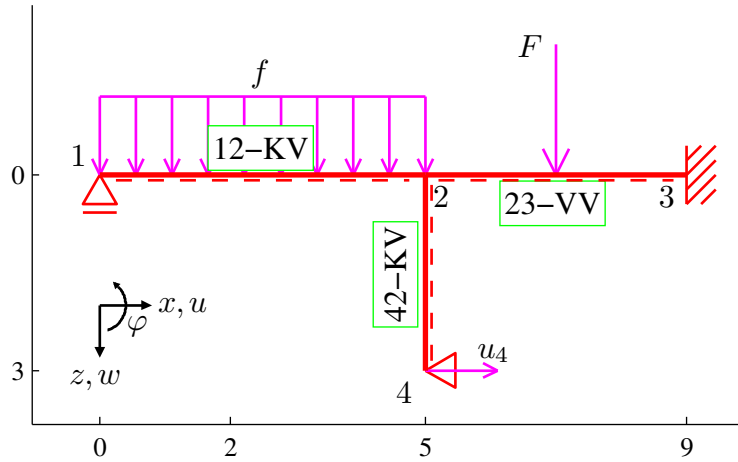


Pomocí zjednodušené deformační metody určete a vykreslete průběhy vnitřních sil (M, V, N) na zadané konstrukci (Obr. 1). Všechny pruty mají obdélníkový průřez o rozměrech 20 x 30 cm (šířka x výška) a jsou vyrobeny z materiálu, jehož modul pružnosti je $E = 20 \text{ GPa}$. Konstrukce je zatížena silou $F = 10 \text{ kN}$, rovnoměrným spojitém zatížením $f = 6 \text{ kN/m}$ a posunem $u_3 = 3 \text{ cm}$. (Jednotky použité pro výpočet jsou m, rad, kN, kNm, kPa.)



Obrázek 1: Schéma konstrukce a zatížení

Při použití zjednodušené deformační metody, tedy za předpokladu nekonečné normálové tuhosti jednotlivých prutů, zredukujeme počet neznámých použitím následujících identit:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

$$w_2 = w_4 = 0$$

Za základní neznámou tedy zvolíme φ_2 .
Sestavení podmínek rovnováhy:

- Momentová podmínka rovnováhy

$$M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0$$

A free body diagram of node 2 is shown with three moments acting on it: M_{21} (counter-clockwise), M_{23} (clockwise), and M_{24} (clockwise).

Koncové síly a momenty vyjádřené v závislosti na koncových posunech a pootočeních.

Prut 12-KV (z hlediska tahu-tlaku staticky určitá část konstrukce)

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{12}^l &= -\frac{3 L_{12} f_z}{8} - \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\
&= -\frac{45}{4} - 1080 \varphi_2 \\
M_{12} &= 0 + 0 \\
Z_{21}^l &= -\frac{5 L_{12} f_z}{8} + \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4 L_{12}} \\
&= -\frac{75}{4} + 1080 \varphi_2 \\
M_{21} &= -\frac{L_{12}^2 f_z}{8} + \frac{3 k_{12} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_1^l - 2 w_2^l}{L_{12}} \right)}{4} \\
&= -\frac{75}{4} + 5400 \varphi_2
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{12} &= X_{12}^l & u_1^l &= u_1 \\
Z_{12} &= Z_{12}^l & w_1^l &= w_1 \\
X_{21} &= X_{21}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{21} &= Z_{21}^l & w_2^l &= w_2
\end{aligned}$$

Prut 23-VV ($k_{23} = 2E_{23}I_{23}/L_{23} = 4500 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned}
Z_{23}^l &= \frac{b_{23} F_z \left(\frac{a_{23}(a_{23}-b_{23})}{L_{23}^2} - 1 \right)}{L_{23}} - \frac{k_{23} \left(3 \varphi_2 + 3 \varphi_3 - \frac{6 w_2^l - 6 w_3^l}{L_{23}} \right)}{L_{23}} \\
&= -5 - 3375 \varphi_2 \\
M_{23} &= \frac{a_{23} b_{23}^2 F_z}{L_{23}^2} + k_{23} \left(2 \varphi_2 + \varphi_3 - \frac{3 w_2^l - 3 w_3^l}{L_{23}} \right) \\
&= 5 + 9000 \varphi_2 \\
Z_{32}^l &= -\frac{a_{23} F_z \left(\frac{b_{23}(a_{23}-b_{23})}{L_{23}^2} + 1 \right)}{L_{23}} + \frac{k_{23} \left(3 \varphi_2 + 3 \varphi_3 - \frac{6 w_2^l - 6 w_3^l}{L_{23}} \right)}{L_{23}} \\
&= -5 + 3375 \varphi_2 \\
M_{32} &= -\frac{a_{23}^2 b_{23} F_z}{L_{23}^2} + k_{23} \left(\varphi_2 + 2 \varphi_3 - \frac{3 w_2^l - 3 w_3^l}{L_{23}} \right) \\
&= -5 + 4500 \varphi_2
\end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned}
X_{23} &= X_{23}^l & u_2^l &= u_2 \\
Z_{23} &= Z_{23}^l & w_2^l &= w_2 \\
X_{32} &= X_{32}^l & u_3^l &= u_3 \\
Z_{32} &= Z_{32}^l & w_3^l &= w_3
\end{aligned}$$

Prut 42-KV ($k_{42} = 2E_{42}I_{42}/L_{42} = 6000 \text{ kNm}$):

- Vztahy zapsané v lokální souřadnicové soustavě:

$$\begin{aligned} Z_{42}^l &= 0 - \frac{3 k_{42} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_4^l - 2 w_2^l}{L_{42}} \right)}{4 L_{42}} \\ &= 0 + 30 - 3000 \varphi_2 \\ M_{42} &= 0 + 0 \\ Z_{24}^l &= 0 + \frac{3 k_{42} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_4^l - 2 w_2^l}{L_{42}} \right)}{4 L_{42}} \\ &= 0 + 3000 \varphi_2 - 30 \\ M_{24} &= 0 + \frac{3 k_{42} \left(2 \varphi_2 - \frac{2 w_4^l - 2 w_2^l}{L_{42}} \right)}{4} \\ &= 0 + 9000 \varphi_2 - 90 \end{aligned}$$

- Vztahy pro transformaci do globální souřadnicové soustavy:

$$\begin{aligned} X_{42} &= Z_{42}^l & u_4^l &= -w_4 \\ Z_{42} &= -X_{42}^l & w_4^l &= u_4 \\ X_{24} &= Z_{24}^l & u_2^l &= -w_2 \\ Z_{24} &= -X_{24}^l & w_2^l &= u_2 \end{aligned}$$

Po dosazení koncových sil do podmínky rovnováhy dostaneme rovnici:

$$2.34 \cdot 10^4 \varphi_2 - 103.8 = 0$$

Vyřešením rovnice o jedné neznámé obdržíme hodnotu deformace

$$\varphi_2 = 0.004434 \text{ rad}$$

Po dosazení vypočtených posunů a pootočení zjistíme koncové příčné síly a momenty na prutech. Podélné koncové síly na prutech lze následně dopočítat ze silových podmínek rovnováhy ve styčnicích.

Prut 12:

$$\begin{aligned} X_{12}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{12}^l &= -16.038 \text{ kN} \\ M_{12} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{21}^l &= 0.000 \text{ kN} \\ Z_{21}^l &= -13.962 \text{ kN} \\ M_{21} &= 5.192 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 23:

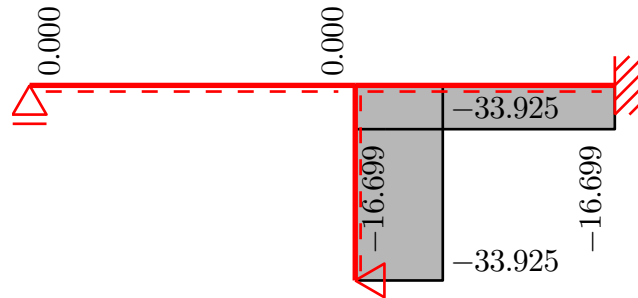
$$\begin{aligned} X_{23}^l &= 16.699 \text{ kN} \\ Z_{23}^l &= -19.964 \text{ kN} \\ M_{23} &= 44.904 \text{ kNm} \\ X_{32}^l &= -16.699 \text{ kN} \\ Z_{32}^l &= 9.964 \text{ kN} \\ M_{32} &= 14.952 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Prut 42:

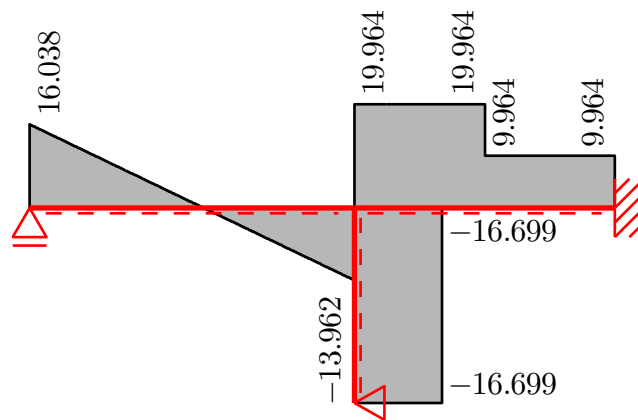
$$\begin{aligned} X_{42}^l &= 33.925 \text{ kN} \\ Z_{42}^l &= 16.699 \text{ kN} \\ M_{42} &= 0.000 \text{ kNm} \\ X_{24}^l &= -33.925 \text{ kN} \\ Z_{24}^l &= -16.699 \text{ kN} \\ M_{24} &= -50.096 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Na základě takto určených hodnot koncových sil vykreslíme příslušné průběhy vnitřních sil.

- Normálové síly N [kN]



- Posouvající síly V [kN]



- Ohybové momenty M [kNm]

