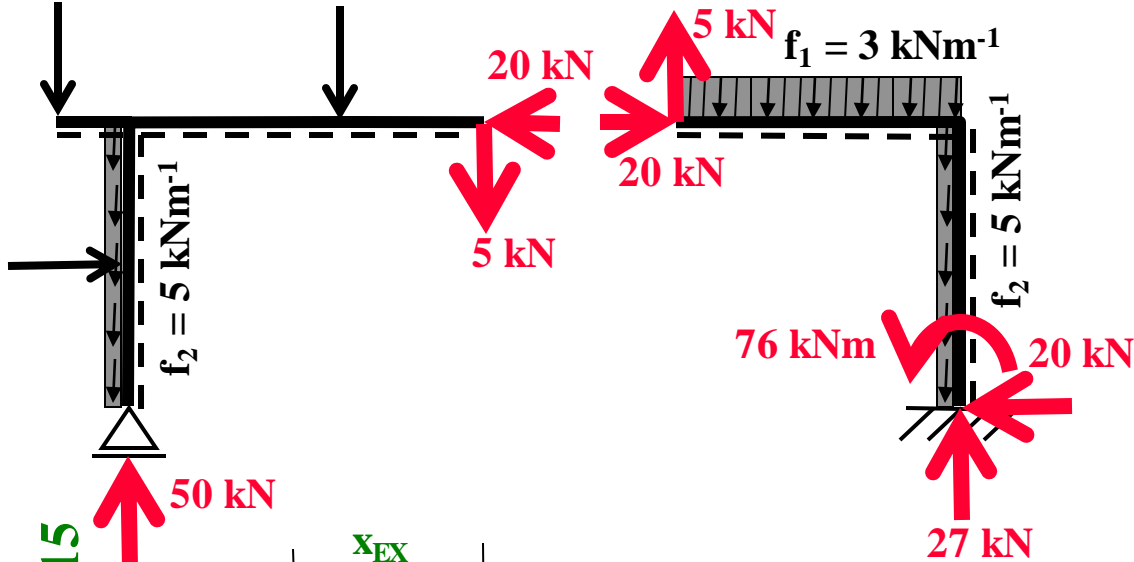


$N(x)$ [kN] :

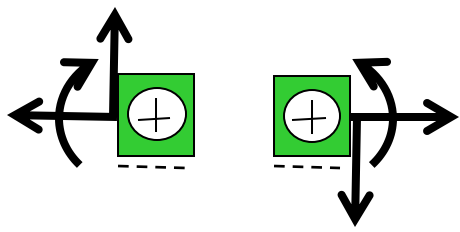




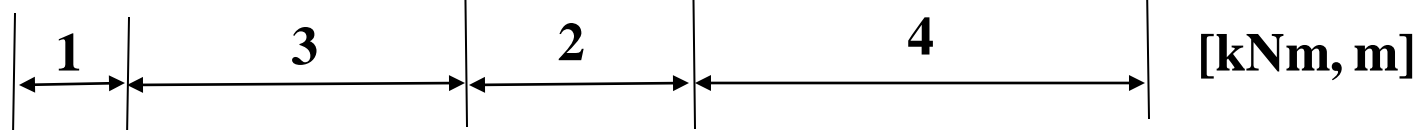
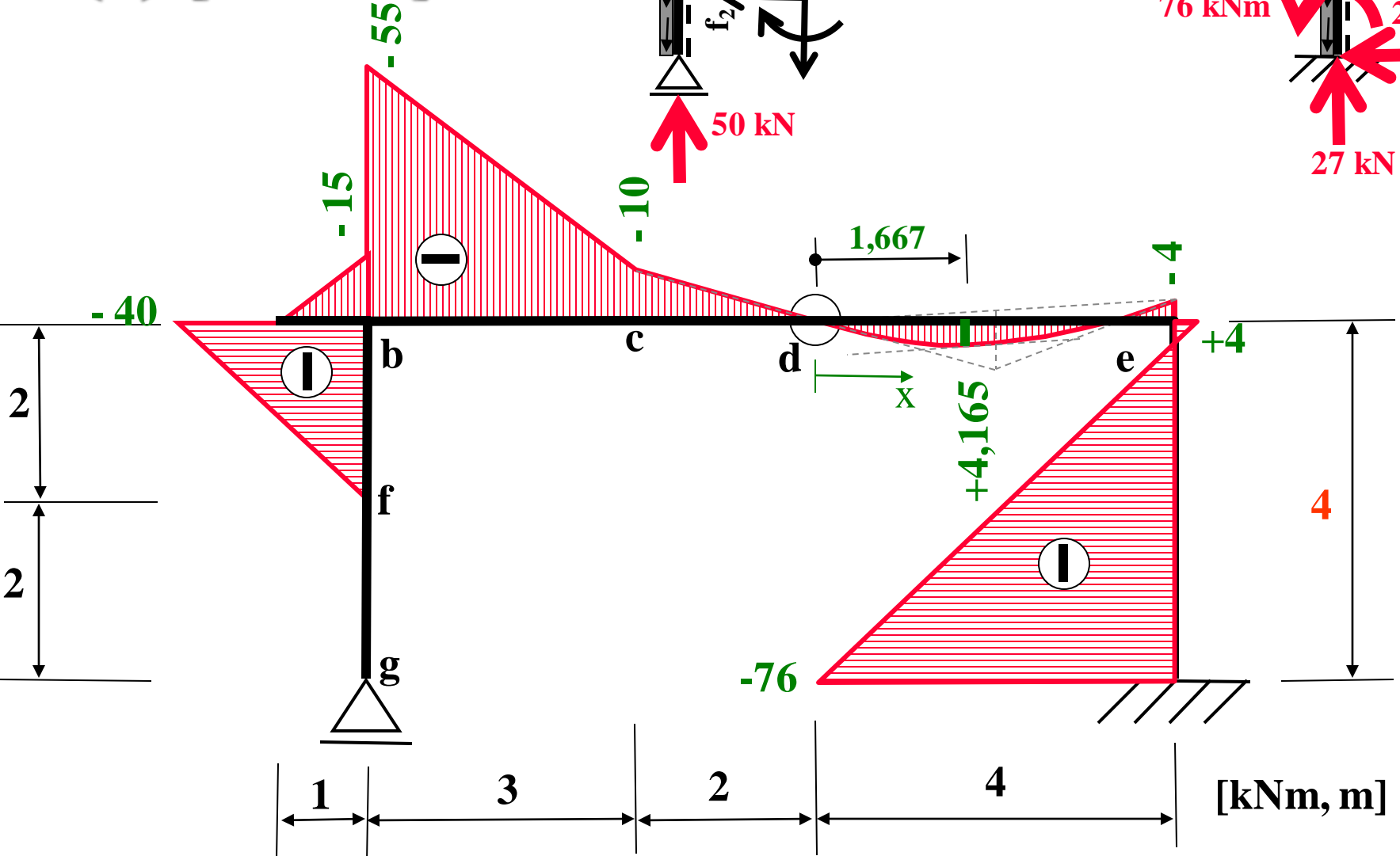
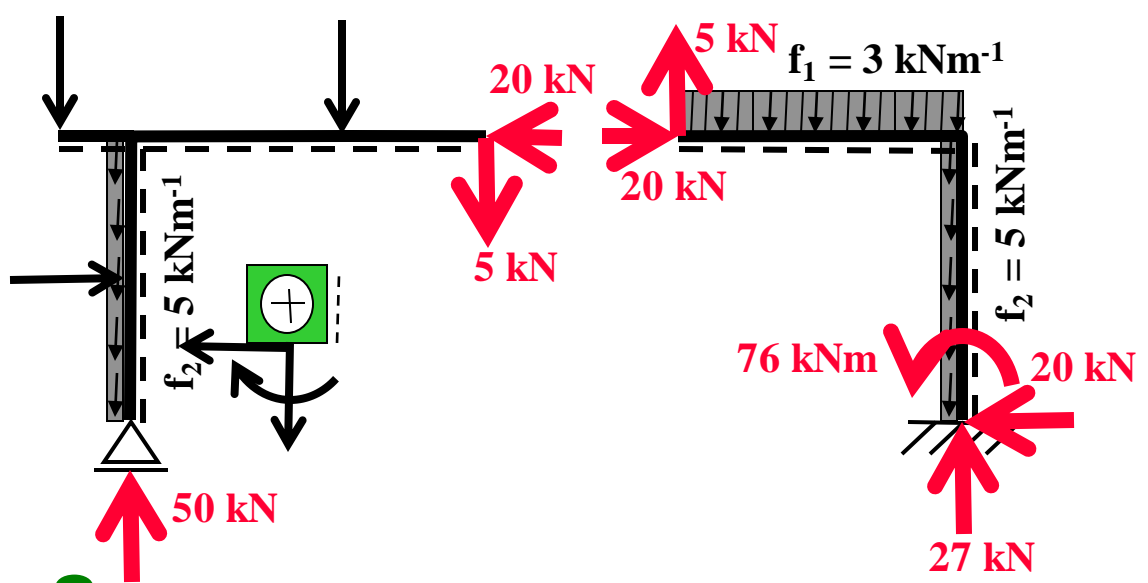
$V(x)$ [kN] ..

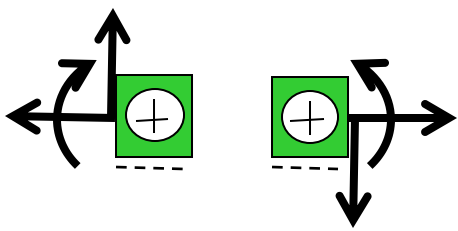


[kN, m]

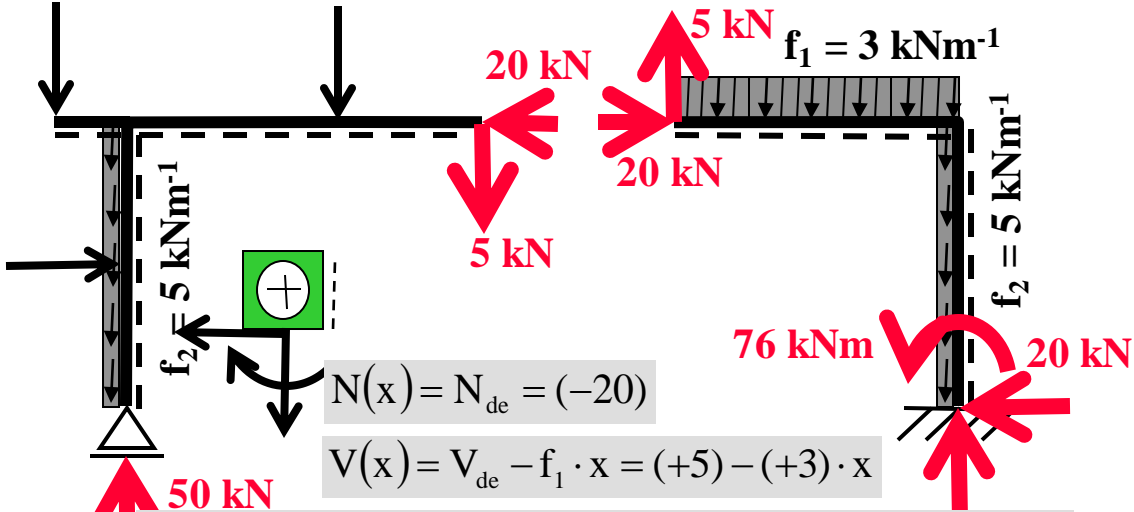


M(x) [kNm] :





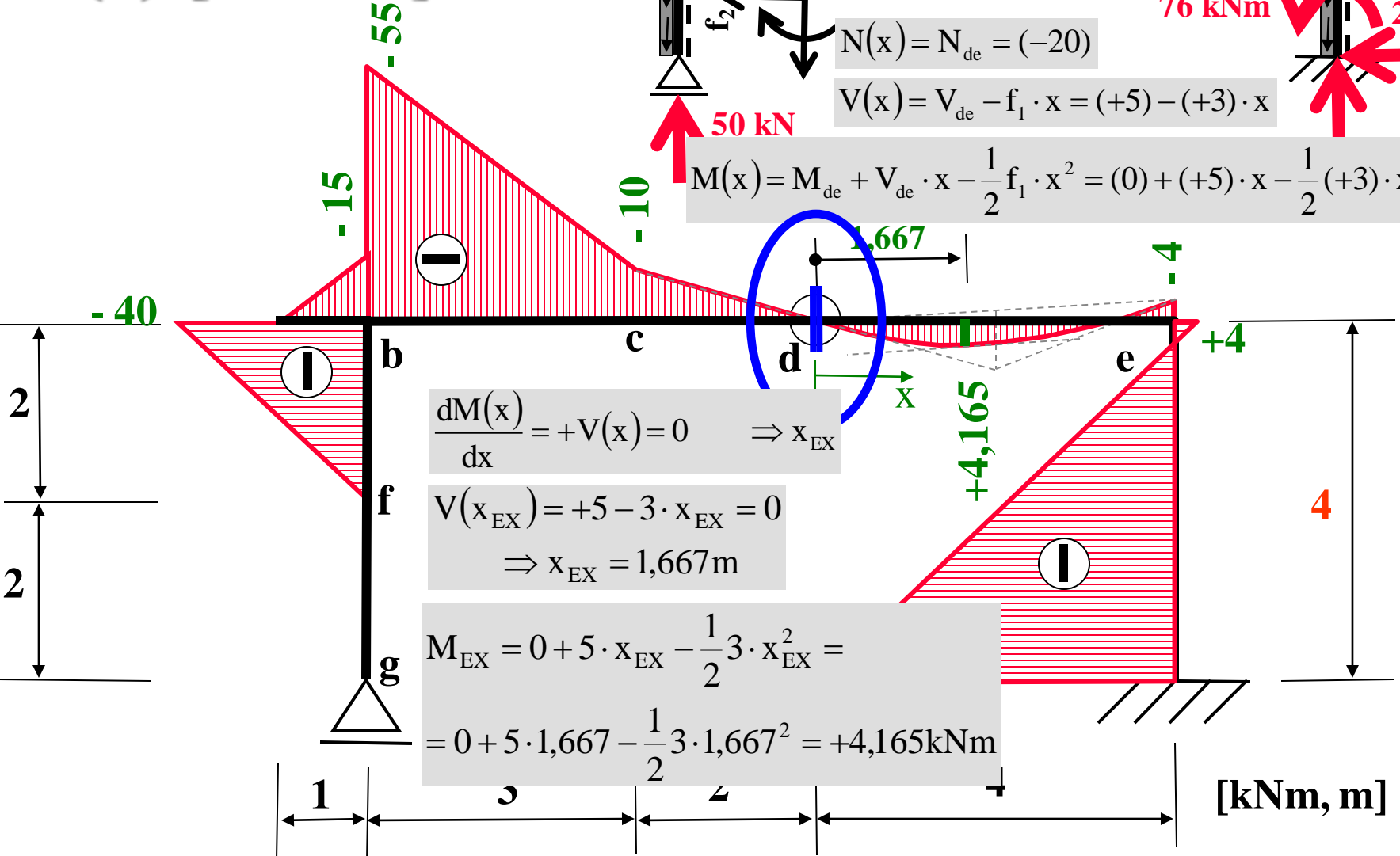
M(x) [kNm] :



$$N(x) = N_{de} = (-20)$$

$$V(x) = V_{de} - f_1 \cdot x = (+5) - (+3) \cdot x$$

$$M(x) = M_{de} + V_{de} \cdot x - \frac{1}{2} f_1 \cdot x^2 = (0) + (+5) \cdot x - \frac{1}{2} (+3) \cdot x^2$$



$$\frac{dM(x)}{dx} = +V(x) = 0 \Rightarrow x_{EX}$$

$$V(x_{EX}) = +5 - 3 \cdot x_{EX} = 0$$

$$\Rightarrow x_{EX} = 1,667 \text{ m}$$

$$M_{EX} = 0 + 5 \cdot x_{EX} - \frac{1}{2} 3 \cdot x_{EX}^2 =$$

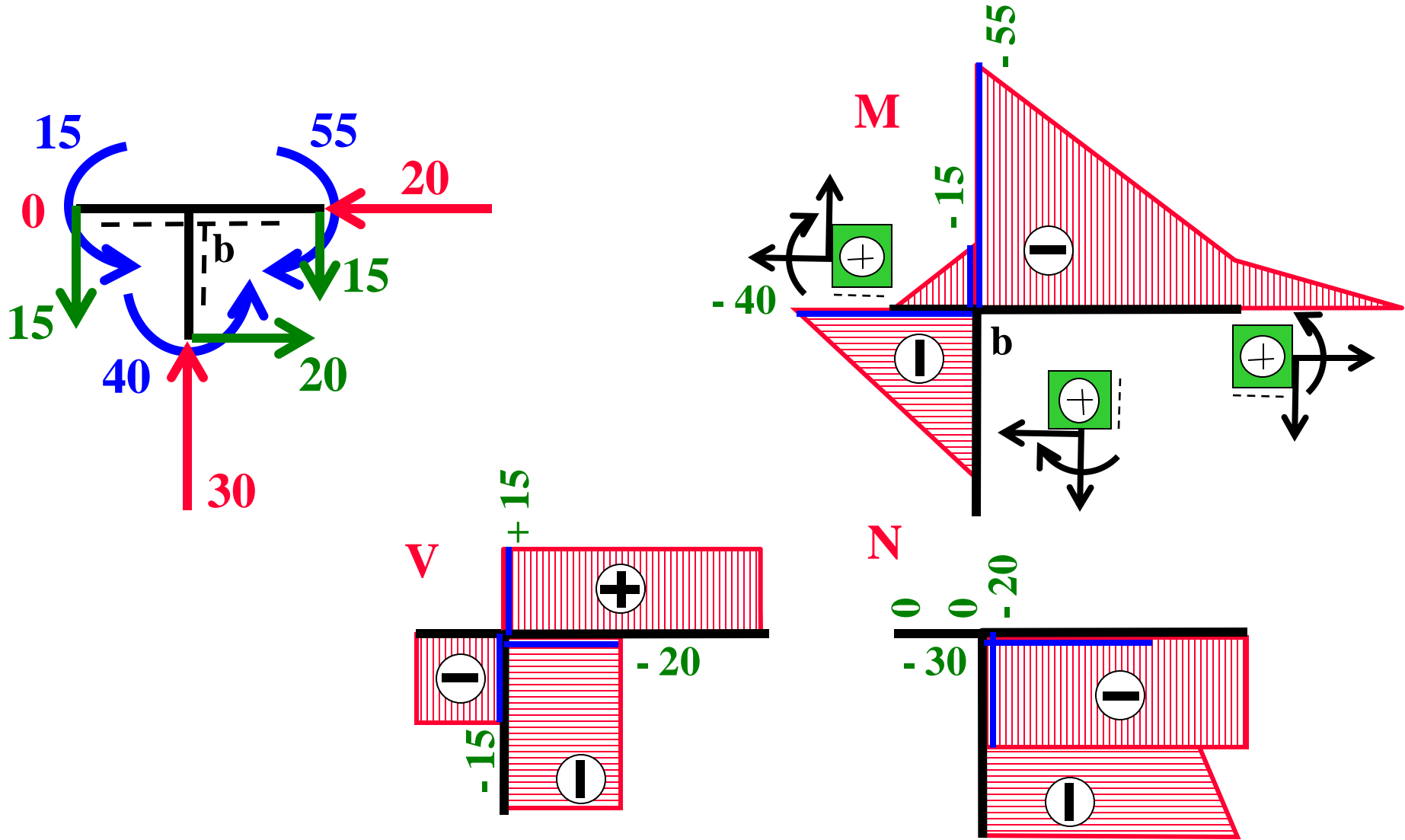
$$= 0 + 5 \cdot 1,667 - \frac{1}{2} 3 \cdot 1,667^2 = +4,165 \text{ kNm}$$

[kNm, m]

Vnitřní síly prutu:

Vykreslení průběhů M, N, V na složené soustavě:

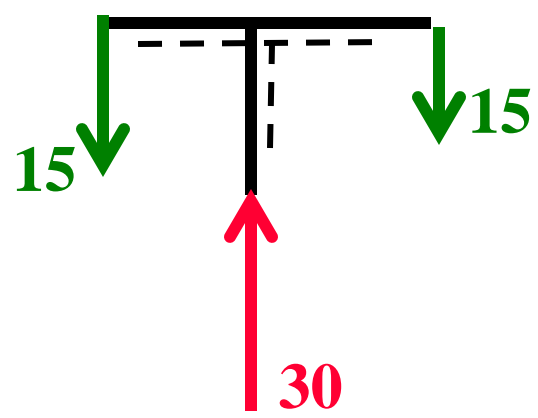
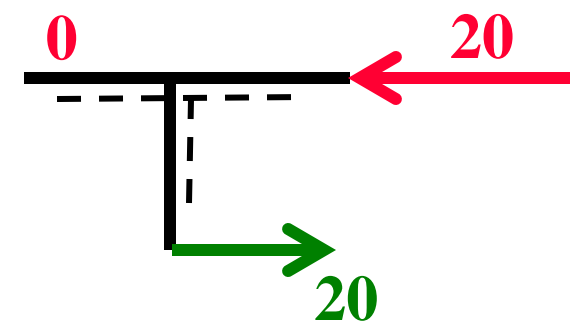
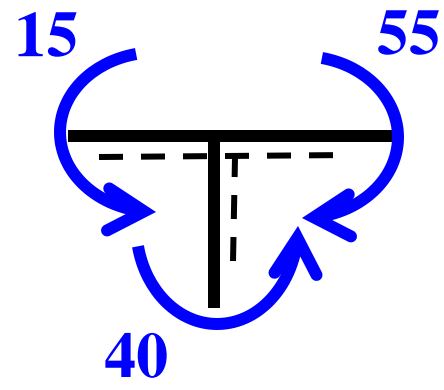
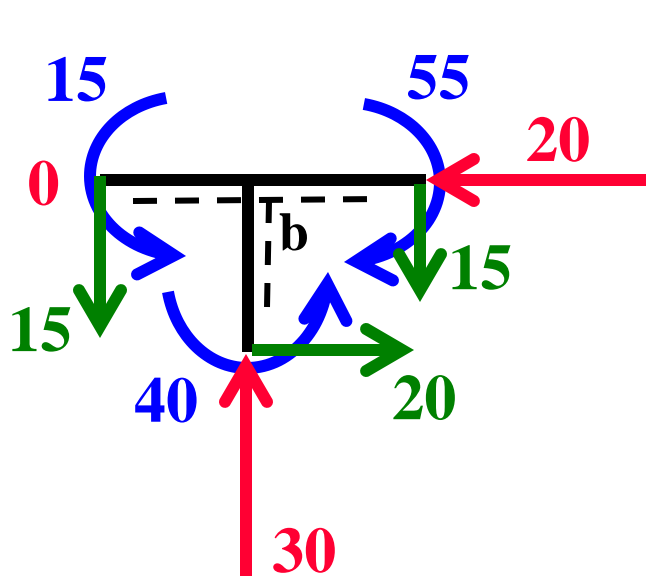
- Kontrola rovnováhy vnitřních sil ve styčnicku b:



Vnitřní síly prutu:

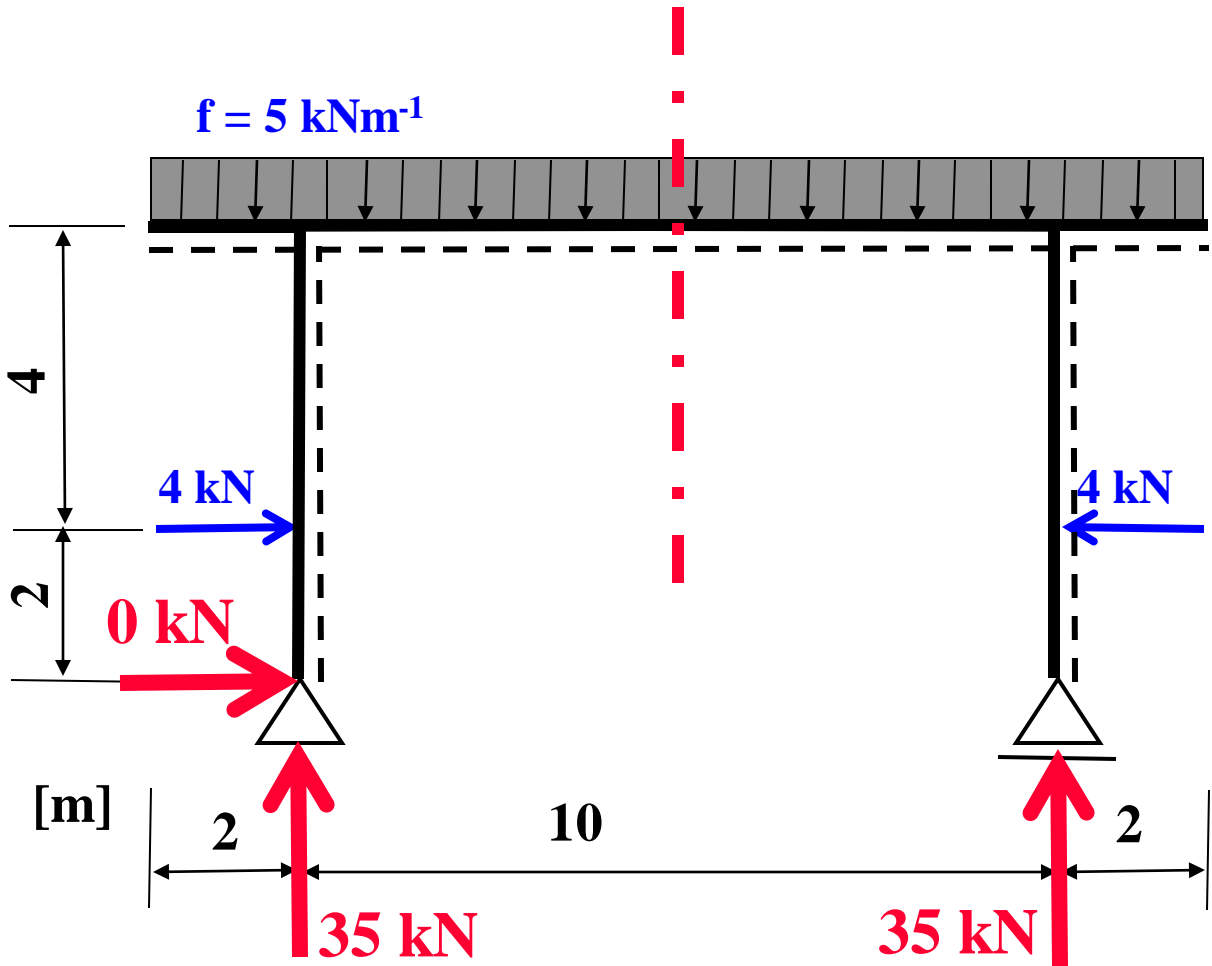
Vykreslení průběhů M, N, V na složené soustavě:

- Kontrola rovnováhy vnitřních sil ve styčnicku b:



Vnitřní síly prutu:

M, N, V na symetrické konstrukci zatížené symetricky:

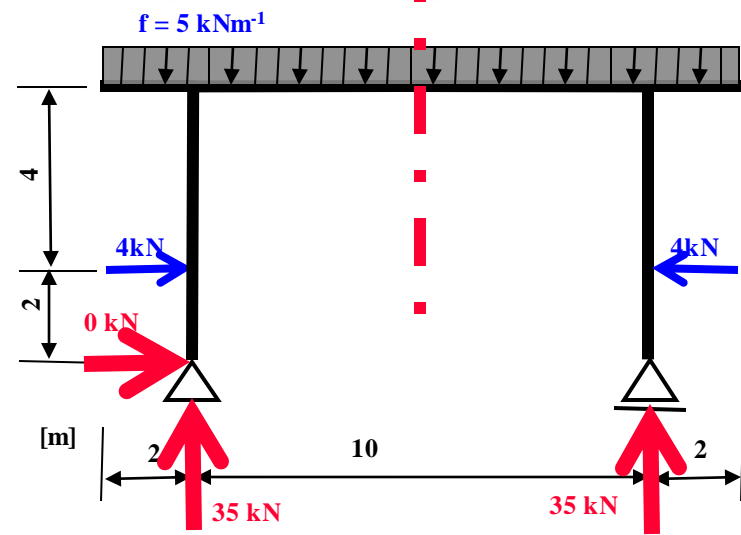
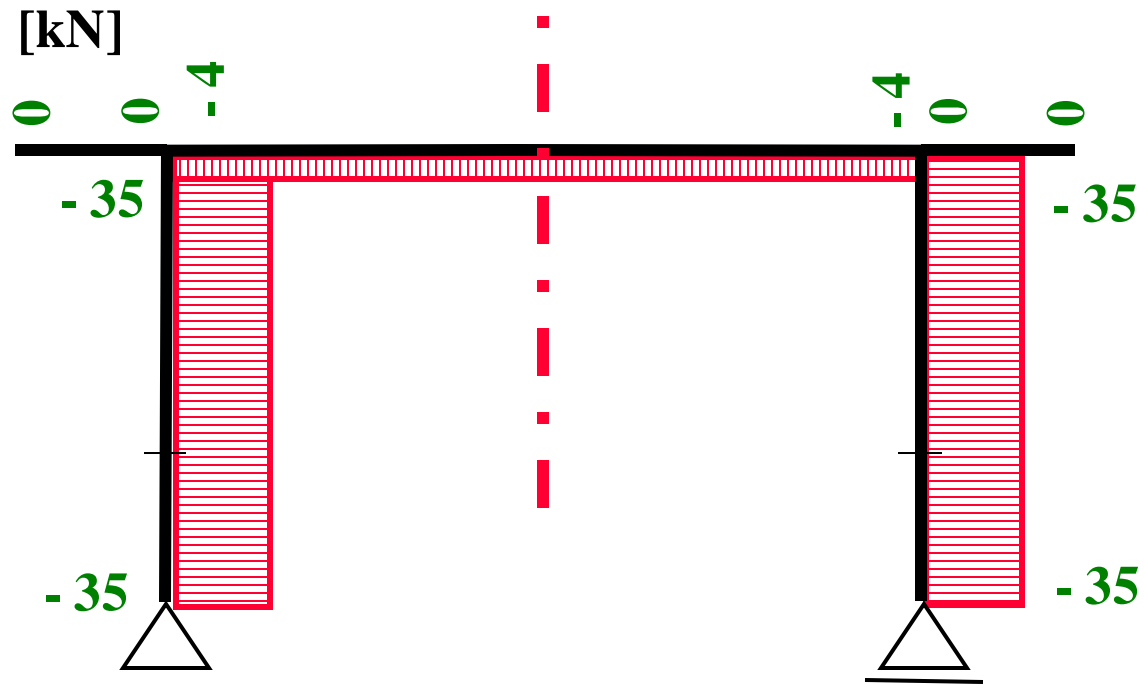


Reakce:

- symetrické

Vnitřní síly prutu:

M, N, V na symetrické konstrukci zatížené symetricky:

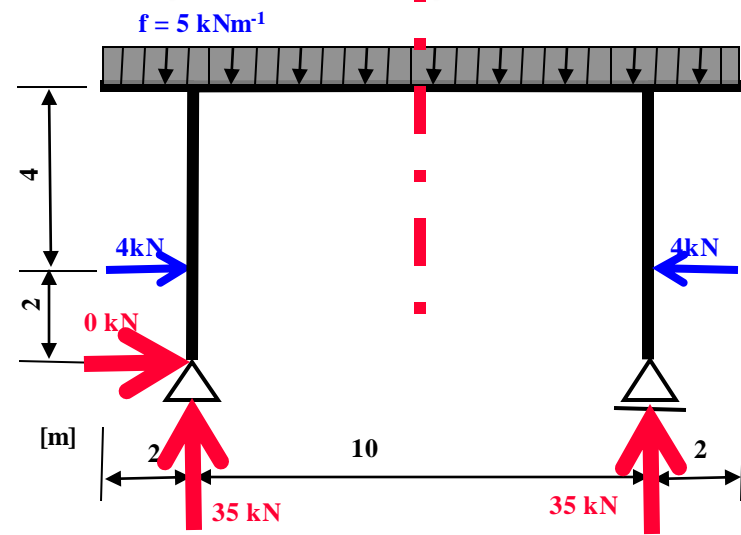
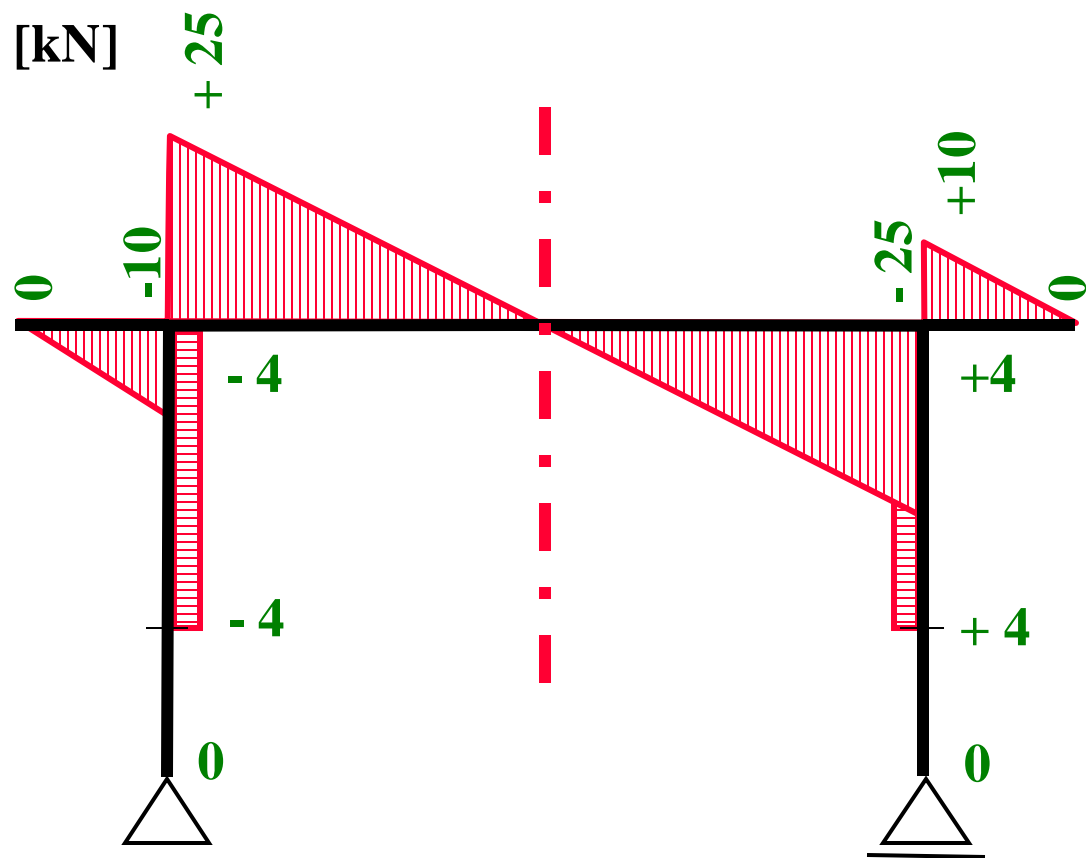


N:

● hodnoty symetrické

Vnitřní síly prutu:

M, N, V na symetrické konstrukci zatížené symetricky:

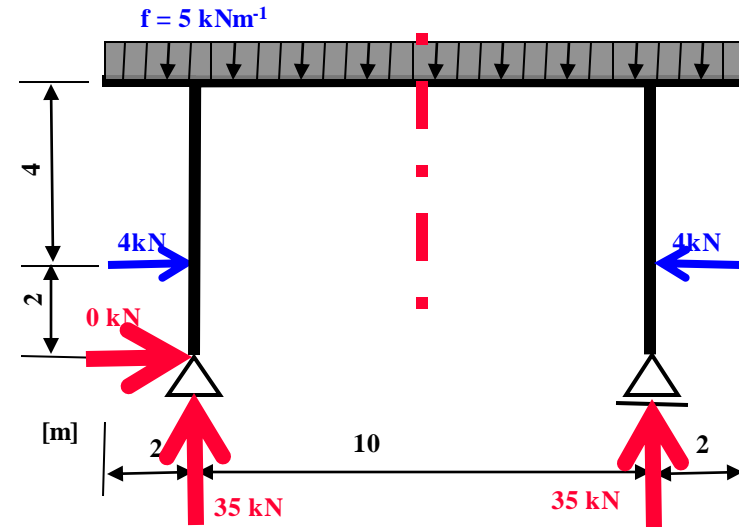
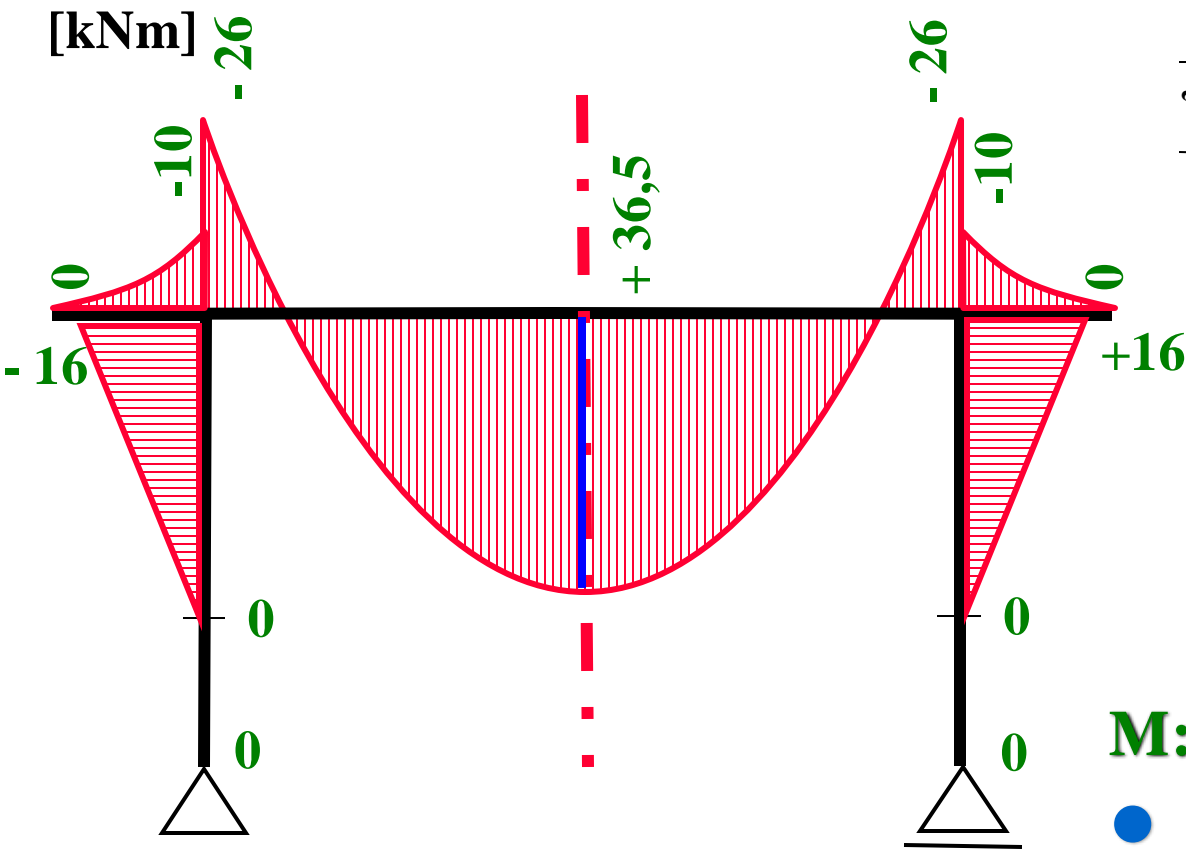


V:

● hodnoty antisymetrické

Vnitřní síly prutu:

M, N, V na symetrické konstrukci zatížené symetricky:



M:

- obrazec M symetrický,
- **V, M** \Rightarrow na ose symetrie extrém **M** (lokální).

Konec