

Metoda konečných diferencí



Tato prezentace byla vytvořena na základě podpory grantu
FRVŠ 1249/2013

Obsah

- Rovnice vedení tepla
 - Explicitní schéma
 - Implicitní schéma
- Rovnice struny

Obsah

- Rovnice vedení tepla
 - Explicitní schéma
 - Implicitní schéma
- Rovnice struny

Nestacionární vedení tepla v 1D

Nestacionární vedení tepla můžeme popsat rovnicemi

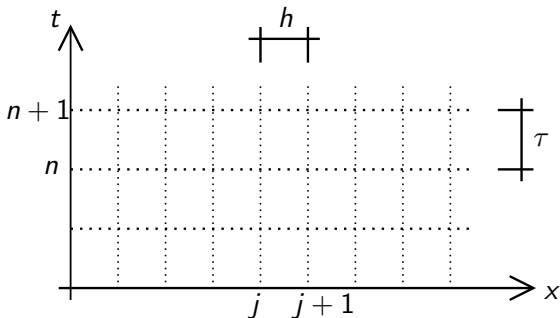
$$u_t = u_{xx}, \quad \forall t > 0, x \in (0, 1) \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad (3)$$

Aproximujeme hledanou funkci u v bodě (x_j, t_n) :

$$u(x_j, t_n) \approx U_j^n. \quad (4)$$



Obrázek: Schéma výpočetní sítě pro nestacionární úlohu tepla v 1D

Explicitní schéma

Nahradíme derivace podílem diferencí

$$u_{,t}(x_j, t_n) \approx \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{h}, \quad (5)$$
$$u_{,xx}(x_j, t_n) \approx \frac{u(x_j + h, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_j - h, t_n)}{h^2}.$$

Diferenční rovnice

Dostaneme diferenční rovnici

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}, \quad (6)$$

kteřou po zavedení $\mu = \tau/h^2$ můžeme přepsat do následujícího tvaru, vhodného pro výpočet

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \mu(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n). \quad (7)$$

Chyba diskretizace

Taylorův rozvoj.

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + u_{,t}(x, t)\tau + \frac{1}{2}u_{,tt}(x, \eta)\tau^2, \quad \eta \in (t, t + \tau),$$

$$u(x + h, t) = u(x, t) + u_{,x}(x, t)h + \frac{1}{2}u_{,xx}(x, t)h^2 + \frac{1}{6}u_{,xxx}(x, t)h^3 + \quad (8)$$
$$\frac{1}{24}u_{,xxxx}(\xi, t)h^4, \quad \xi \in (x - h, x + h).$$

Za předpokladu dostatečné hladkosti počáteční podmínky a její konzistence s okrajovými podmínkami existují konstanty M_1, M_2 tak, že

$$|u_{,tt}| \leq M_1, \quad |u_{,xxxx}| \leq M_2$$

$$|\varepsilon_{h,\tau}(x, t)| \leq \frac{M_1}{2}\tau + \frac{M_2}{12}h^2 = \frac{\tau}{2} \left[M_1 + \frac{1}{6\mu} M_2 \right]. \quad (9)$$

Pro pevný poměr časového a prostorového kroku μ je explicitní schéma prvního řádu přesnosti.

Analýza stability

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} \quad (10)$$

dosadíme $U_j^n = e^{ikjh} \lambda^n$ a po vydělení $e^{ikjh} \lambda^n$ dostáváme

$$\lambda - 1 = \mu \underbrace{e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}}_{-4 \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)} \quad (11)$$

Podmínka stability

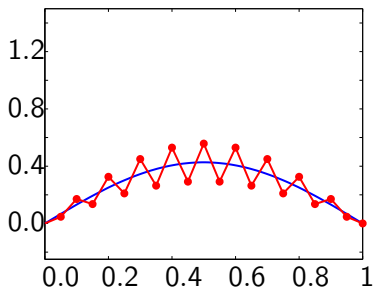
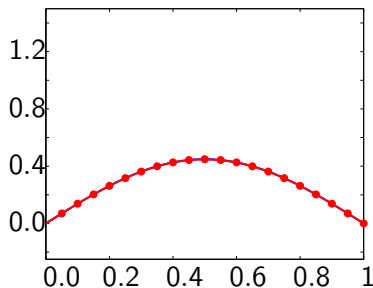
$$\lambda = 1 - 4\mu \sin^2 \left(\frac{kh}{2} \right) \quad (12)$$

Podmínka stability

$$|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \mu \leq \frac{1}{2} \quad (13)$$

$$\tau \leq \frac{h^2}{2} \quad (14)$$

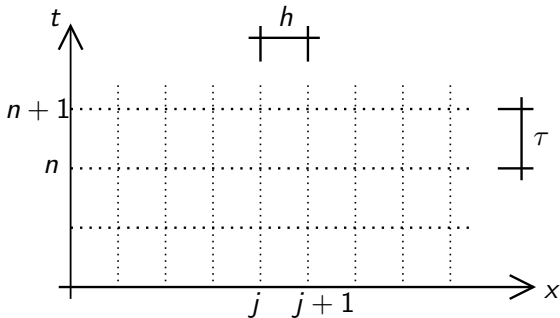
Příklad



Obrázek: Porovnání přesného (modrá čára) a přibližného (červená čára). Vlevo je časový krok $\tau = 0.0012$, vpravo $\tau = 0.0013$

Implicitní schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} \quad (15)$$



Obrázek: Schéma výpočetní sítě pro nestacionární úlohu tepla v 1D

Analýza stability

Dosadíme do implicitního schématu $U_j^n = e^{ikjh} \lambda^n$, čímž dostaneme

$$-\mu e^{ik(j-1)h} \lambda^{n+1} + (1 + 2\mu) e^{ikjh} \lambda^{n+1} - \mu e^{ik(j+1)h} \lambda^{n+1} = e^{ikjh} \lambda^n, \quad (16)$$

po vydělení $e^{ikjh} \lambda^n$ máme

$$\lambda(-\mu e^{-ikh} + (1 + 2\mu) - \mu e^{ikh}) = 1. \quad (17)$$

Podmínka stability

Po úpravách dostáváme

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2}}. \quad (18)$$

Protože výraz $1 + 4\mu \sin^2 \frac{kh}{2}$ je vždy větší nebo roven nule, leží pro libovolné $\mu > 0$ amplifikační faktor $\lambda \in (0, 1)$. Implicitní schéma je stabilní nezávisle na volbě τ a h . V takovém případě říkáme, že je schéma nepodmíněně stabilní.

Chyba diskretizace je stejná jako u explicitního schématu.

Vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (19)$$

Použijeme centrální diference na časovou i prostorovou derivaci

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{\tau^2} \quad (21)$$

Nakonec dostáváme

$$\frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}, \quad (22)$$

ze které můžeme vyjádřit U_j^{n+1}

$$U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_j^{n-1} + (\mu)^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (23)$$

Chyba diskretizace

Pro odvození chyby diskretizace použijeme Taylorův rozvoj:

$$u_{,tt} + \frac{1}{12}\tau^2 u_{,tttt} + \dots = a^2 \left(u_{,xx} + \frac{1}{12}h^2 u_{,xxxx} + \dots \right) \quad (24)$$

Vidíme, že je metoda druhého řádu přesnosti v prostorové a časové proměnné.

Analýza stability

Dosadíme

$$U_j^n = e^{ikjh} \lambda^n, \quad (25)$$

po úpravách dostáváme

$$\lambda^2 = \left(2 + e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}\right) \lambda + 1 \quad (26)$$

Nakonec vychází rovnice, ze které spočítáme amplifikační faktor

$$\lambda^2 = \left(2 - 4\mu^2 \sin^2 \frac{kh}{2}\right) \lambda + 1, \quad (27)$$

kde jsme podíl $\frac{a\tau}{h}$ označili μ . Kořeny této kvadratické rovnice mají tvar

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad \text{kde} \quad \alpha = 1 - 2\mu^2 \sin^2 \frac{kh}{2}, \quad (28)$$

kde $\alpha = 1 - 2\mu \sin^2 \left(\frac{kh}{2}\right)$.

Podmínka stability

Pro $\alpha > 1$ bude absolutní hodnota alespoň jednoho kořene kvadratické rovnice větší než jedna. Pokud vezmeme $|\alpha| \leq 1$, amplifikační faktory budou komplexní čísla

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\sqrt{1 - \alpha^2} \quad (29)$$

o velikosti

$$|\lambda_{1,2}|^2 = |\alpha|^2 \pm |1 - \alpha^2| = 1, \quad (30)$$

z čehož plyne, že schéma je podmíněně stabilní s podmínkou stability

$$-1 \leq \alpha \leq 1 \quad (31)$$

neboli

$$0 \leq \frac{a\tau}{h} \leq 1 \quad (32)$$

Levá nerovnost je splněna pro $a \geq 0$. Pokud definujeme rychlost numerického schématu jako $a_n = h/\tau$, podmínka stability říká, že rychlost numerického schématu musí být větší než nebo stejná jako skutečná rychlost a .