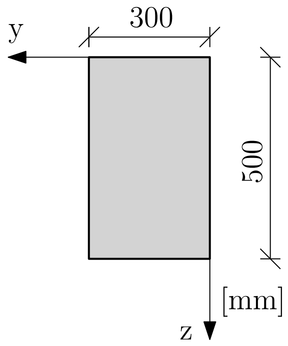
Příklady k procvičení 11: Průřezové charakteristiky

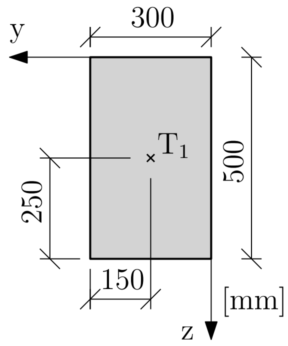
Zadání: Vypočítejte hlavní momenty setrvačnosti a vykreslete elipsu setrvačnosti na zadaných obrazcích.

Příklad 11.1

Zadání:



Rozkreslení na jednoduché obrazce:



1) Výpočet plochy a těžiště:

$$A = 500 \cdot 300 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ mm}^2,$$
$$T_y = 150 \text{ mm},$$
$$T_z = 250 \text{ mm}$$

2) Výpočet těžišťových momentů setrvačnosti a deviačního momentu:

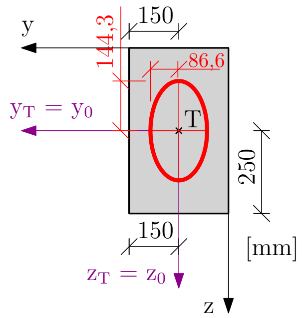
$$I_y = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 300 \cdot 500^3 = \mathbf{3{,}125 \cdot 10^9 \ mm}^4$$
$$I_z = \frac{1}{12} \cdot b^3 \cdot h = \frac{1}{12} \cdot 300^3 \cdot 500 = \mathbf{1{,}125 \cdot 10^9 \ mm}^4$$
$$D_{yz} = 0 \ \mathbf{mm}^4$$

3) Výpočet hlavních momentů setrvačnosti a vykreslení elipsy setrvačnosti:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}$$
$$I_{1,2} = \frac{3,125 \cdot 10^9 + 1,125 \cdot 10^9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,125 \cdot 10^9 - 1,125 \cdot 10^9}{2}\right)^2 + 0^2}$$
$$I_1 = \mathbf{3{,}125 \cdot 10^9 \ mm}^4 = I_{max}$$
$$I_2 = \mathbf{1{,}125 \cdot 10^9 \ mm}^4 = I_{min}$$

$$i_{max} = \sqrt{\frac{I_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{3,125 \cdot 10^9}{1,5 \cdot 10^5}} = \mathbf{144,3\ mm}$$

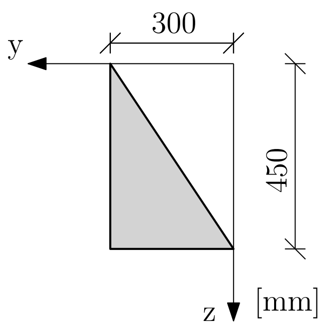
$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{1,125 \cdot 10^9}{1,5 \cdot 10^5}} = \mathbf{86,6\ mm}$$



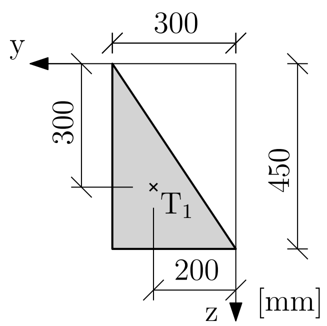
Poznámka: Pokud je průřez symetrický, pak je deviační moment D_{yz} nulový. Potom jsou těžišťové momenty setrvačnosti zároveň hlavními momenty setrvačnosti a osy se nepootočí o žádný úhel. Není tedy nutné počítat $I_{1,2}$. Zde je uvedeno pouze ilustrativně.

Příklad 11.2

Zadání:



Rozkreslení na jednoduché obrazce:



1) Výpočet plochy a těžiště:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 450 = 6,75 \cdot 10^4\ \mathrm{mm}^2,$$
$$T_y = 200\ \mathrm{mm},$$
$$T_z = 300\ \mathrm{mm}$$

2) Výpočet těžišťových momentů setrvačnosti a deviačního momentu:

$$I_y = \frac{1}{36} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{36} \cdot 300 \cdot 450^3 = \mathbf{7{,}59375 \cdot 10^8\ mm^4}$$
$$I_z = \frac{1}{36} \cdot b^3 \cdot h = \frac{1}{36} \cdot 300^3 \cdot 450 = \mathbf{3{,}375 \cdot 10^8\ mm^4}$$
$$D_{yz} = -\frac{1}{72} \cdot b^2 \cdot h^2 = -\frac{1}{72} \cdot 300^2 \cdot 450^2 = \mathbf{-2{,}53128 \cdot 10^8\ mm^4}$$

3) Výpočet hlavních momentů setrvačnosti a vykreslení elipsy setrvačnosti:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot D_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot (-2,53125 \cdot 10^8)}{3,375 \cdot 10^8 - 7,59375 \cdot 10^8} = 1,2$$

$$\alpha_0 = \mathbf{25{,}1^\circ}$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2}$$

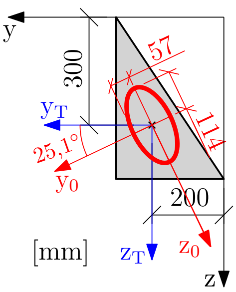
$$I_{1,2} = \frac{7,59375 \cdot 10^8 + 3,375 \cdot 10^8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7,59375 \cdot 10^8 - 3,375 \cdot 10^8}{2}\right)^2 + (-2,53125 \cdot 10^8)^2}$$

$$I_1 = \mathbf{8{,}8793 \cdot 10^8\ mm^4} = I_{max}$$

$$I_2 = \mathbf{2{,}1894 \cdot 10^8\ mm^4} = I_{min}$$

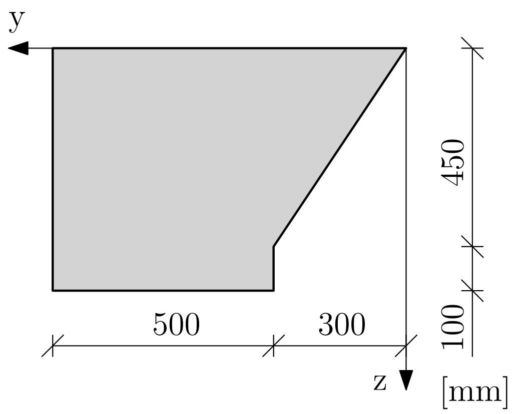
$$i_{max} = \sqrt{\frac{I_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{8,8793 \cdot 10^8}{6,75 \cdot 10^4}} = \mathbf{114\ mm}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{2,1894 \cdot 10^8}{6,75 \cdot 10^4}} = \mathbf{57\ mm}$$

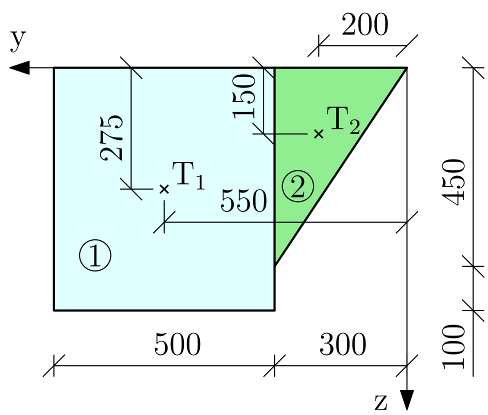


Příklad 11.3

Zadání:



Rozkreslení na jednoduché obrazce:



1) Výpočet plochy a těžiště:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 500 \cdot 550 = 2,75 \cdot 10^5 \text{ mm}^2 \\
A_2 &= \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 450 = 6,75 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \\
A &= A_1 + A_2 = 2,75 \cdot 10^5 + 6,75 \cdot 10^4 = 3,425 \cdot 10^5 \text{ mm}^2 \\
T_y &= \frac{A_1 \cdot T_{1y} + A_2 \cdot T_{2y}}{A} = \frac{2,75 \cdot 10^5 \cdot 550 + 6,75 \cdot 10^4 \cdot 200}{3,425 \cdot 10^5} = 481 \text{ mm} \\
T_z &= \frac{A_1 \cdot T_{1z} + A_2 \cdot T_{2z}}{A} = \frac{2,75 \cdot 10^5 \cdot 275 + 6,75 \cdot 10^4 \cdot 150}{3,425 \cdot 10^5} = 250 \text{ mm}
\end{aligned}$$

2) Výpočet těžišťových momentů setrvačnosti a deviačního momentu:

$$\begin{aligned}
\Delta z_1 &= T_{1z} - T_z = 275 - 250 = 25 \text{ mm} \\
\Delta z_2 &= T_{2z} - T_z = 150 - 250 = -100 \text{ mm} \\
I_{y1} &= \frac{1}{12} \cdot b_1 \cdot h_1^3 + A_1 \cdot \Delta z_1^2 = \frac{1}{12} \cdot 500 \cdot 550^3 + 2,75 \cdot 10^5 \cdot 25^2 = 7,10417 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \\
I_{y2} &= \frac{1}{36} \cdot b_2 \cdot h_2^3 + A_2 \cdot \Delta z_2^2 = \frac{1}{36} \cdot 300 \cdot 450^3 + 6,75 \cdot 10^4 \cdot (-100)^2 = 1,43438 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \\
I_y &= I_{y1} + I_{y2} = 7,10417 \cdot 10^9 + 1,43438 \cdot 10^9 = \mathbf{8{,}53855 \cdot 10^9 \text{ mm}^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta y_1 &= T_{1y} - T_y = 550 - 481 = 69 \text{ mm} \\
\Delta y_2 &= T_{2y} - T_y = 200 - 481 = -281 \text{ mm} \\
I_{z1} &= \frac{1}{12} \cdot b_1^3 \cdot h_1 + A_1 \cdot \Delta y_1^2 = \frac{1}{12} \cdot 500^3 \cdot 550 + 2,75 \cdot 10^5 \cdot 69^2 = 7,03844 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \\
I_{z2} &= \frac{1}{36} \cdot b_2^3 \cdot h_2 + A_2 \cdot \Delta y_2^2 = \frac{1}{36} \cdot 300^3 \cdot 450 + 6,75 \cdot 10^4 \cdot (-281)^2 = 5,6674 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \\
I_z &= I_{z1} + I_{z2} = 7,03844 \cdot 10^9 + 5,6674 \cdot 10^9 = \mathbf{1{,}27062 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4}
\end{aligned}$$

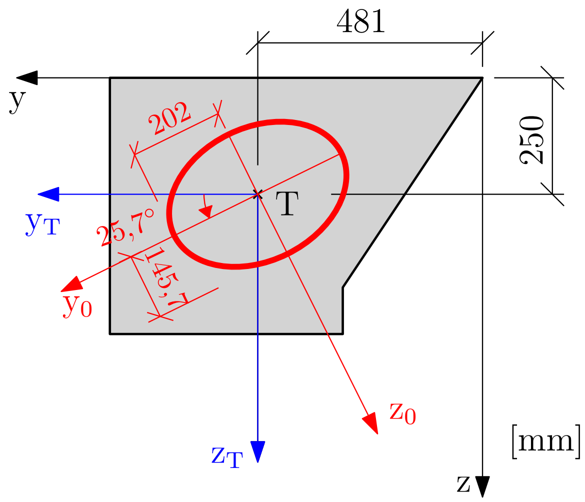
$$\begin{aligned}
D_{yz1} &= 0 + A_1 \cdot \Delta y_1 \cdot \Delta z_1 = 2,75 \cdot 10^5 \cdot 69 \cdot 25 = 4,74375 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \\
D_{yz2} &= \frac{1}{72} \cdot b_2^2 \cdot h_2^2 + A_2 \cdot \Delta y_2 \cdot \Delta z_2 = \frac{1}{72} \cdot 300^2 \cdot 450^2 + 6,75 \cdot 10^9 \cdot (-281) \cdot (-100) \\
&= 2,14988 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \\
D_{yz} &= D_{yz1} + D_{yz2} = 4,74375 \cdot 10^8 + 2,14988 \cdot 10^9 = \mathbf{2{,}624 \cdot 10^9 \text{ mm}^4}
\end{aligned}$$

3) Výpočet hlavních momentů setrvačnosti a vykreslení elipsy setrvačnosti:

$$\begin{aligned}
\tan 2\alpha_0 &= \frac{2 \cdot D_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot 2,624 \cdot 10^9}{1,27062 \cdot 10^{10} - 8,53855 \cdot 10^9} = 1,25922 \\
\alpha_0 &= \mathbf{25{,}8^\circ} \\
I_{1,2} &= \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2} \\
I_{1,2} &= \frac{8,53855 \cdot 10^9 + 1,27062 \cdot 10^{10}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8,53855 \cdot 10^9 - 1,27062 \cdot 10^{10}}{2}\right)^2 + (2,624 \cdot 10^9)^2}
\end{aligned}$$

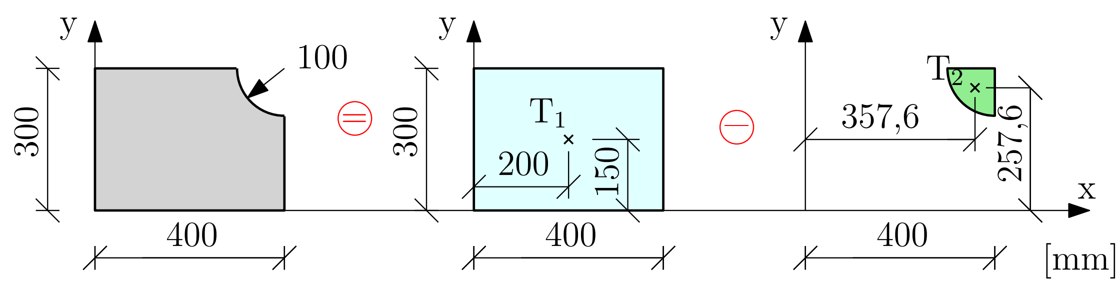
$$
\begin{aligned}
I_1 &= \mathbf{1{,}39732 \cdot 10^{10}\ mm}^4 = I_{max} \\
I_2 &= \mathbf{7{,}27160 \cdot 10^{9}\ mm}^4 = I_{min}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_{max} &= \sqrt{\frac{I_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{1,39732 \cdot 10^{10}}{3,425 \cdot 10^5}} = \mathbf{202{,}0\ mm} \\
i_{min} &= \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{7,27160 \cdot 10^{9}}{3,425 \cdot 10^5}} = \mathbf{145{,}7\ mm}
\end{aligned}
$$



Příklad 11.4

Zadání: **Rozkreslení na jednoduché obrazce:**



1) Výpočet plochy a těžiště:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 300 \cdot 400 = 1,2 \cdot 10^5\ \mathrm{mm}^2 \\
A_2 &= \frac{\pi \cdot 100^2}{4} = 7,85398 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^2 \\
A &= A_1 - A_2 = 1,2 \cdot 10^5 - 7,85398 \cdot 10^3 = 1,12146 \cdot 10^5\ \mathrm{mm}^2 \\
T_x &= \frac{A_1 \cdot T_{1x} - A_2 \cdot T_{2x}}{A} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 200 - 7,85398 \cdot 10^3 \cdot (300 + 57,6)}{1,12146 \cdot 10^5} = 189,0\ \mathrm{mm} \\
T_y &= \frac{A_1 \cdot T_{1y} - A_2 \cdot T_{2y}}{A} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 150 - 7,85398 \cdot 10^3 \cdot (200 + 57,6)}{1,12146 \cdot 10^5} = 142,5\ \mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

2) Výpočet těžišťových momentů setrvačnosti a deviačního momentu:

$$
\begin{aligned}
\Delta y_1 &= T_{1y} - T_y = 150 - 142,5 = 7,5 \text{ mm} \\
\Delta y_2 &= T_{2y} - T_y = 257,6 - 142,5 = 115,1 \text{ mm} \\
I_{x1} &= \frac{1}{12} \cdot b_1 \cdot h_1^3 + A_1 \cdot \Delta y_1^2 = \frac{1}{12} \cdot 400 \cdot 300^3 + 1,2 \cdot 10^5 \cdot 7,5^2 = 9,0675 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \\
I_{x2} &= 0,0549 \cdot r^4 + A_2 \cdot \Delta y_2^2 = 0,0549 \cdot 100^4 + 7,85398 \cdot 10^3 \cdot 115,1^2 = 1,09540 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \\
I_x &= I_{x1} + I_{x2} = 9,0675 \cdot 10^8 - 1,09540 \cdot 10^8 = \mathbf{7,9721 \cdot 10^8 \text{ mm}^4}
\end{aligned}
$$

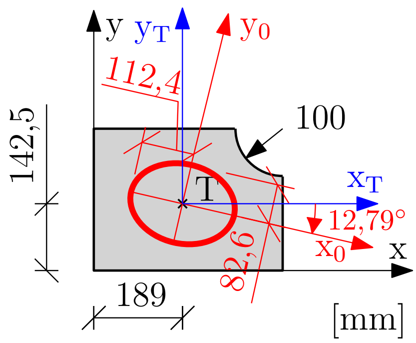
$$
\begin{aligned}
\Delta x_1 &= T_{1x} - T_x = 200 - 189 = 11 \text{ mm} \\
\Delta x_2 &= T_{2x} - T_x = 357,6 - 189 = 168,6 \text{ mm} \\
I_{y1} &= \frac{1}{12} \cdot b_1^3 \cdot h_1 + A_1 \cdot \Delta x_1^2 = \frac{1}{12} \cdot 400^3 \cdot 300 + 1,2 \cdot 10^5 \cdot 11^2 = 1,61452 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \\
I_{y2} &= 0,0549 \cdot r^4 + A_2 \cdot \Delta x_2^2 = 0,0549 \cdot 100^4 + 7,85398 \cdot 10^3 \cdot 168,6^2 = 2,28750 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \\
I_y &= I_{y1} - I_{y2} = 1,61452 \cdot 10^9 - 2,28750 \cdot 10^8 = \mathbf{1,38577 \cdot 10^9 \text{ mm}^4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{xy1} &= 0 + A_1 \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta y_1 = 1,2 \cdot 10^5 \cdot 7,5 \cdot 11 = 9,9 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\
D_{xy2} &= -0,0165 \cdot r^4 + A_2 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta y_2 = -0,0165 \cdot 100^4 + 7,85398 \cdot 10^3 \cdot 115,1 \cdot 168,6 \\
&= 1,50763 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \\
D_{xy} &= D_{yz1} - D_{yz2} = 9,9 \cdot 10^6 - 1,50763 \cdot 10^8 = \mathbf{-1,40863 \cdot 10^8 \text{ mm}^4}
\end{aligned}
$$

3) Výpočet hlavních momentů setrvačnosti a vykreslení elipsy setrvačnosti:

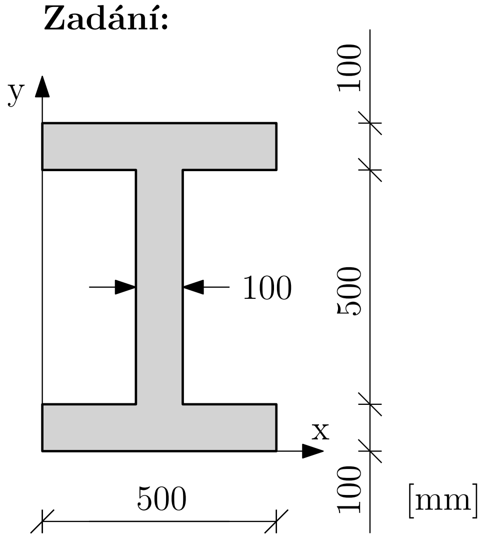
$$
\begin{aligned}
\tan 2\alpha_0 &= \frac{2 \cdot D_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot (-1,40863 \cdot 10^8)}{1,38577 \cdot 10^9 - 7,9721 \cdot 10^8} = -0,4787 \\
\alpha_0 &= \mathbf{-12,79^\circ} \\
I_{1,2} &= \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2} \\
I_{1,2} &= \frac{7,9721 \cdot 10^8 + 1,38577 \cdot 10^9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7,9721 \cdot 10^8 - 1,38577 \cdot 10^9}{2}\right)^2 + (-1,40863 \cdot 10^8)^2} \\
I_1 &= \mathbf{1,4177 \cdot 10^9 \text{ mm}^4} = I_{max} \\
I_2 &= \mathbf{7,6523 \cdot 10^8 \text{ mm}^4} = I_{min}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_{max} &= \sqrt{\frac{I_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{1,4177 \cdot 10^9}{1,12146 \cdot 10^5}} = \mathbf{112,4 \text{ mm}} \\
i_{min} &= \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{7,6523 \cdot 10^8}{1,12146 \cdot 10^5}} = \mathbf{82,6 \text{ mm}}
\end{aligned}
$$

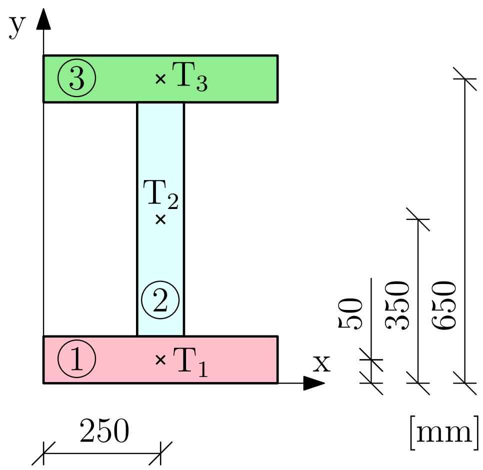


Příklad 11.5

Zadání:



Rozkreslení na jednoduché obrazce:



1) Výpočet plochy a těžiště:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 100 \cdot 500 = 5 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \\
A_2 &= 500 \cdot 100 = 5 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \\
A_3 &= 100 \cdot 500 = 5 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \\
A &= \sum_{i=1}^{3} A_i = 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^4 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ mm}^2 \\
T_x &= 250 \text{ mm} \\
T_y &= 350 \text{ mm}
\end{aligned}
$$

Poznámka: Pokud je průřez symetrický, je zbytečné počítat jeho těžiště.

2) Výpočet těžišťových momentů setrvačnosti a deviačního momentu:

$$\begin{aligned}
\Delta y_1 &= T_{1y} - T_y = 50 - 350 = -300 \text{ mm}\\
\Delta y_2 &= T_{2y} - T_y = 350 - 350 = 0 \text{ mm}\\
\Delta y_3 &= T_{3y} - T_y = 650 - 350 = 300 \text{ mm}\\
I_{x1} &= \frac{1}{12} \cdot b_1 \cdot h_1^3 + A_1 \cdot \Delta y_1^2 = \frac{1}{12} \cdot 500 \cdot 100^3 + 5 \cdot 10^4 \cdot (-300)^2 = 4,54167 \cdot 10^9 \text{ mm}^4\\
I_{x2} &= \frac{1}{12} \cdot b_2 \cdot h_2^3 + A_2 \cdot \Delta y_2^2 = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 500^3 + 5 \cdot 10^4 \cdot 0^2 = 1,04167 \cdot 10^9 \text{ mm}^4\\
I_{x3} &= \frac{1}{12} \cdot b_3 \cdot h_3^3 + A_3 \cdot \Delta y_3^2 = \frac{1}{12} \cdot 500 \cdot 100^3 + 5 \cdot 10^4 \cdot 300^2 = 4,54167 \cdot 10^9 \text{ mm}^4\\
I_x &= \sum_{i=1}^{3} I_{xi} = 4,54167 \cdot 10^9 + 1,04167 \cdot 10^9 + 4,54167 \cdot 10^9 = \mathbf{1{,}01250 \cdot 10^{10}\ mm}^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= T_{1x} - T_x = 250 - 250 = 0 \text{ mm}\\
\Delta x_2 &= T_{2x} - T_x = 250 - 250 = 0 \text{ mm}\\
\Delta x_3 &= T_{3x} - T_x = 250 - 250 = 0 \text{ mm}\\
I_{y1} &= \frac{1}{12} \cdot b_1^3 \cdot h_1 + A_1 \cdot \Delta x_1^2 = \frac{1}{12} \cdot 500^3 \cdot 100 + 0 = 1,04167 \cdot 10^9 \text{ mm}^4\\
I_{y2} &= \frac{1}{12} \cdot b_2^3 \cdot h_2 + A_2 \cdot \Delta x_2^2 = \frac{1}{12} \cdot 100^3 \cdot 500 + 0 = 4,16667 \cdot 10^7 \text{ mm}^4\\
I_{y3} &= \frac{1}{12} \cdot b_3^3 \cdot h_3 + A_3 \cdot \Delta x_3^2 = \frac{1}{12} \cdot 500^3 \cdot 100 + 0 = 1,04167 \cdot 10^9 \text{ mm}^4\\
I_y &= \sum_{i=1}^{3} I_{yi} = 1,04167 \cdot 10^9 + 4,16667 \cdot 10^7 + 1,04167 \cdot 10^9 = \mathbf{2{,}125 \cdot 10^9\ mm}^4
\end{aligned}$$

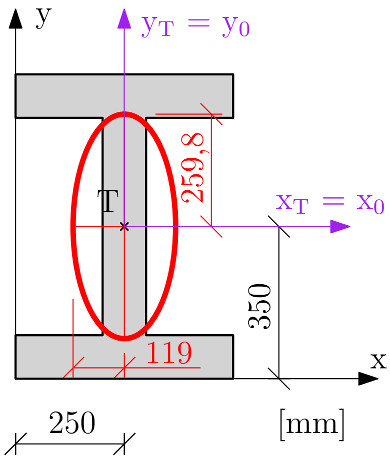
$$D_{xy} = \mathbf{0\ mm}^4$$

Poznámka: Je-li souřadnice celkového těžiště totožná s těžištěm rozloženého obrazce, pak není třeba používat Steinerův doplněk. Ten slouží k opravě toho, že lokální těžiště obrazce není totožné s celkovým (tj. tím, ke kterému počítáme momenty). A pokud je průřez symetrický, pak je D_{xy} nulový.

3) Výpočet hlavních momentů setrvačnosti a vykreslení elipsy setrvačnosti:

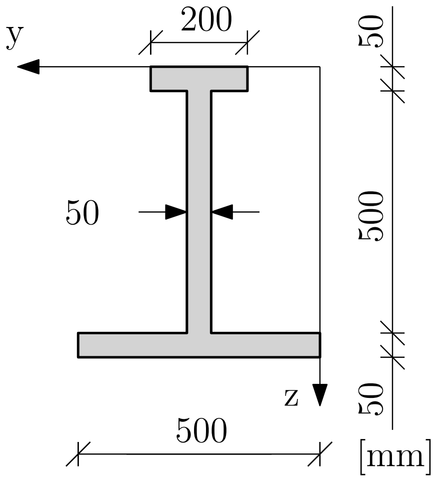
$$\begin{aligned}
I_x &> I_y \rightarrow I_{max} = I_x\\
I_1 &= \mathbf{1{,}01250 \cdot 10^{10}\ mm}^4 = I_{max}\\
I_2 &= \mathbf{2{,}125 \cdot 10^9\ mm}^4 = I_{min}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{max} &= \sqrt{\frac{I_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{1,01250 \cdot 10^{10}}{1,5 \cdot 10^5}} = \mathbf{259{,}8\ mm}\\
i_{min} &= \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{2,125 \cdot 10^9}{1,5 \cdot 10^5}} = \mathbf{119{,}0\ mm}
\end{aligned}$$

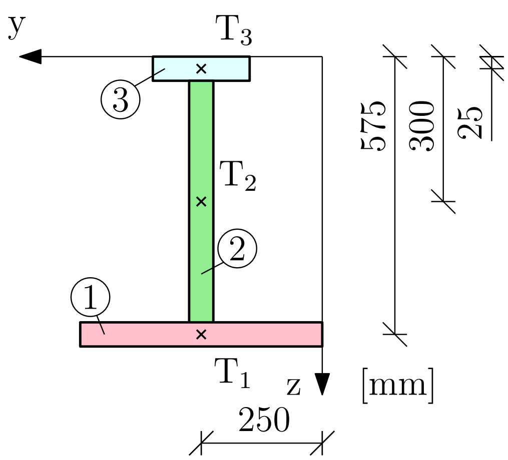


Příklad 11.6

Zadání:



Rozkreslení na jednoduché obrazce:



1) Výpočet plochy a těžiště:

$$A_1 = 500 \cdot 50 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$
$$A_2 = 50 \cdot 500 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$
$$A_3 = 200 \cdot 50 = 1 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$
$$A = \sum_{i=1}^{3} A_i = 2,5 \cdot 10^4 + 2,5 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$
$$T_y = 250 \text{ mm}$$
$$T_z = \frac{A_1 \cdot T_{1z} + A_2 \cdot T_{2z} + A_3 \cdot T_{3z}}{A} = \frac{2,5 \cdot 10^4 \cdot 575 + 2,5 \cdot 10^4 \cdot 300 + 1 \cdot 10^4 \cdot 25}{6 \cdot 10^4} = 368,75 \text{ mm}$$

2) Výpočet těžišťových momentů setrvačnosti a deviačního momentu:

$$\Delta z_1 = T_{1z} - T_z = 575 - 368,75 = 206,25 \text{ mm}$$
$$\Delta z_2 = T_{2z} - T_z = 300 - 368,75 = -68,75 \text{ mm}$$
$$\Delta z_3 = T_{3z} - T_z = 25 - 368,75 = -343,75 \text{ mm}$$

$$
\begin{aligned}
I_{y1} &= \frac{1}{12}\cdot b_1\cdot h_1^3 + A_1\cdot\Delta z_1^2 = \frac{1}{12}\cdot 500\cdot 50^3 + 2,5\cdot 10^4\cdot 206,25^2 = 1,06868\cdot 10^9\ \mathrm{mm}^4\\
I_{y2} &= \frac{1}{12}\cdot b_2\cdot h_2^3 + A_2\cdot\Delta z_2^2 = \frac{1}{12}\cdot 50\cdot 500^3 + 2,5\cdot 10^4\cdot (-68,75)^2 = 6,38997\cdot 10^8\ \mathrm{mm}^4\\
I_{y3} &= \frac{1}{12}\cdot b_3\cdot h_3^3 + A_3\cdot\Delta z_3^2 = \frac{1}{12}\cdot 200\cdot 50^3 + 1\cdot 10^4\cdot (-343,75)^2 = 1,18372\cdot 10^9\ \mathrm{mm}^4\\
I_y &= \sum_{i=1}^{3} I_{yi} = 1,06868\cdot 10^9 + 6,38997\cdot 10^8 + 1,18372\cdot 10^9 = \mathbf{2{,}89140\cdot 10^9\ mm}^4
\end{aligned}
$$

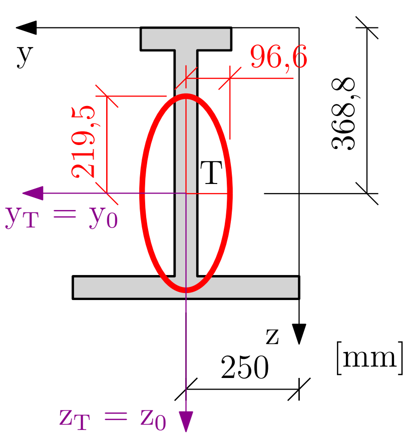
$$
\begin{aligned}
\Delta y_1 &= T_{1y} - T_y = 250 - 250 = 0\ \mathrm{mm}\\
\Delta y_2 &= T_{2y} - T_y = 250 - 250 = 0\ \mathrm{mm}\\
\Delta y_3 &= T_{3y} - T_y = 250 - 250 = 0\ \mathrm{mm}\\
I_{z1} &= \frac{1}{12}\cdot b_1^3\cdot h_1 + A_1\cdot\Delta y_1^2 = \frac{1}{12}\cdot 500^3\cdot 50 + 0 = 5,20833\cdot 10^8\ \mathrm{mm}^4\\
I_{z2} &= \frac{1}{12}\cdot b_2^3\cdot h_2 + A_2\cdot\Delta y_2^2 = \frac{1}{12}\cdot 50^3\cdot 500 + 0 = 5,20833\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4\\
I_{z3} &= \frac{1}{12}\cdot b_3^3\cdot h_3 + A_3\cdot\Delta y_3^2 = \frac{1}{12}\cdot 200^3\cdot 50 + 0 = 3,33333\cdot 10^7\ \mathrm{mm}^4\\
I_z &= \sum_{i=1}^{3} I_{zi} = 5,20833\cdot 10^8 + 5,20833\cdot 10^6 + 3,33333\cdot 10^7 = \mathbf{5{,}59375\cdot 10^8\ mm}^4
\end{aligned}
$$

$$
D_{yz} = \mathbf{0\ mm}^4
$$

3) Výpočet hlavních momentů setrvačnosti a vykreslení elipsy setrvačnosti:

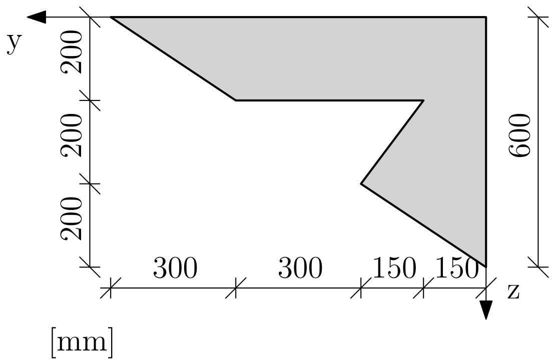
$$
\begin{aligned}
I_y &> I_z \rightarrow I_{max} = I_y\\
I_1 &= \mathbf{2{,}89140\cdot 10^9\ mm}^4 = I_{max}\\
I_2 &= \mathbf{5{,}59375\cdot 10^8\ mm}^4 = I_{min}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_{max} &= \sqrt{\frac{I_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{2,89140\cdot 10^9}{6\cdot 10^4}} = \mathbf{219{,}5\ mm}\\
i_{min} &= \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{5,59375\cdot 10^8}{6\cdot 10^4}} = \mathbf{96{,}6\ mm}
\end{aligned}
$$

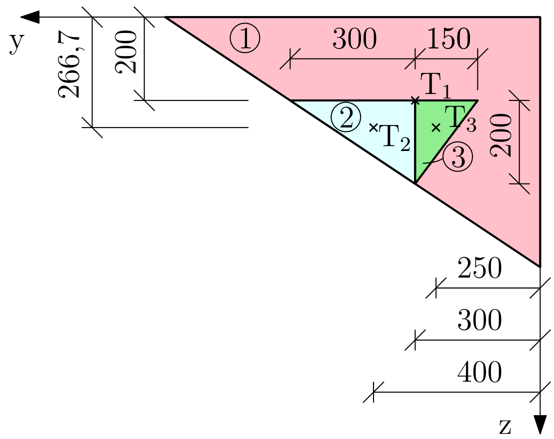


Příklad 11.7

Zadání:



Rozkreslení na jednoduché obrazce:



1) Výpočet plochy a těžiště:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 900 = 2,7 \cdot 10^5 \text{ mm}^2$$
$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 200 = 3 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$
$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 200 = 1,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$
$$A = A_1 - A_2 - A_3 = 2,7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^4 - 1,5 \cdot 10^4 = 2,25 \cdot 10^5 \text{ mm}^2$$
$$T_y = \frac{A_1 \cdot T_{1y} + A_2 \cdot T_{2y} + A_3 \cdot T_{3y}}{A} = \frac{2,7 \cdot 10^5 \cdot 300 - 3 \cdot 10^4 \cdot 400 - 1,5 \cdot 10^4 \cdot 250}{2,25 \cdot 10^5} = 290 \text{ mm}$$
$$T_z = \frac{A_1 \cdot T_{1z} + A_2 \cdot T_{2z} + A_3 \cdot T_{3z}}{A} = \frac{2,7 \cdot 10^5 \cdot 200 - 3 \cdot 10^4 \cdot 266,7 - 1,5 \cdot 10^4 \cdot 266,7}{2,25 \cdot 10^5} = 186,7 \text{ mm}$$

2) Výpočet těžišťových momentů setrvačnosti a deviačního momentu:

$$\Delta z_1 = T_{1z} - T_z = 200 - 186,7 = 13,3 \text{ mm}$$
$$\Delta z_2 = T_{2z} - T_z = 266,7 - 186,7 = 80 \text{ mm}$$
$$\Delta z_3 = T_{3z} - T_z = 266,7 - 186,7 = 80 \text{ mm}$$
$$I_{y1} = \frac{1}{36} \cdot b_1 \cdot h_1^3 + A_1 \cdot \Delta z_1^2 = \frac{1}{36} \cdot 900 \cdot 600^3 + 2,7 \cdot 10^5 \cdot 13,3^2 = 5,44776 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$
$$I_{y2} = \frac{1}{36} \cdot b_2 \cdot h_2^3 + A_2 \cdot \Delta z_2^2 = \frac{1}{36} \cdot 300 \cdot 200^3 + 3 \cdot 10^4 \cdot 80^2 = 2,58667 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$
$$I_{y3} = \frac{1}{36} \cdot b_3 \cdot h_3^3 + A_3 \cdot \Delta z_3^2 = \frac{1}{36} \cdot 150 \cdot 200^3 + 1,5 \cdot 10^4 \cdot 80^2 = 1,29333 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$
$$I_y = I_{y1} - I_{y2} - I_{y3} = 5,44776 \cdot 10^9 - 2,58667 \cdot 10^8 - 1,29333 \cdot 10^8 = \mathbf{5{,}05976 \cdot 10^9 \text{ mm}^4}$$

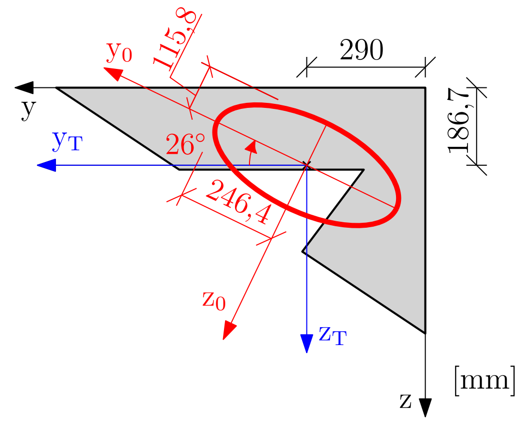
$$
\begin{aligned}
\Delta y_1 &= T_{1y} - T_y = 300 - 290 = 10 \text{ mm} \\
\Delta y_2 &= T_{2y} - T_y = 400 - 290 = 110 \text{ mm} \\
\Delta y_3 &= T_{3y} - T_y = 250 - 290 = -40 \text{ mm} \\
I_{z1} &= \frac{1}{36} \cdot b_1^3 \cdot h_1 + A_1 \cdot \Delta y_1^2 = \frac{1}{36} \cdot 900^3 \cdot 600 + 2,7 \cdot 10^5 \cdot 10^2 = 1,2177 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4 \\
I_{z2} &= \frac{1}{36} \cdot b_2^3 \cdot h_2 + A_2 \cdot \Delta y_2^2 = \frac{1}{36} \cdot 300^3 \cdot 200 + 3 \cdot 10^4 \cdot 110^2 = 5,13 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \\
I_{z3} &= \frac{1}{36} \cdot b_3^3 \cdot h_3 + A_3 \cdot \Delta y_3^2 = \frac{1}{36} \cdot 150^3 \cdot 200 + 1,5 \cdot 10^4 \cdot (-40)^2 = 4,275 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \\
I_z &= I_{z1} - I_{z2} - I_{z3} = 1,2177 \cdot 10^{10} - 5,13 \cdot 10^8 - 4,275 \cdot 10^7 = \mathbf{1,16213 \cdot 10^{10}} \textbf{ mm}^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{yz1} &= -\frac{1}{72} \cdot b_1^2 \cdot h_1^2 + A_1 \cdot \Delta y_1 \cdot \Delta z_1 = -\frac{1}{72} \cdot 900^2 \cdot 600^2 + 2,7 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 13,3 = -4,01409 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 \\
D_{yz2} &= -\frac{1}{72} \cdot b_2^2 \cdot h_2^2 + A_2 \cdot \Delta y_2 \cdot \Delta z_2 = -\frac{1}{72} \cdot 300^2 \cdot 200^2 + 3 \cdot 10^4 \cdot 80 \cdot 110 = 2,14 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \\
D_{yz3} &= \frac{1}{72} \cdot b_3^2 \cdot h_3^2 + A_3 \cdot \Delta y_3 \cdot \Delta z_3 = \frac{1}{72} \cdot 150^2 \cdot 200^2 + 1,5 \cdot 10^4 \cdot 80 \cdot (-40) = -3,55 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \\
D_{yz} &= D_{yz1} - D_{yz2} - D_{yz3} = -4,01409 \cdot 10^9 - (2,14 \cdot 10^8 - 3,55 \cdot 10^7) = \mathbf{-4,19259 \cdot 10^9} \textbf{ mm}^4
\end{aligned}
$$

3) Výpočet hlavních momentů setrvačnosti a vykreslení elipsy setrvačnosti:

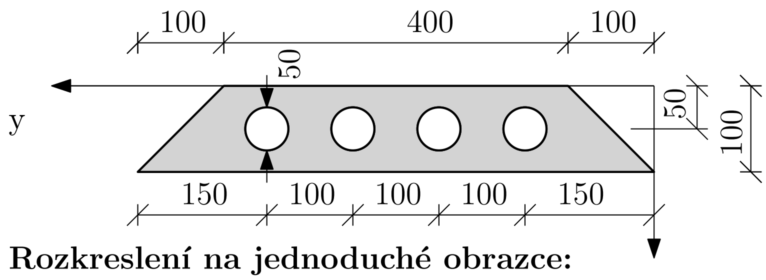
$$
\begin{aligned}
\tan 2\alpha_0 &= \frac{2 \cdot D_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot (-4,19259 \cdot 10^9)}{1,16213 \cdot 10^{10} - 5,05976 \cdot 10^9} = -1,27793 \\
\alpha_0 &= \mathbf{-26^\circ} \\
I_{1,2} &= \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2} \\
I_{1,2} &= \frac{5,05976 \cdot 10^9 + 1,16213 \cdot 10^{10}}{2} \pm \ldots \\
& \quad \ldots \sqrt{\left(\frac{5,05976 \cdot 10^9 - 1,16213 \cdot 10^{10}}{2}\right)^2 + (-4,19259 \cdot 10^9)^2} \\
I_1 &= \mathbf{1,3664 \cdot 10^{10}} \textbf{ mm}^4 = I_{max} \\
I_2 &= \mathbf{3,0169 \cdot 10^9} \textbf{ mm}^4 = I_{min}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_{max} &= \sqrt{\frac{I_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{1,3664 \cdot 10^{10}}{2,25 \cdot 10^5}} = \textbf{264,4 mm} \\
i_{min} &= \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{3,0169 \cdot 10^9}{2,25 \cdot 10^5}} = \textbf{115,8 mm}
\end{aligned}
$$

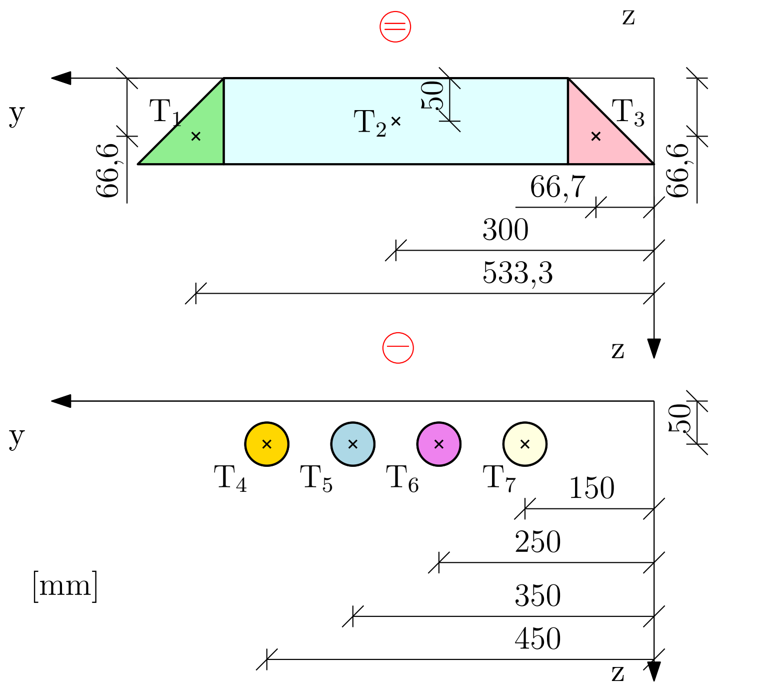


Příklad 11.8

Zadání:



Rozkreslení na jednoduché obrazce:



1) Výpočet plochy a těžiště:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 100 = 5\cdot 10^3\ \text{mm}^2\\
A_2 &= 400\cdot 100 = 4\cdot 10^4\ \text{mm}^2\\
A_3 &= \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 100 = 5\cdot 10^3\ \text{mm}^2\\
A_4 &= A_5 = A_6 = A_7 = \frac{\pi\cdot 50^2}{4} = 1,9635\cdot 10^3\ \text{mm}^2\\
A &= \sum_{i=1}^{3} A_i - \sum_{i=4}^{7} A_i = 5\cdot 10^3 + 4\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 - 4\cdot 1,9635\cdot 10^3 = 4,2146\cdot 10^4\ \text{mm}^2\\
T_y &= 300\ \text{mm}\\
T_z &= \frac{A_1\cdot T_{1z} + A_2\cdot T_{2z} + A_3\cdot T_{3z} - A_4\cdot T_{4z} - A_5\cdot T_{5z} - A_6\cdot T_{6z} - A_7\cdot T_{7z}}{A}\\
&= \frac{5\cdot 10^3\cdot \frac{2\cdot 100}{3} + 4\cdot 10^4\cdot 50 + 5\cdot 10^3\cdot \frac{2\cdot 100}{3} - 4\cdot 1,9635\cdot 10^3\cdot 50}{4,2146\cdot 10^4} = 53,955\ \text{mm}
\end{aligned}$$

2) Výpočet těžišťových momentů setrvačnosti a deviačního momentu:

$$\begin{aligned}
\Delta z_1 &= T_{1z} - T_z = \frac{2\cdot 100}{3} - 53,955 = 12,712\ \text{mm}\\
\Delta z_2 &= T_{2z} - T_z = 50 - 53,955 = -3,955\ \text{mm}\\
\Delta z_3 &= T_{3z} - T_z = \frac{2\cdot 100}{3} - 53,955 = 12,712\ \text{mm}\\
\Delta z_4 &= \Delta z_5 = \Delta z_6 = \Delta z_7 = T_{iz} - T_z = 50 - 53,955 = -3,955\ \text{mm}\\
I_{y1} &= \frac{1}{36}\cdot b_1\cdot h_1^3 + A_1\cdot \Delta z_1^2 = \frac{1}{36}\cdot 100\cdot 100^3 + 5\cdot 10^3\cdot 12,712^2 = 3,58575\cdot 10^6\ \text{mm}^4\\
I_{y2} &= \frac{1}{12}\cdot b_2\cdot h_2^3 + A_2\cdot \Delta z_2^2 = \frac{1}{12}\cdot 400\cdot 100^3 + 4\cdot 10^4\cdot (-3,955)^2 = 3,39590\cdot 10^7\ \text{mm}^4\\
I_{y3} &= \frac{1}{36}\cdot b_3\cdot h_3^3 + A_3\cdot \Delta z_3^2 = \frac{1}{36}\cdot 100\cdot 100^3 + 5\cdot 10^3\cdot 12,712^2 = 3,58575\cdot 10^6\ \text{mm}^4\\
I_{y4} &= I_{y5} = I_{y6} = I_{y7} = \frac{1}{64}\cdot \pi\cdot d^4 + A_i\cdot \Delta z_i^2 = \frac{1}{64}\cdot \pi\cdot 50^4 + 1,9635\cdot 10^3\cdot (-3,955)^2 =\\
&= 3,37509\cdot 10^5\ \text{mm}^4\\
I_y &= \sum_{i=1}^{3} I_{yi} - \sum_{i=4}^{7} I_{yi} = 3,58575\cdot 10^6 + 3,39590\cdot 10^7 + 3,58575\cdot 10^6 - 4\cdot 3,37509\cdot 10^5 =\\
&= \mathbf{3{,}95805\cdot 10^7\ mm^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta y_1 &= T_{1y} - T_y = \left(\frac{100}{3} + 500\right) - 300 = 233,33\ \text{mm}\\
\Delta y_2 &= T_{2y} - T_y = 300 - 300 = 0\ \text{mm}\\
\Delta y_3 &= T_{3y} - T_y = \frac{2\cdot 100}{3} - 300 = -233,33\ \text{mm}\\
\Delta y_4 &= T_{4y} - T_y = 450 - 300 = 150\ \text{mm}\\
\Delta y_5 &= T_{5y} - T_y = 350 - 300 = 50\ \text{mm}\\
\Delta y_6 &= T_{6y} - T_y = 250 - 300 = -50\ \text{mm}\\
\Delta y_7 &= T_{7y} - T_y = 150 - 300 = -150\ \text{mm}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_{z1} &= \frac{1}{36}\cdot b_1^3\cdot h_1 + A_1\cdot\Delta y_1^2 = \frac{1}{36}\cdot 100^3\cdot 100 + 5\cdot 10^3\cdot 233,33^2 = 2,74992\cdot 10^8\ \mathrm{mm}^4\\
I_{z2} &= \frac{1}{12}\cdot b_2^3\cdot h_2 + A_2\cdot\Delta y_2^2 = \frac{1}{12}\cdot 400^3\cdot 100 + 0 = 5,33333\cdot 10^8\ \mathrm{mm}^4\\
I_{z3} &= \frac{1}{36}\cdot b_3^3\cdot h_3 + A_3\cdot\Delta y_3^2 = \frac{1}{36}\cdot 100^3\cdot 100 + 5\cdot 10^3\cdot(-233,33)^2 = 2,74992\cdot 10^8\ \mathrm{mm}^4\\
I_{z4} &= \frac{1}{64}\cdot\pi\cdot d^4 + A_4\cdot\Delta y_4^2 = \frac{1}{64}\cdot\pi\cdot 50^4 + 1,9635\cdot 10^3\cdot 150^2 = 4,44855\cdot 10^7\ \mathrm{mm}^4\\
I_{z5} &= \frac{1}{64}\cdot\pi\cdot d^4 + A_5\cdot\Delta y_5^2 = \frac{1}{64}\cdot\pi\cdot 50^4 + 1,9635\cdot 10^3\cdot 50^2 = 5,21555\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4\\
I_{z6} &= \frac{1}{64}\cdot\pi\cdot d^4 + A_6\cdot\Delta y_6^2 = \frac{1}{64}\cdot\pi\cdot 50^4 + 1,9635\cdot 10^3\cdot(-50)^2 = 5,21555\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4\\
I_{z7} &= \frac{1}{64}\cdot\pi\cdot d^4 + A_7\cdot\Delta y_7^2 = \frac{1}{64}\cdot\pi\cdot 50^4 + 1,9635\cdot 10^3\cdot(-150)^2 = 4,44855\cdot 10^7\ \mathrm{mm}^4\\
I_z &= \sum_{i=1}^{3} I_{zi} - \sum_{i=4}^{7} I_{zi} = 2,74992\cdot 10^8 + 5,33333\cdot 10^8 + 2,74992\cdot 10^8 - 4,44855\cdot 10^7\\
&\quad -5,21555\cdot 10^6 - 5,21555\cdot 10^6 - 4,44855\cdot 10^7 = \mathbf{9{,}83915\cdot 10^8\ mm}^4
\end{aligned}
$$

$$D_{yz} = \mathbf{0\ mm}^4$$

Poznámka: Průřez je symetrický, tudíž je D_{yz} nulový. Kdo by tomu nevěřil, nechť projde následující výpočet.

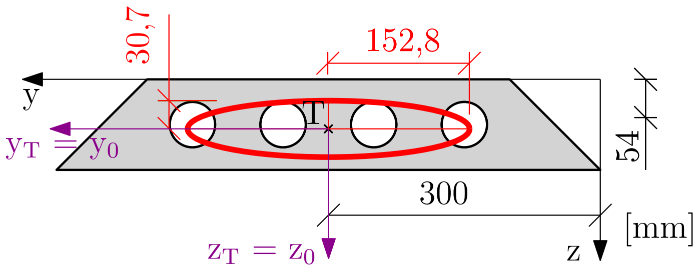
$$
\begin{aligned}
D_{yz1} &= \frac{1}{72}\cdot b_1^2\cdot h_1^2 + A_1\cdot\Delta y_1\cdot\Delta z_1 = \frac{1}{72}\cdot 100^2\cdot 100^2 + 5\cdot 10^3\cdot 12,712\cdot 233,33 =\\
&= 1,62193\cdot 10^7\ \mathrm{mm}^4\\
D_{yz2} &= 0 + A_2\cdot\Delta y_2\cdot\Delta z_2 = 0 + 4\cdot 10^4\cdot(-3,955)\cdot 0 = 0\ \mathrm{mm}^4\\
D_{yz3} &= -\frac{1}{72}\cdot b_3^2\cdot h_3^2 + A_3\cdot\Delta y_3\cdot\Delta z_3 = -\frac{1}{72}\cdot 100^2\cdot 100^2 + 5\cdot 10^3\cdot 12,712\cdot(-233,33) =\\
&= -1,62193\cdot 10^7\ \mathrm{mm}^4\\
D_{yz4} &= 0 + A_4\cdot\Delta y_4\cdot\Delta z_4 = 0 + 1,9635\cdot 10^3\cdot(-3,955)\cdot 150 = -1,16485\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4\\
D_{yz5} &= 0 + A_5\cdot\Delta y_5\cdot\Delta z_5 = 0 + 1,9635\cdot 10^3\cdot(-3,955)\cdot 50 = -3,88282\cdot 10^5\ \mathrm{mm}^4\\
D_{yz6} &= 0 + A_6\cdot\Delta y_6\cdot\Delta z_6 = 0 + 1,9635\cdot 10^3\cdot(-3,955)\cdot(-50) = 3,88282\cdot 10^5\ \mathrm{mm}^4\\
D_{yz7} &= 0 + A_7\cdot\Delta y_7\cdot\Delta z_7 = 0 + 1,9635\cdot 10^3\cdot(-3,955)\cdot(-150) = 1,16485\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4\\
D_{yz} &= \sum_{i=1}^{3} D_{yzi} - \sum_{i=4}^{7} D_{yzi} = 1,62193\cdot 10^7 + 0 - 1,62193\cdot 10^7 - (-1,16485\cdot 10^6\\
&\quad -3,88282\cdot 10^5 + 3,88282\cdot 10^5 + 1,16485\cdot 10^6) = \mathbf{0\ mm}^4
\end{aligned}
$$

3) Výpočet hlavních momentů setrvačnosti a vykreslení elipsy setrvačnosti:

$$
\begin{aligned}
I_z &> I_x \rightarrow I_{max} = I_z\\
I_1 &= \mathbf{9{,}83915\cdot 10^8\ mm}^4 = I_{max}\\
I_2 &= \mathbf{3{,}95805\cdot 10^7\ mm}^4 = I_{min}
\end{aligned}
$$

$$i_{max} = \sqrt{\frac{I_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{9,83915 \cdot 10^8}{4,2146 \cdot 10^4}} = \mathbf{152{,}8\ mm}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{3,95805 \cdot 10^7}{4,2146 \cdot 10^4}} = \mathbf{30{,}7\ mm}$$



Prosba V případě, že v textu objevíte nějakou chybu nebo budete mít námět na jeho vylepšení, ozvěte se prosím na adela.pospisilova@fsv.cvut.cz.

V02: U všech příkladů opraveno značení os. (Na chybu upozornil doc. Zeman.)