Variační přístup k popisu obecně zatíženého pružného prutu

Autor: Evžen Korec

Škola: ČVUT, Fakulta stavební, Katedra mechaniky

Vedoucí práce:
prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Praha 2018

Obsah

1 Úvod

Cílem této práce je variační odvození modelu pružného,obecně zatíženého prutu na základě níže uvedeného pole deformací, ve kterém je deplanační funkce $\psi(y,z)$ násobena neznámou funkcí $\chi(x)$. Uvažujeme, že prut popisujeme kartézským pravotočivým souřadným systémem a osa x je ztotožněna se střednicí prutu.

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_s(x) + z\varphi_y(x) - y\varphi_z(x) + \chi(x)\psi(y,z) \\ v(x,y,z) &= v_s(x) - z\varphi_x(x), \\ w(x,y,z) &= w_s(x) + y\varphi_x(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Zavedení neznámé funkce χ, která umožňuje, aby míra deplanace byla po délce libovolná, představuje rozdíl oproti klasickým modelům (např. Vlasovově modelu), které zavádějí předpoklad, že míra deplanace je úměrná $\varphi_x'(x)$, kde derivací je myšlena derivace podle proměnné x. Kromě této odlišnosti je formulace pole deformace volena standardně v souladu s [1, str.127], předpokládáme tedy, že ve směru osy x se prut může prodloužit jako celek, může se deformovat ohybem okolo osy y i z a vlivem kroucení může také ve směru osy x deplanovat. Posuny $v(x,y,z)$ a $w(x,y,z)$ ve směru os y a z předpokládáme takové, že průřez prutu se vlivem kroucení pootočí jako tuhý celek. Dále uvažujeme standardní předpoklady prutové teorie ve smyslu [1, str.93-94], tedy "malé"deformace, dostatečnou délku prutu, která je výrazně větší než rozměry průřezu atd. Složky napětí σ_y,σ_z, τ_{yz} a deformace ε_y,ε_z a γ_{yz} zanedbáváme. Dále uvažujeme, že prut má přímou střednici a jeho koncové průřezy jsou na ni kolmé. V textu bude uvážen případ prutu s proměnnou tuhostí po délce prutu (závislé na souřadnici x) i případ prutu s konstantní tuhostí. Za účelem odvození výše popsaného prutového modelu, tedy sestavení diferenciálních rovnic popisujících model, využijeme varianční principy, a to nejdříve Lagrangeův princip minima potenciální energie a dále Hellingerův-Reissnerův variační princip.

2 Odvození modelu pomocí Lagrangeova principu minima potenciální energie

Uvažujeme pole deformace ve tvaru

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_s(x) + z\varphi_y(x) - y\varphi_z(x) + \chi(x)\psi(y,z) \\ v(x,y,z) &= v_s(x) - z\varphi_x(x), \\ w(x,y,z) &= w_s(x) + y\varphi_x(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Dále pole deformací zapišme maticově ve tvaru

$$\begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & \psi(y,z) \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s(x) \\ v_s(x) \\ w_s(x) \\ \varphi_x(x) \\ \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Výraz zapíšeme jako

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x), \tag{4}$$

kde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dále zapišme

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x(\mathbf{x}) \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) \\ \gamma_{xz}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Nyní rozdělme předchozí výraz na součet dvou výrazů, kde v jednom se objeví pouze derivace podle proměnné x a druhém pouze derivace podle proměnných y a z, což s výhodou využijeme při dimenzionální redukci problému

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(\mathbf{x}) \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) \\ \gamma_{xz}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Získanou rovnost zapišme jako

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\partial_y}\mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{7}$$

Po dosazení výrazu (4) dostáváme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{d}(x) + \boldsymbol{\partial_y}\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x)\\ &= \mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}'(x) + \boldsymbol{B}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x),\end{aligned} \tag{8}$$

kde

$$\boldsymbol{B}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\partial_y}\mathbf{N}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \dfrac{\partial}{\partial y}\psi(y,z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z}\psi(y,z) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Nyní zapišme funkcionál potenciální energie, který uvažujme ve tvaru

$$E_{pot}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x})\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V - \int_V \mathbf{b}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V - \int_{S_t} \mathbf{t}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S, \tag{10}$$

kde

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} b_x(\mathbf{x}) \\ b_y(\mathbf{x}) \\ b_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} t_x(\mathbf{x}) \\ t_y(\mathbf{x}) \\ t_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}.$$

Označme

$$E_{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x})\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V, \tag{11}$$

$$E_{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = -\int_V \mathbf{b}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V - \int_{S_t} \mathbf{t}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S. \tag{12}$$

Platí tedy

$$E_{pot}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = E_{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + E_{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x})). \tag{13}$$

Nyní vyjádřeme E_{int} v závislosti na uvažovaných veličinách pole posunutí (3). Za tímto účelem dosadíme tedy (8) do funkcionálu (11) a dostáváme

$$\begin{aligned}E_{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}'(x) + \boldsymbol{B}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x))^T\mathbf{D}(\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}'(x) + \boldsymbol{B}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x))\,\mathrm{d}V\\ &= \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{d}'^T(x)\mathbf{N}^T(\mathbf{y}) + \mathbf{d}^T(x)\boldsymbol{B}^T(\mathbf{y}))\mathbf{D}(\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}'(x) + \boldsymbol{B}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x))\,\mathrm{d}V\\ &= \frac{1}{2}\int_V \mathbf{d}'^T(x)\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}'(x)\,\mathrm{d}V + \int_V \mathbf{d}'^T(x)\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x)\,\mathrm{d}V\\ &+ \frac{1}{2}\int_V \mathbf{d}^T(x)\mathbf{B}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x)\,\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{14}$$

Po rozdělení objemového integrálu na integrál po délce a integrál přes průřez prutu dostáváme

$$E_{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}\int_0^L \mathbf{d}'^T(x)\left(\int_A \mathbf{N}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{N}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}A\right)\mathbf{d}'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^L \mathbf{d}'^T(x)\left(\int_A \mathbf{N}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}A\right)\mathbf{d}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^L \mathbf{d}^T(x)\left(\int_A \mathbf{B}^T(\mathbf{y})\mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}A\right)\mathbf{d}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{15}$$

což můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} E_{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = &\frac{1}{2}\int_0^L \mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_{II}\mathbf{d}'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^L \mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_I\mathbf{d}(x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^L \mathbf{d}^T(x)\mathbf{A}_0\mathbf{d}(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{16}$$

Nyní vyjádřeme E_{ext} v závislosti na uvažovaných veličinách pole posunutí (3). Podobně jako v předchozím případě dosaďme (4) do funkcionálu (12). Dostáváme

$$\begin{aligned} E_{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= -\int_V \mathbf{b}^T(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x)\,\mathrm{d}V - \int_{S_t} \mathbf{t}^T(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x)\,\mathrm{d}S \\ &= -\int_0^L \left(\int_A \mathbf{b}^T(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}A\right)\mathbf{d}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^L \left(\int_\Gamma \mathbf{t}^T(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}s\right)\mathbf{d}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{S_0} \mathbf{t}^T(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}(0)\,\mathrm{d}S - \int_{S_L} \mathbf{t}^T(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}(L)\,\mathrm{d}S \\ &= -\int_0^L \mathbf{f}^T(x)\mathbf{d}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{S_0} \mathbf{t}^T(0,\mathbf{y})\mathbf{N}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S\,\mathbf{d}(0) - \int_{S_L} \mathbf{t}^T(L,\mathbf{y})\mathbf{N}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S\,\mathbf{d}(L). \end{aligned} \tag{17}$$

Nyní nalezněme první variace funkcionálu podle všech složek vektoru $\mathbf{d}(x)$. Za účelem přehlednosti nalezněme nejdříve první variace E_{int} a následně E_{ext}. Kompaktně můžeme zapsat

$$\begin{aligned} \delta E_{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\delta u}(\mathbf{x})) = &\frac{1}{2}\int_0^L \left(\mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_{II}\boldsymbol{\delta d}'(x) + \boldsymbol{\delta d}'^T(x)\mathbf{A}_{II}\boldsymbol{d}'(x)\right)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^L \left(\mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_I\boldsymbol{\delta d}(x) + \boldsymbol{\delta d}'^T(x)\mathbf{A}_I\boldsymbol{d}(x)\right)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^L \left(\mathbf{d}^T(x)\mathbf{A}_0\boldsymbol{\delta d}(x) + \boldsymbol{\delta d}^T(x)\mathbf{A}_0\boldsymbol{d}(x)\right)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{18}$$

Vzhledem k symetrii matic $\mathbf{A}_{II}$ a $\mathbf{A}_0$ můžeme zapsat

$$\begin{aligned} \delta E_{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\delta u}(\mathbf{x})) = &\int_0^L \mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_{II}\boldsymbol{\delta d}'(x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^L \left(\mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_I\boldsymbol{\delta d}(x) + \mathbf{d}^T(x)\mathbf{A}_I^T\boldsymbol{\delta d}'(x)\right)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^L \mathbf{d}^T(x)\mathbf{A}_0\boldsymbol{\delta d}(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{19}$$

Po úpravě integrálů metodou per partes dostáváme

$$\begin{aligned}\delta E_{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\delta u}(\mathbf{x})) = &-\int_0^L \mathbf{d}''^T(x)\mathbf{A}_{II}\boldsymbol{\delta d}(x)\,\mathrm{d}x+\\ &+\left[\mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_{II}\boldsymbol{\delta d}(x)\right]_0^L+\left[\mathbf{d}^T(x)\mathbf{A}_I^T\boldsymbol{\delta d}(x)\right]_0^L+\\ &+\int_0^L\left(\mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_I\boldsymbol{\delta d}(x)-\mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_I^T\boldsymbol{\delta d}(x)\right)\,\mathrm{d}x\\ &+\int_0^L \mathbf{d}^T(x)\mathbf{A}_0\boldsymbol{\delta d}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\delta E_{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\delta u}(\mathbf{x})) = &-\int_0^L \mathbf{f}^T(x)\boldsymbol{\delta d}(x)\,\mathrm{d}x\\ &-\int_{S_0}\mathbf{t}^T(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{y})\boldsymbol{\delta d}(0)\,\mathrm{d}S-\int_{S_L}\mathbf{t}^T(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{y})\boldsymbol{\delta d}(L)\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{21}$$

Z podmínky stacionarity Lagrangeova funkcionálu potenciální energie tedy vyplývá

$$-\mathbf{d}''^T(x)\mathbf{A}_{II}+\mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_I-\mathbf{d}'^T(x)\mathbf{A}_I^T+\mathbf{d}^T(x)\mathbf{A}_0=\mathbf{f}^T(x), \tag{22}$$

$$-\mathbf{A}_{II}^T\mathbf{d}''(x)+\mathbf{A}_I^T\mathbf{d}'(x)-\mathbf{A}_I\mathbf{d}'(x)+\mathbf{A}_0^T\mathbf{d}(x)=\mathbf{f}(x), \tag{23}$$

$$-\mathbf{A}_{II}\mathbf{d}''(x)-(\mathbf{A}_I-\mathbf{A}_I^T)\mathbf{d}'(x)+\mathbf{A}_0\mathbf{d}(x)=\mathbf{f}(x), \tag{24}$$

$$\boldsymbol{K_x}\mathbf{d}(x)=\mathbf{f}(x), \tag{25}$$

kde

$$\mathbf{d}''(x)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathbf{d}(x). \tag{26}$$

Dále musí platit okrajové podmínky

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{II}^T\mathbf{d}'(0)+\mathbf{A}_I\mathbf{d}(0)&=\left(\int_{S_0}\mathbf{t}^T(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S\right)^T,\\ \mathbf{A}_{II}^T\mathbf{d}'(L)+\mathbf{A}_I\mathbf{d}(L)&=-\left(\int_{S_L}\mathbf{t}^T(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S\right)^T.\end{aligned} \tag{27}$$

Vzhledem k symetrii matice $\mathbf{A}_{II}$ můžeme zapsat

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{II}\mathbf{d}'(0)+\mathbf{A}_I\mathbf{d}(0)&=\int_{S_0}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\mathbf{t}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S,\\ \mathbf{A}_{II}\mathbf{d}'(L)+\mathbf{A}_I\mathbf{d}(L)&=-\int_{S_L}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\mathbf{t}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{28}$$

Na následujících dvou stranách jsou uvedeny prvky matic $\mathbf{A}_{II}$ a $\mathbf{A}_I-\mathbf{A}_I^T$ a $\mathbf{A}_0$. Na základě těchto matic sestavme v souladu s 24 matici $\boldsymbol{K}_x$, která vyjadřuje "levé strany" diferenciálních rovnic popisujících náš prutový model. Prvky matice $\boldsymbol{K}_x$ uveďme v 32. Abychom $\boldsymbol{K}_x$ trochu zjednodušili, můžeme uvažovat použití centrálního a navíc hlavního souřadného systému a zanedbat tedy prvky matice násobené statickými momenty či deviačním momentem. V hlavním centrálním souřadném systému platí $S_y = \int_A z \, \mathrm{d}A = 0$, $S_z = \int_A y \, \mathrm{d}A = 0$ a deviační moment $D_{yz} = \int_A yz \, \mathrm{d}A = 0$.

$$
\mathbf{A}_{II} = \begin{pmatrix}
EA & 0 & 0 & 0 & E\int_A z\,\mathrm{d}A & -E\int_A y\,\mathrm{d}A & E\int_A \psi\,\mathrm{d}A \\
0 & GA & 0 & -G\int_A z\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & GA & G\int_A y\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 \\
0 & -G\int_A z\,\mathrm{d}A & G\int_A y\,\mathrm{d}A & G\int_A y^2+z^2\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 \\
E\int_A z\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 & E\int_A z^2\,\mathrm{d}A & -E\int_A yz\,\mathrm{d}A & E\int_A \psi z\,\mathrm{d}A \\
-E\int_A y\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 & -E\int_A yz\,\mathrm{d}A & E\int_A y^2\,\mathrm{d}A & -E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A \\
E\int_A \psi\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 & E\int_A \psi z\,\mathrm{d}A & -E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A & E\int_A \psi^2\,\mathrm{d}A
\end{pmatrix} \tag{29}
$$

$$
\mathbf{A}_I - \mathbf{A}_I^T = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GA & G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A \\
0 & 0 & 0 & 0 & GA & 0 & G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A \\
0 & 0 & 0 & 0 & G\int_A y\,\mathrm{d}A & G\int_A z\,\mathrm{d}A & G\int_A \psi_{,z}y-\psi_{,y}z\,\mathrm{d}A \\
0 & 0 & -GA & -G\int_A y\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 \\
0 & GA & 0 & -G\int_A z\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 \\
0 & -G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A & -G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A & G\int_A -\psi_{,z}y+\psi_{,y}z\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{30}
$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & GA & 0 & G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GA & -G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A & -G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A & G\int_A \psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2\,\mathrm{d}A \end{pmatrix} \tag{31}$$

Nyní zapišme prvky matice $\boldsymbol{K_x}$

$$\begin{pmatrix}
-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}EA & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A z\,\mathrm{d}A & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A y\,\mathrm{d}A & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi\,\mathrm{d}A \\
0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}GA & 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G\int_A z\,\mathrm{d}A & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}GA & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A \\
0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}GA & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G\int_A y\,\mathrm{d}A & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}GA & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A \\
0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G\int_A z\,\mathrm{d}A & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G\int_A y\,\mathrm{d}A & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G\int_A \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}A & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A y\,\mathrm{d}A & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A z\,\mathrm{d}A & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,y}z-\psi_{,z}y\,\mathrm{d}A \\
-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A z\,\mathrm{d}A & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}GA & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A y\,\mathrm{d}A & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A z^2\,\mathrm{d}A+GA & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A yz\,\mathrm{d}A & G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi z\,\mathrm{d}A \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A y\,\mathrm{d}A & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}GA & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A z\,\mathrm{d}A & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A yz\,\mathrm{d}A & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A y^2\,\mathrm{d}A+GA & -G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A \\
-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi\,\mathrm{d}A & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,z}y-\psi_{,y}z\,\mathrm{d}A & G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi z\,\mathrm{d}A & -G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi^2\,\mathrm{d}A+G\int_A \psi_{,y}^2\,\mathrm{d}A+G\int_A \psi_{,z}^2\,\mathrm{d}A
\end{pmatrix} \tag{32}$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme použití centrálního a navíc hlavního souřadného systému, platí, že statické momenty $S_y = \int_A z\,\mathrm{d}A = 0$, $S_z = \int_A y\,\mathrm{d}A = 0$ a deviační moment $D_{yz} = \int_A yz\,\mathrm{d}A = 0$, matice $\boldsymbol{K}(x)$ se tedy zjednoduší na tvar níže.

$$\begin{pmatrix}
-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi\,\mathrm{d}A \\
0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}GA & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}GA & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A \\
0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}GA & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}GA & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A \\
0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G\int_A \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}A & 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,y}z-\psi_{,z}y\,\mathrm{d}A \\
0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}GA & 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A z^2\,\mathrm{d}A+GA & 0 & G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi z\,\mathrm{d}A \\
0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}GA & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A y^2\,\mathrm{d}A+GA & -G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A \\
-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi\,\mathrm{d}A & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G\int_A \psi_{,z}y-\psi_{,y}z\,\mathrm{d}A & G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi z\,\mathrm{d}A & -G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E\int_A \psi^2\,\mathrm{d}A+G\int_A \psi_{,y}^2\,\mathrm{d}A+G\int_A \psi_{,z}^2\,\mathrm{d}A
\end{pmatrix} \tag{33}$$

3 Vnitřní síly na prutu

V této kapitole identifikujme vnitřní síly síly, které na prutu působí v souladu s modelem, který jsme pomocí Lagrangeova principu odvodili v předchozí kapitole. Za tímto účelem nejdříve zapišme pole přetvoření našeho modelu, které dostaneme tak, že dosadíme naše předpoklady o poli deformací 2 do vztahu pro výpočet pole přetvoření z pole deformace dle 5 nebo 6. Poté zapišme pole přetvoření reprezentované sloupcovou maticí $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ jako součin matice $\boldsymbol{N_\varepsilon}$ a vektoru $\boldsymbol{e}(x)$, kde v $\boldsymbol{N_\varepsilon}$ se vyskytují pouze konstanty a funkce závislé na souřadnicích y a z a sloupcová matice $\boldsymbol{e}(x)$ obsahuje funkce závislé na proměnné x a derivace podle proměnné x.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N_\varepsilon e}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \psi_{,y} \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \psi_{,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s' \\ v_s' - \varphi_z \\ w_s' + \varphi_y \\ \varphi_x' \\ \varphi_y' \\ \varphi_z' \\ \chi' \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Složky $\boldsymbol{e}(x)$ budeme chápat jako jisté deformační veličiny na úrovni průřezu, se kterými jsou sdruženy jisté vnitřní síly, které jsou reprezentovány prvky sloupcové matice $\boldsymbol{s}(x)$, které hledáme. Za sdruženou deformační veličinou a vnitřní sílu považujeme odpovídající prvky každého ze součinů ve výrazu $\boldsymbol{s}^T(x)\boldsymbol{e}(x)$. $\boldsymbol{s}(x)$ definujeme jako takovou sloupcovou matici, že výraz pro "energii vnitřních sil"v Lagrangeově funkcionálu potenciální energie (viz 11 v kapitole 1) můžeme zapsat jako

$$E_{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x})\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_0^L \boldsymbol{s}^T(x)\boldsymbol{e}(x)\mathrm{d}x. \tag{35}$$

Za účelem zjednodušení dalšího odvození dále vyjádřeme $\boldsymbol{e}(x) = \boldsymbol{Od}(x)$, kde $\boldsymbol{O}$ je operátorová matice obsahující konstanty a derivace podle proměnné x a $\boldsymbol{d}(x)$ je již dříve zavedená sloupcová matice aproximačních funkcí závislých na proměnné x, které jsou prvky pole deformací 2.

$$
\boldsymbol{e}(x) = \begin{pmatrix} u_s' \\ v_s' - \varphi_z \\ w_s' + \varphi_y \\ \varphi_x' \\ \varphi_y' \\ \varphi_z' \\ \chi' \\ \chi \end{pmatrix} = \boldsymbol{Od}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s(x) \\ v_s(x) \\ w_s(x) \\ \varphi_x(x) \\ \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}. \tag{36}
$$

Nyní dosaďme výraz $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N_\varepsilon Od}(x)$ do výrazu 11 pro "energii vnitřních sil"

$$
\begin{aligned}
E_{int}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \frac{1}{2}\int_V \big((\boldsymbol{N_\varepsilon Od}(x))^T \mathbf{D} (\boldsymbol{N_\varepsilon Od}(x))\big)\,\mathrm{d}V = \\
&= \frac{1}{2}\int_V \big((\boldsymbol{Od}(x))^T \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D} \boldsymbol{N_\varepsilon} \mathbf{Od}(x)\big)\,\mathrm{d}V = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left((\boldsymbol{Od}(x))^T \left(\int_A \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D} \boldsymbol{N_\varepsilon}\,\mathrm{d}A\right) \mathbf{Od}(x)\right)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \boldsymbol{s}^T(x)\boldsymbol{e}(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{37}
$$

kde

$$
\boldsymbol{s}^T(x) = (\boldsymbol{Od}(x))^T \left(\int_A \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D} \boldsymbol{N_\varepsilon}\,\mathrm{d}A\right), \tag{38}
$$

cože jsme požadovali. Na následující straně je v 39 uvedena podoba matice $\int_A \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{D} \boldsymbol{N_\varepsilon}\,\mathrm{d}A$. Samotná $s(x)$ je zapsána v 40 (upozorňujeme, že matice není pro přehlednější zápis transponována).

$$
\begin{pmatrix}
EA & 0 & 0 & 0 & E\int_A z\,\mathrm{d}A & -E\int_A y\,\mathrm{d}A & E\int_A \psi\,\mathrm{d}A & 0 \\
0 & GA & 0 & -G\int_A z\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 & G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A \\
0 & 0 & GA & G\int_A y\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 & G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A \\
0 & -G\int_A z\,\mathrm{d}A & G\int_A y\,\mathrm{d}A & G\int_A (y^2+z^2)\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 & G\int_A (\psi_{,z}y-\psi_{,y}z)\,\mathrm{d}A \\
E\int_A z\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 & E\int_A z^2\,\mathrm{d}A & -E\int_A yz\,\mathrm{d}A & E\int_A \psi z\,\mathrm{d}A & 0 \\
-E\int_A y\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 & -E\int_A yz\,\mathrm{d}A & E\int_A y^2\,\mathrm{d}A & -E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A & 0 \\
E\int_A \psi\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 & E\int_A \psi z\,\mathrm{d}A & -E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A & E\int_A psi^2\,\mathrm{d}A & 0 \\
0 & G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A & G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A & G\int_A (\psi_{,z}y-\psi_{,y}z)\,\mathrm{d}A & 0 & 0 & 0 & G\int_A (\psi_{,y}^2+\psi_{,z}^2)\,\mathrm{d}A
\end{pmatrix}
\tag{39}
$$

$$
\begin{pmatrix}
-E\int_A y\,\mathrm{d}A\varphi_z' + EAu_s' + E\int_A \psi\,\mathrm{d}A\chi' + E\int_A z\,\mathrm{d}A\varphi_y' \\
-G\int_A z\,\mathrm{d}A\varphi_x' + GAv_s' + G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A\chi - GA\varphi_z \\
GAw_s' + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A\chi + GA\varphi_y + G\int_A y\,\mathrm{d}A\varphi_x' \\
G\int_A y\,\mathrm{d}Aw_s' + G\int_A y\,\mathrm{d}A\varphi_y - G\int_A z\,\mathrm{d}Av_s' + G\int_A z\,\mathrm{d}A\varphi_z + G\int_A (\psi_{,z}y-\psi_{,y}z)\,\mathrm{d}A\chi + G\int_A \left(y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}A\varphi_x' \\
E\int_A z^2\,\mathrm{d}A\varphi_y' - E\int_A yz\,\mathrm{d}A\varphi_z' + E\int_A z\,\mathrm{d}Au_s' + E\int_A \psi z\,\mathrm{d}A\chi' \\
E\int_A y^2\,\mathrm{d}A\varphi_z' - E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A\chi' - E\int_A yz\,\mathrm{d}A\varphi_y' - E\int_A y\,\mathrm{d}Au_s' \\
E\int_A \psi^2\,\mathrm{d}A\chi' - E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A\varphi_z' + E\int_A \psi\,\mathrm{d}Au_s' + E\int_A z\psi\,\mathrm{d}A\varphi_y' \\
G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}Av_s' + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}Aw_s' + G\int_A \left(\psi_{,y}^2+\psi_{,z}^2\right)\,\mathrm{d}A\chi + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A\varphi_y - G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A\varphi_z + G\int_A (\psi_{,z}y-\psi_{,y}z)\,\mathrm{d}A\varphi_x'
\end{pmatrix}
\tag{40}
$$

Protože uvažujeme použití centrálního a hlavního souřadného systému, jak jsme již dříve uvedli, uvažujeme statické momenty $S_y = \int_A z \, \mathrm{d}A = 0$, $S_z = \int_A y \, \mathrm{d}A = 0$ a deviační moment $D_{yz} = \int_A yz \, \mathrm{d}A = 0$. Výrazy pro vnitřní síly můžeme tedy zjednodušit do podoby uvedené v 41. Vidíme, že v uvedených výrazech se vyskytují známé výrazy pro vnitřní síly jako například EAu_s', který například v Mindlinově modelu [4, str.28-32] vyjadřuje normálovou sílu. Podobně můžeme ve výrazech níže vidět známé vztahy pro posouvající sílu či ohybový moment. Analogicky tak můžeme v našem modelu zavést zobecněné vnitřní síly, které značme s horním indexem χ, jakožto odkaz na náhradu χ_x za φ_x' v předpokládaném poli deformací, která je podstatou rozdílu zkoumaného modelu oproti modelům klasickým.

$$
\begin{aligned}
N^\chi &= EAu_s' + E \int_A \psi \, \mathrm{d}A\chi' \\
V_y^\chi &= GAv_s' + G \int_A \psi_{,y} \, \mathrm{d}A\chi - GA\varphi_z \\
V_z^\chi &= GAw_s' + G \int_A \psi_{,z} \, \mathrm{d}A\chi + GA\varphi_y \\
M_x^\chi &= G \int_A (\psi_{,z} y - \psi_{,y} z) \, \mathrm{d}A\chi + G \int_A \left(y^2 + z^2\right) \, \mathrm{d}A\varphi_x' \\
M_y^\chi &= E \int_A z^2 \, \mathrm{d}A\varphi_y' + E \int_A \psi z \, \mathrm{d}A\chi' \\
V_z^\chi &= E \int_A y^2 \, \mathrm{d}A\varphi_z' - E \int_A \psi y \, \mathrm{d}A\chi' \\
B^\chi &= E \int_A \psi^2 \, \mathrm{d}A\chi' - E \int_A \psi y \, \mathrm{d}A\varphi_z' + E \int_A \psi \, \mathrm{d}Au_s' + E \int_A z\psi \, \mathrm{d}A\varphi_y' + \\
&\quad + G \int_A \psi_{,y} \, \mathrm{d}Av_s' + G \int_A \psi_{,z} \, \mathrm{d}Aw_s' + G \int_A \left(\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2\right) \, \mathrm{d}A\chi + \\
&\quad + G \int_A \psi_{,z} \, \mathrm{d}A\varphi_y - G \int_A \psi_{,y} \, \mathrm{d}A\varphi_z + G \int_A (\psi_{,z} y - \psi_{,y} z) \, \mathrm{d}A\varphi_x'
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Upozorněme ještě, že s použitím zavedeného formalismu bychom snadno mohli odvodit matici $\boldsymbol{K}_x$ (viz 33)), kterou jsme již dříve odvodili jiným postupem v kapitole 1. Stačí, abychom zavedli adjugovaný operátor $\boldsymbol{O}^\star$ k operátoru $\boldsymbol{O}$, tak, že pro libovolnou reálnou sloupcovou matici $s(x)$ platí

$$
\frac{1}{2} \int_0^L \boldsymbol{s}^T(x) \left(\boldsymbol{O}\boldsymbol{d}(x)\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\boldsymbol{s}^T(x)\boldsymbol{O}^\star\right) \boldsymbol{d}(x)\mathrm{d}x. \tag{42}
$$

Nyní bychom již mohli provést variaci tohoto funkcionálu podle prvků sloupcové matice $\boldsymbol{d}(x)$

a zapsat matici K_x. Adjugovaný operátor $\boldsymbol{O}^\star$ můžeme přitom zapsat jako

$$\boldsymbol{O}^\star = \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

4 Diferenciální rovnice popisující model

V této kapitole zapišme diferenciální rovnice popisující odvozený model v souladu s odvozenými rovnicemi stacionarity Lagrangeova funkcionálu potenciální energie (soustava rovnic 33) v kapitole 1. Soustavu rovnic zapišme pro případ, kdy tuhost prutu je po průřezu proměnná a je tedy funkcí proměnné x. V kapitole 1 je sice odvození pro jednoduchost uvedeno pro případ konstantní tuhosti po délce prutu, ale kdybychom při odvození uvažovali proměnnou tuhost, mohli bychom podobným způsobem odvodit rovnice níže. Výrazy na pravé straně rovnic, které jsou specifikovány v 45, představují odpovídající měrné spojité zatížení prutu vztažené k jeho střednici.

$$
\begin{aligned}
-\left(EAu_s'\right)' - \left(E\int_A \psi \,\mathrm{d}A\chi'\right)' &= n^\chi(x)\\
-\left(GA(v_s' - \varphi_z)\right)' - \left(G\int_A \psi_{,y} \,\mathrm{d}A\chi\right)' &= v_y^\chi(x)\\
-\left(GA(w_s' + \varphi_y)\right)' - \left(G\int_A \psi_{,z} \,\mathrm{d}A\chi\right)' &= v_z^\chi(x)\\
-\left(G\int_A (\psi_{,z}y - \psi_{,y}z) \,\mathrm{d}A\chi\right)' - \left(G\int_A \left(y^2+z^2\right) \,\mathrm{d}A\varphi_x'\right)' &= m_x^\chi(x)\\
-\left(E\int_A z^2 \,\mathrm{d}A\varphi_y'\right)' - \left(E\int_A \psi z \,\mathrm{d}A\chi'\right)' + GA(w_s'+\varphi_y) + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A\chi &= m_y^\chi(x)\\
-\left(E\int_A y^2 \,\mathrm{d}A\varphi_z'\right)' + \left(E\int_A \psi y \,\mathrm{d}A\chi'\right)' - GA(v_s'-\varphi_z) - G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A\chi &= m_z^\chi(x)\\
-\left(E\int_A \psi \,\mathrm{d}Au_s'\right)' - \left(E\int_A z\psi \,\mathrm{d}A\varphi_y'\right)' + \left(E\int_A \psi y \,\mathrm{d}A\varphi_z'\right)' - \left(E\int_A \psi^2 \,\mathrm{d}A\chi'\right)' &+\\
+G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}Av_s' + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}Aw_s' + G\int_A (\psi_{,z}y-\psi_{,y}z)\,\mathrm{d}A\varphi_x' + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A\varphi_y &+\\
-G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A\varphi_z + G\int_A \left(\psi_{,y}^2+\psi_{,z}^2\right)\,\mathrm{d}A\chi &= b^\chi(x)
\end{aligned}
\tag{44}
$$

$$
\begin{aligned}
n^{\chi}(x) &= \int_A b_x \,\mathrm{d}A + \int_\Gamma t_x \,\mathrm{d}A \\
v_y^{\chi}(x) &= \int_A b_y \,\mathrm{d}A + \int_\Gamma t_y \,\mathrm{d}A \\
v_z^{\chi}(x) &= \int_A b_z \,\mathrm{d}A + \int_\Gamma t_z \,\mathrm{d}A \\
m_x^{\chi}(x) &= -\int_A z b_y \,\mathrm{d}A + \int_A y b_z \,\mathrm{d}A\mathrm{d}x - \int_\Gamma z t_y \,\mathrm{d}A + \int_\Gamma y t_z \,\mathrm{d}A \\
m_y^{\chi}(x) &= \int_A z b_x \,\mathrm{d}A + \int_\Gamma z t_x \,\mathrm{d}A \\
m_z^{\chi}(x) &= -\int_A y b_x \,\mathrm{d}A - \int_\Gamma y t_x \,\mathrm{d}A \\
b^{\chi}(x) &= \int_A \psi(y,z) b_x \,\mathrm{d}A + \int_\Gamma \psi(y,z) t_x \,\mathrm{d}A
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Nyní drobně upravme soustavu rovnic 44 a zapišme ji ve tvaru 46. Označme známými symboly průřezové charakteristiky $I_y = \int_A z^2 \,\mathrm{d}A$, $I_z = \int_A y^2 \,\mathrm{d}A$, $I_p = \int_A \left(y^2 + z^2\right) \,\mathrm{d}A$. Dále opět uvažujme, že prut má po délce konstantní tuhost, která tedy není funkcí proměnné x. Zároveň požadujme, že $\int_A \psi \,\mathrm{d}A \ = 0$. To můžeme, neboť uvažujeme, že deplanační funkci $\psi(y,z)$ odvozujeme ze známé rovnice [1, str.107-108] $\boldsymbol{\Delta}\psi(y,z) = \dfrac{\partial\psi^2(y,z)}{\partial y^2} + \dfrac{\partial\psi^2(y,z)}{\partial z^2} = 0$ s okrajovou podmínkou $\dfrac{\partial\psi(y,z)}{\partial\boldsymbol{n}} = n_y z - n_z y$. Tato úloha ale nemá jednoznačné řešení. Pokud ale navíc požadujeme, aby $\int_A \psi \,\mathrm{d}A \ = 0$, existuje právě jedno řešení ψ, které splňuje Laplaceovu rovnici a příslušnou okrajovou podmínku uvedené výše. Z Lagrangeova principu minima potenciální energie také v kapitole 1 vyplynuly v soustavě 28 statické okrajové podmínky, které musí být splněny na části hranice S_t, na které nejsou předepsány posuny. Můžeme tedy zapsat statickou okrajovou podmínku v $x = 0$ a $x = L$. Protože obě podmínky jsou až na znaménko na pravé straně rovnic identické, uveďme pouze podmínku v $x = 0$. Statické okrajové podmínky jsou pak doplněny geometrickými okrajovými podmínkami na S_u, tedy té části hranice, na které jsou předepsány posuny. Geometrické okrajové podmínky při odvození našeho modelu pomocí Lagrangeova principu zavádíme jakožto předpoklady.

$$
\begin{aligned}
-EAu_s'' &= f_x(x) \\
-GA(v_s' - \varphi_z)' - G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A\chi' &= f_y(x) \\
-GA(w_s' + \varphi_y)' - G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A\chi' &= f_z(x) \\
-G\int_A (\psi_{,z}y - \psi_{,y}z)\,\mathrm{d}A\chi' - GI_p\varphi_x'' &= m_x(x) \\
-EI_y\varphi_y'' - E\int_A \psi z\,\mathrm{d}A\chi'' + GA(w_s' + \varphi_y) + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A\chi &= m_y(x) \\
-EI_z\varphi_z'' + E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A\chi'' - GA(v_s' - \varphi_z) - G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A\chi &= m_z(x) \\
-E\int_A \psi\,\mathrm{d}Au_s'' - E\int_A z\psi\,\mathrm{d}A\varphi_y'' + E\int_A \psi y\,\mathrm{d}A\varphi_z'' - E\int_A \psi^2\,\mathrm{d}A\chi'' + & \\
+G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}Av_s' + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}Aw_s' + G\int_A (\psi_{,z}y - \psi_{,y}z)\,\mathrm{d}A\varphi_x' + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A\varphi_y + & \\
-G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A\varphi_z + G\int_A \left(\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2\right)\,\mathrm{d}A\chi &= b(x)
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
EAu_s'(0) &= \int_{S_0} t_x\,\mathrm{d}A = N^\chi(0) \\
G\int_A \frac{\partial\psi(y,z)}{\partial y}\,\mathrm{d}A\chi(0) + GAv_s'(0) - GA\varphi_z(0) &= \int_{S_0} t_y\,\mathrm{d}A = V_y^\chi(0) \\
G\int_A \frac{\partial\psi(y,z)}{\partial z}\,\mathrm{d}A\chi(0) + GAw_s'(0) + GA\varphi_y(0) &= \int_{S_0} t_z\,\mathrm{d}A = V_z^\chi(0) \\
G\left(\int_A y\frac{\partial\psi(y,z)}{\partial z} - z\frac{\partial\psi(y,z)}{\partial y}\,\mathrm{d}A\right)\chi(0) + G(I_y + I_z)\varphi_x'(0) &= -\int_{S_0} zt_y\,\mathrm{d}A + \int_{S_0} yt_z\,\mathrm{d}A = M_x^\chi(0) \\
E\int_A z\psi(y,z)\,\mathrm{d}A\chi'(0) + EI_y\varphi_y'(x) &= \int_{S_0} zt_x\,\mathrm{d}A = M(0) \\
-E\int_A y\psi(y,z)\,\mathrm{d}A\chi'(0) + EI_z\varphi_z'(x) &= -\int_{S_0} yt_x\,\mathrm{d}A = M_z^\chi(0) \\
-E\int_A y\psi(y,z)\,\mathrm{d}A\varphi_z'(0) + E\int_A z\psi(y,z)\,\mathrm{d}A\varphi_y'(0) + E\int_A \psi^2(y,z)\chi'(x) &= \\
&= \int_{S_0} \psi(y,z)t_x\,\mathrm{d}A = B^\chi(0)
\end{aligned}
\tag{47}
$$

5 Redukce rovnic modelu pro různé typy průřezů

Soustava diferenciálních rovnic 46 popisující náš model obsahuje sedm diferenciálních rovnic a sedm neznámých funkcí. Oproti obdobným soustavám klasických modelů je ale nevýhodná v tom smyslu, že všechny rovnice až na první jsou propojeny prostřednictvím neznámé funkce χ, přičemž jejich okrajové podmínky jsou prostřednictvím funkce χ také propojeny. Rovnice tedy nemůžeme v obecném případě řešit samostatně, ale musíme použít metody pro řešení soustav diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami. V jistých specifických případech, například pro průřezy vykazující symetrii či tenkostěnné průřezy, se soustava 46 zjednoduší, jak se pokusíme demonstrovat na příkladech níže. Připomeňme, že uvažujeme tvar deplanační funkce $\psi(y, z)$ jakožto řešení známé Laplaceovy rovnice [1, str.107-108], jak bylo rozebráno v minulé kapitole.

5.1 Kruhový průřez

V tomto případě průřez nedeplanuje, viz [1, kap 2.1.2] Platí tedy, že $\psi(y, z) = 0$. Soustavu 46 tedy můžeme redukovat na soustavu 48 uvedenou níže. Protože musí zároveň platit $b(x) = \int_A \psi(y, z) b_x \,\mathrm{d}A + \int_\Gamma \psi(y, z) t_x \,\mathrm{d}A = 0$, je poslední rovnice v 48 identicky splněna.

$$\begin{aligned}
-EAu_s'' &= f_x(x) \\
-GA(v_s' - \varphi_z)' &= f_y(x) \\
-GA(w_s' + \varphi_y)' &= f_z(x) \\
-GI_p\varphi_x'' &= m_x(x) \\
-EI_y\varphi_y'' + GA(w_s' + \varphi_y) &= m_y(x) \\
-EI_z\varphi_z'' - GA(v_s' - \varphi_z) &= m_z(x) \\
0 &= b(x)
\end{aligned} \tag{48}$$

5.2 Obdélníkový průřez

V tomto případě můžeme deplanační funkci vyjádřit řadou podle [1, str.116]

$$
\begin{aligned}
-EAu_s'' &= f_x(x) \\
-GA(v_s' - \varphi_z)' &= f_y(x) \\
-GA(w_s' + \varphi_y)' &= f_z(x) \\
-G \int_A (\psi_{,z} y - \psi_{,y} z) \,\mathrm{d}A \chi' - GI_p \varphi_x'' &= m_x(x) \\
-EI_y \varphi_y'' + GA(w_s' + \varphi_y) &= m_y(x) \\
-EI_z \varphi_z'' - GA(v_s' - \varphi_z) &= m_z(x) \\
-E \int_A \psi^2 \,\mathrm{d}A \chi'' + G \int_A (\psi_{,z} y - \psi_{,y} z) \,\mathrm{d}A \varphi_x' + & \\
+G \int_A \left(\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2\right) \,\mathrm{d}A \chi &= b(x)
\end{aligned} \tag{49}
$$

5.3 Průřez tvaru rovnostranného trojúhelníka

V tomto případě můžeme deplanační funkci vyjádřit vzorcem podle [3, str.224]

$$
\begin{aligned}
-EAu_s'' &= f_x(x) \\
-GA(v_s' - \varphi_z)' &= f_y(x) \\
-GA(w_s' + \varphi_y)' &= f_z(x) \\
-G \int_A (\psi_{,z} y - \psi_{,y} z) \,\mathrm{d}A \chi' - GI_p \varphi_x'' &= m_x(x) \\
-EI_y \varphi_y'' + GA(w_s' + \varphi_y) &= m_y(x) \\
-EI_z \varphi_z'' - GA(v_s' - \varphi_z) &= m_z(x) \\
-E \int_A \psi^2 \,\mathrm{d}A \chi'' + G \int_A (\psi_{,z} y - \psi_{,y} z) \,\mathrm{d}A \varphi_x' + & \\
+G \int_A \left(\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2\right) \,\mathrm{d}A \chi &= b(x)
\end{aligned} \tag{50}
$$

5.4 Tenkostěnný průřez

Pro případ tenkostěnného průřezu je deplanační funkce dle [1, str.117] přibližně rovna $-\omega(s)$, kde $\omega(s)$ je takzvané výsečové souřadnice. Pro výpočet $\omega(s)$ můžeme zvolit takový pól (tzv. hlavní pól), že $I_{\omega z} = \int_A \omega y \,\mathrm{d}A = 0$ a $I_{\omega y} = \int_A \omega z \,\mathrm{d}A = 0$, což zjednoduší soustavu 46 na tvar níže.

$$
\begin{aligned}
-EAu_s'' &= f_x(x) \\
-GA(v_s' - \varphi_z)' - G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A\chi' &= f_y(x) \\
-GA(w_s' + \varphi_y)' - G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A\chi' &= f_z(x) \\
-G\int_A (\psi_{,z}y - \psi_{,y}z)\,\mathrm{d}A\chi' - GI_p\varphi_x'' &= m_x(x) \\
-EI_y\varphi_y'' + GA(w_s' + \varphi_y) + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A\chi &= m_y(x) \\
-EI_z\varphi_z'' - GA(v_s' - \varphi_z) - G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A\chi &= m_z(x) \\
-E\int_A \psi^2\,\mathrm{d}A\chi'' + G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}Av_s' + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}Aw_s' + G\int_A (\psi_{,z}y - \psi_{,y}z)\,\mathrm{d}A\varphi_x' + G\int_A \psi_{,z}\,\mathrm{d}A\varphi_y + & \\
-G\int_A \psi_{,y}\,\mathrm{d}A\varphi_z + G\int_A \left(\psi_{,y}^2 + \psi_{,z}^2\right)\,\mathrm{d}A\chi &= b(x)
\end{aligned}
\tag{51}
$$

6 Odvození modelu pomocí Hellingerova-Reissnerova variačního principu

Model, který jsem v předchozích kapitolách odvodili za použití Lagrangeova principu minima potenciální energie naneštěstí nerespektuje skutečné rozložení smykového napětí při ohybu a kroucení prutu, o čemž se můžeme snadno přesvědčit, pokud vyjádříme například $\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial z} + \frac{\partial w(\boldsymbol{x})}{\partial x}\right) = G\left(\varphi_y(x) + \chi(x)\frac{\partial \psi(y,z)}{\partial z} + w_s'(x) + y\varphi_x'(x)\right)$. Při prostém ohybu by pro nedeplanující průřez platilo $\varphi_x'(x) = 0$ a $\psi(y,z) = 0$, takže bychom dostali $\tau_{xz} = G\left(\varphi_y(x) + w_s'(x)\right)$. V daném průřezu (tedy pro danou hodnotu x) dostáváme konstantní rozložení smykového napětí po výšce průřezu, což je ve sporu s Cauchyho rovnicemi, ze kterých dostáváme nekonstantní průběh smykového napětí [1, str.118-126]. Tento rozpor je způsoben naší volbou pole deformací ve tvaru 2, které je pro připomenutí uvedeno níže.

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= u_s(x) + z\varphi_y(x) - y\varphi_z(x) + \chi(x)\psi(y,z),\\
v(x,y,z) &= v_s(x) - z\varphi_x(x),\\
w(x,y,z) &= w_s(x) + y\varphi_x(x).
\end{aligned}$$

Pro matici tuhosti v metodě konečných prvků odvozené prostřednictvím Lagrangeova principu navíc platí, že její prvky jsou větší oproti exaktnímu řešení úlohy, takže pro dané zatížení přísluší modelu vyšší potenciální energie systému než skutečné konstrukci [2, str.276]. Očekáváme, že podobné chování vykazuje i náš model odvozený za použití Lagrangeova principu. Abychom získali model s takovým rozložením smykových napětí, které by respektovalo Cauchyho rovnice rovnováhy, odvoďme model znovu, ale tentokrát pomocí Hellingerova-Reissnerova variačního principu. Cílem odvození bude najít odpovídající korekce plochy, podobně jako v případě smykové plochy v Mindlinově modelu [4, str.30-33]. Hellingerův-Reissnerův funkcionál je ve své základní podobě definován předpisem [1, str.309]

$$\begin{aligned}
\Pi_{HR}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma}) = &\int_V \left(\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{u}^T(\mathbf{x})\overline{\boldsymbol{b}}(\mathbf{x})\right) \mathrm{d}V\\
&- \int_{S_t} \mathbf{u}^T(\mathbf{x})\overline{\mathbf{t}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S - \int_{S_u} \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{n}^T\left(\boldsymbol{u}(\mathbf{x}) - \overline{\boldsymbol{u}}(\mathbf{x})\right)\mathrm{d}S, \qquad (52)
\end{aligned}$$

kde stejně jako v dříve uvažovaném Lagrangeově funkcionálu $\overline{\boldsymbol{b}}$ představuje sloupcovou matici složek objemového zatížení, $\overline{\boldsymbol{t}}$ povrchového zatížení, $\overline{\boldsymbol{u}}$ předepsaných posunů a $\boldsymbol{n}$ je sloupcová matice průmětů normálového vektoru k povrchu tělesa do jednotlivých směrů uvažovaného kartézského souřadného systému.

$$\overline{\boldsymbol{b}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} b_x(\mathbf{x})\\ b_y(\mathbf{x})\\ b_z(\mathbf{x})\end{pmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{t}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} t_x(\mathbf{x})\\ t_y(\mathbf{x})\\ t_z(\mathbf{x})\end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{G} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_x(\mathbf{x}) \\ \tau_{xy}(\mathbf{x}) \\ \tau_{xz}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\partial} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{u}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \overline{u}(\mathbf{x}) \\ \overline{v}(\mathbf{x}) \\ \overline{w}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že aproximace pole posunů $\boldsymbol{u}(\mathbf{x})$ je volena tak, aby splňovala geometrické okrajové podmínky $\boldsymbol{u}(\mathbf{x}) = \overline{\boldsymbol{u}}(\mathbf{x})$ na S_u. Poslední integrál ve (52) tedy můžeme zanedbat. V prvním integrálu rozepíšeme zvlášť členy odpovídající normálovým a smykovým napětím. Funkcionál tedy přepíšeme do tvaru

$$\Pi_{HR}(\boldsymbol{u}, \sigma_x, \boldsymbol{\tau}) = \int_V \left(\sigma_x(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} + \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2E} \sigma_x^2(\mathbf{x}) - \frac{1}{2G} \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \right) \mathrm{d}V + \\ - \int_V \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \overline{\boldsymbol{b}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V - \int_{S_t} \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \overline{\boldsymbol{t}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}S, \tag{53}$$

kde

$$\boldsymbol{\partial}_{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Smyková napětí budeme aproximovat vhodně zvolenými funkcemi, nezávisle na aproximaci posunů a z ní vyplývající aproximaci smykových deformací. Naproti tomu pro normálové napětí zachováme aproximaci sestrojenou tak, že na normálovou deformaci odvozenou z aproximace posunů uplatníme Hookeův zákon. Dosadíme tedy $\sigma_x(\mathbf{x}) = E\partial u(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ a funkcionál přepíšeme jako

$$\Pi_{HR}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\tau}) = \int_V \left(\frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^2 + \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2G} \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \right) \mathrm{d}V + \\ - \int_V \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \overline{\boldsymbol{b}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V - \int_{S_t} \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) \overline{\boldsymbol{t}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}S. \tag{55}$$

Kdybychom v podobném duchu dosadili $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = G \boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{u}(\mathbf{x})$, dostali bychom Lagrangeův funkcionál potenciální energie. To však neuděláme, protože aproximace smykového napětí přímo odvozená ze smykové deformace je příliš hrubá a chceme ji vylepšit. Nyní zapišme pole deformací v následujícím tvaru

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v(\boldsymbol{x}) \\ w(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{N}(\mathbf{y}) \mathbf{d}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_s(x) \\ w_s(x) \\ \varphi_x(x) \\ \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}. \tag{56}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\mathbf{d}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & \psi(y,z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s(x) \\ v_s(x) \\ w_s(x) \\ \varphi_x(x) \\ \varphi_y(x) \\ \varphi_z(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \tag{57}$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\mathbf{d}(x) \tag{58}$$

a pole napětí ve tvaru

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\sigma(\mathbf{y})\mathbf{c}(x), = \begin{pmatrix} f_1(y,z) & f_2(y,z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3(y,z) & f_4(y,z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ C_3(x) \\ C_4(x) \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Zároveň zapišme

$$\boldsymbol{\partial}_{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\partial}_{y,z}u(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} u(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v(\boldsymbol{x}) \\ w(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Označme také

$$\overline{\boldsymbol{b}}_{y,z}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} b_y(\mathbf{x}) \\ b_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{t}}_{y,z}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} t_y(\mathbf{x}) \\ t_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Funkcionál nyní můžeme zapsat s využitím zavedeného značení jako

$$\begin{aligned}\Pi_{HR}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\tau}) = \int_V \left(\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x}\right)^2 + \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\partial}_{y,z}u(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{v}(\mathbf{x})\right) \mathrm{d}V + \\ - \int_V \left(\frac{1}{2G}\boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})\right) \mathrm{d}V + \\ - \int_V u(\boldsymbol{x})b_x(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T(\mathbf{x})\overline{\boldsymbol{b}}_{y,z}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V - \int_{S_t} u(\boldsymbol{x})t_x(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T(\mathbf{x})\overline{\boldsymbol{t}}_{y,z}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{61}$$

Nyní dosaďme do funkcionálu výraz $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x)$ a $u(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\mathbf{d}(x)$

$$\begin{aligned}\Pi_{HR}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\tau}) = \int_V \left(\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x}\right)^2 + \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\partial}_{y,z}\boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\mathbf{d}(x) + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x)\right) \mathrm{d}V + \\ - \int_V \left(\frac{1}{2G}\boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})\right) \mathrm{d}V + \\ - \int_V \left(\boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\mathbf{d}(x)b_x(\mathbf{x}) + (\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x))^T\,\overline{\boldsymbol{b}}_{y,z}(\mathbf{x})\right) \mathrm{d}V - \int_{S_t} \left(\boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\mathbf{d}(x)t_x(\mathbf{x}) + (\mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}(x))^T\,\overline{\boldsymbol{t}}_{y,z}(\mathbf{x})\right) \mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{62}$$

dále upravme a uvažujme, že vzhledem se skalární povaze výrazu $\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x}\right)^2$ můžeme tento výraz formálně zapsat jako $\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x}\right)^T E\left(\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x}\right)$. Zároveň dosaďme $\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\mathbf{d}(x)$ a zapišme $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{d}(x) = \mathbf{d}'(x)$

$$\begin{aligned}\Pi_{HR}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\tau}) = \int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{d}'^T(x)\boldsymbol{n}_u^T(\boldsymbol{y})E\boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\mathbf{d}'(x) + \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\partial}_{y,z}\boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\mathbf{d}(x) + \mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}'(x)\right)\,\mathrm{d}V+ \\ -\int_V \left(\frac{1}{2G}\boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})\right)\,\mathrm{d}V+ \\ -\int_V \left(\mathbf{d}^T(x)\boldsymbol{n}_u^T(\boldsymbol{y})b_x(\mathbf{x}) + \mathbf{d}^T(x)\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{b}}_{y,z}(\mathbf{x})\right)\,\mathrm{d}V - \int_{S_t}\left(\mathbf{d}^T(x)\boldsymbol{n}_u^T(\boldsymbol{y})t_x(\mathbf{x}) + \mathbf{d}^T(x)\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}_{y,z}(\mathbf{x})\right)\,\mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{63}$$

Nyní uvažujme pole napětí ve tvaru dle 59 a dosaďme do funkcionálu

$$\begin{aligned}\Pi_{HR}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\tau}) = \int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{d}'^T(x)\boldsymbol{n}_u^T(\boldsymbol{y})E\boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\mathbf{d}'(x) + \mathbf{c}^T(x)\mathbf{N}_\sigma^T(\mathbf{y})\boldsymbol{\partial}_{y,z}\boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\mathbf{d}(x) + \mathbf{N}(\mathbf{y})\mathbf{d}'(x)\right)\,\mathrm{d}V+ \\ -\int_V \left(\frac{1}{2G}\mathbf{c}^T(x)\mathbf{N}_\sigma^T(\mathbf{y})\mathbf{N}_\sigma(\mathbf{y})\mathbf{c}(x)\right)\,\mathrm{d}V+ \\ -\int_V \left(\mathbf{d}^T(x)\boldsymbol{n}_u^T(\boldsymbol{y})b_x(\mathbf{x}) + \mathbf{d}^T(x)\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{b}}_{y,z}(\mathbf{x})\right)\,\mathrm{d}V - \int_{S_t}\left(\mathbf{d}^T(x)\boldsymbol{n}_u^T(\boldsymbol{y})t_x(\mathbf{x}) + \mathbf{d}^T(x)\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}_{y,z}(\mathbf{x})\right)\,\mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{64}$$

Rozdělme objemový integrál na integrál po délce a integrál přes průřez prutu

$$\begin{aligned}\Pi_{HR}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\tau}) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{d}'^T(x)\left(\int_A \boldsymbol{n}_u^T(\boldsymbol{y})E\boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}A\right)\mathbf{d}'(x)\right)\,\mathrm{d}x+ \\ +\int_0^L \left(\mathbf{c}^T(x)\left(\int_A \mathbf{N}_\sigma^T(\mathbf{y})\boldsymbol{\partial}_{y,z}\boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}A\right)\mathbf{d}(x)\right)\,\mathrm{d}x+ \\ +\int_0^L \left(\mathbf{c}^T(x)\left(\int_A \mathbf{N}_\sigma^T(\mathbf{y})\mathbf{N}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}A\right)\mathbf{d}'(x)\right)\,\mathrm{d}x+ \\ -\int_0^L \left(\frac{1}{2G}\mathbf{c}^T(x)\left(\int_A \mathbf{N}_\sigma^T(\mathbf{y})\mathbf{N}_\sigma(\mathbf{y})\,\mathrm{d}A\right)\mathbf{c}(x)\right)\,\mathrm{d}V+ \\ -\int_0^L \mathbf{d}^T(x)\left(\int_A \mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{b}}_{y,z}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}A\right)\,\mathrm{d}x - \int_0^L \mathbf{d}^T(x)\left(\int_\Gamma \mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}_{y,z}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}x+ \\ -\int_0^L \mathbf{d}^T(x)\left(\int_A \boldsymbol{n}_u^T(\boldsymbol{y})b_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}A\right)\,\mathrm{d}x - \int_0^L \mathbf{d}^T(x)\left(\int_\Gamma \boldsymbol{n}_u^T(\boldsymbol{y})t_x(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}x+ \\ -\mathbf{d}(0)\int_{S_0}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S - \mathbf{d}(L)\int_{S_L}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}(L,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S, \\ -\mathbf{d}(0)\int_{S_0}\mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S - \mathbf{d}(L)\int_{S_L}\mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(L,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{65}$$

Nyní označme členy, které jsou integrovány přes průřez způsobem, který je patrný v zápisu níže

$$
\begin{aligned}
\Pi_{HR}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\tau}) = &\int_0^L \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{d}'^T(x)\boldsymbol{A}_{nn}\mathbf{d}'(x)\right)\,\mathrm{d}x+ \\
&+\int_0^L \left(\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma B}\mathbf{d}(x)\right)\,\mathrm{d}x+ \\
&+\int_0^L \left(\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma u}\mathbf{d}'(x)\right)\,\mathrm{d}x+ \\
&-\int_0^L \left(\frac{1}{2G}\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma\sigma}\mathbf{c}(x)\right)\,\mathrm{d}V+ \\
&-\int_0^L \mathbf{d}^T(x)\mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x+ \\
-\mathbf{d}(0)\int_{S_0}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S &- \mathbf{d}(L)\int_{S_L}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}(L,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S+ \\
-\mathbf{d}(0)\int_{S_0}\mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S &- \mathbf{d}(L)\int_{S_L}\mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(L,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Nyní proveďme variaci funkcionálu 66 podle $\mathbf{d}(x)$. Vzhledem k symetrii $\boldsymbol{A}_{nn}$ můžeme zapsat

$$
\begin{aligned}
\Pi_{HR}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\tau}) = &\int_0^L \left(\boldsymbol{d}'^T(x)\boldsymbol{A}_{nn}\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}'(x)\right)\,\mathrm{d}x+ \\
&+\int_0^L \left(\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma B}\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(x)\right)\,\mathrm{d}x+ \\
&+\int_0^L \left(\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma u}\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}'(x)\right)\,\mathrm{d}x+ \\
&-\int_0^L \left(\frac{1}{2G}\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma\sigma}\mathbf{c}(x)\right)\,\mathrm{d}V+ \\
&-\int_0^L \boldsymbol{\delta}\mathbf{d}^T(x)\mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x+ \\
-\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(0)\int_{S_0}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S &- \boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(L)\int_{S_L}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}(L,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S+, \\
-\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(0)\int_{S_0}\mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S &- \boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(L)\int_{S_L}\mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(L,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Po integraci podle metody per partes dostáváme

$$\begin{aligned}\Pi_{HR}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\tau}) = -\int_0^L \left(\boldsymbol{d}''^T(x)\boldsymbol{A}_{nn}\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(x)\right)\,\mathrm{d}x+\\ +\left[\boldsymbol{d}'^T(x)\boldsymbol{A}_{nn}\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(x)\right]_0^L+\\ +\int_0^L \left(\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma B}\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(x)\right)\,\mathrm{d}x+\\ -\int_0^L \left(\mathbf{c}'^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma u}\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(x)\right)\,\mathrm{d}x+\\ +\left[\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma u}\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(x)\right]_0^L+\\ -\int_0^L \boldsymbol{\delta}\mathbf{d}^T(x)\mathbf{f}(x)\,\mathrm{d}x+\\ -\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(0)\int_{S_0}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S-\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(L)\int_{S_L}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}(L,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S+\\ -\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(0)\int_{S_0}\mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S-\boldsymbol{\delta}\mathbf{d}(L)\int_{S_L}\mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(L,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{68}$$

Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$-\boldsymbol{d}''^T(x)\boldsymbol{A}_{nn}+\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma B}-\mathbf{c}'^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma u}=\mathbf{f}^T(x). \tag{69}$$

Protože matice $\mathbf{A}_{nn}$ je symetrická, můžeme zapsat

$$-\boldsymbol{A}_{nn}\boldsymbol{d}''(x)+\boldsymbol{A}_{\sigma B}\mathbf{c}(x)-\boldsymbol{A}_{\sigma u}\mathbf{c}'T(x)=\mathbf{f}(x), \tag{70}$$

přičemž musí platit okrajové podmínky

$$\begin{aligned}\mathbf{d}'(0)\mathbf{A}_{nn}+\mathbf{c}(0)\mathbf{A}_{\sigma u}&=\int_{S_0}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S+\int_{S_0}\mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S,\\ \mathbf{d}'(L)\mathbf{A}_{nn}+\mathbf{c}(L)\mathbf{A}_{\sigma u}&=-\int_{S_L}\mathbf{N}^T(\mathbf{y})\bar{\boldsymbol{t}}(L,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S-\int_{S_L}\mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(L,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{71}$$

Vzhledem k symetrii matice $\mathbf{A}_{nn}$ můžeme zapsat

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{nn}\mathbf{d}'(0)+\mathbf{A}_{\sigma u}^T\mathbf{c}(0)&=\int_{S_0}\bar{\boldsymbol{t}}^T(0,\mathbf{y})\mathbf{N}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S+\int_{S_0}t_x\mathbf{n}_u(\mathbf{y})(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S,\\ \mathbf{A}_{nn}\mathbf{d}'(L)+\mathbf{A}_{\sigma u}^T\mathbf{c}(L)&=-\int_{S_L}\bar{\boldsymbol{t}}^T(L,\mathbf{y})\mathbf{N}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S-\int_{S_L}t_x\mathbf{n}_u(\mathbf{y})(L,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{72}$$

Nyní proveďme variaci funkcionálu 64 podle $\boldsymbol{c}(x)$

$$\begin{aligned}\Pi_{HR}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\tau})=\int_0^L\left(\boldsymbol{\delta}\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma B}\mathbf{d}(x)\right)\,\mathrm{d}x+\int_{S_0}\mathbf{n}_u^T(\mathbf{y})t_x(0,\mathbf{y})\,\mathrm{d}S,\\ +\int_0^L\left(\boldsymbol{\delta}\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma u}\mathbf{d}'(x)\right)\,\mathrm{d}x+\\ -\int_0^L\left(\frac{1}{G}\boldsymbol{\delta}\mathbf{c}^T(x)\boldsymbol{A}_{\sigma\sigma}\mathbf{c}(x)\right)\,\mathrm{d}V,\end{aligned} \tag{73}$$

z čehož dostáváme soustavu rovnic

$$\boldsymbol{A}_{\sigma B}\mathbf{d}(x) + \boldsymbol{A}_{\sigma u}\mathbf{d}'(x) - \frac{1}{G}\boldsymbol{A}_{\sigma\sigma}\mathbf{c}(x) = 0. \tag{74}$$

Reference

[1] Servít, Radim, Eva Doležalová a Miloslav Crha. Teorie pružnosti a plasticity / Díl 1. 1. vyd. Praha: SNTL, 1981. 455 s.

[2] Servít, Radim, Jiří Šejnoha a Václav Kufner. Teorie pružnosti a plasticity / Díl 2. 1. vyd. Praha: SNTL, 1984. 421 s.

[3] Sadd, Martin H. Elasticity: theory, applications, and numerics [elektronický zdroj]. Amsterdam: Elsevier, 2005. ISBN 978-0-12-605811-6.

[4] Bittnar, Zdeněk, Milan Jirásek a Petr Konvalinka, 1992. Statika stavebních konstrukcí II: Příklady. 1. vyd. Praha: ČVUT. ISBN 978-80-01-00772-3.