

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta stavební



Soutěž o cenu akademika Bažanta

Soutěžní práce

2012/2013

**NUMERICKÁ SIMULACE ŠÍŘENÍ TRHLINY ZALOŽENÁ
NA LINEÁRNÍ LOMOVÉ MECHANICE**

Karel Mikeš

4. ročník, obor K

Vedoucí práce: Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Oponent: Doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D.

Obsah

1	Úvod.....	4
2	Koncept faktoru intenzity napětí.....	4
2.1	Zjišťování faktoru intenzity napětí.....	5
2.2	Kritérium pro šíření trhliny v čistém módu I.....	5
2.2.1	Lokální Irwinovo kritérium.....	6
2.2.2	Globální Griffithovo kritérium.....	6
2.2.3	Ekvivalence lokálního a globálního kritéria.....	7
3	Výpočetní modely.....	8
3.1	Nosník s vrubem.....	8
3.1.1	Přibližné vzorce pro výpočet faktoru intenzity napětí.....	9
4	Metody numerického určení faktoru intenzity napětí.....	11
4.1	Výpočet K_I z hodnot napětí v okolí kořene trhliny.....	11
4.1.1	Popis metody.....	11
4.1.2	Výsledky pro model nosníku s vrubem.....	13
4.2	Výpočet K_I z tvaru rozevření trhliny.....	18
4.2.1	Popis metody.....	18
4.2.2	Výsledky pro model nosníku s vrubem.....	19
4.3	Výpočet K_I z reakcí v uzlech nad trhlinou.....	23
4.3.1	Popis metody.....	23
4.3.2	Výsledky pro model nosníku s vrubem.....	25
4.4	Výpočet K_I pomocí globální energetické metody.....	27
4.4.1	Popis metody.....	27
4.4.2	Výsledky pro model nosníku s vrubem.....	28
4.5	Výpočet K_I pomocí J-integrálu.....	30
4.6	Porovnání jednotlivých metod.....	32
4.7	Výběr metody pro další výpočty.....	33
5	Aplikace výpočtu faktoru intenzity napětí pro simulování šíření trhliny v módu I.....	34
5.1	Výsledky pro nosník s vrubem.....	35
6	Šíření trhliny ve smíšeném módu.....	37
6.1	Kritérium maximálního obvodového napětí.....	38

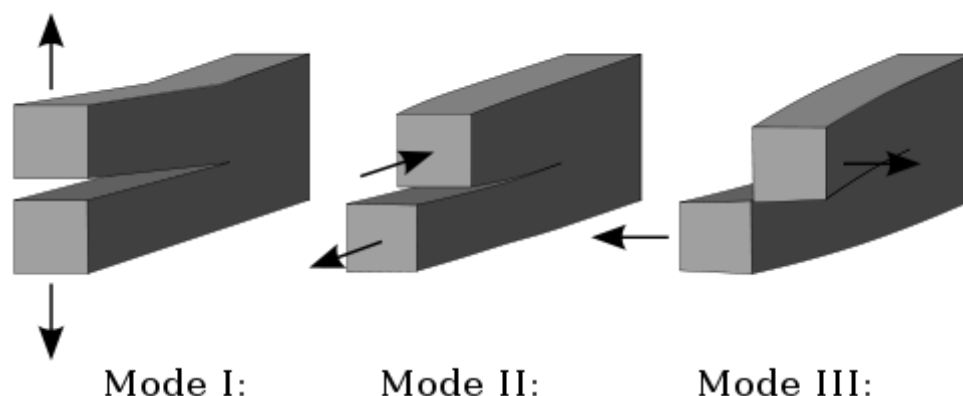
6.2	Kritérium maximální hodnoty hnací síly trhliny	39
6.3	Simulace šíření trhliny ve smíšeném módu.....	39
6.4	Výsledky	40
7	Závěr	41
8	Literatura	41

1 Úvod

Cílem práce bylo nalézt vhodný způsob, jak numericky určit veličinu zvanou faktor intenzity napětí, která se používá v lomové mechanice k popisu asymptotického pole napětí v blízkém okolí kořene trhliny. A následně potom tento způsob použit k numerickému simulování šíření trhliny, pokud známe směr jejího šíření. Dále pak navrhnout způsob, jak určit směr šíření ve smíšeném módu namáhání kde není předem znám.

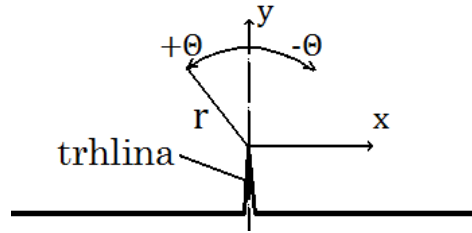
2 Koncept faktoru intenzity napětí

Faktor intenzity napětí je veličina charakterizující asymptotické pole napětí v okolí kořene trhliny. Existuje ve třech podobách K_I , K_{II} a K_{III} , pro tři různé způsoby namáhání trhliny. Indexy značí, v jakém módu je trhlina namáhána, viz Obrázek 2.1. Úplně obecnému případu namáhání trhliny odpovídá kombinace všech tří módů. V praxi se ale často vyskytuje osamoceně takzvaný tahový mód I, ve kterém je trhlina otvírána. Tímto módem se později bude zabývat podrobněji.



Obrázek 2.1: Způsob namáhání trhliny při jednotlivých módech; převzato z Wikipedia [online]. [cit. 2013-04-08] Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Fracture_modes_v2.svg

Napjatost v těsném okolí kořene trhliny popsal Irwin [1] v roce 1957. Když se přibližujeme ke kořeni trhliny, napětí roste nepřímo úměrně odmocnině ze vzdálenosti. Přímo v kořeni trhliny napětí dosahuje nekonečné hodnoty, jedná se tedy o singularní bod. Vzhledem k rozložení napětí hovoříme o singularitě $r^{-1/2}$. V okolí kořene zavedeme polární souřadnice r, θ se středem v kořeni trhliny, viz Obrázek 2.2. Pokud se ke kořeni blížíme ve směru osy trhliny, lze napětí popsat vztahem $\sigma(r, 0^\circ) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$. Faktor intenzity napětí pro první tahový mód K_I pak můžeme vyjádřit jako $K_I = \frac{\sigma(r, \theta)}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta)$ kde $f(\theta)$ je funkce úhlu polárních souřadnic.



Obrázek 2.2: Zavedení souřadnic v okolí kořene trhliny

Z definice K_I plyne fyzikální rozměr jeho jednotky [$\text{Nm}^{-3/2}$]. Pro jednotlivá napětí platí pro mód I a II následující vztahy

$$\sigma_x(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \quad (1)$$

$$\sigma_y(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2)$$

$$\tau_{xy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (3)$$

Pro zjištění směru šíření trhliny ve smíšeném módu se často používá takzvané obvodové napětí, které je definováno jako

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (4)$$

a odpovídá normálovému napětí na plošce procházející daným bodem ve směru jeho spojnice s kořenem trhliny. S použitím vztahů (1) - (3) dostaneme:

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3 \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (5)$$

2.1 Zjišťování faktoru intenzity napětí

Faktor intenzity napětí K lze určit numericky pomocí metody konečných prvků nebo pomocí analytického vyjádření. Analytická metoda je nejpřesnější, ale vyjádření je možné jen pro speciální případy. V další části se budeme zabývat numerickým zjištěním faktoru K_I pro nejčastější tahový mód I.

2.2 Kriterium pro šíření trhliny v čistém módu I

Pomocí faktoru intenzity napětí jsme tedy schopni popsat napětí v okolí kořene trhliny. Z praktického hlediska je ale mnohem důležitější mít kritérium, podle kterého poznáme, zda se při daném zatížení bude trhlina šířit nebo ne. Jak jsme ukázali v předešlé kapitole, pokud se blížíme ke kořeni trhliny, rostou hodnoty napětí nade všechny meze. Hodnota napětí v kořeni trhliny bude tedy teoreticky vycházet nekonečná i pro libovolně malé zatížení. Proto nelze toto kritérium založit na hodnotách napětí, ale je nutné použít jiné veličiny. Pro jednoduchost uvažujme, že je trhlina namáhána pouze v módu I.

2.2.1 Lokální Irwinovo kritérium

Toto kritérium vychází z myšlenky, že dvě různá tělesa, pro které vychází hodnota faktoru intenzity napětí K_I totožně, mají v okolí kořene trhliny stejné rozložení napětí. A tedy pokud se bude šířit trhlina u jednoho z nich, očekáváme, že se bude šířit i druhého a naopak. Musí tedy existovat určitá kritická hodnota faktoru intenzity napětí, které když je dosaženo, začne docházet k šíření trhliny. Tato hodnota je určitou vlastností materiálu, která vyjadřuje jeho odolnost proti šíření trhliny. Nazýváme ji „lomová houževnatost“ a značíme K_c . Fyzikální rozměr je stejný jako u faktoru intenzity napětí, tedy $[\text{Nm}^{-3/2}]$.

Pravidla pro šíření trhliny podle lokálního kritéria jsou následující:

$$K_I < K_c \Rightarrow \text{k šíření trhliny nedochází} \quad (6)$$

$$K_I = K_c \Rightarrow \text{trhlina se šíří} \quad (7)$$

$$K_I > K_c \Rightarrow \text{nepřípustný stav} \quad (8)$$

2.2.2 Globální Griffithovo kritérium

Toto kritérium navrhl Griffith [2] v roce 1920, je založeno na bilanci přeměny energie v průběhu zatěžování, proto se také někdy nazývá energetické kritérium. Na rozdíl od lokálního Irwinova kritéria, které sleduje pouze část v okolí kořene trhliny, zkoumá globální Griffithovo kritérium těleso jako celek. Pokud se trhlina v lineárně pružném tělese nešíří, je veškerá práce konaná vnějšími silami přeměněna na potenciální energii pružné deformace. Pokud k šíření trhliny dochází, nastávají v materiálu nevratné změny (oddělení původně spojených částí), které určitou část energie spotřebují. Trhlina se může šířit pouze tehdy, je-li k dispozici dostatečné množství energie potřebné k tomuto šíření. Prakticky si to lze představit tak, že je nutné překonat soudržnost daného materiálu, která představuje odpor k jeho roztržení. Zavedme materiálovou veličinu G_f , tzv. „lomovou energii“ $[\text{Jm}^{-2} = \text{Nm}^{-1}]$, která bude představovat energii nutnou k roztržení daného materiálu vztaženou na jednotku plochy nově vzniklé trhliny. Podmínka, říkájící, že se při šíření trhliny uvolní právě tolik energie, kolik je k tomuto šíření potřeba, bude vypadat následovně:

$$W_e(u, a) - W_e(u, a + da) = G_f t da \quad (9)$$

kde

$W_e(u, a)$ je potenciální energie uložená v pružné deformaci pro předepsaný posun u a délku trhliny a .

$W_e(u, a) - W_e(u, a + da)$ je energie uvolněná při zvětšení trhliny o da při nezměněném posunu u

t je tloušťka tělesa (uvažujeme panel za rovinné napjatosti)

G_f je výše zmíněná lomová energie

$G_f t da$ je energie spotřebovaná na rozšíření trhliny o da .

Rovnici (9) lze převedením $t da$ na levou stranu upravit do tvaru

$$\mathcal{G}(u, a) = -\frac{1}{t} \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} = G_f \quad (10)$$

kde $\mathcal{G}(u, a)$ je tzv. „hnací síla trhliny“ [$\text{Jm}^{-2} = \text{Nm}^{-1}$], která představuje energii pružné deformace uvolněnou při šíření trhliny, vztaženou na jednotku nově vytvořené plochy trhliny.

Pravidla pro šíření trhliny podle globálního kritéria jsou následující:

$$\mathcal{G}(u, a) < G_f \Rightarrow \text{k šíření trhliny nedochází} \quad (11)$$

$$\mathcal{G}(u, a) = G_f \Rightarrow \text{trhlina se šíří} \quad (12)$$

$$\mathcal{G}(u, a) > G_f \Rightarrow \text{nepřípustný stav} \quad (13)$$

2.2.3 Ekvivalence lokálního a globálního kritéria

Představili jsme dvě různá kritéria, pomocí kterých jsme schopni rozhodnout, zda se trhlina bude šířit. Obě představená kritéria vycházejí z přirozených a logických předpokladů, ale jejich charakter je naprosto odlišný. První Irwinovo kritérium zkoumá rozložení napětí v těsném okolí kořene trhliny a má tedy ryze lokální charakter. Naproti tomu druhé Griffithovo kritérium je založeno na energetické bilanci celého tělesa, jeho charakter je globální. Přesto je možné ukázat, že obě kritéria jsou v jistém smyslu ekvivalentní.

V díle [3] je dokázáno, že při šíření trhliny v módu I (za předpokladu rovinné napjatosti) platí

$$\mathcal{G}(u, a) = \frac{K_I^2}{E} \quad (14)$$

K popisu daného materiálu tedy stačí stanovit pouze hodnotu lomové energie G_f nebo hodnotu lomové houževnatosti K_c . Druhou z těchto hodnot lze určit ze vztahu

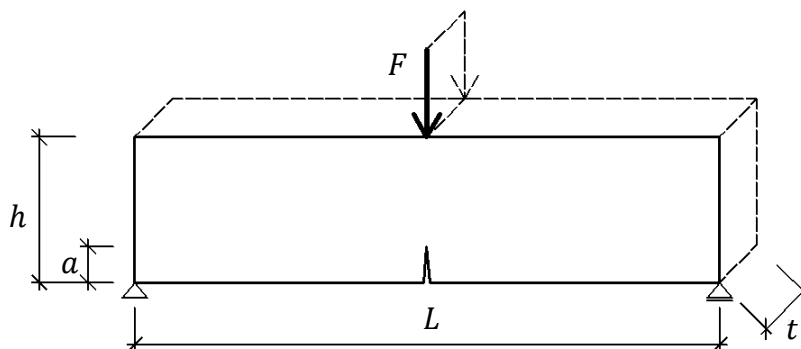
$$G_f = \frac{K_c^2}{E} \text{ resp. } K_c = \sqrt{EG_f} \quad (15)$$

3 Výpočetní modely

Výpočty pro jednotlivé modely byly prováděny pomocí metody konečných prvků za předpokladu rovinné napjatosti. K výpočtům byl použit program „OOFEM“. Jedná se o objektově orientovaný, volně šiřitelný software určený pro řešení multifyzikálních problémů metodou konečných prvků, který je vyvíjen na katedře mechaniky Stavební fakulty ČVUT [4]. Pomocí tohoto programu byly pro řešený model získány hodnoty posunů a uzlových reakcí pro jednotlivé uzly a pro jednotlivé prvky byly vypočteny hodnoty deformací a napětí. Pro následné zpracování těchto hodnot a výpočty faktoru intenzity napětí byly vytvořeny vlastní programy v jazyce Pascal.

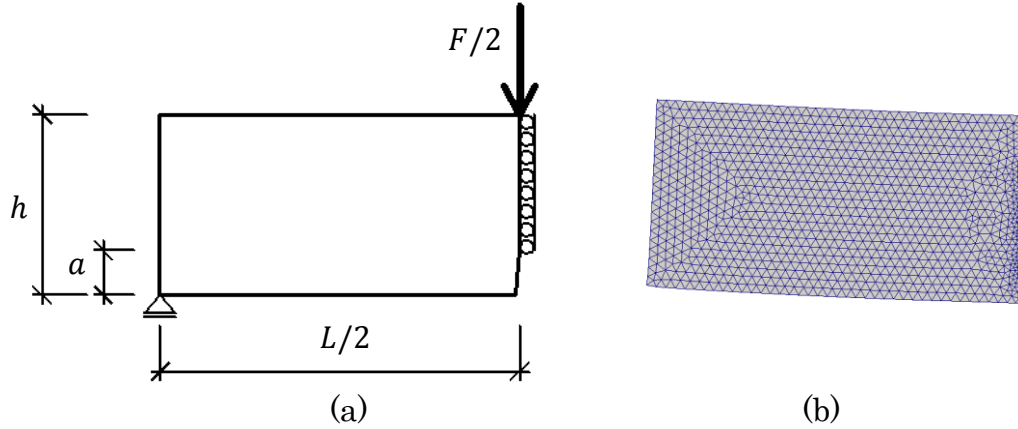
3.1 Nosník s vrubem

Prvním zkoumaným modelem byl prostý nosník se svislou trhlinou (vrubem) na spodním okraji uprostřed rozpětí, namáhaný tříbodovým ohybem, viz Obrázek 3.1. Poměr $\frac{L}{h}$ byl zvolen 4, protože pro tento poměr jsou v literatuře dostupné přibližné vzorce, které bude možné využít pro ověření správnosti numericky získaných výsledků. Dále zavedeme veličinu $\alpha = \frac{a}{h}$, která představuje poměr délky trhliny ku výšce nosníku.



Obrázek 3.1: Geometrie a zatížení modelu nosníku s vrubem

Protože nosník je osově symetrický, bylo pro zjednodušení výpočtu možné modelovat pouze jednu symetrickou polovinu nosníku, viz Obrázek 3.2 (a). Tím se snížil počet neznámých na polovinu a výpočet probíhal výrazně rychleji. Dalším zjednodušením bylo, že nosník nebyl zatěžován silou, ale byl mu v místě působení síly předepsán svislý konstantní posun. Velikost zatěžující síly F , která by odpovídala předepsanému posunu, byla získána jako svislá reakce zatěžovaného uzlu. Geometrie nosníku byla zvolena následovně: výška $h = 40$, délka $L = 160$, tloušťka = 1, délka trhliny $a = 10$, velikost základního trojúhelníkového prvku = 2, 10, velikost trojúhelníkového prvku v okolí kořene trhliny = 0,1. Při výpočtu metodou konečných prvků není podstatný fyzikální rozměr jednotek, proto není nutné uvádět, zda se jedná o milimetry nebo centimetry, ale veličiny můžeme považovat za bezrozměrné.



Obrázek 3.2: (a) geometrie modelované poloviny nosníku, (b) použitá síť

Pro výpočet metodou konečný prvků byla použita relativně dosti jemná trojúhelníková síť, která byla v okolí kořene trhliny ještě výrazně zjemněna viz Obrázek 3.2 (b). Celkem byly vytvořeny tři sítě lišící se typem použitých prvků. Nejprve síť obsahující nejjednodušší trojúhelníkové tříuzlové prvky, které aproximují pole posunů pomocí lineárních funkcí. Poté lepší šestiuzlové trojúhelníkové prvky, které k aproximaci pole posunů využívají kvadratické funkce. A na závěr upravené kvadratické prvky, u kterých byl na úsečkách obsahující kořen trhliny posunut mezilehlý uzel z jedné poloviny do jedné čtvrtiny blíže ke kořeni trhliny. Tento posun vynutí u báзовých funkcí nenulových v kořeni trhliny singularitu typu $r^{-1/2}$. Tedy stejnou jaká se vyskytuje v asymptotickém poli napětí v okolí kořene trhliny. Předpokládáme, že tato úprava umožní ještě lépe vystihnout hodnoty napětí v okolí kořene trhliny. Tento způsob umožnil pro každou použitou metodu porovnat vliv typu prvků sítě. Ke generování sítí byl použit generátor T3D [5].

3.1.1 Přibližné vzorce pro výpočet faktoru intenzity napětí

Pro nosník s vrubem s poměrem délky ku výšce $\frac{L}{h} = 4$ je v díle [3] k dispozici následující vzorec:

$$K_I = \frac{3FL}{2th^2} k(\alpha) \quad (16)$$

$$k(\alpha) = \frac{1,9 + \alpha[0,089 - 0,603(1 - \alpha) + 0,441(1 - \alpha)^2 - 1,223(1 - \alpha)^3]}{(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{3/2}} \sqrt{\alpha} \quad (17)$$

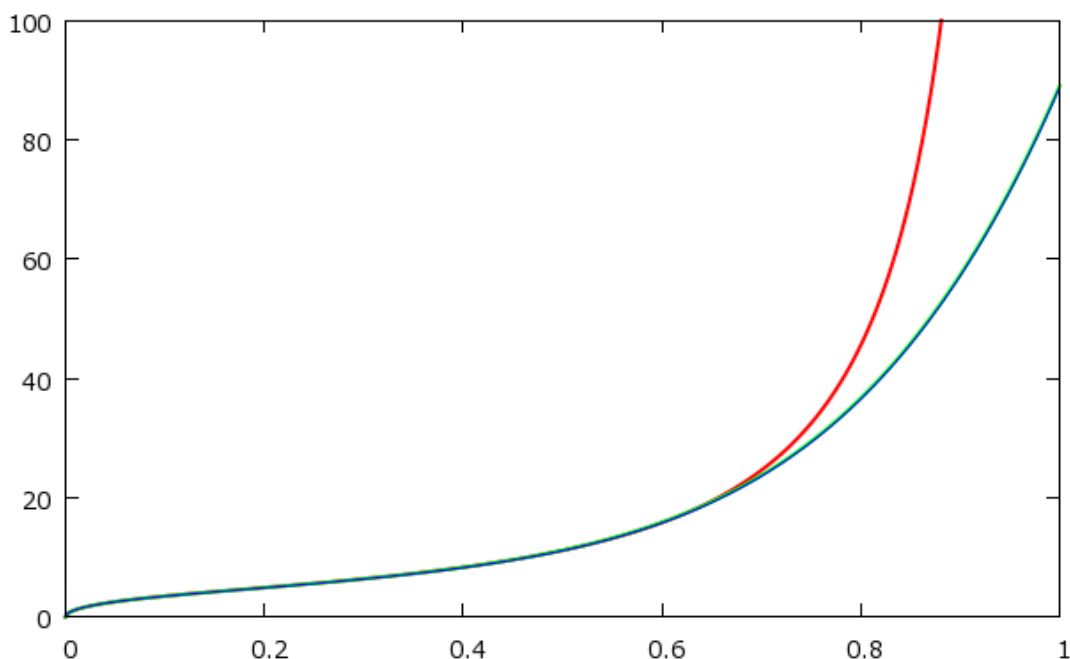
Další vzorec, opět předpokládající poměr $\frac{L}{h} = 4$, je uveden v díle [6]:

$$K_I = \frac{4F\sqrt{\pi}}{t\sqrt{h}} (1,63\alpha^{1/2} - 2,6\alpha^{3/2} + 12,3\alpha^{5/2} - 21,3\alpha^{7/2} + 21,9\alpha^{9/2}) \quad (18)$$

Poslední vzorec uvedený v [7] platí pro libovolný poměr $\frac{L}{h}$:

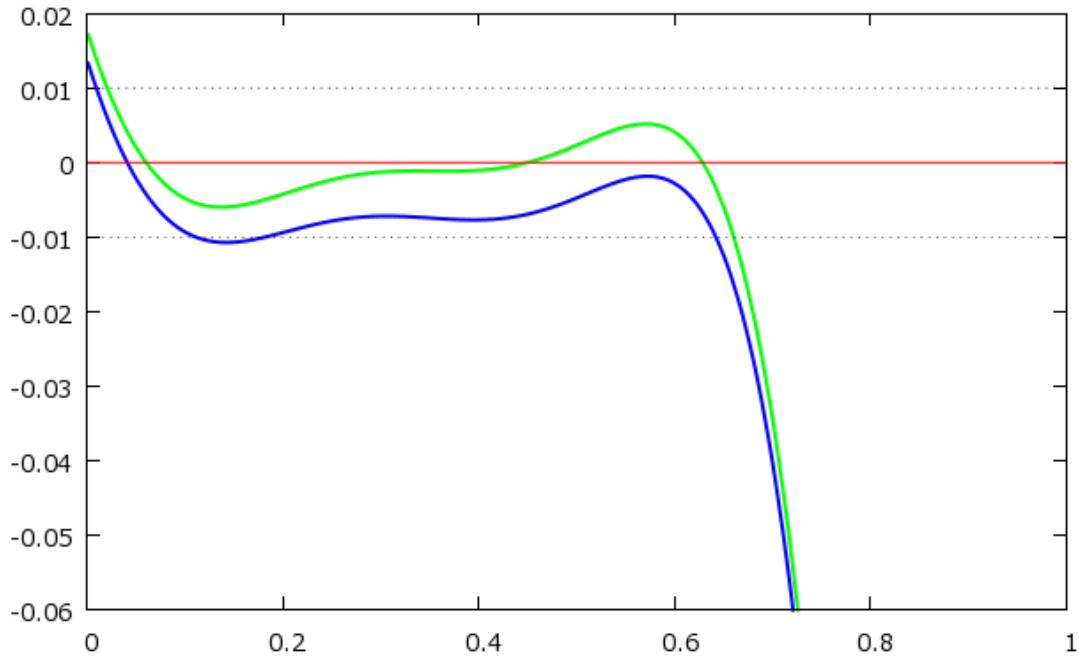
$$K_I = \frac{FL}{th^{3/2}} (2,9\alpha^{1/2} - 4,6\alpha^{3/2} + 21,8\alpha^{5/2} - 37,6\alpha^{7/2} + 38,7\alpha^{9/2}) \quad (19)$$

Abychom ověřili, že tři výše uvedené vzorce, které na první pohled vypadají dosti odlišně, dávají stejný nebo alespoň podobný výsledek, použijeme hodnoty našeho modelu nosníku s vrubem a pro všechny tři vzorce vyneseme hodnotu K_I jako funkci poměru $\alpha = \frac{a}{h}$ představujícího relativní délku trhliny. Obrázek 3.3 ukazuje toto porovnání.



Obrázek 3.3: K_I jako funkce relativní délky trhliny α podle vzorců (16)-(17) červeně, (18) modře a (19) zeleně.

Vidíme zde, že pokud je trhlina přibližně do 60% výšky nosníku, jsou hodnoty vypočtené podle všech tří vzorců téměř totožné, ale pro větší trhliny se první vzorec (16)-(17) chová odlišně a jeho hodnota jde až do nekonečna. Toto chování je však zcela logické, protože $\alpha = 1$ znamená, že trhlina je přes celou výšku nosníku a není ji tedy již možné dále rozšiřovat. Tomuto stavu tedy jistě nemůže odpovídat konečná hodnota K_I , kterou předpokládají zbylé dva vzorce (18) a (19). Budeme tedy předpokládat, že první vzorec (16)-(17) je nejpřesnější, budeme ho tedy považovat za referenční a právě s ním budeme porovnávat námi vypočítané hodnoty. Pro přesnější porovnání ještě uvedeme relativní chybu zbylých dvou vzorců ve srovnání s prvním referenčním. Vidíme, že do hodnoty $\alpha = 0,6$ se hodnoty K_I vypočtené podle ostatních dvou vzorců se neliší od referenčního vzorce více než o jedno procento, viz Obrázek 3.4.



Obrázek 3.4: Relativní chyba vzorců (18) modře a (19) zeleně vůči referenčnímu vzorci (16)-(17) červeně

4 Metody numerického určení faktoru intenzity napětí

4.1 Výpočet K_I z hodnot napětí v okolí kořene trhliny

4.1.1 Popis metody

Po tom, co jsme představili faktor intenzity napětí, se jako první nabízí právě tato metoda, protože vychází přímo z jeho definice. Asymptotické pole napětí, které v okolí kořene trhliny převažuje, je popsáno vztahy (1) - (5), ve kterých vystupuje faktor intenzity napětí jako charakteristika tohoto asymptotického pole. Pro každý prvek sítě získáme výpočtem pomocí metody konečných prvků složky napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Ze vztahů (1) - (5) lze určit faktor intenzity napětí samostatně pro každou složku napětí zvlášť. Zavedeme tedy vektor faktoru intenzity napětí pro jeden prvek $\mathbf{K}_{I_i}(r, \theta)$, který bude obsahovat K_I určená z jednotlivých složek napětí daného prvku. Pokud zvolíme kořen trhliny jako střed polárních souřadnic a použijeme rovnice (1) - (5) pouze pro mód I, dostaneme pro \mathbf{K}_{I_i} vztah

$$\mathbf{K}_{I_i}(r, \theta) = \begin{pmatrix} K_{I, \sigma_x i} \\ K_{I, \sigma_y i} \\ K_{I, \tau_{xy} i} \\ K_{I, \sigma_\theta i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \frac{\sqrt{2\pi r}}{f_{\sigma_x}(\theta)} \\ \sigma_y \frac{\sqrt{2\pi r}}{f_{\sigma_y}(\theta)} \\ \tau_{xy} \frac{\sqrt{2\pi r}}{f_{\tau_{xy}}(\theta)} \\ \sigma_\theta \frac{\sqrt{2\pi r}}{f_{\sigma_\theta}(\theta)} \end{pmatrix} \quad (20)$$

kde

$$f_{\sigma_x}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (21)$$

$$f_{\sigma_y}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (22)$$

$$f_{\tau_{xy}}(\theta) = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (23)$$

$$f_{\sigma_\theta}(\theta) = \cos^3 \frac{\theta}{2} \quad (25)$$

jsou funkce závisující pouze na úhlu θ , nikoli na vzdálenosti od kořene trhliny r . Pro daný směr je tedy vždy daná funkce $f(\theta)$ konstantní a charakterizuje složku asymptotického pole napětí v tomto směru. Pokud vydělíme hodnoty každé složky napětí pro každý prvek příslušnou funkcí $f(\theta)$ daného prvku, dostaneme normované hodnoty napětí $\bar{\sigma}$, které budou splňovat vztah

$$\mathbf{K}_{I_i}(r, \theta) = \sqrt{2\pi r} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \\ \bar{\sigma}_\theta \end{pmatrix} \quad (26)$$

Vykreslení těchto hodnot bude užitečné pro ověření toho, zda hodnoty napětí pro danou sledovanou oblast mají předpokládané rozložení.

Program pro určení K_I touto metodou bude obsahovat následující kroky:

- Pro daný model se metodou konečných prvků vypočítá rozložení napětí pro dané zatížení
- Určí se sledovaná oblast okolo kořene trhliny
- Pro prvky v této oblasti se načtou hodnoty jednotlivých složek napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_\theta$
- Pro každý integrační bod se z jeho souřadnic vyčíslí funkce úhlu polárních souřadnic $f(\theta)$
- Hodnota K_{I_i} pro danou složku napětí pro i -tý prvek určí z rovnice (20)
- Výslednou hodnotu K_I lze pro jednotlivé složky napětí spočítat zprůměrováním jednotlivých hodnot.

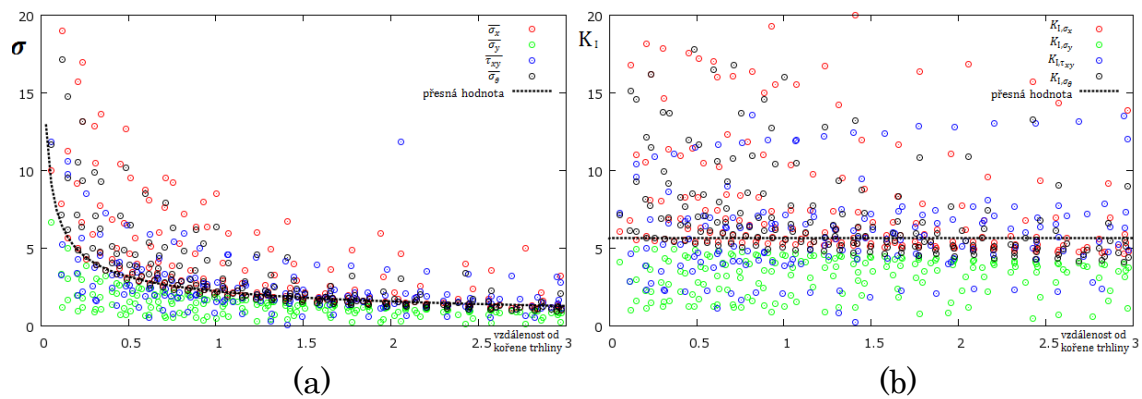
Lze očekávat, že jednotlivé hodnoty pro jednotlivé složky napětí budou ve velmi těsném okolí kořene trhliny (několik prvních prvků) vykazovat větší

nepřesnost, protože konečné prvky nejsou schopny přesně vystihnout singularitu napětí, která by teoreticky v kořeni trhliny nastala. Pro vzdálenější prvky očekáváme malou chybu, která však bude od jisté vzdálenosti postupně narůstat, protože bude slábnout vliv asymptotického pole napětí. Otázkou zůstává, jak zvolit sledovanou oblast v okolí kořene trhliny.

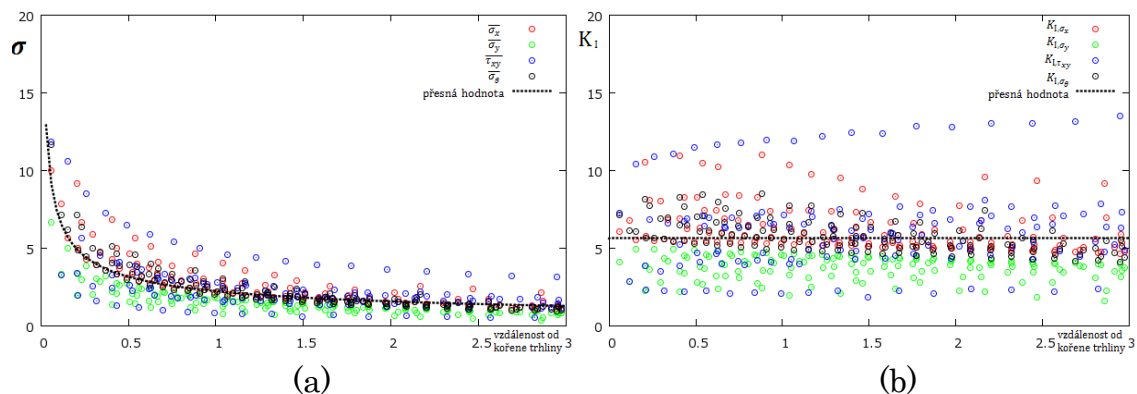
Výsledná hodnota K_I by neměla záviset na tom, z jaké složky napětí je počítána. Proto lze očekávat, že hodnoty vypočtené pro jednotlivé složky napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_\theta$ budou vycházet podobně.

4.1.2 Výsledky pro model nosníku s vrubem

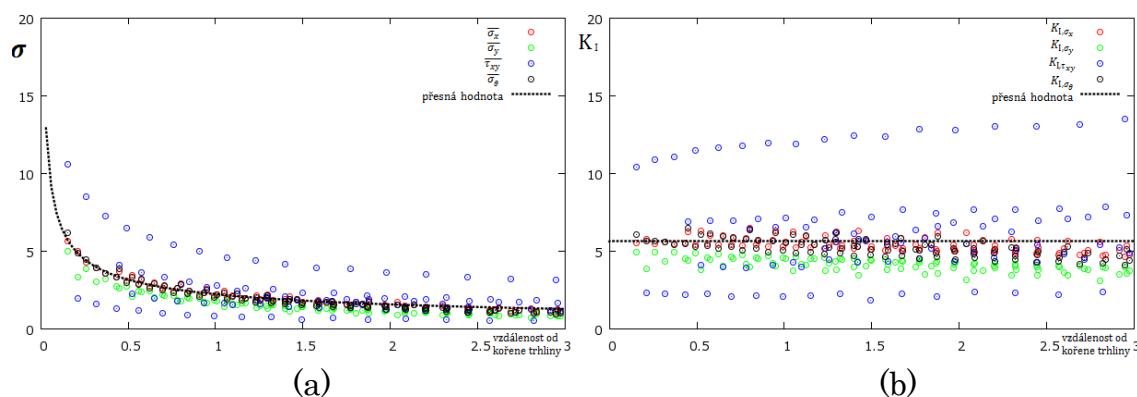
Následující tři dvojice grafů znázorňují výsledky, pro hodnotu $\alpha = 0.25$, získané s použitím lineárních trojúhelníkových prvků. První graf z dvojice vždy znázorňuje na svislé ose hodnoty normovaných složek napětí pro jednotlivé Gaussovy body lineárních prvků ležících ve sledované oblasti v okolí kořene trhliny. Na druhém grafu jsou na svislé ose hodnoty faktoru intenzity napětí K_I vypočtené z jednotlivých složek napětí. Vodorovná osa u obou grafů znázorňuje vzdálenost daného Gaussova bodu od kořene trhliny. Rozmezí pro úhel θ je voleno postupně postupně $(0, \frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{\pi}{4})$ a $(0, \frac{\pi}{8})$. Barevně jsou odlišeny výsledky pro jednotlivé složky napětí: σ_x červeně, σ_y zeleně, τ_{xy} modře a σ_θ černě. Černá přerušovaná čára znázorňuje teoreticky přesnou hodnotu vypočtenou podle (16) - (17).



Obrázek 4.1: (a) hodnoty normovaných složek napětí, (b) z nich vypočtený faktor intenzity napětí K_I pro jednotlivé Gaussovy body lineárních trojúhelníkových prvků pro přípustný úhel $\theta = \frac{\pi}{2}$.

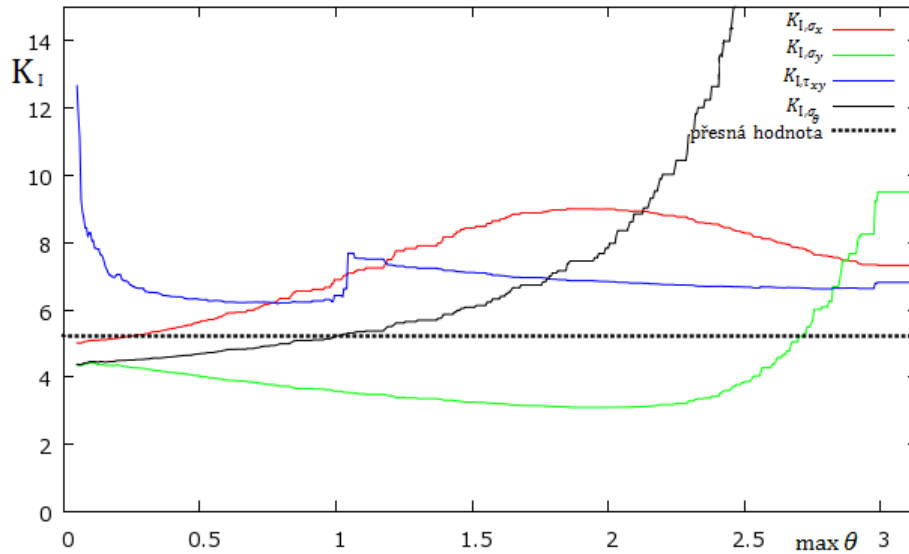


Obrázek 4.2: (a) hodnoty normovaných složek napětí, (b) z nich vypočtený faktor intenzity napětí K_I pro jednotlivé Gaussovy body lineárních trojúhelníkových prvků pro přípustný úhel $\theta = \frac{\pi}{4}$.

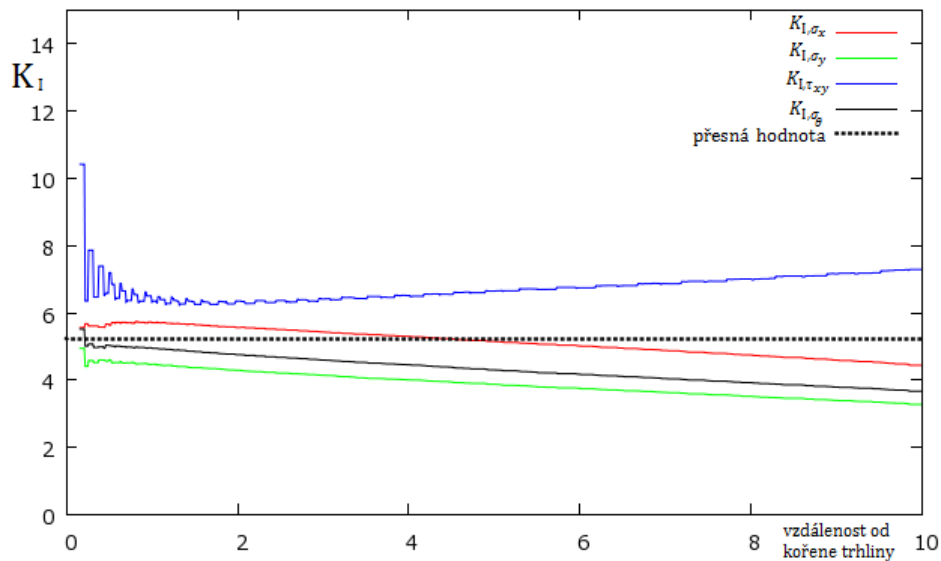


Obrázek 4.3: (a) hodnoty normovaných složek napětí, (b) z nich vypočtený faktor intenzity napětí K_I pro jednotlivé Gaussovy body lineárních trojúhelníkových prvků pro přípustný úhel $\theta = \frac{\pi}{8}$.

Následující dva grafy ukazují, jak se mění výsledná hodnota faktoru intenzity napětí pro jednotlivé složky napětí získaná aritmetickým průměrem všech hodnot K_I dané složky napětí pro Gaussovy body ležící ve sledované oblasti, pokud měníme její parametry. Na prvním grafu omezíme přípustnou vzdálenost bodů ve sledované oblasti na $r = 3$ a měníme přípustný úhel $\theta \in (0, \pi)$. Na druhém grafu je zafixován přípustný úhel $\theta = \frac{\pi}{8}$ a mění se přípustná vzdálenost $r \in (0, 10)$.

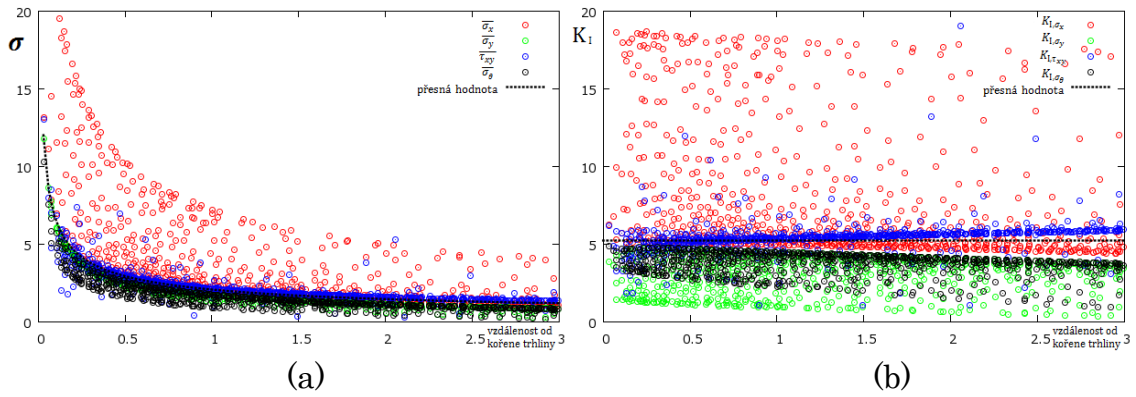


Obrázek 4.4: Výsledné hodnoty K_I pro jednotlivé složky napětí jako funkce přípustného úhlu sledované oblasti θ , při konstantní přípustné vzdálenosti $r = 3$.

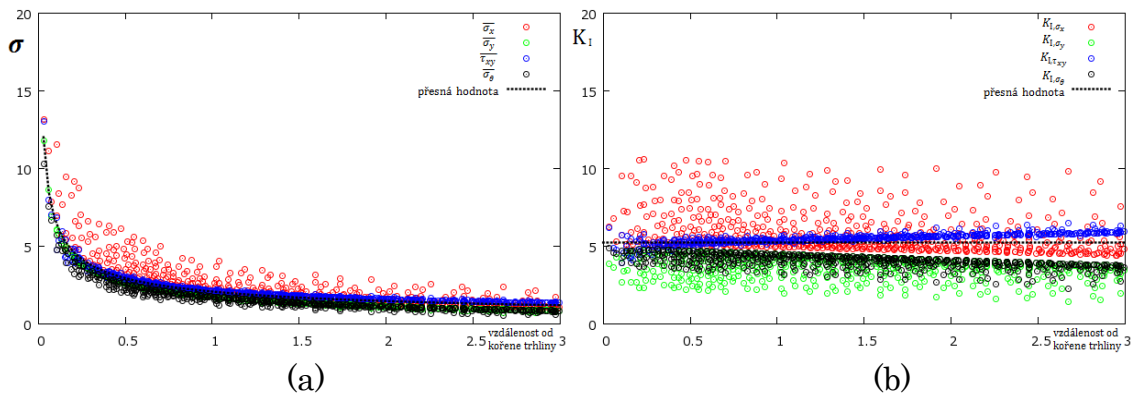


Obrázek 4.5: Výsledné hodnoty K_I pro jednotlivé složky napětí jako funkce maximální přípustné vzdálenosti sledované oblasti r , při konstantním úhlu $\theta = \frac{\pi}{8}$.

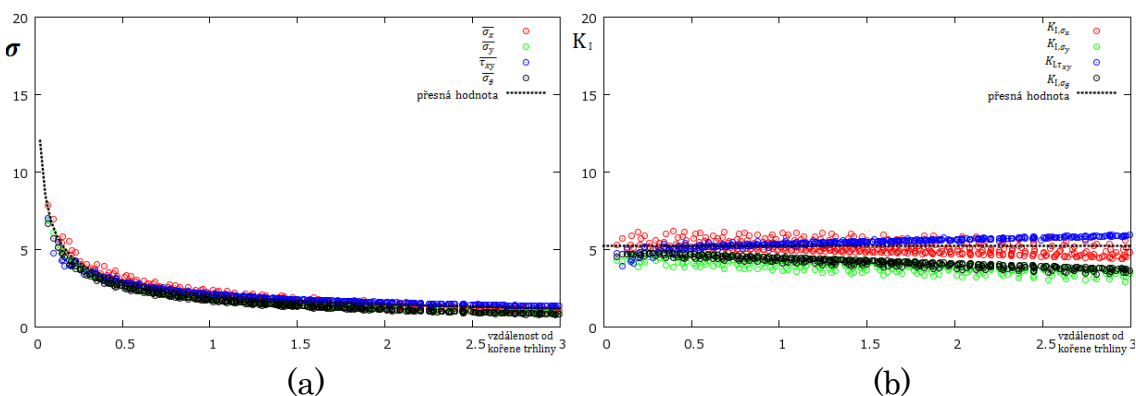
Následující obrázky 4.6 - 4.10 ukazují totéž, co obrázky 4.1 - 4.5, jen jsou použity trojúhelníkové kvadratické prvky místo lineárních. Pro kvadratické prvky dostaneme pro stejnou sledovanou oblast přibližně čtyřikrát více bodů, protože jeden kvadratický tříuzlový prvek má na rozdíl od lineárního čtyři Gaussovy body.



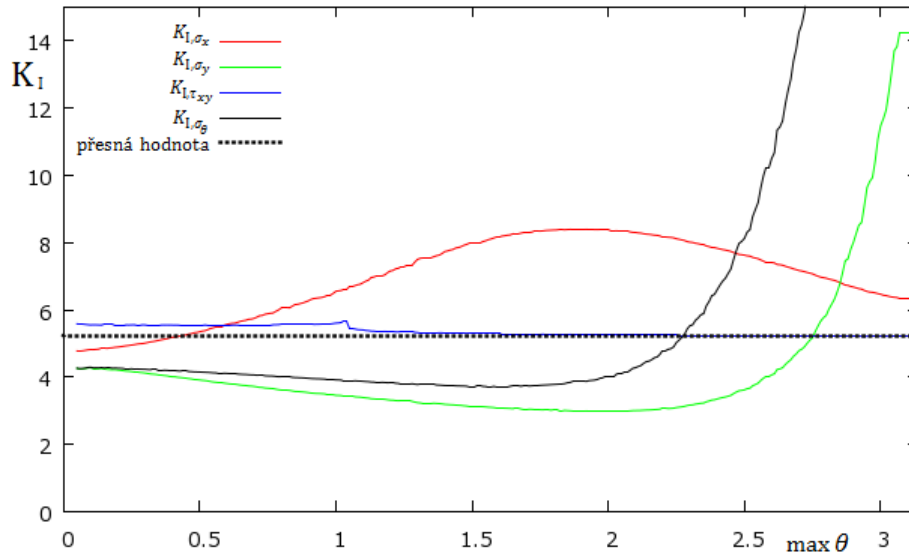
Obrázek 4.6: (a) hodnoty normovaných složek napětí, (b) z nich vypočtený faktor intenzity napětí K_I pro jednotlivé Gaussovy body kvadratických trojúhelníkových prvků pro přípustný úhel $\theta = \frac{\pi}{2}$.



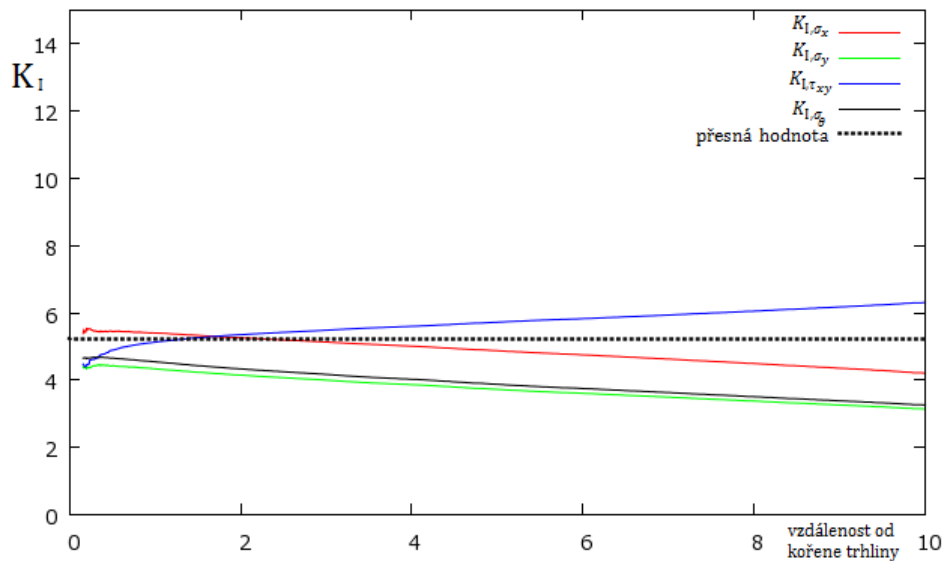
Obrázek 4.7: (a) hodnoty normovaných složek napětí, (b) z nich vypočtený faktor intenzity napětí K_I pro jednotlivé Gaussovy body kvadratických trojúhelníkových prvků pro přípustný úhel $\theta = \frac{\pi}{4}$.



Obrázek 4.8: (a) hodnoty normovaných složek napětí, (b) z nich vypočtený faktor intenzity napětí K_I pro jednotlivé Gaussovy body kvadratických trojúhelníkových prvků pro přípustný úhel $\theta = \frac{\pi}{8}$.



Obrázek 4.9: Výsledné hodnoty K_I pro jednotlivé složky napětí jako funkce přípustného úhlu sledované oblasti θ , při konstantní přípustné vzdálenosti $r = 3$.



Obrázek 4.10: Výsledné hodnoty K_I pro jednotlivé složky napětí jako funkce maximální přípustné vzdálenosti sledované oblasti r , při konstantním úhlu $\theta = \frac{\pi}{8}$.

Na první pohled je vidět, že kvadratické prvky jsou na rozdíl od lineárních mnohem lépe schopny popsat rychle se měnící pole napětí v těsném okolí kořene trhliny. Jejich použitím se rozptyl hodnot výrazně sníží, ale i pro hodnotu $\theta = \frac{\pi}{8}$ zůstává natolik velký, že výsledná vypočtená hodnota K_I vykazuje při srovnání s referenční hodnotou chybu až desítky procent. A konečné hodnoty vypočtené z jednotlivých složek napětí se od sebe výrazně liší.

Vliv sledované oblasti na konečný výsledek zůstává podobně velký jako s použitím lineárních prvků. Z obrázků 4.9 a 4.10 je vidět, že nelze najít souvislejší část sledované oblasti, ve které by K_I vypočtený z jednotlivých složek vycházel podobně a pokud možno konstantní. Bylo by tedy nesprávné konečný výsledek pro jednu konkrétní sledovanou oblast považovat za přesný. Výsledky pro kvadratické prvky s úpravou mezilehlého uzlu se od výsledků pro nezměněné kvadratické prvky liší jen drobně a v několika málo hodnotách složek napětí pro prvky těsně u trhliny, tento rozdíl je pro celkový výsledek zanedbatelný a nijak se na výsledných grafech neprojeví. Proto pro tuto metodu konstatujeme, že použití upravených kvadratických prvků nepřináší zaznamenané zlepšení na celkový výpočet K_I a výsledky tu pro ni ani neuvádíme.

Za zmínku stojí pozorování, že hodnoty vypočtené ze smykového napětí τ_{xy} , které při použití lineárních prvků vycházejí nejvíce rozptýleny, jsou při použití kvadratických prvků nejpřesnější ze všech složek napětí vůbec.

Závěrem však nezbývá než konstatovat, že metoda výpočtu faktor intenzity napětí K_I přímo z hodnot napětí v okolí kořene trhliny je prakticky nepoužitelná.

4.2 Výpočet K_I z tvaru rozevření trhliny

4.2.1 Popis metody

Další metoda vychází ze znalosti posunů. Pole posunů vypočtené ze složek asymptotického pole napětí, které převažuje v okolí kořene trhliny, je popsáno v [3], kde jsou také k dispozici vztahy pro relativní posuny vzhledem ke kořeni trhliny

$$u(r, \theta) = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (27)$$

$$v(r, \theta) = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(-2\kappa + 3) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (28)$$

Kde κ je tzv. Kolosovova konstanta umožňující jednotný zápis pro rovinnou napjatost i rovinnou deformaci

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{pro rovinnou napjatost} \\ 3 - 4\nu & \text{pro rovinnou deformaci} \end{cases} \quad (29)$$

G je modul pružnosti ve smyku

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (30)$$

E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonův součinitel.

Dosažením hodnoty $\theta = 180^\circ$ dostaneme hodnoty relativních posunů pro levou část trhliny a pro hodnotu $\theta = -180^\circ$ zase posuny pro pravou část trhliny. Rozevření trhliny je pak definováno jejich rozdílem. Pro rozdíl posunů ve směru kolmém na trhlinu dostaneme vztah

$$\Delta v(r) = v(r, 180^\circ) - v(r, -180^\circ) = \frac{(1 + \nu)K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (31)$$

a pro rozdíl posunů ve směru rovnoběžném s trhlinou

$$\Delta u(r) = u(r, 180^\circ) - u(r, -180^\circ) = \frac{(1 + \nu)K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (32)$$

Tato hodnota odpovídá smykovému pokluzu v trhlině (mód II) a závisí tedy pouze na K_{II} . Pokud budeme uvažovat jen mód I, bude $\Delta u(r) = 0$ a skok posunů v trhlině je popsán jen funkcí $\Delta v(r)$.

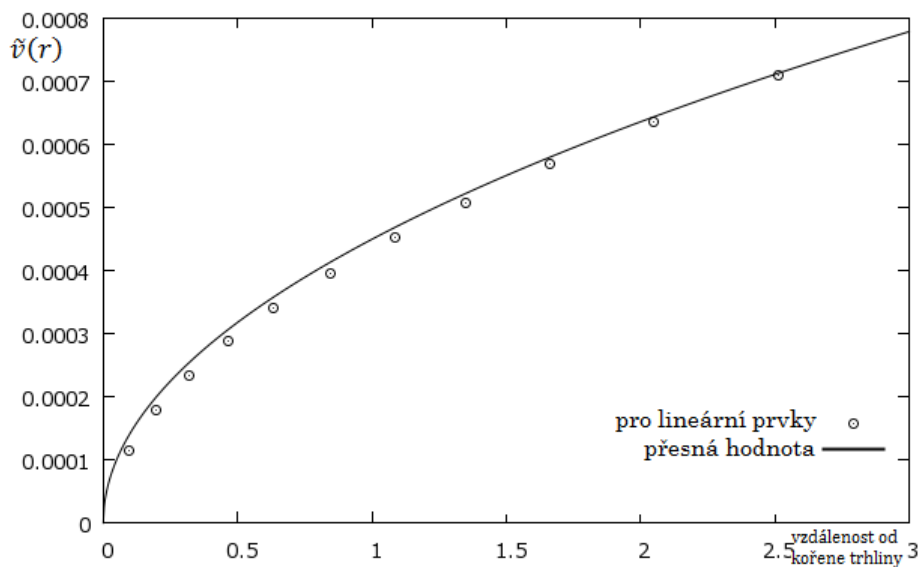
Pro naši symetrickou situaci odpovídá polovina rozevření trhliny relativnímu posunu bodu na trhlině od osy symetrie. Tento posun lze snadno vypočítat pomocí konečněprvkového modelu. Je tedy možné pro každý uzel ležící na volné části trhliny určit hodnotu K_I ze vztahu

$$K_I = \frac{2G\tilde{v}(r)}{1 + \nu} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (33)$$

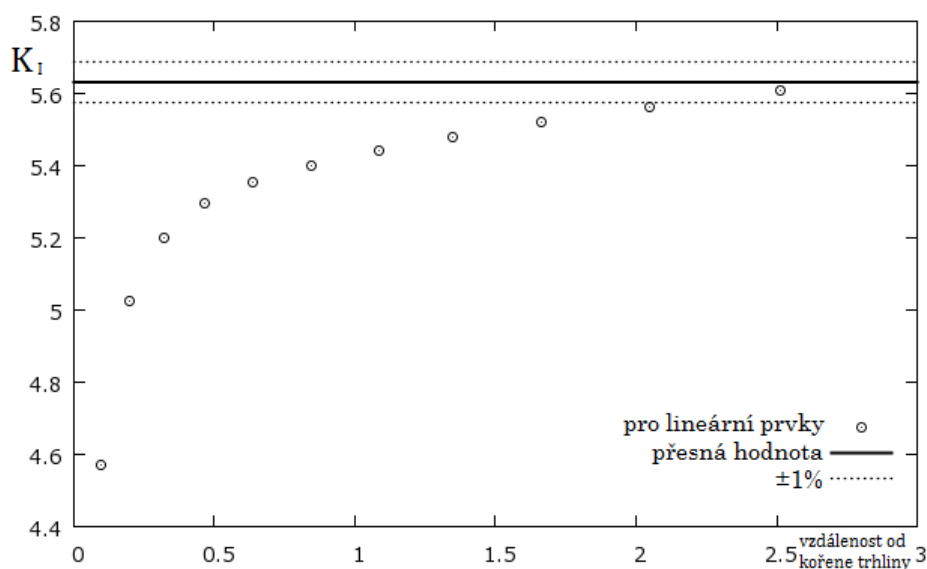
kde r je svislá vzdálenost příslušného uzlu od kořene trhliny a $\tilde{v}(r)$ je vodorovný posun toho uzlu získaný výpočtem MKP.

4.2.2 Výsledky pro model nosníku s vrubem

Následující dvojice obrázků je pro výpočet s použitím lineárních trojúhelníkových prvků. Na prvním obrázku jsou vodorovné posuny jednotlivých uzlů proložené teoreticky přesnou křivkou tvaru rozevření trhliny vycházející ze vzorců (31) - (32) a předpokládající K_I podle (16) - (17). Na druhém obrázku jsou jednotlivé hodnoty K_I vypočtené z těchto posunů proložené teoreticky přesnou hodnotou podle vzorce (16) - (17). Vodorovná osa vždy představuje vzdálenost uzlu od kořene trhliny

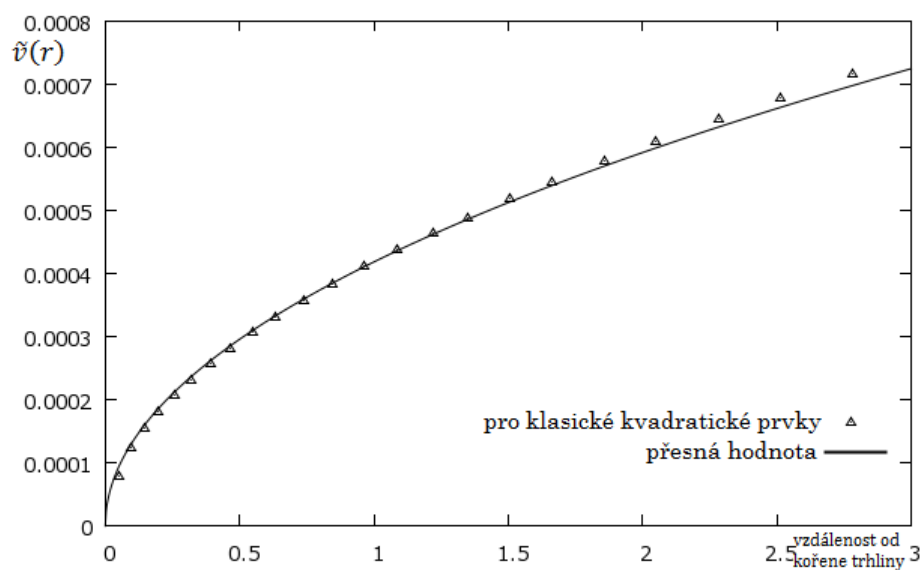


Obrázek 4.11: Hodnoty rozevření trhliny pro jednotlivé uzly lineárních prvků jako funkce vzdálenosti od kořene proložené teoretickou křivkou

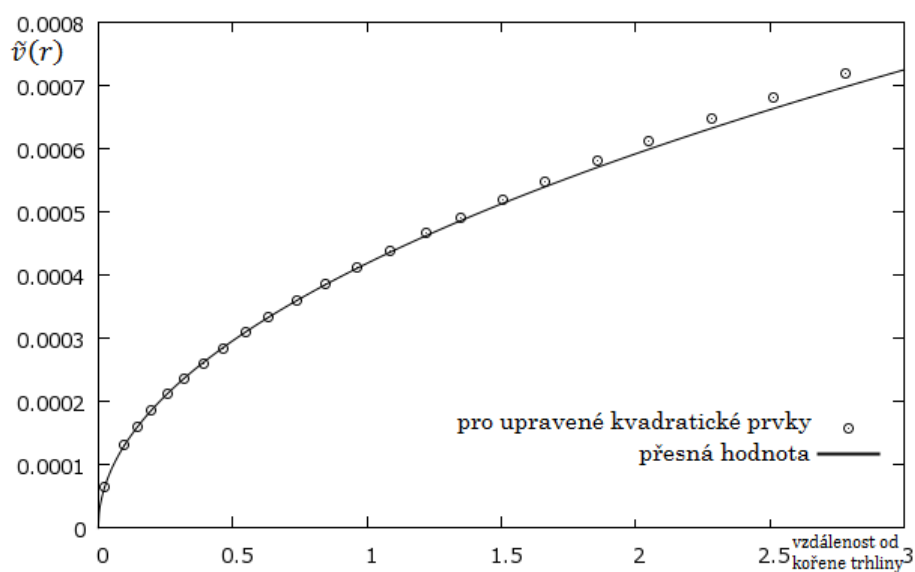


Obrázek 4.12: Hodnoty K_I vypočtené z rozevření trhliny pro jednotlivé lineární prvky

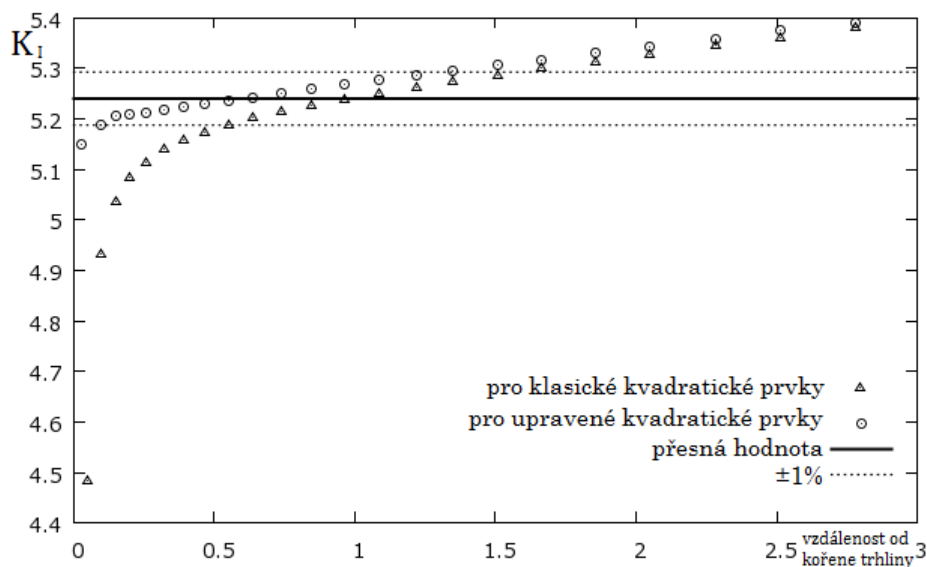
Další tři grafy představují výsledky získané s použitím klasických a upravených kvadratických prvků. Na prvním a druhém grafu jsou vodorovné posuny jednotlivých uzlů proložené teoreticky přesnou křivkou tvaru rozevření trhliny vycházející ze vzorců (31) - (32) a předpokládající K_I podle (16) - (17) nejprve pro klasické a poté pro upravené kvadratické prvky. Na třetím obrázku jsou jednotlivé hodnoty K_I vypočtené z těchto posunů proložené teoreticky přesnou hodnotou podle vzorce (16) - (17).



Obrázek 4.13: Hodnoty rozevření trhliny pro jednotlivé uzly kvadratických prvků jako funkce vzdálenosti od kořene proložené teoretickou křivkou



Obrázek 4.14: Hodnoty rozevření trhliny pro jednotlivé uzly kvadratických prvků s modifikovaným mezilehlým uzlem u kořene jako funkce vzdálenosti od kořene proložené teoretickou křivkou



Obrázek 4.15: Porovnání hodnot K_I vypočtených z rozevření trhliny pro normální kvadratické prvky a pro kvadratické prvky s modifikovaným mezilehlým uzlem u kořene trhliny.

Pro lineární prvky vidíme, že s rostoucí vzdáleností od kořene jsou hodnoty posunů bodů na trhlíně už od začátku mimo teoretickou křivku, viz Obrázek 4.11. I když se může zdát, že na konci grafu dochází k jejich zpřesnění, řada bodů tu jen protíná teoretickou křivku a pro větší vzdálenosti se nachází nad ní a chyba jednotlivých bodů stále roste. Proto není překvapením, že faktor intenzity napětí vypočtený z posunů pro lineární prvky vychází s poměrně velkou chybou několika procent viz, Obrázek 4.12.

Výsledky pro klasické kvadratické prvky přinášejí výrazné zlepšení. A pro upravené kvadratické prvky jednotlivé hodnoty pro malé vzdálenosti téměř dokonale kopírují teoretickou křivku a až s rostoucí vzdáleností dochází k postupnému nárůstu chyby, který si však lze vysvětlit tím, že v této vzdálenosti už začíná slábnout vliv asymptotického pole napětí na tvar rozevření trhliny. Jednotlivé hodnoty K_I mají pro prvních pár uzlů větší chybu. To je způsobeno extrémními hodnotami napětí v okolí kořene, které ani kvadratické prvky nejsou schopny dobře postihnout. To kvadratické prvky upravené posunem mezilehlého uzlu jsou na tom díky své singularitě mnohem lépe a pro tuto metodu přináší jejich použití výrazné zlepšení. Následující hodnoty K_I pro upravené kvadratické prvky se nacházejí v rozmezí $\pm 1\%$ od referenční hodnoty, a to až do vzdálenosti více než jedna desetina délky trhliny, viz Obrázek 4.15.

Závěrem tedy lze o této metodě říci, že s použitím kvadratických prvků s posunem mezilehlého uzlu lze touto metodou získat přijatelný výsledek s chybou okolo jednoho procenta.

4.3 Výpočet K_I z reakcí v uzlech nad trhlinou

4.3.1 Popis metody

V části 4.1.2 jsme měli možnost vidět, že skutečné hodnoty napětí se více podobají teoretickému asymptotickému poli, když zmenšujeme přípustný úhel sledované oblasti θ . Můžeme tedy očekávat, že se mu nejvíce budou podobat hodnoty právě na ose symetrie nad trhlinou. Na ose symetrie se však nenacházejí žádné Gaussovy body a hodnoty napětí na ose symetrie tu tedy nemáme k dispozici. Nacházejí se tu však uzly, pro které jsou v našem modelu vypočteny vodorovné reakce. Abychom mohli z těchto reakcí spočítat faktor intenzity napětí, je nutné si uvědomit, jak jsou tyto reakce metodou konečných prvků počítány.

Hodnotu povrchové uzlové reakce dostaneme tak, že přes povrch prvku integrujeme součin průběhu napětí na daném prvku s bázovou funkcí daného prvku, která je pro zkoumaný uzel nenulová. A výsledek dostaneme součtem přes všechny prvky, v nichž se daný uzel nachází. V našem rovinném případě tvoří hranici úsečka, takže se zkoumaný uzel nachází vždy maximálně ve dvou sousedních prvcích. Pro reakci n -tého uzlu na trhlině (kořen považujeme za nultý prvek) můžeme psát

$$F_n = \sum_i \int_{x_{0i}}^{x_{0i}+h_i} N_i(x) \sigma_i(x) dx \quad (34)$$

kde

$N_i(x)$ je příslušná bázová funkce i -tého prvku nenulová v n -tém uzlu

$\sigma_i(x)$ je průběh normálového napětí na hraně i -tého prvku

x je v tomto případě souřadnice s počátkem v kořeni trhliny jdoucí ve směru osy symetrie¹

x_{0i} je souřadnice x v počátku i -tého prvku

h_i je délka hrany i -tého prvku

Bázové funkce pro námi použité prvky jsou následující:

Pro lineární prvky

$$N_1(x) = \frac{x-x_0}{h} \quad (35)$$

¹ Jedná se pouze o značení používané v této kapitole, standardně osou x označujeme osu prutu, odtud také plyne značení normálových napětí σ_x, σ_y .

$$N_2(x) = 1 - \frac{x-x_0}{h} \quad (36)$$

Pro klasické kvadratické prvky (viz Obrázek 4.16 a)

$$N_1(x) = 2 \left(\frac{x-x_0}{h} \right)^2 - 3 \frac{x-x_0}{h} + 1 \quad (37)$$

$$N_2(x) = -4 \left(\frac{x-x_0}{h} \right)^2 + 4 \frac{x-x_0}{h} \quad (38)$$

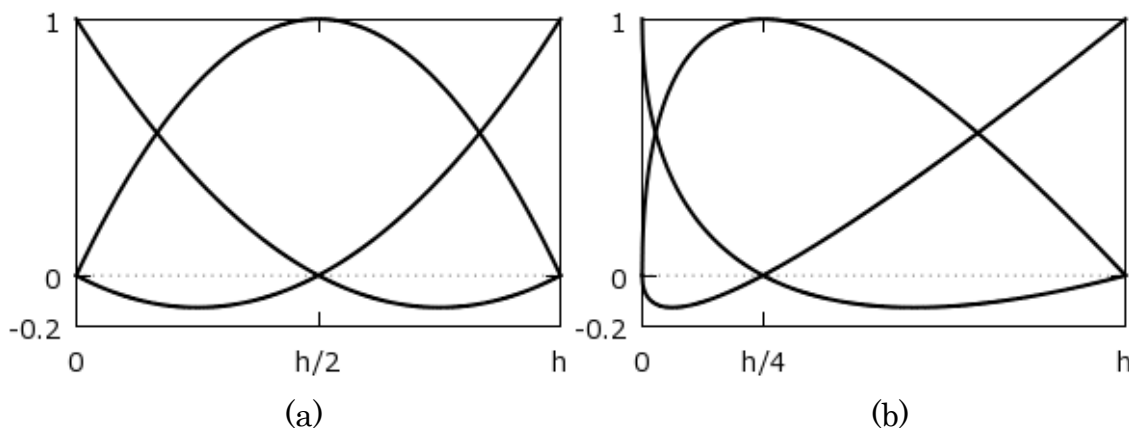
$$N_3(x) = 2 \left(\frac{x-x_0}{h} \right)^2 - 1 \frac{x-x_0}{h} \quad (39)$$

Pro upravené kvadratické prvky (viz Obrázek 4.16 b)

$$N_1(x) = -3 \sqrt{\frac{x-x_0}{h}} + 2 \frac{x-x_0}{h} + 1 \quad (40)$$

$$N_2(x) = 4 \sqrt{\frac{x-x_0}{h}} - 4 \frac{x-x_0}{h} \quad (41)$$

$$N_3(x) = -1 \sqrt{\frac{x-x_0}{h}} + 2 \frac{x-x_0}{h} \quad (42)$$



Obrázek 4.16: Bázové funkce (a) pro klasické, (b) pro upravené kvadratické prvky

Při výpočtu budeme vycházet z předpokladu, že napětí na ose má teoretické rozložení asymptotického pole, které je popsáno vztahy (1)-(5). Pro mód I a úhel $\theta = 0$ dostaneme pro složku napětí $\sigma_i(x)$ vztah

$$\sigma_i(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \quad (43)$$

Integrací tohoto výrazu s příslušnými bázovými funkcemi dostaneme s použitím vztahu (34) pro výpočet uzlové reakce následující vztahy, ve kterých vystupuje faktor intenzity napětí K_I .

Pro lineární prvky s použitím bázových funkcí (35) a (36) dostaneme pro koncové uzly vztah:

$$F_i = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{4x_{i-1}^{3/2} + 2\sqrt{x_i}(x_i - 3x_{i-1})}{3h_i} + \frac{4x_{i+1}^{3/2} + 2\sqrt{x_i}(x_i - 3x_{i+1})}{3h_{i+1}} \right) \quad (44)$$

Pro normální kvadratické prvky s použitím báзовých funkcí (37) a (39) dostaneme vztah:

$$F_i = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \left(2 \frac{15x_{i-1}^2 \sqrt{x_i} + x_i^{5/2} - 2x_{i-1}^{3/2} (3x_{i-1} + 5x_i)}{15h_i^2} - 2 \frac{(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}})^3 (3\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_i 6x_{i+1})}{15h_{i+1}^2} \right) \quad (45)$$

Pro kvadratické prvky s upravenou polohou mezilehlého uzlu se budou lišit vzorce pro první dva koncové uzly (kořen trhliny a první nejbližší koncový uzel na trhlíně), protože právě na prvním prvku jsou použity upravené báзовé funkce (40) a (42). Pro první dvě reakce koncových uzlů pak dostaneme vztahy:

$$F_{i=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \frac{4\sqrt{h_{i+1}}}{15} \quad (46)$$

$$F_{i=1} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{14h_{i+1}}{45} - 2 \frac{(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}})^3 (3\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_i 6x_{i+1})}{15h_{i+1}^2} \right) \quad (47)$$

Kde x_{i-1} je první souřadnice uzlu prvního z dvojice prvků,

x_i je souřadnice uzlu společného pro oba prvky, pro který počítáme reakci,

x_{i+1} je druhá souřadnice uzlu druhého z dvojice prvků,

$h_i = x_i - x_{i-1}$ je délka hrany prvního z dvojice prvků,

$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ je délka hrany druhého z dvojice prvků,

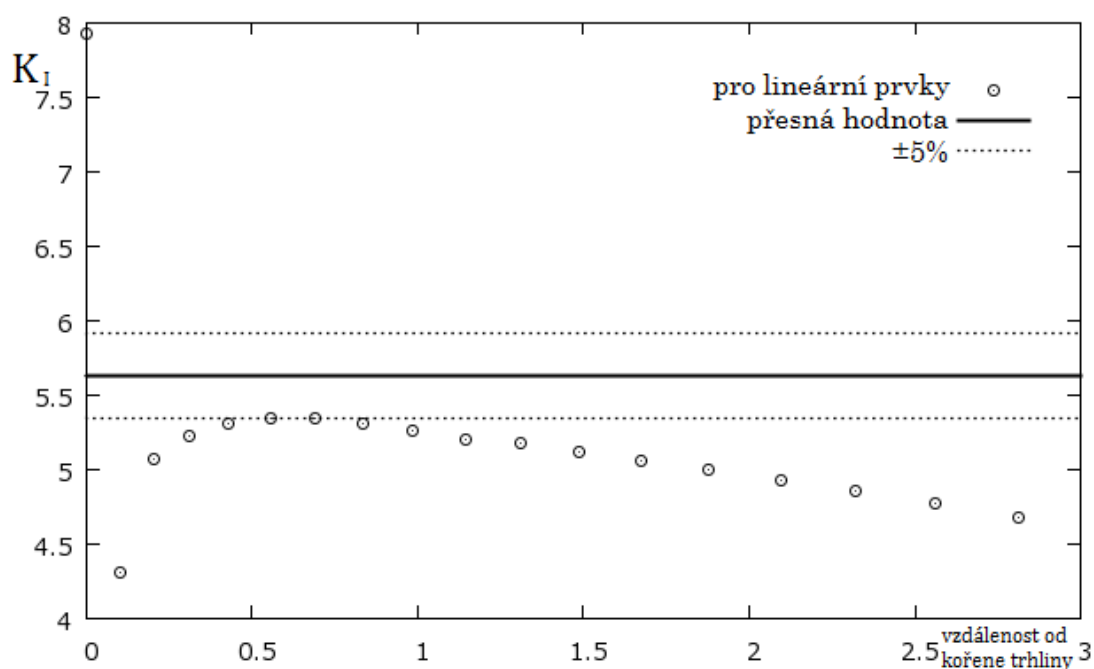
F_i je reakce vypočtená pro i -tý koncový uzel.

Faktor intenzity napětí K_I je v rovnicích (44)-(47) vždy jedinou neznámou a je tedy možné ho s použitím těchto vztahů pro každý koncový uzel určit. Pro oba typy kvadratických prvků je možné s použitím báзовé funkce (38), případně (41), získat i vztahy pro reakce mezilehlých uzlů. Ty však k určení K_I používány nebyly, proto je zde ani neuvádíme.

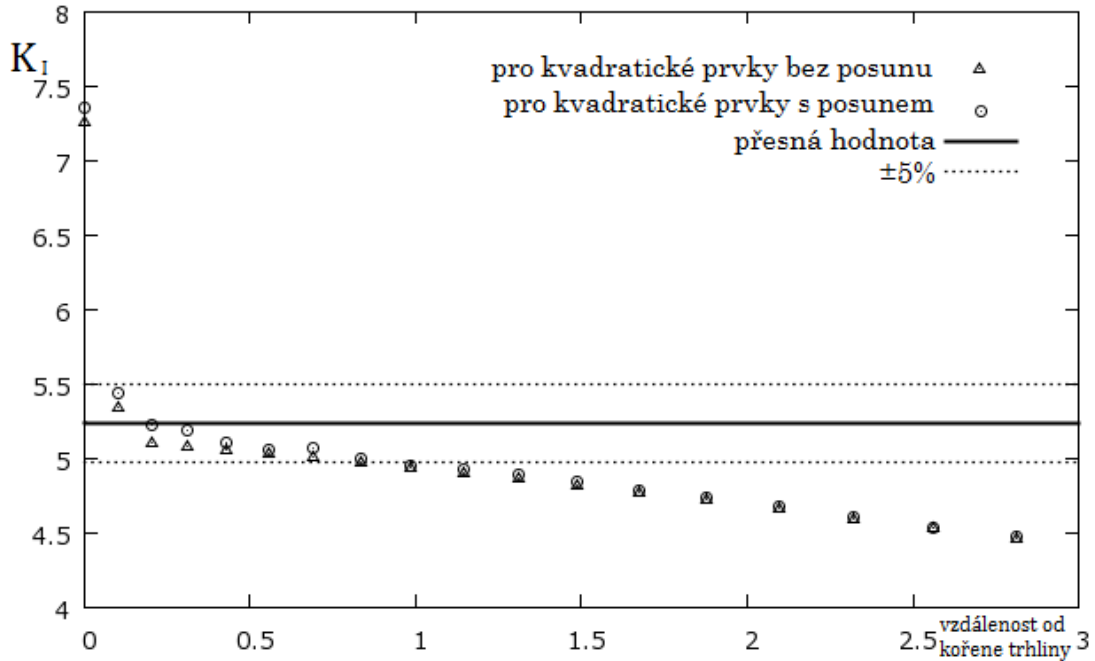
4.3.2 Výsledky pro model nosníku s vrubem

Výsledky získané touto metodou mají stejný trend jako u předchozích dvou metod. Opět je hodnota K_I vypočtená pro několik prvních prvků zatížena velkou chybou způsobenou neschopností prvků vhodně postihnout singulární charakter napětí. Poté následuje několik výsledků, které se od sebe příliš neliší, právě tyto výsledky můžeme považovat za nejpřesnější. Pro větší vzdálenost nastává pozvolný nárůst chyby způsobený slábnutím vlivu

asymptotického pole. Pro lineární prvky pozorujeme, že i nejpřesnější výsledky mají chybu asi 5%, viz Obrázek 4.17. Při použití kvadratických prvků dostáváme výrazně lepší výsledky, viz Obrázek 4.18. Pokud použijeme upravené kvadratické prvky, dostaneme pro malé vzdálenosti o něco větší hodnoty, což znamená pro první dva uzly o trochu větší chybu, ale pro další uzly už to představuje zpřesnění výsledku. Rozdíl mezi upravenými a normálními kvadratickými prvky však s rostoucí vzdáleností od kořene postupně vymizí. Všechny výsledky, které lze považovat za nejpřesnější, mají chybu do pěti procent. Proto můžeme očekávat, že celkový výsledek získaný touto metodou bude mít chybu jen několika málo procent. Takový výsledek už lze považovat za použitelný. My však tuto metodu používat nebudeme, protože jak jsme ukázali v části 4.2.2, pomocí tvaru rozevření trhliny lze získat ještě přesnější výsledek.



Obrázek 4.17: K_I vypočtený z reakcí pro jednotlivé prvky s různou vzdáleností od kořene trhliny při použití lineárních prvků



Obrázek 4.18: K_I vypočtený z reakcí pro jednotlivé prvky s různou vzdáleností od kořene trhliny při použití kvadratických prvků

4.4 Výpočet K_I pomocí globální energetické metody

4.4.1 Popis metody

Tato metoda nepočítá faktor intenzity napětí přímo, ale pomocí hnací síly trhliny s použitím vztahu uvedeného v části 2.2.3, který tu pro připomenutí zopakujeme:

$$K_I = \sqrt{EG} \quad (48)$$

Pro výpočet hnací síly trhliny G je v části 2.2.2 uveden vztah

$$G(u, a) = -\frac{1}{t} \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} \quad (49)$$

Pro výpočet K_I je potřeba numericky určit derivaci potenciální energie uložené v pružné deformaci podle délky trhliny.

Použijeme-li definici derivace, lze rozepsat vztah pro hnací sílu trhliny následujícím způsobem

$$G(u, a) = -\frac{1}{t} \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} = -\frac{1}{t} \lim_{da \rightarrow 0} \frac{W_e(u, a + da) - W_e(u, a)}{da} \quad (50)$$

Člen $W_e(u, a)$, resp. $W_e(u, a + da)$, představuje hodnotu potenciální energie uloženou v pružné deformaci pro předepsaný posun u a délku trhliny a , resp. da .

Za předpokladu, že se materiál chová lineárně pružně a model je zatížen jednou osamělou silou velikosti F , dostaneme pro hodnotu potenciální energie pružné deformace vztah

$$W_e(u, a) = \int_0^u F(\bar{u}, a) d\bar{u} = \frac{1}{2} F(u, a) u \quad (51)$$

Dosazením do (50) dostaneme vztah pro hodnotu hnací síly trhliny

$$\mathcal{G}(u, a) = -\frac{u}{2t} \lim_{da \rightarrow 0} \frac{F(u, a + da) - F(u, a)}{da} \quad (52)$$

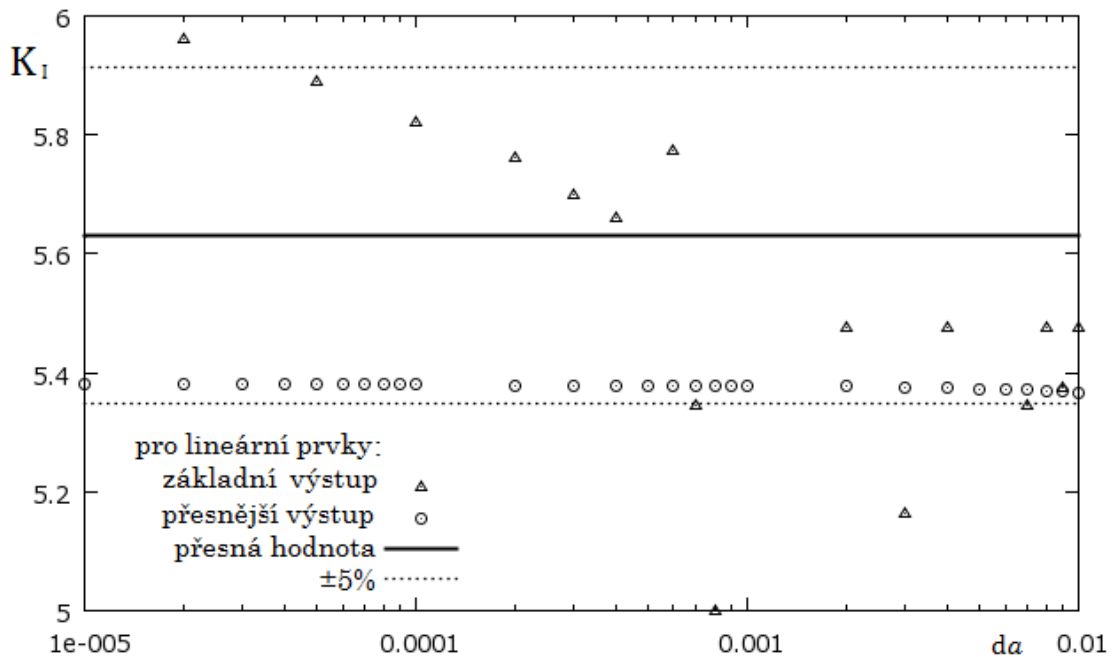
Místo přesné limity vypočteme přibližnou hodnotu vyčíslením pro dostatečně malé zvětšení trhliny da . Výpočet faktoru intenzity napětí K_I pak bude probíhat tak, že se vypočítá síla odpovídající předepsanému posunu u pro daný model s trhlinou o délce a . Provede se změna modelu zvětšením trhliny o zvolenou hodnotu da . A provede se znovu výpočet síly pro stejný posun. Tím získáme hodnoty $F(u, a)$ a $F(u, a + da)$. Z nich pomocí vztahu (52) spočítáme hnací sílu trhliny $\mathcal{G}(u, a)$ a z ní pomocí vztahu (48) faktor intenzity napětí K_I odpovídající zvolenému rozšíření da . Lze očekávat, že pro zmenšující se da budeme dostávat lepší výsledky, ovšem pouze do určité hodnoty, kdy nad přesností získanou zmenšováním přírůstků da začne převládat zao-krouhlovací chyba.

4.4.2 Výsledky pro model nosníku s vrubem

Pro stanovení vhodného rozmezí hodnot da bude nutné provést citlivostní analýzu a zjistit, jaký je vývoj chyby v závislosti na velikosti zvětšení trhliny da . Za tímto účelem vykreslíme jednotlivé faktory intenzity napětí K_I určené pro různá zvětšení trhliny da . Změna délky trhliny byla realizována pouze posunem uzlu, který představoval kořen trhliny. Nebyla generována nová síť, což by bylo možné, ale prodlužovalo by to dobu výpočtu. Navíc by se jiné rozložení sítě mohlo projevit na změně tuhosti modelu, což je v našem případě nežádoucí, protože právě změnu tuhosti se tu snažíme určit, ale pouze v závislosti na změně délky trhliny. Proto je největší hodnota, kterou da může nabývat, stejná jako velikost prvku u kořene trhliny, tedy v našem případě 0,01.

Na následujícím obrázku jsou výsledky získané s použitím lineárních prvků. Původní získané hodnoty pro základní výstup z programu OOFEM vykazovaly značný rozptyl, viz Obrázek 4.19. Ten byl způsoben tím, že při porovnávání dvou stavů se počítá rozdíl dvou sil, které jsou téměř stejné a liší se až na několikátém platném místě. Základní formát výpisu programu OOFEM je nastaven na 6 platných míst, což je ve většině praktických případů na-prosto dostačující. V našem případě však vede k fatální ztrátě přesnosti. By-

lo proto nutné upravit kód programu OOFEM tak, aby hodnotu reakce, která představuje naši porovnávanou sílu, vypisoval na maximální možný počet platných míst. Tím se rozptýl původně pozorovaný pro jakékoli hodnoty rozšíření trhliny odstranil a jednotlivé výsledky se ustálily na velice podobné hodnotě s chybou necelých pět procent viz, Obrázek 4.19. K jejich rozptýlení začíná docházet až pro hodnoty da menší než 10^{-8} , což už je oblast, kde lze zaokrouhlovací chybu očekávat.



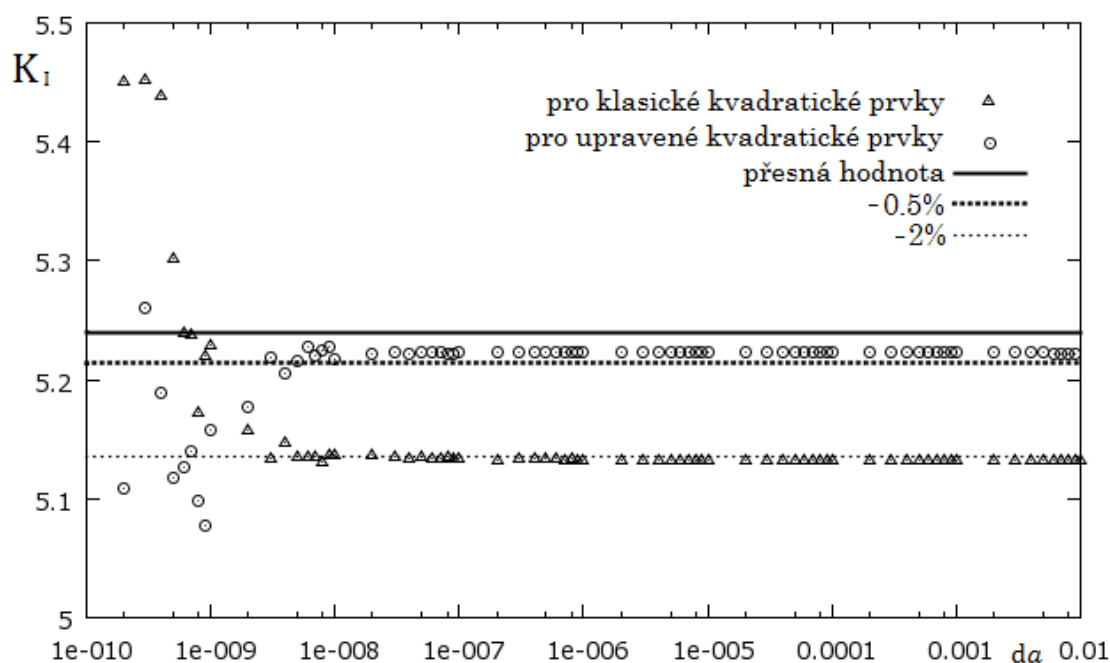
Obrázek 4.19: K_I vypočtený pomocí globální energetické metody pro různé velké zvětšení trhliny da , s použitím lineárních prvků, porovnání vlivu přesnosti výstupu reakce z programu OOFEM

Další obrázek představuje výsledky získané pomocí kvadratických prvků, tentokrát už rovnou s použitím upraveného přesnějšího výstupu z programu OOFEM. Zde můžeme pozorovat, že hodnoty vypočtené pro oba typy kvadratických prvků mají podobný trend, jako u prvků lineárních. A to, že jednotlivé hodnoty K_I pro různá da vycházejí pro daný typ prvku velice podobně a rozptýl hodnot nastane až pro da menší než 10^{-8} .

Pro upravené kvadratické prvky vycházejí jednotlivé hodnoty K_I velice pěkně konstantní s chybou necelé půl procento ve srovnání s referenční hodnotou, což je zatím jednoznačně nejlepší dosažený výsledek. Výsledky pro klasické kvadratické prvky mají stejné rozložení a chyba se pohybuje okolo 2%, viz Obrázek 4.20. Toto zjištění je v souladu s tím, jaké bylo chování jednotlivých typů prvků u předešlých metod. Kde vždy výsledky pro upravené kvadratické prvky byly vždy nejpřesnější, výsledky pro klasické kvadratické prvky

ky byly o něco málo horší a výsledky pro lineární prvky měly vždy chybu ještě výrazně větší.

S použitím upravených kvadratických prvků dává tato metoda vůbec nej-
přesnější výsledek ze všech dosud použitých. Je tedy žhavým kandidátem na
to, aby byla používána v dalších výpočtech. Proto bylo provedeno její ověření
na modelech s jinou geometrií i jinou počáteční délkou trhliny. Metoda se
velice dobře osvědčila a ve všech případech dávala (s použitím upravených
kvadratických prvků) velice přesný výsledek přibližně 0,5% pod referenční
hodnotou vypočtenou podle (16)-(17). Tento výsledek lze považovat dokonce i
za naprosto přesný, protože ostatní referenční vzorce dávají v použitelném
rozsahu hodnoty až o procento menší než námi použitý vzorec viz, Obrázek
3.4.



Obrázek 4.20: K_I vypočtený pomocí globální energetické metody pro různě velké zvětšení trhliny da , s použitím kvadratických prvků, porovnání klasických a upravených kvadratických prvků

Původně jsme očekávali, že pro hodně velké hodnoty da bude chyba narůstat. To však se však děje jen velice málo a jen při použití lineárních prvků. Je to způsobeno tím, že v našem případě je síť natolik jemná, že i největší provedené rozšíření je dostatečně malé na to, aby dostatečně přesně vystihlo limitu ve vztahu (52).

4.5 Výpočet K_I pomocí J-integrálu

Další způsob, jak je možné zjistit hnací sílu trhliny a z ní pak následně pomocí vztahu (48) faktor intenzity napětí K_I , je tzv. J-integrál. Tento způsob

představili v roce 1967 nezávisle na sobě G. P. Cherepanov [8] a J. R. Rice [9]. J-integrál je křivkový integrál nezávislý na integrační cestě. Pro jeho výpočet ve dvou dimenzích, což odpovídá i našemu případu, je v článku [9] uveden následující vztah:

$$J = \int_{\Gamma} W dx_2 - \int_{\Gamma} \mathbf{t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} ds \quad (53)$$

kde Γ je křivka kolem čela trhliny, přes kterou integrujeme,

s je délka integrační cesty,

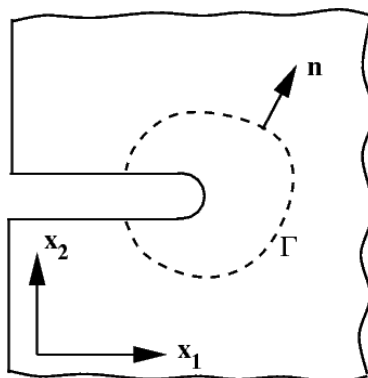
x_1 resp. x_2 jsou souřadnice ve směru totožném resp. kolmém na osu trhliny,

W je hustota potenciální energie pružné deformace,

\mathbf{u} je vektor posunů a \mathbf{t} je vektor povrchových sil na hranici, definovaný jako

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (54)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový normálový vektor k hranici Γ a $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napětí.



Obrázek 4.21: Integrační cesta J-integrálu ve dvou dimenzích; převzato z Wikipedia [online]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Integrale-J_2D.png

Pokud integrujeme přes libovolnou spojitou uzavřenou oblast uvnitř tělesa, je J-integrál roven nule. Pokud se začátek i konec integrační cesty nachází na hranici trhliny a integrační křivka vede spojitě kolem kořene trhliny, potom J-integrál odpovídá hnací síle trhliny.

Přestože tato metoda představuje elegantní způsob, jak alternativně určit hnací sílu trhliny, v této práci použita nebyla. Do budoucna se plánuje její použití a porovnání s ostatními metodami, ale zatím nám pro výpočet hnací síly trhliny bude stačit globální energetická metoda, pomocí které bylo dosaženo velmi dobrých výsledků, viz 4.4.

4.6 Porovnání jednotlivých metod

V částech 4.1 až 4.5 jsme představili celkem pět různých způsobů, které umožňují numericky určit faktor intenzity napětí a jsou založeny na odlišných principech. Čtyři z těchto metod jsme použili pro výpočet faktoru intenzity napětí v módu I. Ukázalo se, že všechny použité metody se chovají podle očekávání. Mají však své výhody a nevýhody a při výpočtu K_I je s použitím různých metod dosaženo různé přesnosti. Porovnání přesnosti dosažené pomocí jednotlivých metod a jejich výhody a nevýhody můžeme vidět v následující tabulce.

Výpočet z hodnot napětí	
Typ použitých prvků	Chyba
Lineární	desítky %
Kvadratické	10 – 30%
Kvadratické s úpravou	
<p>Výhody</p> <p>Plně obecná metoda použitelná pro jakýkoli model Malá výpočetní náročnost (jen jeden výpočet MKP)</p> <p>Nevýhody</p> <p>Větší nároky na jemnost sítě Výsledek je příliš závislý na volbě sledované oblasti Výsledky pro jednotlivé složky napětí jsou velmi odlišné</p>	

Výpočet z rozevření trhliny	
Typ použitých prvků	Chyba
Lineární	< 10 %
Kvadratické	2 %
Kvadratické s úpravou	1 %
<p>Výhody</p> <p>Malá výpočetní náročnost (jen jeden výpočet MKP)</p> <p>Nevýhody</p> <p>Použitelné pouze pro rovnou trhlinu Výsledná hodnota závisí na tom, do jaké vzdálenosti uvažujeme posuny</p>	

Výpočet z uzlových reakcí	
Typ použitých prvků	Chyba
Lineární	5 – 10 %
Kvadratické	< 5 %
Kvadratické s úpravou	< 5 %
<p>Výhody</p> <p>Malá výpočetní náročnost (jen jeden výpočet MKP)</p> <p>Nevýhody</p> <p>Použitelné pouze je-li kořen trhliny na ose symetrie Výsledná hodnota závisí na tom, do jaké vzdálenosti uvažujeme reakce</p>	

Výpočet pomocí globální energetické metody	
Typ použitých prvků	Chyba
Lineární	5 %
Kvadratické	2 %
Kvadratické s úpravou	0,5 %
<p>Výhody</p> <p>Plně obecná metoda použitelná pro jakýkoli model Výsledná hodnota je dána jednoznačně Pro upravené kvadratické prvky dává velice přesný výsledek</p> <p>Nevýhody</p> <p>Výpočetně nejnáročnější (několikanásobný výpočet MKP)</p>	

Tabulka 1: Porovnání jednotlivých metod pro numerické určení K_I

4.7 Výběr metody pro další výpočty

Nejlepších výsledků bylo nezávisle na použité metodě dosaženo vždy s použitím upravených kvadratických prvků. Původní předpoklad, že takto modifikované báze funkce budou lépe schopny popsat asymptotické pole napětí, se ukázal jako správný. Proto bude v každém případě vhodné použít právě tento typ prvků. Zbývá ještě rozhodnout, jakou metodu budeme k dalším výpočtům používat. Nabízejí se dvě metody, pomocí kterých bylo dosaženo nejpřesnějších výsledků. A to výpočet z rozevření trhliny a výpočet pomocí globální energetické metody. U obou těchto metod se konečný výsledek lišil od referenční hodnoty podle vztahu (16)-(17) maximálně o jedno procento. Ve prospěch první jmenované metody hovoří především její menší výpočetní

náročnost, ale její velkou nevýhodou je, že konečný výsledek se přece jen trochu mění s tím, jak nastavujeme délku, pro kterou tvar trhliny sledujeme. Proto bude vhodnější zvolit druhou jmenovanou metodu i za cenu vyšší výpočetní náročnosti. Pro každou změnu délky trhliny se totiž musí provést samostatný výpočet MKP, který představuje časově nejnáročnější část celého postupu. Výhodou však je, že se jedná o naprosto obecnou metodu, která může být použita pro jakoukoli geometrii. Další výhodou je, že ve velkém rozsahu (přes několik řádů) dostáváme stejný výsledek pro různé změny délek trhliny, viz Obrázek 4.20. Proto stačí provést výpočet jen pro několik málo změn délky trhliny, které budou vzájemně řádově odlišné, čímž se zaručí, že alespoň několik z nich se bude nacházet v přesné oblasti. Ty se poznají tak, že výsledky pro ně vycházejí velice podobně. Ostatní hodnoty pak můžeme zapomenout a výsledek získat jako průměr hodnot z přesné oblasti. Hodnoty rozšíření lze volit například následovně: první (největší) hodnota se zvolí jako desetina velikosti prvku u kořene trhliny a další hodnota se vždy zvolí jako desetina předešlé. Tímto způsobem úplně postačí použít pět hodnot, pro jistotu přidáme podmínku, která přidá další hodnoty rozšíření, dokud se nebudeme nacházet ve sledované oblasti.

V další části tedy budeme k numerickému určování faktoru intenzity napětí používat globální energetickou metodu popsanou v části 4.4 aplikovanou na síti z kvadratických prvků s úpravou polohy mezilehlého uzlu u kořene trhliny do jedné čtvrtiny ke kořeni trhliny.

5 Aplikace výpočtu faktoru intenzity napětí pro simulování šíření trhliny v módu I

Teď, když máme způsob, jak pro daný model numericky určit hodnotu faktoru intenzity napětí v módu I (K_I), je možné tuto hodnotu porovnat s lomovou houževnatostí (K_C) a podle vztahů (6)-(8) určit, zda se trhlina bude šířit. Pokud ano, provedeme její zvětšení a celý výpočet opakujeme. Tímto způsobem jsme schopni simulovat stav nosníku, dokud nedojde k jeho úplnému rozlomení, nebo dokud se šíření trhliny nezastaví.

Nebo opačně, pokud pro daný materiál známe hodnotu lomové houževnatosti, můžeme pomocí výpočtu K_I určit kritickou hodnotu síly F_C , pro kterou dojde k šíření trhliny, a k ní odpovídající posun. Tento postup lze aplikovat pro postupně se zvětšující délku trhliny a tak pro daný nosník získat kompletní pracovní diagram až do úplného kolapsu.

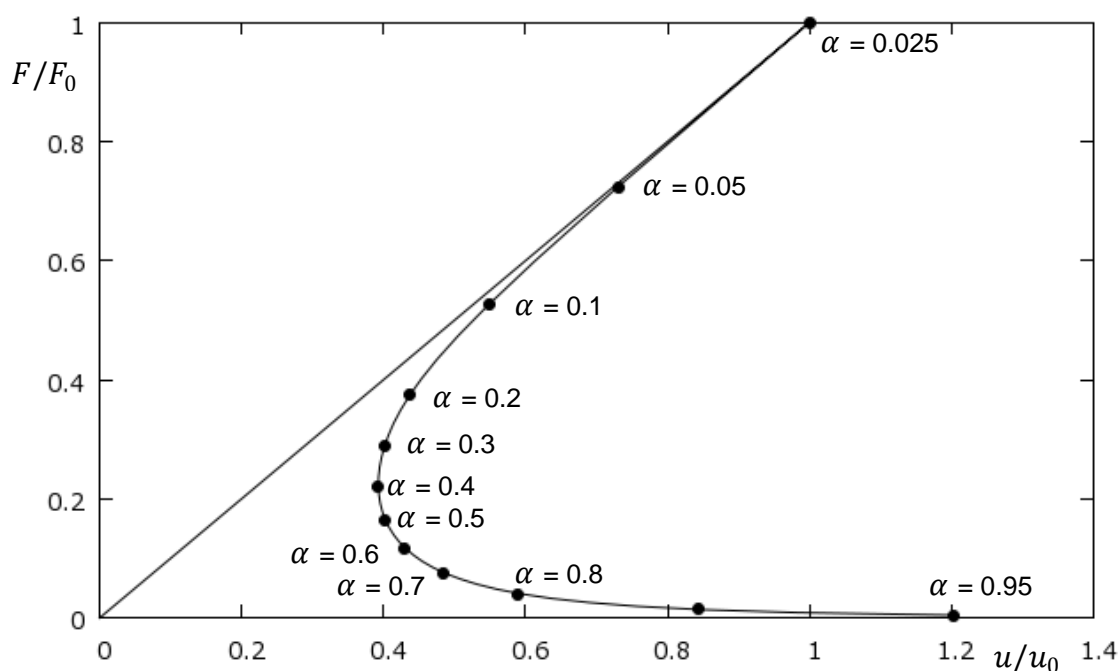
Otázkou zůstává, jakým směrem se trhlina bude šířit. Pokud uvažujeme pouze namáhání v módu I, očekávali bychom, že pro symetrický nosník s vrubem se bude trhlina šířit pouze ve svém původním směru. Nutně tomu

tak však být nemusí. U materiálů popsaných Trescovou podmínkou plasticity dochází při jednoosém tahu k pokluzu podél rovin ukloněných vůči rovině symetrie o 45° . Proto u materiálů, které mají dominantní mechanismus porušení pokluzem, by se i symetrická trhlina namáhaná v módu I teoreticky mohla šířit ve dvou symetricky šikmých směrech [3]. My však ve všech následujících případech v módu I budeme předpokládat tahové porušení, tedy pokračování šíření trhliny v jejím původním směru, typické pro křehké a kvazikřehké materiály.

Pokud je trhlina namáhána ve smíšeném módu, nelze předem preferovat žádný směr a naopak je třeba použít určité kritérium pro výběr směru šíření. Tento případ je řešen v následující části 6.

5.1 Výsledky pro nosník s vrubem

Pokud u modelu nosníku s vrubem, na kterém jsme testovali jednotlivé metody, zmenšíme jeho původní délku trhliny na desetinu a zvolíme konkrétní hodnotu lomové houževnatosti, dostaneme výše zmíněným postupem pracovní diagram na Obrázku 5.1. Jednotlivé tečky odpovídají různým délkám trhliny a černá čára představuje referenční hodnotu vypočtenou podle (16)-(17).



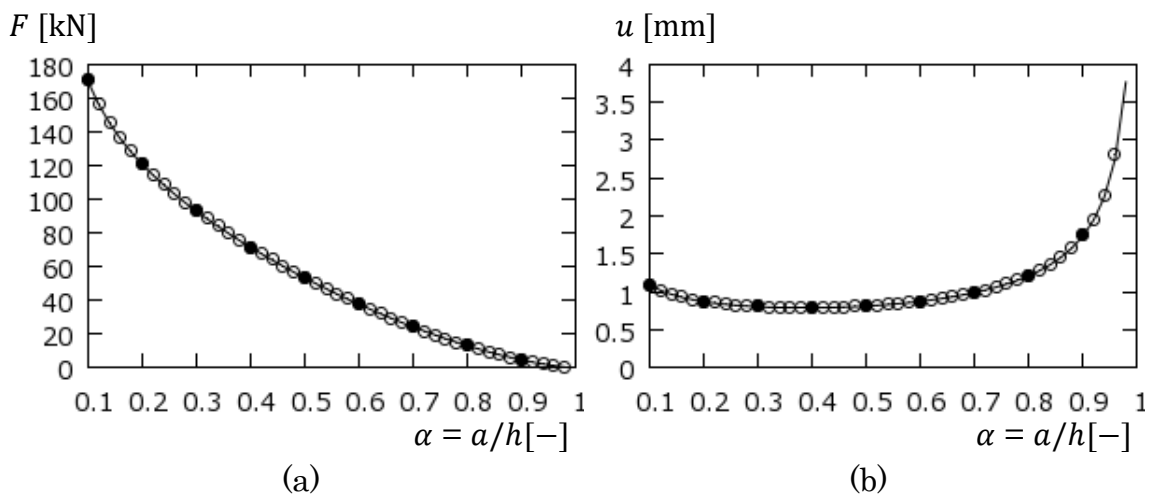
Obrázek 5.1: Pracovní diagram pro referenční nosník s vrubem

Vidíme, že numericky vypočtené hodnoty velice dobře kopírují referenční křivku, což je dáno přesností používané metody pro určení faktoru intenzity napětí. Na pracovním diagramu je také dobře patrné výrazné změkčení, které úplně neodpovídá chování, na které jsme zvyklí u běžně používaných ma-

teriálů. To je způsobeno tím, že doposud používaný model byl čistě numerický a nepředstavoval žádný konkrétní materiál. Proto mohla být hodnota lomové houževnatosti, která má zásadní vliv na to, jak bude pracovní diagram vypadat, jen velmi těžko odhadnuta v reálném poměru k ostatním parametrům modelu.

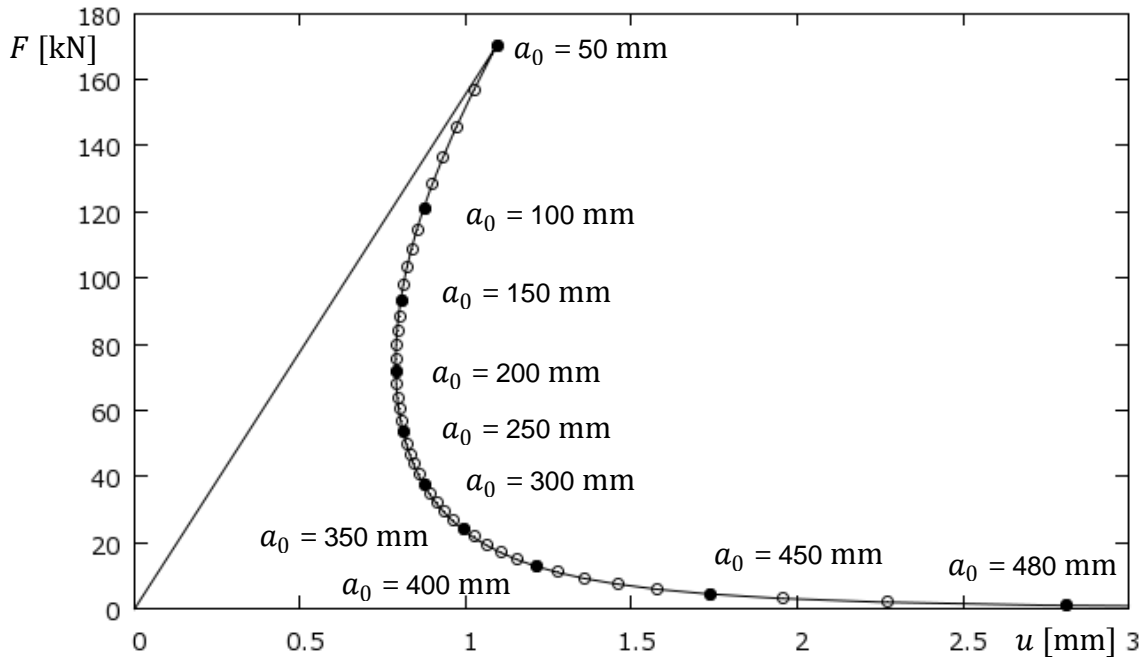
Pro lepší ilustraci bude vhodnější zvolit model představující konkrétní betonový nosník s následujícími parametry: výška $h = 0,5$ m, délka $L = 2$ m, tloušťka $t = 0,2$ m, počáteční délka trhliny $a_0 = 0,05$ m, modul pružnosti $E = 20$ GPa, Poissonův součinitel $\nu = 0,2$ a hodnota lomové houževnatosti $K_c = 4$ MNm^{-3/2}.

Pro takovýto model dostaneme následující výsledky, tentokrát už v absolutních hodnotách. Obrázek 5.2 (a) ukazuje, jak se v závislosti na relativní délce trhliny α mění hodnota kritické síly, která je potřeba k jejímu dalšímu šíření. Obrázek 5.2 (b) zase znázorňuje, za jakého posunu k tomuto šíření dochází, opět pro různé relativní délky trhliny. Vidíme, že z počátku pro další šíření trhliny potřebná kritická síla velice rychle klesá, zatímco průhyb se nijak dramaticky nemění. Pokud však již trhlina zasahuje do většiny výšky nosníku, je síla potřebná pro další šíření téměř nulová a průhyb velice rychle roste.



Obrázek 5.2: Výsledky pro betonový nosník s vrubem, (a) kritická síla pro různé délky trhliny, (b) kritický průhyb pro různé délky trhliny

Kombinací těchto dvou obrázků dostaneme následující pracovní diagram.



Obrázek 5.3: Pracovní diagram pro betonový nosník s vrubem

Vidíme, že do dosažení kritické hodnoty zatěžující síly se trhlina nešíří a průhyb narůstá lineárně, materiál se chová lineárně pružně. Při dosažení kritické síly se trhlina začíná šířit, s jejím šířením dochází ke zvyšování poddajnosti nosníku. To má za následek, že síla potřebná k dalšímu šíření trhliny velice rychle klesá. Proto by reálný pokus, který by byl řízen zvětšující se silou, nesledoval celý pracovní diagram, ale při dosažení kritické hodnoty zatěžující síly by došlo k dynamickému šíření trhliny, to by znamenalo okamžitý kolaps nosníku. Při řízení testu posunem by v tomto případě také došlo při dosažení kritického průhybu k okamžitému kolapsu konstrukce. Jiné chování by nastalo například, pokud by počáteční délka trhliny a_0 byla větší než bod, ve kterém dochází k takzvanému obratu. V našem případě bodu obratu odpovídá hodnota $a_0 = 200$ mm. Pokud by počáteční délka trhliny byla větší než tato hodnota, pak je možné postupným zvětšováním posunu dosáhnout všech možných stavů statické rovnováhy, které představuje pracovní diagram.

6 Šíření trhliny ve smíšeném módu

Ve smíšeném módu namáhání trhliny jsou obecně nenulové všechny složky faktoru intenzity napětí K_I , K_{II} i K_{III} . My však uvažujeme úlohu jako rovinnou, tím je vyloučeno namáhání trhliny v módu III (viz Obrázek 2.1) a můžeme předpokládat, že $K_{III} = 0$.

Při namáhání trhliny, kdy jsou nenulové hodnoty K_I a K_{II} , je důležité určit nejen, zda se trhlina bude šířit, ale také v jakém směru bude případné šíření

trhliny probíhat. Pro výběr směru šíření neexistuje v současné době jednoznačně přijímané kritérium. V literatuře je navrženo několik způsobů od téměř empirických až po velmi propracované s teoretickým základem. V poslední době se velmi dobře osvědčilo kritérium využívající hodnotu obvodového napětí [3].

6.1 Kritérium maximálního obvodového napětí

Obvodové napětí je definováno v kapitole 2 jako normálové napětí na ploše procházející daným bodem ve směru jeho spojnice s kořenem trhliny. Pro jeho hodnotu lze pomocí podmínek rovnováhy odvodit vztah

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (55)$$

S použitím vztahů (1) - (3) dostaneme:

$$\sigma_{\theta}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3 \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (56)$$

Kritérium maximálního obvodového napětí říká, že trhlina se bude šířit ve směru, ve kterém je největší hodnota obvodového napětí σ_{θ} . Pochopitelně nemá význam zjišťovat maximální možnou hodnotu σ_{θ} , protože jak je vidět z (56), s klesající vzdáleností od kořene trhliny r roste hodnota σ_{θ} nade všechny meze. Pokud však vzdálenost r zafixujeme a sledujeme pouze body ležící na kružnici se středem v kořeni trhliny a poloměrem r , pak σ_{θ} nabývá maximální hodnoty právě pro hodnotu úhlu θ_{\max} , který odpovídá směru, ve kterém se trhlina bude šířit. Hodnotu maximálního napětí lze také použít k rozhodnutí, zda se trhlina vůbec začne šířit. V tomto případě nelze porovnávat maximální hodnotu σ_{θ} se samotnou kritickou hodnotou, která je vlastností materiálu, protože, jak víme, maximální hodnota σ_{θ} se mění s tím, jak měníme průměr sledované kružnice r . Rozhodovací podmínka by musela mít tvar

$$\sigma_{\theta}(r, \theta_{\max}) = \sqrt{\frac{r_{\text{ref}}}{r}} \sigma_{\theta \text{ krit}} \quad (57)$$

Otázkou vůbec zůstává, jak pro výpočet volit vzdálenost r . Pro hodně malé r bude nejspíše výpočet dosti nepřesný, protože jak jsme viděli v části 4.1.2, pro malé r jsou hodnoty σ_{θ} dost rozptýleny od křivky představující teoretické rozložení, viz Obrázek 4.6. Ve velkých vzdálenostech (řádově čtvrtina výšky nosníku) nebude zase dominantní asymptotické pole napětí, které je pro šíření trhliny rozhodující. Mezi těmito případy však lze očekávat dostatečně velkou oblast, ve které nebude výsledný směr šíření ovlivněn volbou vzdálenosti.

6.2 Kritérium maximální hodnoty hnací síly trhliny

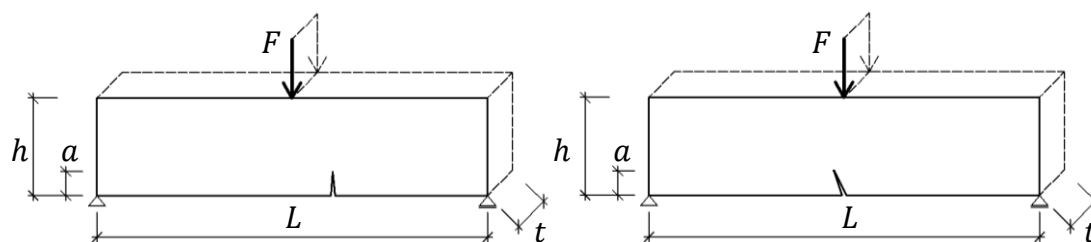
V poslední době se zdá být kritérium založené na maximální hodnotě obvodového napětí nejpoužívanější a srovnávacími výpočty je dosaženo v řadě případů velmi dobré shody s experimentálními výsledky [3]. Samotná hodnota obvodového napětí σ_θ se ukázala pro výpočet faktoru intenzity napětí jako téměř nepoužitelná. Mnohem lepších výsledků bylo dosaženo s použitím globální energetické metody, proto se nabízí vytvořit kritérium pro šíření trhliny používající právě tuto metodu.

Postup by mohl být podobný jako při výpočtu hnací síly trhliny v módu I, kdy jsme provedli ve směru, ve kterém očekáváme šíření trhliny, několik výpočtů pro různě zvětšenou délku trhliny a z výsledků určili hnací sílu trhliny \mathcal{G} v tomto směru. Zde však předem neznáme směr šíření θ , ale právě naopak ho chceme určit. Proto potřebujeme určit hodnotu \mathcal{G} pro všechny možné hodnoty, kterých může úhel θ nabývat. Výpočet \mathcal{G} pro jeden směr je však časově dosti náročný (obsahuje několik výpočtů MKP, které jsou nejdelší částí programu), proto by nebylo efektivní provádět ho mnohokrát pro postupně se měnící θ . Mnohem lepší a rychlejší bude, pokud provedeme výpočet \mathcal{G} v několika předem stanovených směrech a výsledné hodnoty proložíme polynomem. Tím získáme hodnoty \mathcal{G} pro všechny přípustné směry šíření a najít pro ně na polynomu maximum už je snadnou numerickou záležitostí. Úhel θ , pro který nabývá polynom představující hnací sílu trhliny \mathcal{G} maxima, představuje hledaný směr šíření trhliny. Hodnotu hnací síly \mathcal{G} je také možno využít k rozhodnutí, zda k šíření trhliny pro dané zatížení bude docházet, jak je popsáno v části 2.2.2.

6.3 Simulace šíření trhliny ve smíšeném módu

Teď když máme k dispozici fungující kritérium říkající, zda se trhlina pro dané zatížení bude šířit, a pokud ano, i jakým směrem bude šíření probíhat, můžeme simulovat šíření trhliny ve smíšeném módu.

Nejprve je nutné vytvořit model, u kterého nebude trhlina namáhána jen v módu I. K tomu naprosto postačí, pokud lehce upravíme nosník s vrubem. Počáteční vrub buď uděláme šikmý, nebo ho umístíme jinam než na osu symetrie, viz Obrázek 6.1. Tyto úpravy zaručí, že složka K_{II} bude nenulová a i pokud se na takto upravené nosníky jen podíváme, můžeme odhadnout, že trhlina se asi nebude šířit ve svém původním směru.

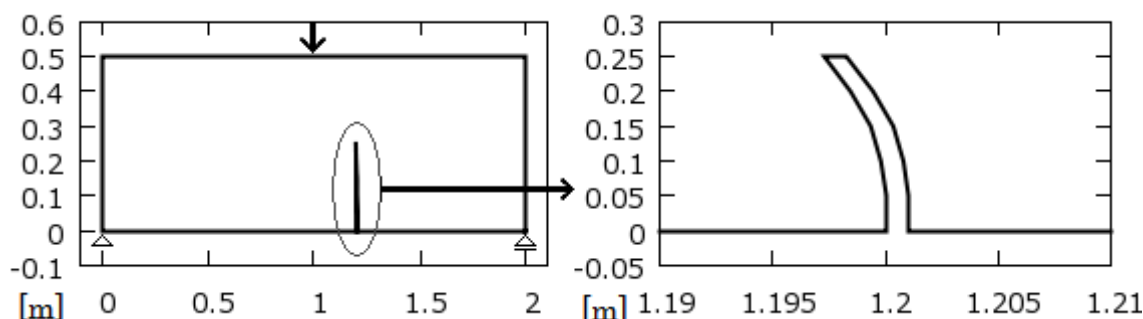


Obrázek 6.1: Modely nosníků s namáháním trhliny ve smíšeném módu

Na takovýto model pak můžeme aplikovat kritérium navržené v části 6.2. Pokud se ukáže, že trhlina se pro dané zatížení bude šířit, provedeme její rozšíření v příslušném směru o předem zvolenou délku. Vygenerujeme novou síť a celý proces můžeme opakovat. Tímto způsobem lze například po milimetru zvětšovat trhlinu, dokud nedojde k úplnému roztržení nosníku.

6.4 Výsledky

Metodu navrženou v části 6.2 jsme aplikovali na betonový nosník z kapitoly 5.1. S tím rozdílem, že trhlina s počáteční délkou 50 mm byla posunuta o 200 mm doprava od osy symetrie. Trhlinu jsme zvětšili v každém kroku o 50 mm, dokud nedosahovala do poloviny výšky nosníku. Očekáváme, že trhlina se bude šířit doleva a bude směřovat do bodu, který je zatížen osamělou silou. Výsledek vidíme na Obrázku 6.2.



Obrázek 6.2: Šíření trhliny ve smíšeném módu

Trhlina se podle očekávání začíná šířit vlevo, ale jen velice pomalu a nezdá se, že by směřovala do zatíženého bodu. Spíše má tendenci více preferovat původní směr, podobné chování sledujeme, i pokud počáteční trhlinu umístíme dále od osy symetrie. S největší pravděpodobností je tento jev způsoben tím, že je trhlina modelována jako zářez o šířce 1 mm a ne jako ostrá špička, jak tomu bylo v módu jedna. To způsobuje, že jsou u kořene dvě singularity místo jedné. Při pokusech modelovat trhlinu jako ostrou špičku docházelo k tomu, že generovaná síť byla pro různé změny úhlu různě zahuštěna. To mělo vliv na poddajnost nosníku a znemožňovalo přesné určení hnací síly trhliny pro všechny směry.

V budoucnu chceme vyzkoušet různé způsoby modelování trhliny a výsledky porovnat s příklady v literatuře a reálnými experimenty, abychom získaly dobře fungující metodu pro simulaci šíření trhliny ve smíšeném módu.

7 Závěr

Ukázalo se, že úprava kvadratických prvků posunem mezilehlého uzlu blíže ke kořeni trhliny vede ve všech případech k lepšímu popisu asymptotického pole napětí v okolí kořene trhliny. Jako nejlepší metoda pro numerické určení faktoru intenzity napětí byla zvolena energetická metoda, kterou jsme aplikovali na síť z upravených kvadratických prvků. Při výpočtu samotného faktoru intenzity napětí je tato metoda, co se týče přesnosti, srovnatelná s dostupnými analytickými vzorci. Při simulování šíření trhliny v čistém módu I dává rovněž velice přesný výsledek. Byla navržena i úprava metody pro šíření trhliny ve smíšeném módu. Výsledky pro smíšený mód však nejsou v úplném souladu s naším očekáváním, Dalším cílem do budoucna je určitě najít vhodný způsob aplikování této metody, případně navrhnout pro smíšený mód jiné kritérium a výsledky porovnat s příklady v literatuře a nejlépe i s reálnými experimenty. Dále také plánujeme vyzkoušet metodu J-integrálu a porovnat jí s ostatními metodami pro určování faktoru intenzity napětí.

8 Literatura

1. IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1957, č. 24, s. 361-64.
2. GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1921, č. 221, s. 163-98.
3. JIRÁSEK, M. a J. ZEMAN. *Přetváření a porušování materiálů*. Praha: ČVUT, 2008.
4. PATZÁK, B. *OOFEM project home page* [online]. [cit. 2013-03-30]. Dostupné z: <http://www.oofem.org>
5. RYPL, D. *T3D Mesh Generator* [online]. [cit. 2013-03-30]. Dostupné z: <http://ksm.fsv.cvut.cz/~dr/t3d.html>
6. WANG, C.H. *Introduction to Fracture Mechanics*. Melbourne: DSTO Aeronautical and Maritime Research Laboratory, 1996.

7. BROEK, D. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1978. ISBN 90-286-02089.
8. CHEREPANOV, G. P. The propagation of crack in a continuous medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1967, č. 31, s. 503-12.
9. RICE, J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968, č. 35, s. 379-86.