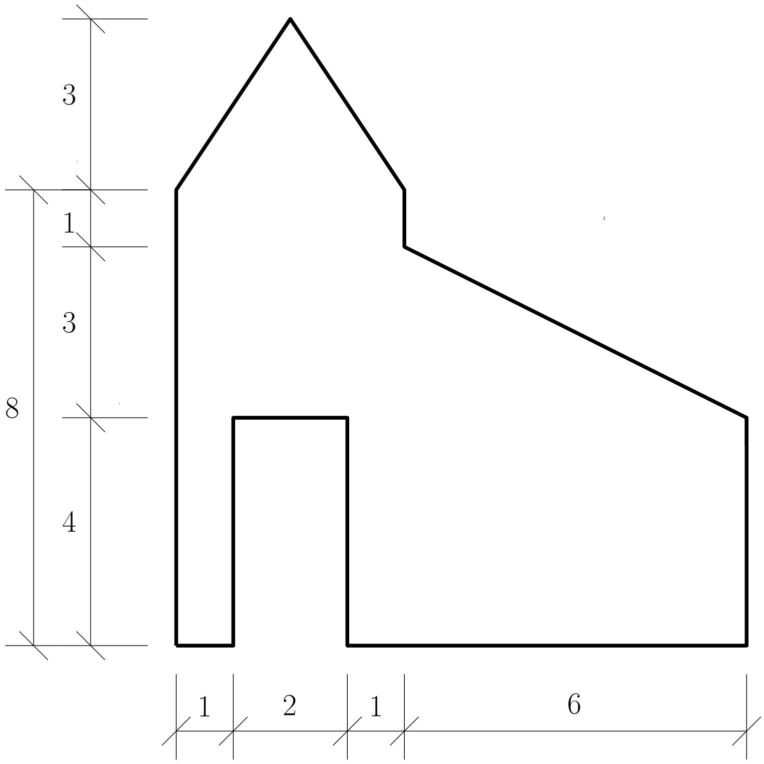
Průřezové charakteristiky

24. března 2012



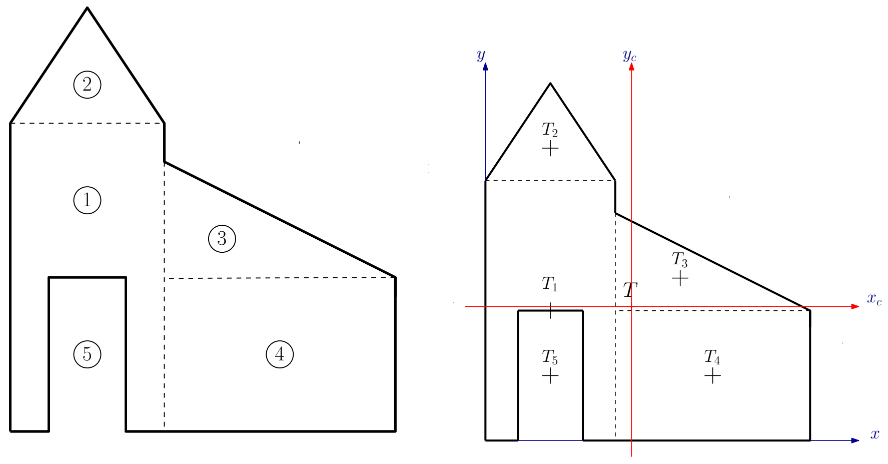
Obrázek 1: Schéma průřezu

Úkol: Určete hlavní centrální momenty setrvačnosti a vykreslete v měřítku odpovídající elipsu setrvačnosti.

Řešení:

- Nejprve si složený průžez rozdělíme na plochy, u kterých umíme určit lokální těžiště a lokální momenty setrvačnosti. V tomto kroku se soutředíme na to, aby počet ploch byl co nejmenší, abychom si zbytečně nepřidělávali práci. V tomto případě rozdělíme průřez na 5 ploch dle Obrázku 2a a to na dva trojúhelníky, dva obdélníky a jeden obdélníkový výřez.

- Pro výpočet těžiště nejprve zavedeme pomocný souřadný systém (modrý) a určíme lokální těžiště jednotlivých ploch, viz Obrázek 2b. Souřadnice lokálních těžišť $T_i[x_i; y_i]$ a velikosti jednotlivých ploch zapíšeme do Tabulky 1.



(a) (b)

Obrázek 2: (a) Rozdělení průřezu (b) Těžiště.

	x_i [mm]	y_i [mm]	A_i [mm^2]
1	20	40	3200
2	20	90	600
3	60	50	900
4	70	20	2400
5	20	20	-800
$\sum_i$			6300

Tabulka 1: Souřadnice lokálních těžišť a velikost jednotlivých ploch.

Souřadnice těžiště složeného průžezu získáme jako vážený průměr souřadnic jednotlivých ploch:

$$x_t = \frac{\sum_{i=1}^{5} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i} = 44,761 \text{ mm} \qquad \text{a} \qquad y_t = \frac{\sum_{i=1}^{5} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i} = 41,111 \text{ mm}\,. \tag{1}$$

- V dalším kroku spočítáme momenty setrvačnosti. Jejich výpočet zahrnuje výpočet momentů setrvačnosti dílčích ploch k jejich lokálním těžišťovým osám a opravu o Steinerův doplněk vůči těžišťovým osám celého průžezu. Momenty setrvačnosti k lokálním osám spočítáme podle tabulkových vzorců pro základní geometrické útvary. Steinerův doplněk se pak spočítá jako součin plochy a druhé mocniny vzdálenosti lokálních těžišťových os od těžišťových os celého průřezu. Výpočty momentů setrvačnosti jednotlivých ploch k centrálním osám (x_c, y_c) vypadají následovně:

$$I_x^1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 (y_1 - y_t)^2 = \frac{1}{12} \cdot 40 \cdot 80^3 + 3200 \cdot (40 - 41,111)^2 = 1,710616 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{2}$$

$$I_y^1 = \frac{1}{12} b_1^3 h_1 + A_1 (x_1 - x_t)^2 = \frac{1}{12} \cdot 40^3 \cdot 80 + 3200 \cdot (20 - 44,761)^2 = 2,388609 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{3}$$

$$I_x^2 = \frac{1}{36} b_2 h_2^3 + A_2 (y_2 - y_t)^2 = \frac{1}{36} \cdot 40 \cdot 30^3 + 600 \cdot (90 - 41,111)^2 = 1,464080 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{4}$$

$$I_y^2 = \frac{1}{48} b_2^3 h_2 + A_2 (x_2 - x_t)^2 = \frac{1}{48} \cdot 40^3 \cdot 30 + 600 \cdot (20 - 44,761)^2 = 0,407864 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{5}$$

$$I_x^3 = \frac{1}{36} b_3 h_3^3 + A_3 (y_3 - y_t)^2 = \frac{1}{36} \cdot 60 \cdot 30^3 + 900 \cdot (50 - 41,111)^2 = 0,116112 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{6}$$

$$I_y^3 = \frac{1}{36} b_3^3 h_3 + A_3 (x_3 - x_t)^2 = \frac{1}{36} \cdot 60^3 \cdot 30 + 900 \cdot (60 - 44,761)^2 = 0,389004 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{7}$$

$$I_x^4 = \frac{1}{12} b_4 h_4^3 + A_4 (y_4 - y_t)^2 = \frac{1}{12} \cdot 60 \cdot 40^3 + 2400 \cdot (20 - 41,111)^2 = 1,389618 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \tag{8}$$

$$I_y^4 = \frac{1}{12}b_4^3h_4 + A_4(x_4-x_t)^2 = \frac{1}{12}\cdot 60^3\cdot 40 + 2400\cdot(70-44,761)^2 = 2,248817\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} I_x^5 &= -(\frac{1}{12}b_5h_5^3 + A_5(y_5-y_t)^2) = -(\frac{1}{12}\cdot 20\cdot 40^3 + 800\cdot(20-41,111)^2) = \\ &= -0,463206\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} I_y^5 &= -(\frac{1}{12}b_5^3h_5 + A_5(x_5-x_t)^2) = -(\frac{1}{12}\cdot 20^3\cdot 40 + 800\cdot(20-44,761)^2) = \\ &= -0,517152\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4 \end{aligned} \quad (11)$$

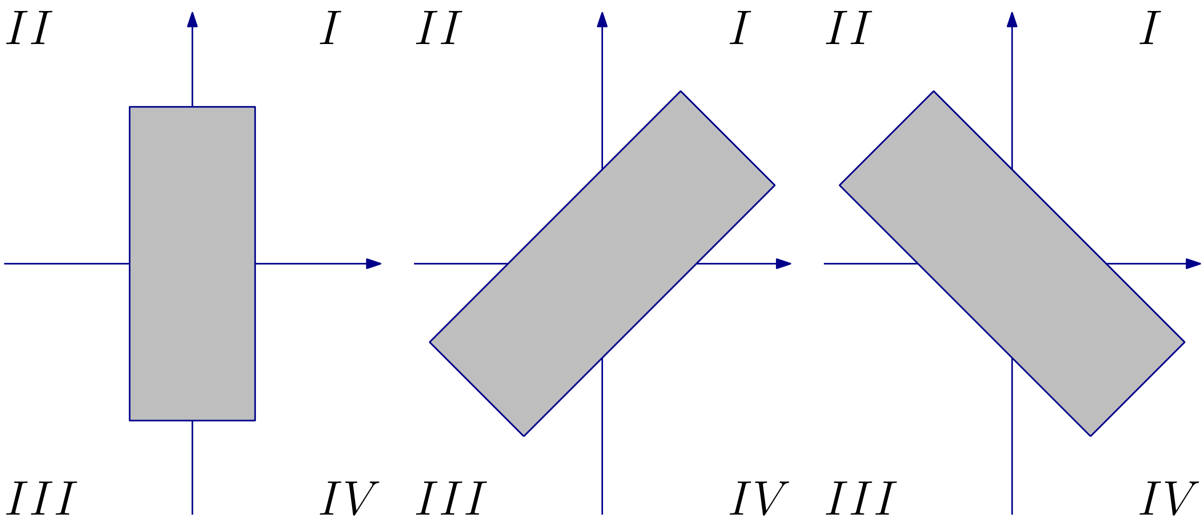
Výsledné momenty setrvačnosti celého průřezu získáme jako součet momentů setrvačnosti všech ploch:

$$I_{x_c} = \sum_{i=1}^{5} I_x^i = 4,217216\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4 \qquad \text{a} \qquad I_{y_c} = \sum_{i=1}^{5} I_y^i = 4,917142\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4 \quad (12)$$

Při výpočtu momentů setrvačnosti máme na paměti:

- **Momenty setrvačnosti musí být vždy kladné.** Výjimkou je pouze situace, kdy odčítáme zápornou plochu jako výřez.
- **Moment setrvačnosti k dané ose je tím větší, čím větší část plochy průřezu je od dané osy vzdálená.** Proto zkontrolujeme, zda nám vyšly větší ty momenty, u kterých to na první pohled očekáváme.

- Nyní přejdeme k výpočtu deviačního momentu setrvačnosti. Postup jeho výpočtu je velmi podobný výpočtu předchozích momentů setrvačnosti: podle tabulkových vzorců spočítáme deviační momenty setrvačnosti jednotlivých ploch k jejich lokálním osám a poté tyto hodnoty opravíme o Steinerův doplněk. Výsledné hodnoty nakonec opět sečteme. Zatímco momenty setrvačnosti jsou kladné, deviační moment může nabývat záporných hodnot a proto je třeba věnovat znamínkám při výpočtu deviačního momentu zvláštní pozornost. Znaménková konvence deviačního momentu je vysvětlena na Obrázcích 3a až 3c.



(a) $D_{xy} = 0$ (b) $D_{xy} > 0$ (c) $D_{xy} < 0$

Obrázek 3: Znaménková konvence deviačního momentu.

Slovně vyjádřeno:

- **Deviační moment je kladný, pokud se převážná čast průřezu nachází v prvním a třetím kvadrantu souřadného systému.**

- **Naopak je záporný, pokud se převážná čast průřezu nachází v druhém a čtvrtém kvadrantu souřadného systému.**
- **Pokud je plocha průřezu rovnoměrně rozmístěna do jednotlivých kvadrantů, deviační moment je nulový.**

Konkrétní výpočet deviačních momentů pak vypadá následovně:

$$\begin{aligned}
D^1_{xy} &= 0 + A_1 \cdot (x_1 - x_t) \cdot (y_1 - y_t) = 0 + 3200 \cdot (20 - 44,761) \cdot (40 - 41,111) = \\
&= 0,088030 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \qquad (13)\\
D^2_{xy} &= 0 + A_2 \cdot (x_2 - x_t) \cdot (y_2 - y_t) = 0 + 600 \cdot (20 - 44,761) \cdot (90 - 41,111) = \\
&= -0,726324 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \qquad (14)\\
D^3_{xy} &= -\frac{1}{72} b_3^2 h_3^2 + A_3 \cdot (x_3 - x_t) \cdot (y_3 - y_t) = -\frac{1}{72} 6^2 \cdot 3^2 + 900 \cdot (60 - 44,761) \cdot (50 - 41,111) = \\
&= 0,076913 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \qquad (15)\\
D^4_{xy} &= 0 + A_4 \cdot (x_4 - x_t) \cdot (y_4 - y_t) = 0 + 2400 \cdot (70 - 44,761) \cdot (20 - 41,111) = \\
&= -1,278769 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \qquad (16)\\
D^5_{xy} &= -(0 + A_5 \cdot (x_5 - x_t) \cdot (y_5 - y_t)) = -(0 + 800 \cdot (20 - 44,761) \cdot (20 - 41,111)) = \\
&= -0,418183 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \qquad (17)
\end{aligned}$$

Výsledné deviační momenty celého průřezu získáme jako součet deviačních momentů všech ploch:

$$D_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^{5} D^i_{xy} = -2,258333 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \qquad (18)$$

Úhel α_0 (úhel mezi vodorovnou těžišťovou osou a pootočenou osou v kladném směru) :

$$\tan \cdot 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot D_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} \Longrightarrow 2\alpha_0 = 98,80879^\circ \Longrightarrow \alpha_0 = 49,40439^\circ \qquad (19)$$

- Výpočet I_{x_0} a I_{y_0}. Tímto výpočtem dostaneme maximální a minimální moment setrvačnosti.

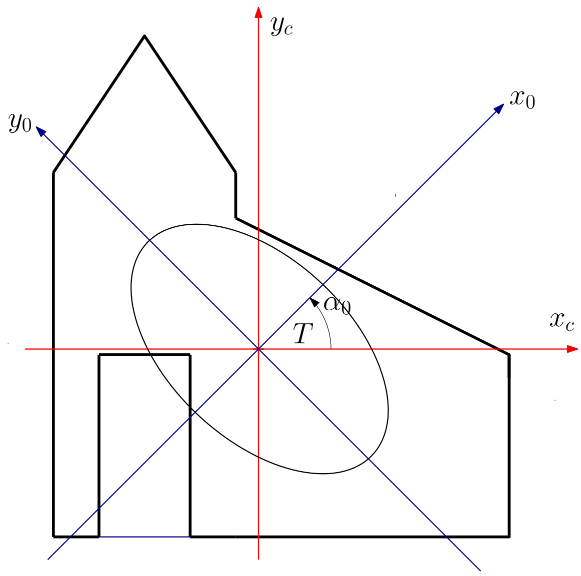
$$\begin{aligned}
I_{x_0} &= I_{x_c} \cdot \cos^2 \alpha_0 + I_{y_c} \cdot \sin^2 \alpha_0 - D_{x_c y_c} \cdot \sin 2\alpha_0 = 6,852467 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \qquad (20)\\
I_{y_0} &= I_{x_c} \cdot \sin^2 \alpha_0 + I_{y_c} \cdot \cos^2 \alpha_0 + D_{x_c y_c} \cdot \sin 2\alpha_0 = 2,281891 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \qquad (21)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow I_{x_0} = I_{\max} \quad \text{a} \quad I_{y_0} = I_{\min}$$

- $i_{\max}$ a $i_{\min}$ (maximální a minimální poloměr setrvačnosti):

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{x_0}}{A}} = 32,980194 \text{ mm} \quad \text{a} \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{y_0}}{A}} = 19,031682 \text{ mm} \qquad (22)$$

- Na závěr se vykreslí elipsa setrvačnosti v měřítku.



Obrázek 4: Elipsa setrvačnosti.

Opravy:

- opraveny překlepy - rovnice č. 18: jednotky mm^4 (na chyby upozornil Michal Netík)
- opraveny číselné hodnoty ve výpočtech - rovnice č. 10 (na chyby upozornil Vítězslav Lacina a Martin Horák)