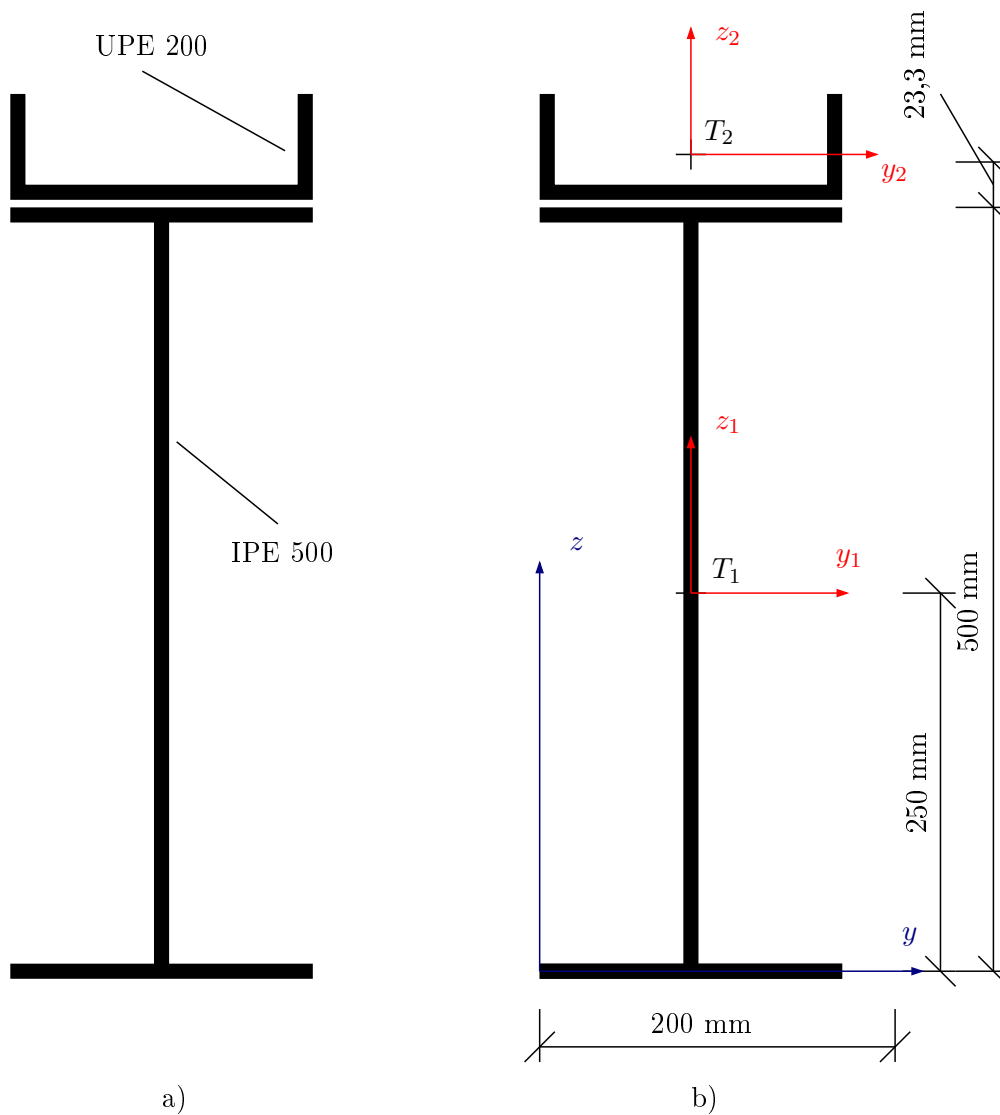


## Průřezové charakteristiky - část 2

11. května 2020

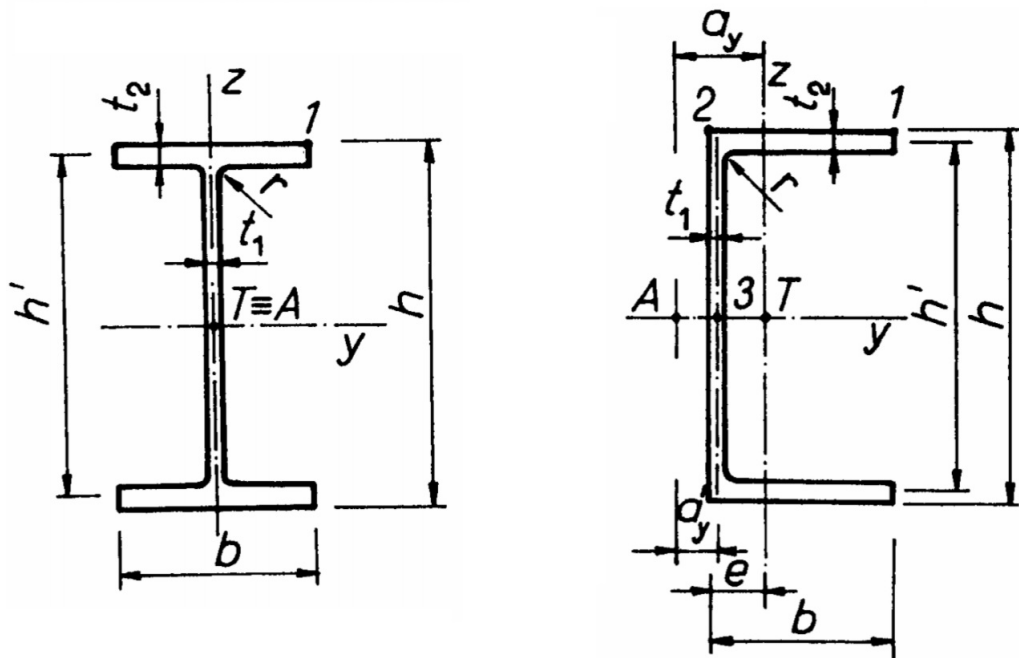
Úkol č.1: Stanovte hlavní centrální momenty setrvačnosti svařence.



Obrázek 1: a) Zadání, b) Schéma průřezu.

Řešení:

- Začneme okótováním průřezu. Profil IPE budeme značit indexem 1 a profile UPE indexem 2. Z [tabulek průřezových charakteristik](#) použijeme pouze pro nás důležité hodnoty. Těmi jsou výška i šířka profilu IPE a vzdálenost těžiště  $e$  od okraje průřezu UPE. Pro další postup zavedeme pomocný souřadnicový systém  $yz$ .



Obrázek 2: Výňatek z [tabulek průřezových charakteristik](#)

- Následně určíme polohu těžiště. Náš průřez je symetrický, čehož můžeme využít při hledání těžiště - to vždy leží na ose symetrie, tedy  $y_t = 100$  mm. Pro nalezení  $z_t$  použijeme výpočet polohy těžiště pomocí statického momentu k ose  $y$ . Určíme souřadnice těžišť obou částí průřezu pomocí [tabulek průřezových charakteristik](#). Z tabulek budeme dále potřebovat plochy jednotlivých profilů  $A$  a centrální momenty setrvačnosti k lokálním osám  $I_y^i$  a  $I_z^i$  (v tabulkách značeny pouze jako  $I_y$  a  $I_z$ ).

	i	$y_i$ [mm]	$z_i$ [mm]	$A_i$ [mm <sup>2</sup> ]	$I_y^i$ [mm <sup>4</sup> ]	$I_z^i$ [mm <sup>4</sup> ]
IPE500	1	100	250	11600	$482 \cdot 10^6$	$21,4 \cdot 10^6$
UPE200	2	100	523,3	2350	$15,4 \cdot 10^6$	$1,37 \cdot 10^6$

Tabulka 1: Charakteristiky k lokálním těžišťovým osám a poloha těžiště k pomocným osám  $y$  a  $z$ .

$$z_t = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{250 \cdot 11600 + 523,3 \cdot 2350}{11600 + 2350} = 296 \text{ mm} \quad (1)$$

Nyní již známe polohu těžiště, a jelikož je průřez symetrický, jsou těžišťové osy  $y_c$  a  $z_c$  zároveň hlavními osami (jedna z nich musí být totožná s osou symetrie).

Je potřeba uvědomit si, že **profil UPE je pootočený vůči tabulce průřezových charakteristik!** Zatímco moment setrvačnosti  $I_y^i$  je pro profil IPE k vertikální ose, pro profil UPE je k horizontální ose, tzn.  $I_y^1 = I_{y_1}^1$ , ale  $I_y^2 = I_{z_2}^2$

V tuto chvíli již můžeme určit hlavní momenty setrvačnosti:

$$I_{y_c} = I_{y_1}^1 + I_{z_2}^2 + A_1 \cdot (z_1 - z_t)^2 + A_2 \cdot (z_2 - z_t)^2 \quad (2)$$

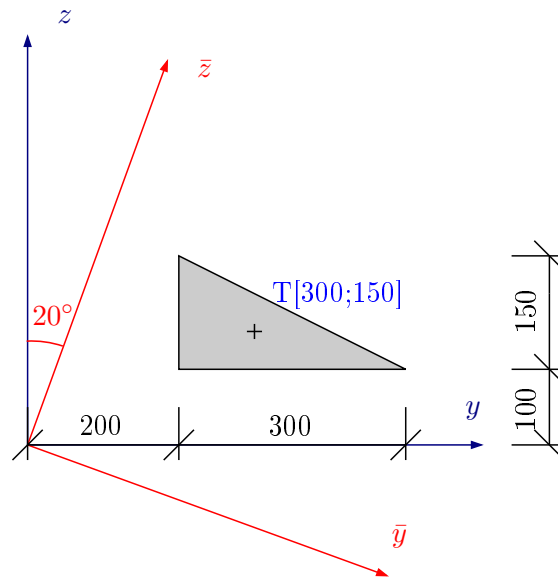
$$I_{y_c} = 482 \cdot 10^6 + 1,37 \cdot 10^6 + 11600 \cdot (250 - 296)^2 + 2350 \cdot (523 - 296)^2 \quad (3)$$

$$I_{y_c} = 629,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = I_{max} \quad (4)$$

$$I_{z_c} = I_{z_1}^1 + I_{y_2}^2 = 21,4 \cdot 10^6 + 15,4 \cdot 10^6 \quad (5)$$

$$I_{z_c} = 36,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = I_{min} \quad (6)$$

**Úkol č.2:** Spočítejte axiální momenty setrvačnosti a deviační moment trojúhelníku k souřadnicovým osám  $\bar{y}$  a  $\bar{z}$ .



Obrázek 3: Schéma úlohy

**Řešení:**

- Poloha těžiště trojúhelníku v souřadnicovém systému  $yz$ :  $y_t = 300$  mm,  $z_t = 150$  mm. Plocha trojúhelníku  $A = 22500$  mm<sup>2</sup>. Nejdříve určíme deviační a axiální momenty k souřadnicovému systému  $yz$ , včetně jejich Steinerových doplňků:

$$I_y = \frac{1}{36}bh^3 + Az_t^2 = \frac{1}{36} \cdot 300 \cdot 150^3 + 22500 \cdot 150^2 = 534,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (7)$$

$$I_z = \frac{1}{36}b^3h + Ay_t^2 = \frac{1}{36} \cdot 300^3 \cdot 150 + 22500 \cdot 300^2 = 2137,5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (8)$$

$$D_{yz} = -\frac{1}{72}b^2h^2 + Ay_tz_t = \frac{1}{36} \cdot 300 \cdot 150^3 + 22500 \cdot 300 \cdot 150 = 984,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (9)$$

$$(10)$$

- Nyní můžeme určit momenty setrvačnosti k pootočeným souřadnicovým osám. V rovnicích (11)-(13) je pootočení  $\alpha$  kladné podle pravidla pravé ruky - tedy proti směru hodinových ručiček. Z toho plyne, že pootočení  $\alpha = -20^\circ$ .

$$I_{\bar{y}} = I_y \cos(\alpha)^2 + I_z \sin(\alpha)^2 - D_{yz} \sin(2\alpha) = 1354,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (11)$$

$$I_{\bar{z}} = I_z \cos(\alpha)^2 + I_y \sin(\alpha)^2 + D_{yz} \sin(2\alpha) = 1317,2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (12)$$

$$D_{\bar{y}\bar{z}} = \frac{1}{2}(I_y + I_z) \sin(2\alpha) + D_{yz} = 1269,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \cos(2\alpha) \quad (13)$$

- Výsledky bychom mohli zkontrolovat například posunutím souřadnicových os do těžiště průřezu a jejich otočením o  $20^\circ$ . Momenty setrvačnosti k takovýmto osám následně musí odpovídat "tabulkovým" hodnotám momentů setrvačnosti k těžišťovým osám trojúhelníku. Tento postup je však stejně náročný, jako bylo řešení celé úlohy.

Ke kontrole pootočení můžeme alespoň použít znalost, že polární moment setrvačnosti (součet axiálních momentů)  $I_0 = I_y + I_z$  je nezávislý na pootočení souřadnicových os:

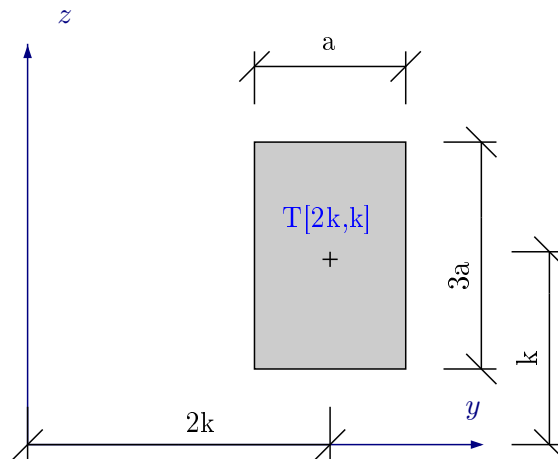
$$I_y + I_z = I_{\bar{y}} + I_{\bar{z}} \quad (14)$$

$$534,4 \cdot 10^6 + 2137,5 \cdot 10^6 = 1354,7 \cdot 10^6 + 1317,2 \cdot 10^6 \quad (15)$$

$$2671,9 = 2671,9 \quad (16)$$

Kontrola proběhla úspěšně.

**Úkol č.3:** Vyjádřete parametry zadání  $a$  a  $k$  v závislosti na zadaných momentech setrvačnosti obrazce  $I_y$  a  $I_z$ . Úlohu řešte obecně bez čísel.



Obrázek 4: Schéma úlohy

**Motivace:** Posouváním průřezu vůči souřadnicovým osám  $yz$  měníme jeho momenty setrvačnosti i deviační moment  $k$  těmto osám. Volbou vhodných rozměrů průřezu a jeho umístěním můžeme získat požadované momenty setrvačnosti a tím i momentovou únosnost. Podobnou úlohou tohoto typu je např. návrh příhradového vazníku, kde musíme volit průřezy horního i dolního pasu a zároveň výšku vazníku.

**Řešení:**

- V tomto úkolu budeme obecně řešit inverzní úlohu. Abychom mohli nalézt 2 parametry  $a$  a  $k$ , potřebujeme sestavit 2 nezávislé rovnice, které popisují zadání. (Pokud by šlo sestavit méně než 2 rovnice, úloha by měla nekonečně mnoho řešení, pokud by naopak šlo sestavit více než 2 nezávislé rovnice, problém by neměl řešení.) V tomto případě můžeme použít rovnice pro axiální momenty setrvačnosti obdélníka se Steinerovým doplňkem (ale například rovnice pro polární moment setrvačnosti je již lineární kombinací rovnic pro axiální momenty setrvačnosti). Vyjádříme 2 rovnice pro 2 neznámé  $a$  a  $k$ :

$$I_y = \frac{a \cdot (3a)^3}{12} + 3a^2 \cdot k^2 \quad (17)$$

$$I_z = \frac{a^3 \cdot 3a}{12} + 3a^2 \cdot 4k^2 \quad (18)$$

Soustavu nyní můžeme řešit libovolným způsobem. Např. upravíme soustavu (18) = (18) - 4·(17):

$$I_z - 4I_y = \frac{3a^4}{12} - 4 \cdot \frac{27a^4}{12} = -\frac{35a^4}{4} \quad (19)$$

$$a(I_y, I_z) = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot (4I_y - I_z)}{35}} \quad (20)$$

Při znalosti parametru  $a$  můžeme získat parametr  $k$  z rovnice (17):

$$k(I_y, I_z) = \sqrt{\frac{I_y - \frac{9a^4}{4}}{3a^2}} \quad (21)$$

Rovnice (20) a (21) popisují geometrii naší úlohy v závislosti na momentech setrvačnosti  $I_y$  a  $I_z$ . Podle definičního oboru funkce (20) můžeme říci, že úloha je řešitelná pouze pokud  $4I_y - I_z \geq 0$ .