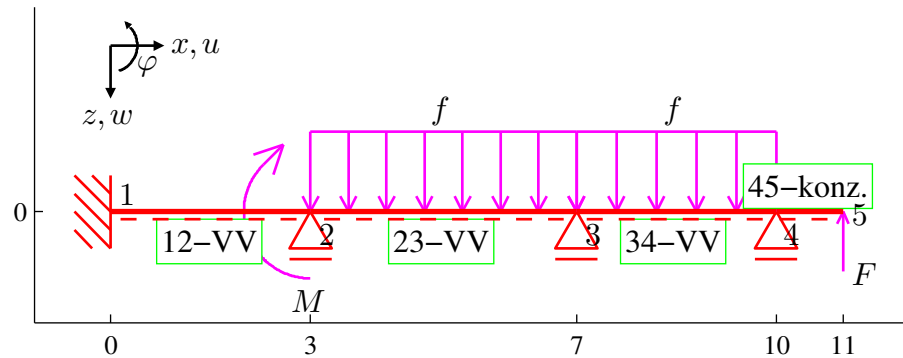


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil ( $M, V, N$ ) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 20 x 30 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je  $E = 20$  GPa. Konstrukce je zatížena silou  $F = 6$  kN, momentem  $M = 6$  kN a rovnoměrným spojitým zatížením  $f = 12$  kN/m. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$$

Za základní neznámé tedy zvolíme  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ .

Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentové podmínky rovnováhy

$$M_{21} + M_{23} = -6$$

$$M_{32} + M_{34} = 0$$

$$M_{43} + M_{45} = 0$$

Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-VV ( $k_{12} = 2E_{12}I_{12}/L_{12} = 6000$  kNm):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{12}^l &= 0 - \frac{k_{12} \left( 3\varphi_1 + 3\varphi_2 - \frac{6w_1^l - 6w_2^l}{L_{12}} \right)}{L_{12}} \\
&= 0 - 6000\varphi_2 \\
M_{12} &= 0 + k_{12} \left( 2\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{3w_1^l - 3w_2^l}{L_{12}} \right) \\
&= 0 + 6000\varphi_2 \\
Z_{21}^l &= 0 + \frac{k_{12} \left( 3\varphi_1 + 3\varphi_2 - \frac{6w_1^l - 6w_2^l}{L_{12}} \right)}{L_{12}} \\
&= 0 + 6000\varphi_2 \\
M_{21} &= 0 + k_{12} \left( \varphi_1 + 2\varphi_2 - \frac{3w_1^l - 3w_2^l}{L_{12}} \right) \\
&= 0 + 1.2 \cdot 10^4 \varphi_2
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{12} &= X_{12}^l & u_1 &= u_1 \\
Z_{12} &= Z_{12}^l & w_1 &= w_1 \\
X_{21} &= X_{21}^l & u_2 &= u_2 \\
Z_{21} &= Z_{21}^l & w_2 &= w_2
\end{aligned}$$

Prut 23-VV ( $k_{23} = 2E_{23}I_{23}/L_{23} = 4500 \text{ kNm}$ ):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{23}^l &= -\frac{L_{23} f_z}{2} - \frac{k_{23} \left( 3\varphi_2 + 3\varphi_3 - \frac{6w_2^l - 6w_3^l}{L_{23}} \right)}{L_{23}} \\
&= -24 - 3375\varphi_2 - 3375\varphi_3 \\
M_{23} &= \frac{L_{23}^2 f_z}{12} + k_{23} \left( 2\varphi_2 + \varphi_3 - \frac{3w_2^l - 3w_3^l}{L_{23}} \right) \\
&= 16 + 9000\varphi_2 + 4500\varphi_3 \\
Z_{32}^l &= -\frac{L_{23} f_z}{2} + \frac{k_{23} \left( 3\varphi_2 + 3\varphi_3 - \frac{6w_2^l - 6w_3^l}{L_{23}} \right)}{L_{23}} \\
&= -24 + 3375\varphi_2 + 3375\varphi_3 \\
M_{32} &= -\frac{L_{23}^2 f_z}{12} + k_{23} \left( \varphi_2 + 2\varphi_3 - \frac{3w_2^l - 3w_3^l}{L_{23}} \right) \\
&= -16 + 4500\varphi_2 + 9000\varphi_3
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{23} &= X_{23}^l & u_2 &= u_2 \\
Z_{23} &= Z_{23}^l & w_2 &= w_2 \\
X_{32} &= X_{32}^l & u_3 &= u_3 \\
Z_{32} &= Z_{32}^l & w_3 &= w_3
\end{aligned}$$

Prut 34-VV ( $k_{34} = 2E_{34}I_{34}/L_{34} = 6000 \text{ kNm}$ ):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{34}^l &= -\frac{L_{34} f_z}{2} - \frac{k_{34} \left( 3\varphi_3 + 3\varphi_4 - \frac{6w_3^l - 6w_4^l}{L_{34}} \right)}{L_{34}} \\
 &= -18 - 6000\varphi_3 - 6000\varphi_4 \\
 M_{34} &= \frac{L_{34}^2 f_z}{12} + k_{34} \left( 2\varphi_3 + \varphi_4 - \frac{3w_3^l - 3w_4^l}{L_{34}} \right) \\
 &= 9 + 1.2 \cdot 10^4 \varphi_3 + 6000\varphi_4 \\
 Z_{43}^l &= -\frac{L_{34} f_z}{2} + \frac{k_{34} \left( 3\varphi_3 + 3\varphi_4 - \frac{6w_3^l - 6w_4^l}{L_{34}} \right)}{L_{34}} \\
 &= -18 + 6000\varphi_3 + 6000\varphi_4 \\
 M_{43} &= -\frac{L_{34}^2 f_z}{12} + k_{34} \left( \varphi_3 + 2\varphi_4 - \frac{3w_3^l - 3w_4^l}{L_{34}} \right) \\
 &= -9 + 6000\varphi_3 + 1.2 \cdot 10^4 \varphi_4
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
 X_{34} &= X_{34}^l & u_3^l &= u_3 \\
 Z_{34} &= Z_{34}^l & w_3^l &= w_3 \\
 X_{43} &= X_{43}^l & u_4^l &= u_4 \\
 Z_{43} &= Z_{43}^l & w_4^l &= w_4
 \end{aligned}$$

Prut 45-konz. (staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
 Z_{45}^l &= -F_z + 0 \\
 &= 6 + 0 \\
 M_{45} &= a_{45} F_z + 0 \\
 &= -6 + 0 \\
 Z_{54}^l &= 0 + 0 \\
 M_{54} &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
 X_{45} &= X_{45}^l & u_4^l &= u_4 \\
 Z_{45} &= Z_{45}^l & w_4^l &= w_4 \\
 X_{54} &= X_{54}^l & u_5^l &= u_5 \\
 Z_{54} &= Z_{54}^l & w_5^l &= w_5
 \end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínek rovnováhy dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2.1 \cdot 10^4 \varphi_2 + 4500 \varphi_3 + 22 &= 0 \\ 4500 \varphi_2 + 2.1 \cdot 10^4 \varphi_3 + 6000 \varphi_4 - 7 &= 0 \\ 6000 \varphi_3 + 1.2 \cdot 10^4 \varphi_4 - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy obdržíme hodnoty základních neznámých (styčnickových přemístění)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -0.001101 \text{ rad} \\ \varphi_3 &= 0.0002474 \text{ rad} \\ \varphi_4 &= 0.001126 \text{ rad} \end{aligned}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= 6.604 \text{ kN} \\ M_{12} &= -6.604 \text{ kNm} \\ X_{21}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= -6.604 \text{ kN} \\ M_{21} &= -13.208 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 23:

$$\begin{aligned} X_{23}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{23}^l &= -21.120 \text{ kN} \\ M_{23} &= 7.208 \text{ kNm} \\ X_{32}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{32}^l &= -26.880 \text{ kN} \\ M_{32} &= -18.726 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 34:

$$\begin{aligned} X_{34}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{34}^l &= -26.242 \text{ kN} \\ M_{34} &= 18.726 \text{ kNm} \\ X_{43}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{43}^l &= -9.758 \text{ kN} \\ M_{43} &= 6.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 45:

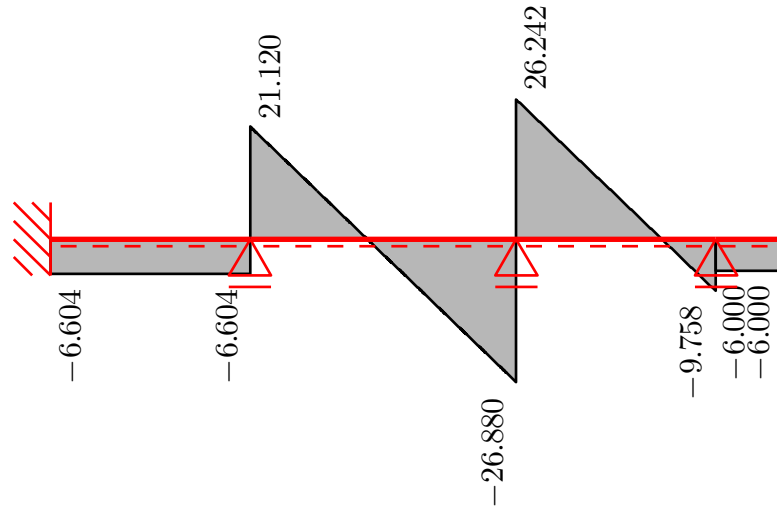
$$\begin{aligned} X_{45}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{45}^l &= 6.000 \text{ kN} \\ M_{45} &= -6.000 \text{ kNm} \\ X_{54}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{54}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ M_{54} &= 0.000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly  $N$  [kN]



- Posouvající síly  $V$  [kN]



- Ohybové momenty  $M$  [kNm]

