

# Obsah

Úvod	5
<b>1 Viskoelasticita</b>	<b>7</b>
1.1 Konstitutivní vztahy pro jednoosou napjatost	7
1.1.1 Dotvarování a funkce poddajnosti	7
1.1.2 Maxwellův a Kelvinův model	8
1.1.3 Integrovní vztah mezi deformací a napětím	12
1.1.4 Funkce poddajnosti pro beton	14
1.1.5 Numerický výpočet deformace pro daný vývoj napětí	16
1.1.6 Kelvinův řetězec	18
1.1.7 Vliv stárnutí	21
1.1.8 Exponenciální algoritmus pro stárnoucí Kelvinův řetězec	22
1.1.9 Relaxace a Maxwellův řetězec	24
1.1.10 Upravený efektivní modul (AAEM)	27
1.2 Analýza viskoelastických prutových konstrukcí	29
1.2.1 Základní rovnice pro viskoelastický prut	29
1.2.2 Dotvarování a relaxace homogenní konstrukce	33
1.2.3 Deformační metoda	37
1.2.4 Silová metoda	44
1.3 Konstitutivní vztahy pro víceosou napjatost	46
<b>2 Plasticita</b>	<b>47</b>
2.1 Konstitutivní vztahy pro jednoosou napjatost	47
2.1.1 Fyzikální motivace	47
2.1.2 Ideálně tuhoplastický model	49
2.1.3 Ideálně pružnoplastický model	52
2.1.4 Tuhoplastický model s lineárním kinematickým zpevněním	57
2.1.5 Pružnoplastický model s lineárním kinematickým zpevněním	59
2.1.6 Pružnoplastický model s izotropním zpevněním	62
2.2 Plastická analýza prutových konstrukcí	65
2.2.1 Příhradové konstrukce	65
2.2.2 Princip maxima plastické disipace	69
2.2.3 Věty mezní plastické analýzy	70
2.2.4 Nosníky a rámové konstrukce	75
2.3 Konstitutivní vztahy pro víceosou napjatost	82
2.3.1 Struktura základních rovnic	82
2.3.2 Podmínky plasticity pro materiály bez vnitřního tření	83
2.3.3 Podmínky plasticity pro materiály s vnitřním třením	88
2.3.4 Zákony plastického přetváření	96
2.3.5 Analýza pružnoplastického přetváření	102
2.3.6 Pružnoplastická tuhost	104
2.3.7 Zpevnění	106
<b>3 Lomová mechanika</b>	<b>111</b>
3.1 Analýza okolí kořene trhliny	111
3.1.1 Faktor intenzity napětí	111
3.1.2 Napjatost v okolí kořene trhliny	116
3.1.3 Deformace a posuny v okolí kořene trhliny	118
3.1.4 Nelineární procesní zóna	119
3.2 Kritéria pro šíření trhliny	120
3.2.1 Šíření v módu I — lokální Irwinovo kritérium	120
3.2.2 Šíření v módu I — globální (energetické) Griffithovo kritérium	122

3.2.3	Řízení testu silou nebo posunem . . . . .	125
3.2.4	Ekvivalence mezi lokálním a globálním přístupem . . . . .	128
3.2.5	Vztah mezi poddajností a faktorem intenzity napětí . . . . .	130
3.2.6	Šíření ve smíšeném módu . . . . .	133
<b>4</b>	<b>Poškození a jeho lokalizace</b>	<b>137</b>
4.1	Jednoosý model poškození . . . . .	137
4.2	Izotropní modely poškození pro víceosou napjatost . . . . .	141
4.2.1	Základní rovnice . . . . .	141
4.2.2	Analýza rozvoje poškození a matice tečné tuhosti . . . . .	147
4.2.3	Kombinace modelů poškození a plasticity . . . . .	149
4.3	Lokalizace poškození . . . . .	150
4.3.1	Potíže s popisem změkčení . . . . .	150
4.3.2	Úprava materiálových parametrů v závislosti na velikosti prvku . . . . .	157
<b>A</b>	<b>Lineární diferenciální rovnice</b>	<b>163</b>
<b>B</b>	<b>Základní pojmy a vztahy lineární teorie pružnosti</b>	<b>167</b>
B.1	Zobecněný Hookeův zákon . . . . .	167
B.2	Hlavní napětí a deformace . . . . .	168
B.3	Rozklad na hydrostatickou a deviatorickou část . . . . .	170
	<b>Rejstřík</b>	<b>174</b>
	<b>Literatura</b>	<b>177</b>

# Úvod

Při statické a dynamické analýze stavebních i jiných konstrukcí se vychází z matematických modelů, jejichž důležitou součástí jsou i rovnice popisující přetváření a porušování příslušného materiálu. Tyto rovnice jsou zpravidla formulovány jako vztahy mezi napětím a deformací a jejich nejjednodušší podobou je tzv. zobecněný Hookeův zákon, odpovídající lineárně pružnému modelu. Podle Hookeova zákona jsou složky napětí v daném materiálovém bodě lineárními funkcemi složek deformace, přičemž konstantní koeficienty násobící deformace mají význam materiálových tuhostí a v případě izotropního materiálu (tedy materiálu, který má ve všech směrech stejné vlastnosti) je lze určit na základě znalosti dvou parametrů, např. Youngova modulu pružnosti a Poissonova součinitele. S lineárně pružným modelem se posluchači Stavební fakulty ČVUT v Praze seznamují v předmětu „Pružnost a pevnost“ a používají jej pak v řadě dalších předmětů katedry mechaniky i v aplikacích na navrhování konstrukcí. Pro svou jednoduchost je tento model také hojně užíván v praxi.

Ve skutečnosti je ale vztah mezi napětím a deformací lineární pouze, pokud není pro daný materiál překročena mez úměrnosti, tj. pokud deformace a napětí zůstávají dostatečně malé. Žádný reálný materiál se nechová jako lineárně pružný bez jakéhokoli omezení. V závislosti na konkrétním typu materiálu dochází dříve či později k odchylkám od linearitě a navíc k rozdílnému chování při zatěžování a odtěžování. Zpřesněný popis takového chování vyžaduje úpravy pružného modelu a zahrnutí nepružných účinků, např. uvážení trvalých deformací v důsledku plastických přetvárných procesů nebo redukci tuhostních koeficientů v důsledku vzniku a rozvoje trhlin a dutin. Navíc se v některých případech výrazně projevuje i vliv rychlosti zatěžování, případně doby, po kterou je konstrukce zatížena, takže je třeba použít model s časovou závislostí. Účelem tohoto skriptu je podat přehled základních skupin modelů pro časově závislé a nepružné chování materiálů s důrazem na materiály významné pro stavební praxi, tedy zejména beton a ocel, používané jako materiály nosných konstrukcí, a zeminy či horniny jakožto přírodní materiály vyskytující se v podloží staveb.

Výklad je rozložen do čtyř kapitol, které se týkají jednotlivých významných tříd modelů. V první kapitole se probírá **teorie lineární viskoelasticty** (neboli vazkopružnosti), která představuje nejjednodušší rozšíření lineární pružnosti postihující časově závislé chování. Viskoelastické modely jsou základem popisu dotvarování betonu při dlouhodobém zatížení. S ohledem na tento typ aplikací je pozornost věnována nejen základním viskoelastickým modelům, ale i modelům zahrnujícím vliv stárnutí, tedy proměny vlastností materiálu v čase, např. v důsledku pokračující hydratace cementové pasty.

Druhá kapitola podává systematický výklad **teorie plasticity**, s jejímiž základy se studenti letmo seznámili již v předmětu „Pružnost a pevnost“. Výchozí představou je mechanismus plastického pokluzu v krystalické mřížce, který slouží jako motivace pro sestavení různých typů modelů, od nejjednoduššího ideálně tuhoplastického až po pružnoplastický model s kinematickým a izotropním zpevněním. Pružnoplastické modely najdou uplatnění zejména při popisu duktilních materiálů, jako jsou kovy nebo soudržné zeminy, ale za určitých podmínek a při jisté opatrnosti je lze použít i pro beton, nesoudržné zeminy nebo horniny.

Viskoelastické i pružnoplastické modely jsou založeny na předpokladu, že deformující se těleso (konstrukce) zůstává spojitě a lze je popsat v rámci teorie kontinua. Pokud dojde ke vzniku trhlin nebo jiných nespojitostí (např. usmyknutí podél kluzných ploch), je třeba model vhodným způsobem upravit. Jednou možností je explicitní popis trhliny jako nespojitosti v poli posunutí, kterým se zabývá **lomová mechanika**. Její základy jsou vysvětleny ve třetí kapitole. Pro jednoduchost se výklad omezuje na lineární lomovou mechaniku, která předpokládá, že materiál mezi trhlinami zůstává lineárně pružný. Takový model by se hodil pro křehké materiály, nebo pro kvazikřehké materiály (jako je beton) za předpokladu, že konstrukce a trhlina mají velké rozměry.

K popisu mnoha malých trhlin rozptýlených v určitém objemu materiálu se spíše než lomová mechanika hodí **mechanika poškození**, které je věnována čtvrtá kapitola. Vysvětluje se zde, jakým způsobem lze vzít v úvahu vliv růstu mikrotrhlin na tuhost a pevnost materiálu, který z makroskopického hlediska stále považujeme za spojitý. Rychlý rozvoj poškození obvykle vede k tzv. změkčování materiálu, tedy k poklesu napětí za rostoucí deformace. Důsledkem změkčování bývá koncentrace nepružných procesů do jisté zóny o malé šířce ve srovnání s rozměry konstrukce. Proto se v návaznosti na modely poškození hovoří i o lokalizaci nepružné deformace a ukazuje se, že při použití klasického přístupu tento jev není popsán objektivně a numerické řešení získané metodou konečných prvků trpí patologickou závislostí na velikosti použitých prvků. V jednoduchých případech je možno dosáhnout nápravy speciální úpravou parametrů materiálového modelu v závislosti na velikosti prvku, což je vysvětleno v závěru kapitoly.

Skriptum také obsahuje dva dodatky, ve kterých jsou připomenuty základní poznatky o lineárních diferenciálních rovnicích a o lineární teorii pružnosti. Pro usnadnění orientace je skriptum vybaveno rejstříkem a konec

každého příkladu je vymezen značkou  $\square$ , aby se vizuálně oddělilo řešení samotného příkladu od navazujícího textu.

Skriptum je koncipováno jako základní studijní podklad pro předmět „Přetváření a porušování materiálů“, který je jedním z povinných předmětů ve 4. ročníku oborů Konstrukce a dopravní stavby a Materiálové inženýrství a zároveň je nabízen jako volitelný předmět pro další obory. Některé partie jsou však probrány do větší hloubky, takže zde mohou najít užitečné informace i posluchači magisterského studia, případně může celé skriptum posloužit jako ucelený přehled pro doktorandy a zájemce z praxe. Důraz je kladen na vysvětlení základních pojmů a principů, teoretický výklad je ovšem doplněn množstvím řešených příkladů a jednoduchými ukázkami aplikací při analýze konstrukcí, zejména prutových. Autoři doufají, že probudí alespoň u některých čtenářů zájem o další studium pokročilých materiálových modelů a podnítí snahu o jejich širší využití v praxi. Připomínky, upozornění na chyby a náměty k vylepšení jsou vítány a lze je zaslat např. na elektronickou adresu Milan.Jirasek@fsv.cvut.cz. Opravy tiskových chyb a doplňující příklady budou uveřejňovány na webových stránkách předmětu, které jsou přístupné ze studentské části serveru katedry mechaniky na adrese <https://mech.fsv.cvut.cz/student/> pod zkratkou předmětu PPMA.

Praha, září 2006

Milan Jirásek a Jan Zeman

Během dvou let byl původní náklad skripta rozebrán. Proto jsme připravili dotisk, ve kterém je opraveno několik drobných chyb. Změny se týkají obrázku 1.9a, tabulky 1.2, věty za rovnicí (2.242) a rovnic (A.21)–(A.22) v dodatku.

Praha, říjen 2008

Milan Jirásek a Jan Zeman

Po dalších dvou letech vychází druhý dotisk, ve kterém je opraveno pravidlo pro volbu nejkratšího retardačního času při aproximaci funkce poddajnosti na str. 19–21.

Praha, červen 2010

Milan Jirásek a Jan Zeman

Skriptum vychází ve 2. vydání, které je prakticky totožné s druhým dotiskem 1. vydání. Vedle několika malých překlepů je opraven poslední diagonální prvek matice v rovnici (B.21). Uvítáme upozornění na jakékoliv další chyby a doufáme, že skriptum bude i nadále užitečným pomocníkem při studiu modelů pro nepružné chování materiálů.

Praha, duben 2012

Milan Jirásek a Jan Zeman

# Kapitola 1

## Viskoelasticita

### 1.1 Konstitutivní vztahy pro jednoosou napjatost

#### 1.1.1 Dotvarování a funkce poddajnosti

Laboratorní zkoušky i měření na skutečných konstrukcích ukazují, že v řadě materiálů dochází pod vlivem konstantního napětí k postupnému nárůstu deformace. Tento jev označujeme jako *dotvarování*. V materiálech, které mají tendenci dotvarovat, dochází při konstantní deformaci k samovolnému úbytku napětí, tedy k *relaxaci*. Dotvarování a relaxace spolu úzce souvisejí a jsou způsobeny tím, že deformační procesy ve skutečnosti probíhají s určitým zpožděním. Příslušné materiálové modely to mohou vzít v úvahu například tak, že konstitutivní vztahy (rovnice popisující závislost mezi napětím a deformací) nejsou zapsány pro každý časový okamžik zvlášť, ale zahrnují i předchozí vývoj napětí a deformace až po zkoumaný časový okamžik, ve kterém druhou veličinu (tedy deformaci nebo napětí) vyhodnocujeme.

Nejjednodušší teorií použitelnou pro popis časově závislého chování materiálů je *lineární viskoelasticita*. Jejím základním předpokladem je platnost *principu superpozice*, podle kterého lze účinky jednotlivých zatěžovacích historií sčítat, a dokonce vytvářet jejich lineární kombinace. Matematicky lze tento princip formulovat následujícím způsobem:

#### Boltzmannův princip superpozice:

Předpokládejme, že pro daný materiál

- deformace mění se v čase podle funkce  $\varepsilon_1(t)$  vede k vývoji napětí popsanému funkcí  $\sigma_1(t)$ , a
- deformace mění se v čase podle funkce  $\varepsilon_2(t)$  vede k vývoji napětí popsanému funkcí  $\sigma_2(t)$ .

Potom platí, že

- deformace mění se v čase podle funkce  $c_1\varepsilon_1(t) + c_2\varepsilon_2(t)$ , kde  $c_1$  a  $c_2$  jsou libovolné reálné konstanty, vede k vývoji napětí popsanému funkcí  $c_1\sigma_1(t) + c_2\sigma_2(t)$ .

Uvedené tvrzení je rozšířením principu superpozice známého z teorie lineární pružnosti, který pracuje s hodnotami napětí a deformace ve zvoleném časovém okamžiku. V teorii lineární viskoelasticity je třeba brát v úvahu celou historii napětí a deformace, popsanou funkcemi času. Princip superpozice samozřejmě není žádným univerzálním přírodním zákonem, ale zjednodušujícím předpokladem, který platí jen přibližně a jen za určitých podmínek. Například pro tlačený beton jej lze spolehlivě použít v případě, že napětí nepřekročí úroveň asi 50 % pevnosti v tlaku. Pro vyšší úrovně napětí je třeba vzít v úvahu další jevy, které vedou k nárůstu deformací, jako je rozvoj trhlin nebo plastické přetváření při víceosém tlaku. Kromě toho je při jakékoliv úrovni napětí obvykle nutné zahrnout do výpočtu vliv smršťování. Teorii viskoelasticity tedy nesmíme chápat jako zcela přesný popis reality, ale jako jeden z nástrojů, které lze použít při popisu mechanického chování určitého typu materiálů a podle potřeby je kombinovat s jinými.

Pokud přijmeme princip superpozice ve výše uvedené podobě, můžeme ukázat, že vlastnosti materiálu jsou jednoznačně popsány jistou funkcí  $J(t, t')$ , zvanou *funkce poddajnosti*, případně s ní úzce spjatou funkcí  $R(t, t')$ , zvanou *relaxační funkce*.

Uvažujme speciální zatěžovací proces — *dotvarovací zkoušku*, při níž na materiál až do okamžiku  $t'$  nepůsobí žádné napětí a v čase  $t'$  začne působit napětí o velikosti  $\hat{\sigma}$ , která pak zůstává v čase konstantní. Z matematického hlediska je historie napětí popsána funkcí

$$\sigma(t) = \hat{\sigma} H(t - t') \quad (1.1)$$

kde  $H$  je *Heavisidova funkce*, daná předpisem

$$H(s) = \begin{cases} 0 & \text{pro } s < 0 \\ 1 & \text{pro } s \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Až do okamžiku  $t'$  je materiál nezátížen a jeho deformace je tudíž nulová.<sup>1</sup> V okamžiku  $t'$  se napětí skokem zvýší na hodnotu  $\hat{\sigma}$  a materiál na to zareaguje jistou okamžitou deformací. Pokud by chování materiálu bylo časově nezávislé, deformace by se nadále při konstantním napětí neměnila. V důsledku jistých časově závislých procesů probíhajících v mikrostruktuře materiálu však může dojít k dotvarování, které se projeví postupným nárůstem deformace za konstantního napětí. Na základě principu superpozice lze snadno ověřit, že pokud funkci  $\varepsilon(t)$  popisující vývoj deformace v čase vydělíme hodnotou  $\hat{\sigma}$ , získáme funkci, která nezávisí na zvolené úrovni napětí a je tudíž jistou charakteristikou materiálu. Můžeme tedy napsat, že historie deformace odpovídající speciální historii napětí ve tvaru (1.1) je dána vztahem

$$\varepsilon(t) = \hat{\sigma} J(t, t') \quad (1.3)$$

kde  $J$  je již zmíněná *funkce poddajnosti* viskoelastického materiálu. Hodnotu  $J(t, t')$  lze slovně popsat jako deformaci v čase  $t$  vyvolanou jednotkovým skokem napětí v čase  $t'$ , ovšem pojem „jednotkové napětí“ samozřejmě nelze brát doslova. Přesněji řečeno je  $J(t, t')$  podíl mezi deformací v čase  $t$  a velikostí napětí, které tuto deformaci vyvolalo, působícího konstantní hodnotou od času  $t'$ .

Pro lineárně pružný materiál bez časové závislosti je při dotvarovací zkoušce až do okamžiku  $t'$  deformace nulová a od okamžiku  $t'$  je rovna  $\hat{\sigma}/E$ , kde  $E$  je Youngův modul pružnosti. Formálně lze takový vývoj deformace popsat funkcí  $\varepsilon(t) = (\hat{\sigma}/E)H(t - t')$ , takže funkce poddajnosti pro tento typ materiálu je

$$J(t, t') = \frac{1}{E}H(t - t') \quad (1.4)$$

Funkce poddajnosti má tedy v lineární viskoelasticitě podobný význam jako převrácená hodnota modulu pružnosti při časově nezávislém chování materiálu. Tomu odpovídá i její jednotka, 1/Pa. Pro materiál s časově závislým chováním je funkce  $J(t, t')$  složitější, ale pro  $t < t'$  musí její hodnota zůstat nulová, protože napětí působící až od okamžiku  $t'$  nemůže mít vliv na deformaci v dřívějších okamžicích. Tato zjevná skutečnost se někdy vzletně označuje jako *princip kauzality*.

Pokud se vlastnosti materiálu v čase nemění, pak funkce poddajnosti závisí pouze na čase  $t - t'$ , který uplynul od počátku působení napětí do okamžiku, v němž vyhodnocujeme deformaci. Pro takový materiál můžeme psát

$$J(t, t') = J_0(t - t') \quad (1.5)$$

kde  $J_0$  je také funkce poddajnosti, ale chápaná jako funkce pouze jedné proměnné, a sice doby, po kterou napětí působilo. Říkáme potom, že se jedná o *materiál bez stárnutí*. Typickým příkladem jsou polymery, pokud neuvažujeme jejich případnou degradaci ve velmi dlouhém časovém období. Naproti tomu beton je příkladem materiálu, jehož vnitřní struktura se v čase výrazně mění vlivem chemických procesů, zejména hydratace cementu. V důsledku toho se v čase mění i mechanické vlastnosti materiálu a deformace při dotvarování nezávisí jen na době působení napětí, ale také na stáří betonu (obvykle měřeném od okamžiku, kdy tuhnoucí betonová směs začne poprvé vykazovat znaky pevné látky). Jen pro dostatečně starý beton je možno další změny jeho vlastností zanedbat a použít funkci poddajnosti ve tvaru (1.5). Počáteční stádia existence betonové konstrukce je však třeba analyzovat s uvážením vlivu stárnutí a použít obecnější tvar funkce poddajnosti se závislostí na obou proměnných  $t$  a  $t'$  zvlášť. V takovém případě mluvíme o *materiálu se stárnutím*. Na rozdíl od stárnutí lidského organismu, které se obvykle projevuje zhoršováním jeho vlastností (přinejmenším těch mechanických), dochází u betonu naopak ke zlepšování (nárůstu tuhosti, tedy poklesu poddajnosti). Proto je třeba rozlišovat stárnutí betonu v tomto smyslu od jeho degradace vlivem rozkladných procesů, vyvolaných např. vyluhováním vápníku nebo chloridovou-síranovou korozi.

### 1.1.2 Maxwellův a Kelvinův model

Pro konkrétní materiál lze funkci poddajnosti určit dotvarovací zkouškou, tedy pokusem, při kterém je vzorek zatížen konstantní silou a zaznamenává se vývoj deformace v čase. Výslednou křivku je pak vhodné aproximovat funkcí vhodného tvaru s určitým počtem parametrů, které se vyladí tak, aby se docílilo co nejlepší shody mezi modelem a experimentálními výsledky. Tvar takové funkce by se v některých případech dal odhadnout, ale obecně je vhodné mít k dispozici funkce odvozené z jednoduchých reologických schémat. Pro ilustraci si ukážeme funkce poddajnosti odpovídající dvěma nejjednodušším schématům, vytvořeným sériovým nebo paralelním zapojením pružiny (zachycující pružné=elastické vlastnosti materiálu) a tlumiče (zachycujícího vazké=viskózní chování).<sup>2</sup> Jednotlivé články reologických schémat jsou znázorněny jako určité makroskopické objekty (pružina, tlumič, viz

<sup>1</sup>Znovu připomínáme, že se zabýváme pouze popisem deformace způsobené viskoelastickým přetvářením materiálu a neuvažujeme další typy deformace, např. od smršťování nebo teplotních změn, které by bylo třeba do obecného modelu zahrnout zvlášť.

<sup>2</sup>Kombinací viskózních a elastických článků vzniká viskoelastický model. Teorii viskoelastivity by bylo možno česky nazvat teorií vazkopružnosti, ale tento termín zní dnes poněkud zastarale.



Obrázek 1.1: Základní reologické články: (a) pružina, (b) tlumič.

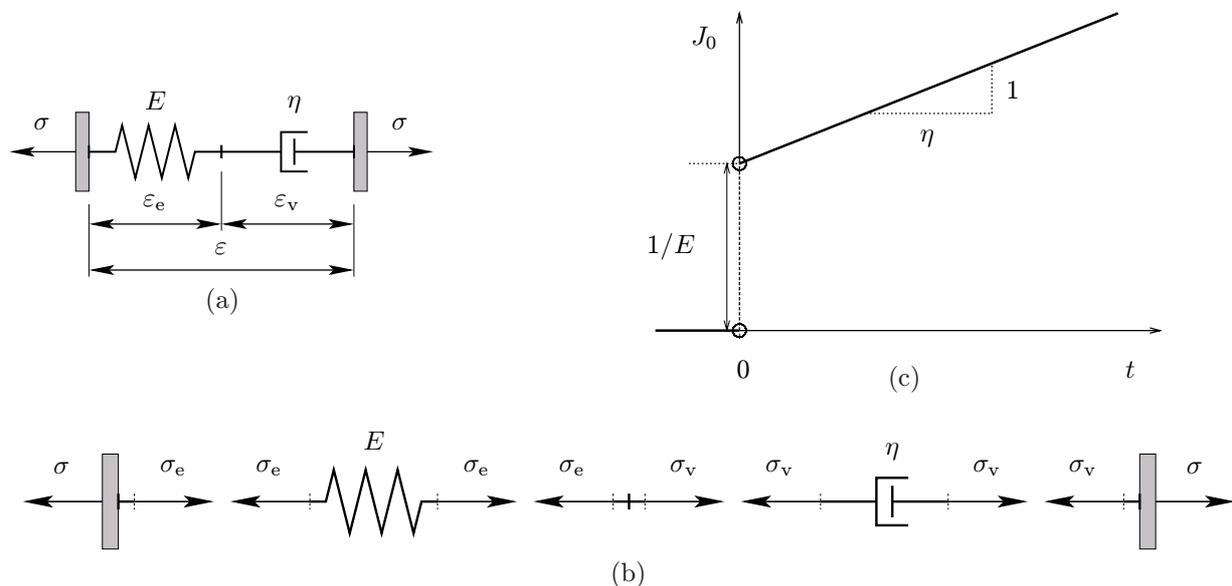
obr. 1.1), ale celé schéma ve skutečnosti popisuje chování nekonečně malého objemu materiálu. Proto je třeba síly přenášené jednotlivými články interpretovat jako napětí a změny délky těchto článků jako deformace.<sup>3</sup> Napětí a deformaci v pružném článku (pružině) budeme nadále značit  $\sigma_e$  a  $\varepsilon_e$ , ve vazkém článku (tlumiči) pak  $\sigma_v$  a  $\varepsilon_v$ . V případě lineárního modelu je chování pružiny popsáno Hookeovým zákonem

$$\sigma_e = E \varepsilon_e \quad (1.6)$$

kde  $E$  je modul pružnosti, zatímco pro lineární vazký tlumič je přenášené napětí úměrné nikoli deformaci samotné, ale její rychlosti. Píšeme tedy

$$\sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}_v \quad (1.7)$$

kde tečka nad  $\varepsilon_v$  označuje derivaci podle času a  $\eta$  je materiálová konstanta zvaná *viskozita*. Ze vztahu (1.7) vyplývá, že jednotkou viskozity je Pa·s.



Obrázek 1.2: Maxwellův model: (a) reologické schéma, (b) složkový obrazec, (c) funkce poddajnosti.

### Příklad 1.1: Funkce poddajnosti pro Maxwellův model

Reologické schéma vzniklé sériovým zapojením pružiny a tlumiče představuje tzv. *Maxwellův model* (obr. 1.2a). Při sériovém zapojení přenášejí oba články stejné napětí a celková deformace je součtem dílčích deformací jednotlivých článků, které lze interpretovat jako pružnou a vazkou část deformace. To je formálně popsáno vztahy

$$\sigma = \sigma_v = \sigma_e \quad (1.8)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \quad (1.9)$$

kteřé budeme kombinovat s rovnicemi (1.6)–(1.7), popisujícími chování jednotlivých reologických článků. Vztah (1.9) je patrný z reologického schématu na obr. 1.2a, zatímco vztahy (1.6)–(1.8) jsou názorně zachyceny složkovým obrazcem na obr. 1.2b.

Při odvození funkce poddajnosti zatížíme model od času  $t' = 0$  konstantním napětím  $\sigma(t) = \hat{\sigma}$ . Podle (1.8) jsou tím okamžitě určena i napětí v jednotlivých člancích a vývoj dílčích deformací stanovíme podle rovnic (1.6)–(1.7). Pro pružnou deformaci píšeme jednoduše

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma_e(t)}{E} = \frac{\hat{\sigma}}{E} \quad (1.10)$$

<sup>3</sup>Deformace odpovídá **změně** délky příslušného článku, ale pro jednoduchost se v reologických schématech označení deformace přepisuje ke kótě odpovídající celkové délce článku.

zatímco pro vazkou deformaci musíme v čase integrovat rovnici

$$\dot{\varepsilon}_v(t) = \frac{\sigma_v(t)}{\eta} = \frac{\hat{\sigma}}{\eta} \quad (1.11)$$

s konstantní pravou stranou. Integrací bychom obecně dostali

$$\varepsilon_v(t) = \frac{\hat{\sigma}}{\eta}t + C \quad (1.12)$$

kde  $C$  je libovolná integrační konstanta, ale z počáteční podmínky  $\varepsilon_v(0) = 0$  (nulová deformace vazkého článku v okamžiku, kdy začne působit napětí) určíme  $C = 0$ . Sečtením dílčích deformací získáme funkci popisující vývoj celkové deformace

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} + \frac{\hat{\sigma}}{\eta}t = \hat{\sigma} \left( \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (1.13)$$

která má skutečně tvar  $\hat{\sigma}J_0(t)$ .

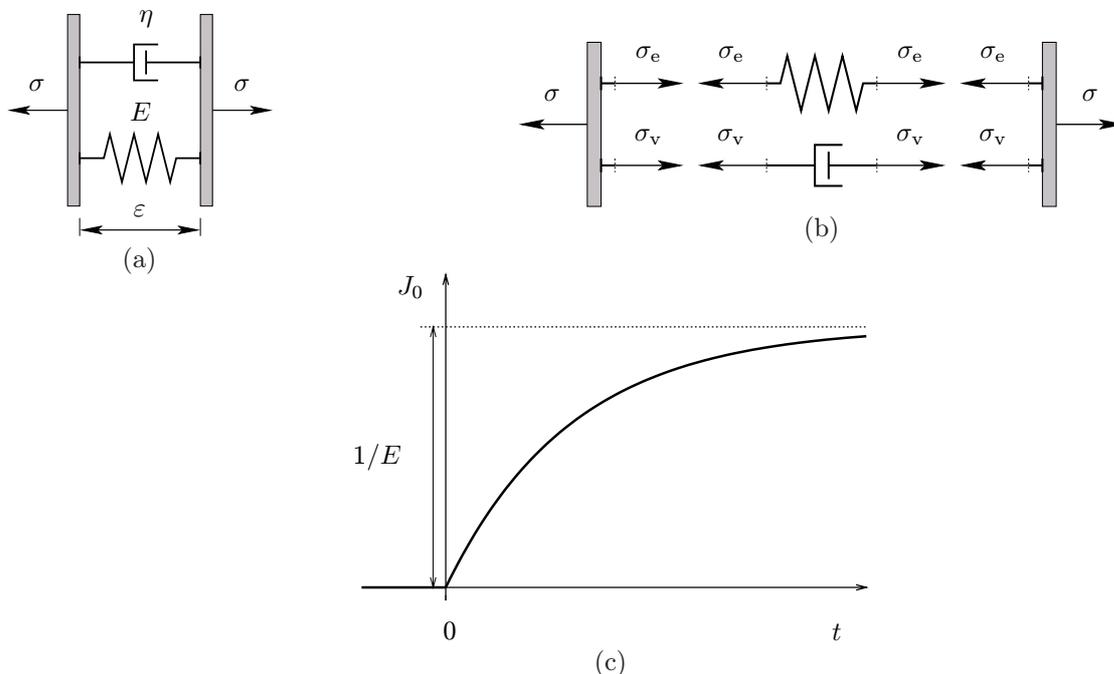
Uvědomte si, že zkoumané reologické schéma odpovídá materiálu bez stárnutí, protože vlastnosti materiálu dané konstantami  $E$  a  $\eta$  se v čase nemění. Navíc jsme jako čas počátku působení napětí volili pro jednoduchost  $t' = 0$ , takže se ve výsledku místo závislosti na  $t - t'$  objevila závislost na  $t$ . Výraz v závorkách na pravé straně (1.13) zřejmě odpovídá funkci poddajnosti  $J_0(t)$ . Řešení jsme ale provedli až od času  $t = 0$ , zatímco pro záporné časy je deformace nulová. Funkci poddajnosti pro Maxwellův model tedy zapíšeme jako

$$J_0(t) = \left( \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) H(t) \quad (1.14)$$

V čase  $t = 0$  má tato funkce skok, který odpovídá okamžitému nárůstu deformace v důsledku protažení pružiny, jakmile začne působit napětí (obr. 1.2c). Pro  $t > 0$  funkce poddajnosti lineárně narůstá v čase, což odpovídá příspěvku vazkého článku.

□

Výsledek předcházejícího příkladu se samozřejmě dal snadno odhadnout, ale formální matematická analýza naznačila, jak postupovat v obecném případě. V následujícím příkladu se již neobejdeme bez řešení diferenciální rovnice. Pro pohodlí čtenáře jsou v dodatku A zopakovány užitečné základní informace o lineárních diferenciálních rovnicích s konstantními koeficienty.



Obrázek 1.3: Kelvinův model: (a) reologické schéma, (b) složkový obrazec, (c) funkce poddajnosti.

### Příklad 1.2: Funkce poddajnosti pro Kelvinův model

Reologické schéma vzniklé paralelním zapojením pružiny a tlumiče představuje tzv. *Kelvinův model* (obr. 1.3a). Při paralelním zapojení jsou oba články podrobeny stejné deformaci a celkové napětí je součtem příspěvků pružného a vazkého článku. To je formálně popsáno vztahy

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v \quad (1.15)$$

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v \quad (1.16)$$

kteřé budeme opět kombinovat s rovnicemi (1.6)–(1.7). Stejně jako v předcházejícím příkladu zatížíme model od času  $t' = 0$  konstantním napětím  $\sigma(t) = \hat{\sigma}$ . Tentokrát tím však nejsou napětí v jednotlivých člancích určena, pouze víme, že jejich součet musí být roven  $\hat{\sigma}$ . Je tedy třeba do (1.16) dosadit dílčí napětí vyjádřená pomocí deformace a pak vývoj deformace vypočítat. Jelikož  $\sigma_e$  je úměrné deformaci  $\varepsilon_e = \varepsilon$ , zatímco  $\sigma_v$  je úměrné rychlosti deformace  $\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}$ , má výsledná rovnice

$$E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) = \hat{\sigma} \quad (1.17)$$

diferenciální charakter. Je to lineární diferenciální rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty a její obecné řešení má tvar (viz dodatek A)

$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} + C \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \quad (1.18)$$

Integrační konstantu  $C$  určíme z počáteční podmínky. Na počátku působení napětí, tedy v čase  $t = 0$ , je deformace nulová. Po dosazení (1.18) do podmínky  $\varepsilon(0) = 0$  dostaneme  $C = -\hat{\sigma}/E$  a po zpětném dosazení do (1.18) získáme finální popis vývoje deformace v čase:

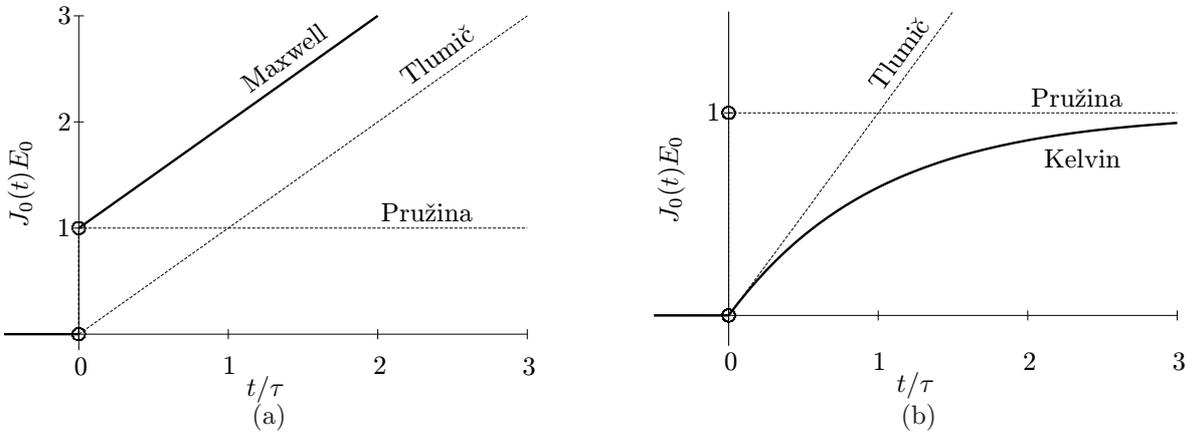
$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right)\right] \quad (1.19)$$

Funkce poddajnosti pro Kelvinův model má tedy tvar (obr. 1.3b)

$$J_0(t) = \frac{1}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right)\right] H(t) \quad (1.20)$$

Její hodnota v čase  $t = 0$  je nulová, což znamená, že tento model nemá schopnost postihnout okamžitou deformaci po skokovém zvýšení napětí. Tomu zabráňuje vazký tlumič přímo „napojený“ na celkovou deformaci, ve kterém by při skokovém nárůstu deformace vzniklo nekonečné napětí. Pružný článek nemá při paralelním zapojení možnost se deformovat nezávisle na vazkém, a proto vývoj deformace musí zůstat spojitý i v případě nespojitosti ve vývoji napětí. Těsně po počátku působení napětí je tedy deformace malá a její rychlost velká, takže napětí je přenášeno hlavně vazkým článkem. Postupně však dochází k nárůstu deformace a poklesu její rychlosti, přičemž napětí se uvnitř modelu přerozděluje a v pozdějších stádiích je prakticky veškeré napětí přenášeno pružným článkem.

□



Obrázek 1.4: Funkce poddajnosti pro (a) Maxwellův model, (b) Kelvinův model, spolu s funkcemi poddajnosti pružného a vazkého článku.

Je poučné zamyslet se nad rozdíly v dotvarování Maxwellova a Kelvinova modelu. Příslušné funkce poddajnosti (odpovídající svým tvarem také vývoji deformace) jsou graficky znázorněny na obr. 1.4, spolu s funkcemi poddajnosti pro samotný pružný článek a samotný vazký tlumič. V důsledku sériového zapojení je funkce poddajnosti pro Maxwellův model prostým součtem funkcí poddajnosti pro jednotlivé jeho články, neboť deformace, a tedy i poddajnosti, se při sériovém zapojení sčítají (obr. 1.4a). Tento model je schopen postihnout okamžitou deformaci, ale jeho nevýhodou je, že deformace v čase narůstá konstantní rychlostí, což by odpovídalo spíše chování viskózní kapaliny než pevné látky. Naproti tomu pro Kelvinův model dochází v průběhu dotvarování k postupnému přerozdělení napětí mezi oběma paralelně zapojenými články. Tomu odpovídá také funkce poddajnosti, která je na počátku blízká funkci poddajnosti pro vazký tlumič a později se asymptoticky blíží funkci poddajnosti pro pružný článek (obr. 1.4b). Hranice mezi oběma etapami je přibližně v tom čase, ve kterém mají funkce poddajnosti pro oba dílčí články stejnou hodnotu. Touto úvahou je motivována definice tzv. *retardačního času*  $\tau$ , pro který je poddajnost pružného článku  $1/E$  rovna poddajnosti vazkého tlumiče  $\tau/\eta$ . Porovnáním obou výrazů získáme

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (1.21)$$

a vzorec (1.20) pro funkci poddajnosti Kelvinova modelu můžeme přepsat do tvaru

$$J_0(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) H(t) \quad (1.22)$$

Snadno lze ověřit, že podíl viskozity  $\eta$  a modulu pružnosti  $E$  má skutečně rozměr času. Retardační čas  $\tau$  tedy představuje vnitřní charakteristický čas modelu. Intuitivně je zřejmé, že procesy, které proběhnou za čas mnohem kratší než  $\tau$ , jsou z hlediska tohoto modelu téměř okamžité a veškeré napětí je přeneseno vazkým článkem, protože model „nestihne“ napětí přerozdělit. Naproti tomu procesy trvající mnohem déle než  $\tau$  jsou z hlediska modelu pomalé a dojde při nich k téměř úplnému přenesení napětí na pružný článek. Jinými slovy, pro rychlé procesy se Kelvinův model chová skoro jako vazký tlumič a pro pomalé skoro jako pružina, přičemž to, zda je proces rychlý nebo pomalý, závisí na porovnání délky jeho trvání s retardačním časem  $\tau = \eta/E$ .

Chování Maxwellova modelu je právě opačné: pro rychlé procesy se zdeformuje pouze pružina a vazká deformace nemá čas se rozvinout, zatímco pro pomalé procesy vazká deformace naroste do velkých hodnot, proti kterým je pružná deformace zanedbatelná. Také zde je poměr  $\tau = \eta/E$  charakteristickým časem (zvaným v této souvislosti *relaxační čas*) a funkci poddajnosti (1.14) lze přepsat jako

$$J_0(t) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) H(t) \quad (1.23)$$

Názorný význam relaxačního času  $\tau$  je zřejmý z obr. 1.4a.

### 1.1.3 Integrovní vztah mezi deformací a napětím

Hlavní síla principu superpozice spočívá v tom, že díky němu můžeme na základě znalosti funkce poddajnosti spočítat vývoj deformace odpovídající libovolné předepsané historii napětí. Začneme nejprve speciálními případy a postupně přejdeme k obecnému výrazu. Samotná funkce poddajnosti  $J$  popisuje vývoj deformace při dotvarovací zkoušce, kdy se napětí v okamžiku  $t'$  skokově zvýší z nulové hodnoty na jistou hodnotu  $\hat{\sigma}$  a pak zůstává konstantní. Odpovídající deformace v čase  $t$  se vypočte jako  $\varepsilon(t) = \hat{\sigma}J(t, t')$ . Pokud se napětí v okamžiku  $t_1$  zvýší z nuly na  $\sigma_1$ , poté zůstane konstantní do okamžiku  $t_2$ , ve kterém se zvýší na  $\sigma_2$ , a od tohoto okamžiku zůstává konstantní, můžeme funkci popisující historii napětí rozložit na součet dvou skokových funkcí a zapsat ji jako

$$\sigma(t) = \Delta\sigma_1 H(t - t_1) + \Delta\sigma_2 H(t - t_2) \quad (1.24)$$

kde  $\Delta\sigma_1 = \sigma_1$  a  $\Delta\sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_1$ . Jelikož napětí mění se podle funkce  $\Delta\sigma_1 H(t - t_1)$  vyvolá deformaci popsanou funkcí  $\Delta\sigma_1 J(t, t_1)$  a napětí  $\Delta\sigma_2 H(t - t_2)$  vyvolá deformaci  $\Delta\sigma_2 J(t, t_2)$ , můžeme podle principu superpozice zapsat historii deformace odpovídající historii napětí (1.24) jako

$$\varepsilon(t) = \Delta\sigma_1 J(t, t_1) + \Delta\sigma_2 J(t, t_2) \quad (1.25)$$

Tuto úvahu pak lze indukci rozšířit na libovolný konečný počet sčítanců, takže pro napětí popsané funkcí

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k H(t - t_k) \quad (1.26)$$

odpovídající vývoj deformace vyjádříme jako

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k J(t, t_k) \quad (1.27)$$

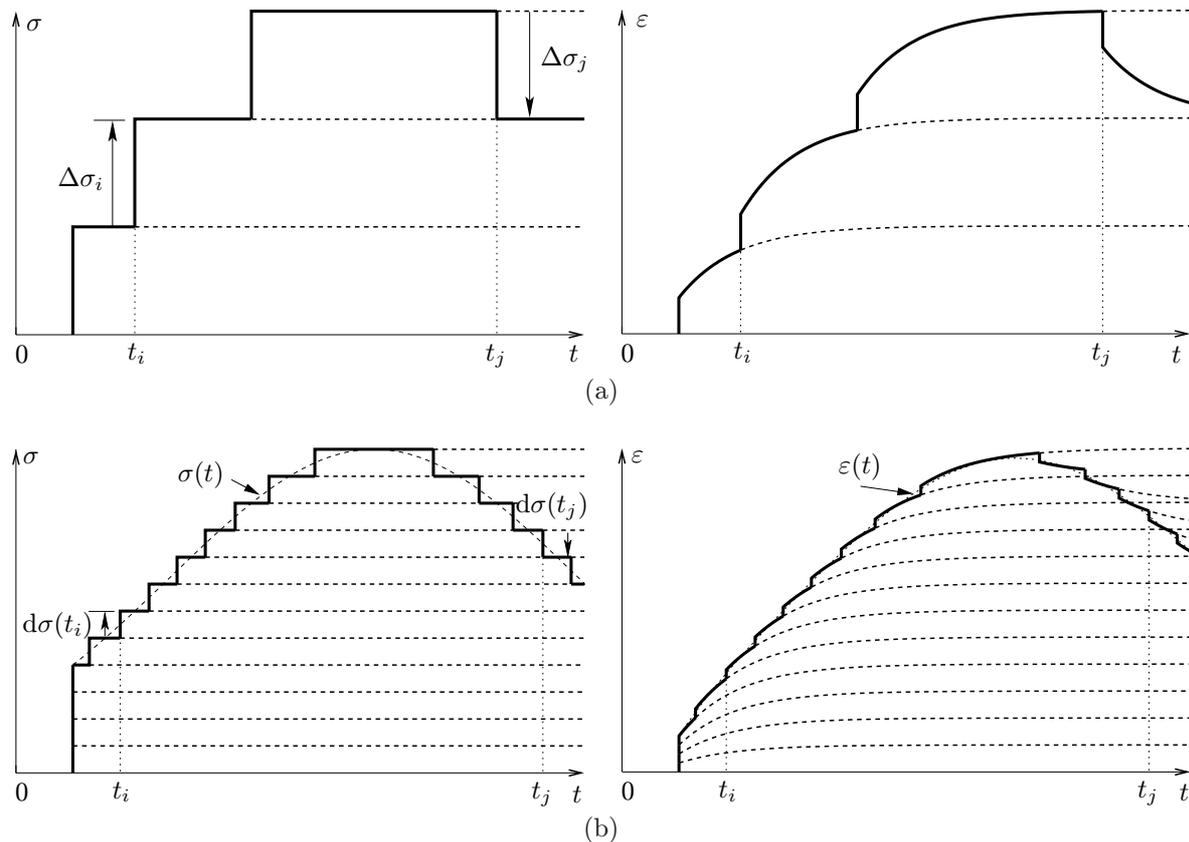
Graficky je tento postup zachycen na obr. 1.5a.

Podle vztahů (1.26)–(1.27) bychom mohli popsat případy, kdy se napětí mění skokem v konečném počtu okamžiků a mezi těmito skoky zůstává konstantní. Zmenšováním délky intervalů mezi sousedními skoky a současným zmenšováním velikosti těchto skoků získáme aproximaci spojitého vývoje napětí, viz obr. 1.5b. Pro spojitě diferencovatelnou funkci  $\sigma(t)$  se ze sumy ve vzorci (1.27) limitním přechodem stane integrál a vztah pro výpočet deformace zapíšeme jako

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t J(t, t') \dot{\sigma}(t') dt' \quad (1.28)$$

kde  $t_0$  označuje čas, do kterého bylo napětí nulové. Všimněte si, že konečný počet izolovaných časových okamžiků  $t_k$  byl nahrazen spojitě se měnící integrační proměnnou  $t'$  a konečné přírůstky  $\Delta\sigma_k$  v časech  $t_k$  byly nahrazeny infinitezimálními přírůstky  $d\sigma = \dot{\sigma}(t') dt'$ .

Vzorec (1.28) je použitelný nejen, pokud je funkce  $\sigma(t)$  spojitě diferencovatelná, ale i pokud je aspoň spojitá a po částech spojitě diferencovatelná (tj. její derivace může mít nespojitosti v konečném počtu časových okamžiků). Pro ty okamžiky, ve kterých se časová derivace napětí  $\dot{\sigma}$  mění skokem, můžeme její hodnotu dodefinovat libovolně (např. jako derivaci zleva nebo jako derivaci zprava), aniž by to mělo vliv na hodnotu integrálu ve vzorci (1.28).



Obrázek 1.5: Použití principu superpozice: (a) konečný počet sčítanců ( $\Delta\sigma_i > 0$ ,  $\Delta\sigma_j < 0$ ), (b) limitní přechod ke spojitým funkcím.

Jestliže se samo napětí mění skokem v konečném počtu časových okamžiků, vyjádříme funkci  $\sigma(t)$  jako součet spojitě funkce a funkce tvaru (1.26). Podle principu superpozice pak příslušný vzorec pro výpočet deformace získáme spojením vzorců (1.27) a (1.28). Často se stává, že napětí se změní skokem na počátku zatěžování, v čase  $t_0$ , a to z nuly na  $\sigma_0$ , a nadále se vyvíjí spojitě. V tomto případě se deformace vypočte podle vzorce

$$\varepsilon(t) = J(t, t_0) \sigma_0 + \int_{t_0}^t J(t, t') \dot{\sigma}(t') dt' \quad (1.29)$$

### Příklad 1.3: Výpočet odezvy Kelvinova modelu přímou integrací

Pro Kelvinův model s parametry  $E$  a  $\eta$  určíme vývoj deformace při zatížení napětím, které se z nulové hodnoty v čase 0 lineárně zvětšuje až na hodnotu  $\hat{\sigma}$  v čase  $t_1$  a dále zůstává konstantní (obr. 1.6a). Takovou historii napětí můžeme popsat funkcí

$$\sigma(t) = \begin{cases} \hat{\sigma} t / t_1 & \text{pro } 0 \leq t \leq t_1 \\ \hat{\sigma} & \text{pro } t_1 \leq t \end{cases} \quad (1.30)$$

Předpoklady o spojitosti jsou splněny, takže můžeme použít vzorec (1.28). Za funkci poddajnosti  $J(t, t')$  dosadíme  $J_0(t - t')$ , kde funkce  $J_0$  je pro Kelvinův model dána vztahem (1.22). Čas  $t_0$  položíme roven nule a deformaci v libovolném časovém okamžiku  $t$  mezi 0 a  $t_1$  spočítáme jako

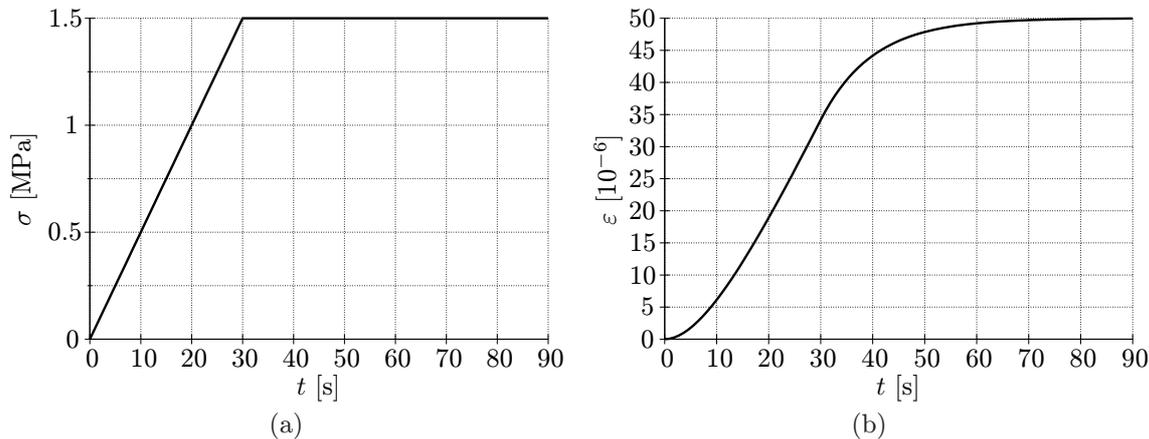
$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{1}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \right] \frac{\hat{\sigma}}{t_1} dt' = \frac{\hat{\sigma}}{Et_1} \left[ t - \tau + \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (1.31)$$

Pokud chceme vyjádřit deformaci v čase  $t$  větším než  $t_1$ , je třeba vzít v úvahu, že pro  $t' > t_1$  je  $\dot{\sigma}(t') = 0$ . Integrál od nuly do  $t$  rozdělíme na součet integrálů od nuly do  $t_1$  a od  $t_1$  do  $t$ . Přitom v druhém z těchto integrálů se integruje nulová funkce, takže celý integrál je nulový. Můžeme tedy psát

$$\varepsilon(t) = \int_0^{t_1} \frac{1}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \right] \frac{\hat{\sigma}}{t_1} dt' = \frac{\hat{\sigma}}{E} \left[ 1 - \frac{\tau}{t_1} \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau}\right) + \frac{\tau}{t_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (1.32)$$

Zdůrazněme znovu, že vztah (1.31) popisuje vývoj deformace pro čas  $t$  v intervalu  $[0, t_1]$  a vztah (1.32) platí pro časy  $t$  větší než  $t_1$ . Výsledná funkce je graficky zobrazena na obr. 1.6b pro konkrétní hodnoty  $\hat{\sigma} = 1,5$  MPa,  $E = 30$  GPa,  $\tau = 10$  s a  $t_1 = 30$  s.

□



Obrázek 1.6: (a) Předepsaný vývoj napětí a (b) odpovídající vývoj deformace pro Kelvinův model.

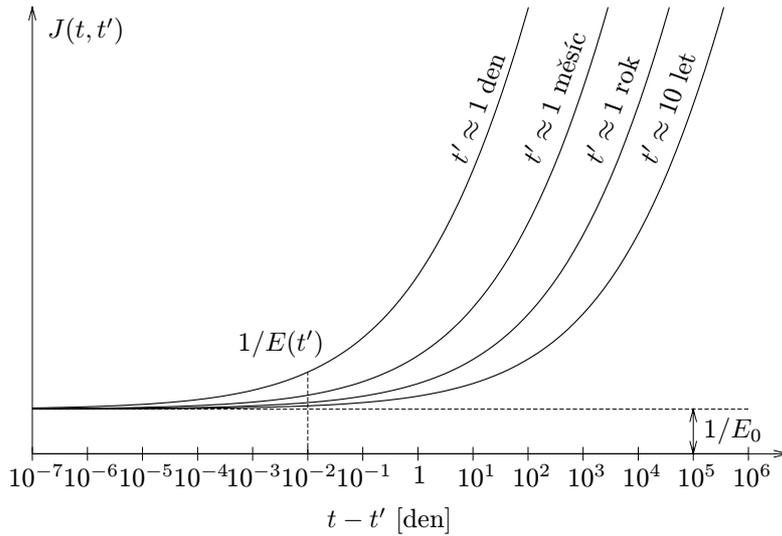
Předchozí příklad by bylo možno řešit také na základě rovnic popisujících vztahy mezi napětím a deformací v jednotlivých člancích Kelvinova modelu. Podobně jsme postupovali při odvození funkce poddajnosti pro tento model. Připomeňte si, že přitom bylo třeba řešit diferenciální rovnici (1.17), která vyjadřuje skutečnost, že celkové napětí je součtem napětí v pružině  $E\varepsilon$  a napětí v tlumiči  $\eta\dot{\varepsilon}$ . Při dotvarovací zkoušce je napětí  $\hat{\sigma}$  na pravé straně této rovnice konstantní a analytické řešení se získá snadno. Pro historii napětí popsanou po částech lineární funkcí (1.30) lze analytické řešení získat též, ale postup je pracnější. Integrovaný vztah (1.28) s funkcí poddajnosti odpovídající Kelvinovu modelu vlastně popisuje řešení zobecněné rovnice (1.17) s časově proměnnou pravou stranou  $\sigma(t)$ , vyhovující jistým podmínkám spojitosti. Místo řešení diferenciální rovnice „stačí“ vyhodnotit příslušný integrál. To je ovšem výhoda pouze zdánlivá, protože pro složité funkce  $\sigma(t)$  sice diferenciální rovnici není možné vyřešit analyticky, ale v takových případech se nám ani nepodaří vyhodnotit analyticky integrál v (1.28). Místo přesného řešení pak nastupují přibližné numerické metody a jak uvidíme později, při řešení rozsáhlých úloh je výhodnější pracovat s diferenciálním popisem. Jistou výhodou integrálního popisu je možnost pracovat s téměř libovolnou funkcí poddajnosti, zatímco diferenciální rovnice tvaru (1.17) popisuje jen Kelvinův model, jehož funkce poddajnosti má tvar (1.20) s pouze dvěma volnými parametry použitelnými pro aproximaci skutečného chování materiálu. Tuto nevýhodu ale do značné míry odstraníme přechodem k obecnějšímu reologickému schématu — Kelvinovu řetězci (viz článek 1.1.6).

### 1.1.4 Funkce poddajnosti pro beton

Obraťme tedy pozornost k otázce, jak vypadají funkce poddajnosti pro skutečné materiály a do jaké míry jsou blízké jednoduchým funkcím odpovídajícím Kelvinovu nebo Maxwellovu modelu. Odpověď samozřejmě závisí na konkrétním typu materiálu. Z hlediska aplikací ve stavebnictví nás nejvíce zajímá dotvarování betonu. Experimenty ukazují, že deformace betonového vzorku se za konstantního napětí významně zvyšuje nejen v prvních sekundách a minutách po zatížení, ale i později, a přestože rychlost jejího růstu se samozřejmě snižuje, dotvarování se nikdy úplně nezastaví. Proto není možné celý vývoj poddajnosti zachytit grafem funkce  $J(t, t')$  v přirozeném měřítku. Pokud bychom na vodorovné ose vynesli čas například od počátku zatížení do 30 let, celý počáteční vývoj v průběhu prvních dnů, týdnů a měsíců by se scvrkl do malého, téměř svislého úseku. Pokud bychom naopak vynesli zřetelně vývoj v počátečních hodinách a dnech, zbytek křivky by se „nevešel na papír“. Proto je výhodné použít semilogaritmické měřítko, tj. na vodorovnou časovou osu vynášet logaritmus doby zatížení (rozdíl  $t - t'$ ) a svislou osu ponechat v přirozeném měřítku. Na obr. 1.7 je tímto způsobem vynesena graf funkce poddajnosti pro beton zatížený od stáří  $t' = 28$  dní. Jak je vidět, pro velmi krátké doby zatížení je příslušná křivka téměř vodorovná a v limitě pro  $t \rightarrow t'^+$  se hodnota funkce poddajnosti blíží k jisté limitě  $J(t', t')$ , jejíž převrácená hodnota  $E_0 = 1/J(t', t')$  je tzv. *asymptotický modul pružnosti*. Bez této úvahy by bylo těžké jednoznačně definovat, co se rozumí okamžitou deformací, resp. okamžitým modulem pružnosti, protože při praktickém měření není možné zjistit hodnotu deformace přesně v tomtéž okamžiku, ve kterém je vzorek zatížen (a přísně vzato není ani možné zatížení aplikovat skokem, bez jakékoliv časové prodlevy).

V praxi se ale spíše než asymptotický modul pružnosti používá tzv. *konvenční modul pružnosti*, který se zjišťuje jako počáteční sklon pracovního diagramu určeného testem, při němž se napětí a deformace postupně zvětšují určitou zvolenou rychlostí. Naměřené hodnoty, ze kterých se konvenční modul pružnosti určí, tudíž závisí mimo jiné na rychlosti zatěžování a zahrnují v sobě nejen okamžitou odezvu, ale i raná stádia dotvarování.<sup>4</sup> Proto konvenční modul pružnosti neodpovídá asymptotickému modulu  $1/J(t', t')$ , ale spíše hodnotě  $1/J(t' + \Delta t, t')$ , kde  $\Delta t$  je jistá časová prodleva, přesně ovšem neurčená (v literatuře se uvádí např.  $\Delta t = 0,01$  dne). Naproti tomu asymptotický modul pružnosti je definován objektivně, pomocí asymptoty grafu funkce poddajnosti v semilogaritmickém měřítku. Jeho hodnota je blízká tzv. *dynamickému modulu pružnosti*, který se

<sup>4</sup>V této souvislosti používáme pojem „dotvarování“ v širším smyslu, tedy nikoli pouze jako samovolné zvyšování deformace za konstantního napětí, ale obecně jako projev viskoelastického chování materiálu.



Obrázek 1.7: Funkce poddajnosti pro beton v semilogaritmickém měřítku.

určuje z měření rychlosti šíření vln v materiálu, tedy z procesu, při kterém se deformace mění mnohem rychleji, než při konvenční statické zkoušce. Dynamický modul odpovídá prodlevě zhruba  $\Delta t = 10^{-7}$  dne.

Z obr. 1.7 je dále patrné, že pro velmi dlouhé doby zatížení se graf funkce poddajnosti v semilogaritmickém měřítku také blíží přímce, tentokrát ale nikoli vodorovné. Vzhledem k tomu, že na vodorovné ose je vyneseno logaritmus  $t - t'$ , znamená to, že pro pozdní stádia dotvarování je funkce poddajnosti přibližně logaritmická. To odpovídá již zmíněné skutečnosti, že dotvarování betonu se nikdy úplně nezastaví, ale jeho rychlost se postupně snižuje.

Zatím jsme funkci poddajnosti  $J(t, t')$  zkoumali pro pevně zvolenou hodnotu  $t'$ , tedy pro dané stáří betonu na počátku dotvarovací zkoušky. Vzhledem k probíhajícím chemickým procesům se mikrostruktura betonu (přesněji řečeno mikrostruktura tvrdnoucí cementové pasty, která tvoří pojivo) v čase mění, a proto poddajnost závisí nejen na době  $t - t'$ , po kterou napětí působilo, ale také na počátečním stáří betonu, vyjádřeném proměnnou  $t'$ . Podle zkrácené verze modelu B3 (Bažant a Chern, 1985) lze funkci poddajnosti pro beton (po zanedbání účinku interakce mezi smršťováním a dotvarováním) přibližně popsat vztahem

$$J(t, t') = \frac{1}{E_0} + q_s \ln [1 + \psi (t'^{-m} + \alpha) (t - t')^n] \quad (1.33)$$

do kterého se časy  $t$  a  $t'$  dosazují ve dnech a uvažuje se  $t \geq t'$ . Parametry  $E_0$ ,  $q_s$ ,  $\psi$ ,  $m$ ,  $\alpha$  a  $n$  je vhodné určit tak, aby se teoretická křivka co nejvíce blížila experimentálně zjištěné křivce pro daný typ betonu. Jejich typické hodnoty jsou  $\psi = 0,3$ ,  $m = 0,5$ ,  $\alpha = 0,001$  a  $n = 0,1$ . Za hrubý odhad parametru  $E_0$ , který zde představuje asymptotický modul pružnosti, lze vzít  $E_0 = E_{28}/0,6$ , kde  $E_{28}$  je konvenční modul pružnosti daného betonu ve stáří  $t' = 28$  dní, a parametr  $q_s$  lze odhadnout jako  $q_s = 11,4/E_{28}$ . Vzorci (1.33) se v anglicky psané literatuře říká „log-double-power law“.

Při praktickém navrhování betonových konstrukcí se často pracuje s pojmem *součinitel dotvarování*. Tento součinitel je definován jako poměr nárůstu deformace způsobeného dotvarováním k počáteční „pružné“ deformaci a je tudíž funkcí jednak času  $t$ , ve kterém deformaci způsobenou dotvarováním vyhodnocujeme, jednak stáří betonu  $t'$  na počátku působení napětí. Problém je ovšem v tom, že počáteční „pružná“ nebo „okamžitá“ deformace není jednoznačně definována, stejně jako „okamžitý“ modul pružnosti (pokud za něj nepovažujeme asymptotický modul). Pokud je pro tento modul zvolena určitá definice a je tudíž známa jeho (na stáří závislá) hodnota  $E(t')$ , můžeme odpovídající pružnou deformaci vyjádřit jako  $\hat{\sigma}/E(t')$  a příspěvek dotvarování k deformaci v čase  $t$  vypočteme jako rozdíl celkové a pružné deformace, tedy jako  $\hat{\sigma}J(t, t') - \hat{\sigma}/E(t')$ . Odtud získáme výraz pro součinitel dotvarování

$$\phi(t, t') = \frac{\hat{\sigma}J(t, t') - \hat{\sigma}/E(t')}{\hat{\sigma}/E(t')} = E(t')J(t, t') - 1 \quad (1.34)$$

Naopak pokud je v normě dán vzorec pro součinitel dotvarování, odpovídající funkci poddajnosti získáme jako

$$J(t, t') = \frac{1 + \phi(t, t')}{E(t')} \quad (1.35)$$

Potíže mohou nastat, pokud je v normě specifikován součinitel dotvarování, ale není jasně vymezeno, k jaké definici modulu pružnosti  $E(t')$  se váže. Proto je třeba postupovat obezřetně a pokud možno dávat přednost funkci poddajnosti, která je definována jednoznačně.

Pro názornější představu o tom, jak významný může být vliv dotvarování na deformaci betonové konstrukce, jsou v tab. 1.1 uvedeny hodnoty součinitele dotvarování odpovídajícího zkrácené verzi modelu B3 s typickými

Tabulka 1.1: Hodnoty součinitele dotvarování  $\phi(t, t')$  pro různá stáří betonu  $t'$  a různé doby zatěžování  $t - t'$ .

$t - t'$	$t' = 7$ dní	$t' = 28$ dní	$t' = 1$ rok
15 min	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$
1 hod	0,084	0,060	0,024
1 den	0,315	0,229	0,093
1 měsíc	0,647	0,474	0,194
1 rok	0,962	0,711	0,294
30 let	1,509	1,133	0,474

hodnotami parametrů, uvedenými v textu za rovnicí (1.33). Přitom za okamžitý modul pružnosti  $E(t')$  považujeme konvenční modul, vypočtený jako  $1/J(t' + \Delta t, t')$ , kde  $\Delta t = 0,01$  dne. Z tabulky je například patrné, že pro beton zatížený ve stáří 28 dní naroste deformace v průběhu 30 let na více než dvojnásobek okamžité deformace.

### 1.1.5 Numerický výpočet deformace pro daný vývoj napětí

Pokud má funkce poddajnosti tvar (1.33) nebo ještě složitější (jako je tomu třeba u úplné verze modelu B3), není zpravidla možné integraci ve vzorci (1.28) provést analyticky a nezbyvá, než se uchýlit k přibližné numerické integraci. Přitom je možné využít postupů známých z numerické matematiky, např. lichoběžníkového nebo Simpsonova pravidla. Obvykle nás ovšem hodnota deformace  $\varepsilon(t)$  nezajímá pouze pro jeden konkrétní okamžik  $t$ , ale chceme popsat celý vývoj deformace v určitém intervalu  $[t_0, t_{\max}]$ . Je tedy přirozené v tomto intervalu definovat okamžiky  $t_0, t_1 = t_0 + \Delta t_1, t_2 = t_1 + \Delta t_2, \dots, t_{n-1} = t_{n-2} + \Delta t_{n-1}, t_n = t_{n-1} + \Delta t_n = t_{\max}$ , kde časové kroky  $\Delta t_i$  se zpravidla postupně zvětšují, a počítat pak odpovídající hodnoty deformace  $\varepsilon(t_0), \varepsilon(t_1), \dots, \varepsilon(t_{n-1}), \varepsilon(t_n)$ . Například podle nejjednoduššího obdélníkového pravidla vyjádříme deformaci v obecném okamžiku  $t_k$  (kde  $k = 1, 2, \dots, n$ ) jako

$$\varepsilon(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} J(t_k, t') \dot{\sigma}(t') dt' \approx \sum_{i=1}^k J(t_k, t_{i-1/2}) \dot{\sigma}(t_{i-1/2}) \Delta t_i \approx \sum_{i=1}^k J(t_k, t_{i-1/2}) [\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})] \quad (1.36)$$

kde  $t_{i-1/2} = (t_i + t_{i-1})/2$ .

Jak je vidět, při výpočtu hodnoty deformace v  $k$ -tém časovém kroku je třeba  $k$ -krát vyhodnotit funkci poddajnosti. Provedeme-li celkem  $n$  časových kroků, musíme tuto funkci vyhodnotit  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  krát, tedy  $n(n+1)/2$  krát. Počet operací roste s druhou mocninou počtu časových kroků a úměrně tomu se zvyšuje i doba výpočtu. Při praktických výpočtech se samozřejmě vývoj napětí a deformace nevyhodnocuje v jediném bodě konstrukce, ale ve velkém počtu bodů rozmístěných po celé konstrukci (např. při výpočtu metodou konečných prvků jde o Gaussovy integrační body všech prvků, na které je konstrukce rozdělena). Navíc je potřeba pro každý sledovaný bod ukládat v paměti počítače hodnoty napětí ve všech zvolených časových okamžicích, protože podle (1.36) musíme při výpočtu  $\varepsilon(t_n)$  znát hodnoty  $\sigma(t_i)$  pro všechna  $i$  od 0 do  $n$ . Tím se také úměrně počtu časových kroků zvyšují nároky na paměť počítače. Proto je přímá numerická integrace vhodná jen pro relativně malé úlohy (s malým počtem časových kroků a malým počtem bodů v prostoru, ve kterých se závislost mezi napětím a deformací vyhodnocuje). Pro rozsáhlé výpočty je třeba mít k dispozici efektivnější postup.

Nevýhody numerického řešení založeného na přímé integraci lze odstranit přechodem k diferenciální formulaci, tj. k popisu reologického modelu pomocí diferenciální rovnice. Příkladem je diferenciální rovnice

$$E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) = \sigma(t) \quad (1.37)$$

odpovídající Kelvinovu modelu. Označme  $\varepsilon^{(i)}$  numerickou aproximaci deformace  $\varepsilon(t_i)$  v čase  $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Pokud pro jistý čas  $t_{i-1}$  hodnotu  $\varepsilon^{(i-1)}$  již známe (z předchozího kroku řešení), můžeme hodnotu  $\varepsilon^{(i)}$  v čase  $t_i$  vypočítat přibližným řešením rovnice (1.37) v intervalu  $[t_{i-1}, t_i]$ . Při použití klasických metod bychom derivaci  $\dot{\varepsilon}$  v rámci tohoto intervalu aproximovali diferenční náhradou  $(\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(i-1)})/\Delta t_i$  a rovnicí (1.37) zapsali například v čase  $t_{i-1}$  (pak by šlo o Eulerovu dopřednou metodu) nebo v čase  $t_i$  (pak by šlo o Eulerovu zpětnou metodu). Ze vzniklé lineární rovnice by se snadno vypočítala hodnota deformace  $\varepsilon^{(i)}$  a celou proceduru by bylo možno opakovat pro následující časový interval.

Naznačený postup by byl vyhovující, pokud se napětí v čase mění poměrně „divoce“ a je tudíž třeba postupovat v krátkých časových krocích, aby byla proměna napětí správně zachycena. Často se však stává, že napětí se mění i v rámci dlouhého časového úseku plynule a je tudíž možné použít delší kroky. Potom ale chyba vzniklá diferenční náhradou narůstá a pro Eulerovu dopřednou metodu by dokonce při překročení jisté kritické hodnoty časového kroku došlo ke ztrátě numerické stability a výsledky by byly zcela nepoužitelné. Proto je vhodné vyvinout alternativní numerický postup, který vychází ze skutečnosti, že pro konstantní pravou stranu jsme rovnicí (1.37) schopni řešit analyticky. To jsme již předvedli při odvození funkce poddajnosti pro Kelvinův model, viz rovnice (1.17) a její přesné řešení (1.19). Pokud napětí v daném časovém intervalu  $[t_{i-1}, t_i]$  konstantní není, nahradíme pravou stranu rovnice (1.37) konstantou  $\sigma^{(i-1/2)}$ , určenou například zprůměrováním hodnot na

začátku a na konci tohoto intervalu, tedy jako  $\sigma^{(i-1/2)} = [\sigma(t_i) + \sigma(t_{i-1})]/2$ , nebo vyhodnocením napětí uprostřed intervalu, tedy jako  $\sigma^{(i-1/2)} = \sigma(t_{i-1/2})$ , kde  $t_{i-1/2} = (t_i + t_{i-1})/2$ . Pak už můžeme takto zjednodušenou diferenciální rovnici vyřešit a po uplatnění počáteční podmínky  $\varepsilon(t_{i-1}) = \varepsilon^{(i-1)}$  získáme funkci popisující vývoj deformace ve zkoumaném intervalu ve tvaru

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^{(i-1)} \exp\left(-\frac{t - t_{i-1}}{\tau}\right) + \frac{\sigma^{(i-1/2)}}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t_{i-1}}{\tau}\right)\right] \quad (1.38)$$

kde  $\tau = \eta/E$ . Dosazením  $t = t_i$  vypočteme hodnotu deformace na konci daného časového kroku a můžeme postoupit ke kroku následujícímu. Celý algoritmus lze popsat vzorcem

$$\varepsilon^{(i)} = \beta_i \varepsilon^{(i-1)} + (1 - \beta_i) \frac{\sigma^{(i-1/2)}}{E} \quad (1.39)$$

kde  $\beta_i = \exp(-\Delta t_i/\tau)$  je parametr závislý na poměru časového kroku  $\Delta t_i$  ku retardačnímu času  $\tau$ .

Právě odvozený numerický postup je nejjednodušším příkladem tzv. *exponenciálního algoritmu* a při konstantním napětí dává přesné výsledky pro libovolně dlouhý časový krok. V článku 1.1.8 se seznámíme s vylepšenou verzí tohoto algoritmu, která je přesná i pro napětí měnící se v čase lineárně (tj. pro konstantní rychlost napětí).

#### Příklad 1.4: Použití exponenciálního algoritmu

Principy výpočtu viskoelastické odezvy pomocí exponenciálního algoritmu budeme ilustrovat na přibližném řešení příkladu 1.3. Připomeňme, že uvažujeme Kelvinův článek s tuhostí  $E = 30$  GPa a retardačním časem  $\tau = 10$  s zatížený v rozmezí od 0 do 30 s lineárně proměnným napětím nabývajícím hodnot od 0 do 1,5 MPa a v intervalu 30 až 90 s konstantním napětím, viz též obr. 1.6a na straně 14. Pro jednoduchost ručního výpočtu budeme volit poměrně hrubý krok  $\Delta t = 30$  s, který navíc zůstane v průběhu celého výpočtu konstantní. Díky tomu má parametr  $\beta_i = \beta = \exp(-\Delta t/\tau) = \exp(-30/10) \doteq 0,04979$  pro všechny kroky stejnou hodnotu.

Na počátku zatěžování je hodnota deformace rovna nule ( $\varepsilon^{(0)} = 0$ ) a napětí  $\sigma^{(1/2)} = \sigma(\Delta t/2) = 0,75$  MPa působící v čase  $\Delta t/2 = 15$  s můžeme určit podle předpisu (1.30) nebo odečíst z obr. 1.6a. V prvním kroku položíme  $i = 1$  a podle (1.39) určíme přibližnou hodnotu deformace v čase  $t_1 = \Delta t = 30$  s jako

$$\varepsilon^{(1)} = \beta \varepsilon^{(0)} + (1 - \beta) \frac{\sigma^{(1/2)}}{E} = 0,04979 \cdot 0 + 0,95021 \frac{0,75 \text{ MPa}}{30 \text{ GPa}} \doteq 23,76 \cdot 10^{-6} \quad (1.40)$$

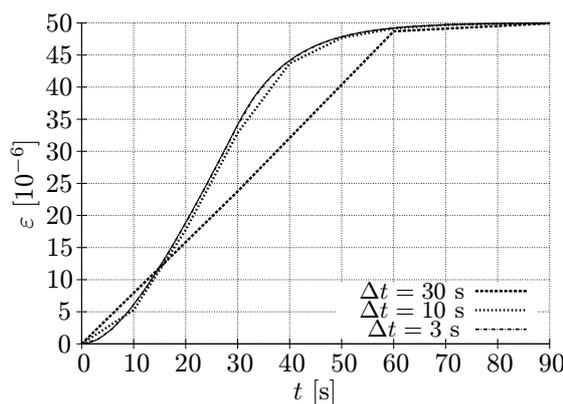
Podobně postupujeme v dalších dvou krocích, přičemž za napětí  $\sigma^{(3/2)}$  a  $\sigma^{(5/2)}$  v časech  $3\Delta t/2 = 45$  s a  $5\Delta t/2 = 75$  s dosazujeme 1,5 MPa:

$$\varepsilon^{(2)} = \beta \varepsilon^{(1)} + (1 - \beta) \frac{\sigma^{(3/2)}}{E} = 0,04979 \cdot 23,76 \cdot 10^{-6} + 0,95021 \frac{1,5 \text{ MPa}}{30 \text{ GPa}} \doteq 48,69 \cdot 10^{-6} \quad (1.41)$$

$$\varepsilon^{(3)} = \beta \varepsilon^{(2)} + (1 - \beta) \frac{\sigma^{(5/2)}}{E} = 0,04979 \cdot 48,69 \cdot 10^{-6} + 0,95021 \frac{1,5 \text{ MPa}}{30 \text{ GPa}} \doteq 49,93 \cdot 10^{-6} \quad (1.42)$$

Na obr. 1.8 je vynesena přibližný časový průběh deformace vypočtený s krokem  $\Delta t = 30$  s spolu s analytickým řešením odvozeným v příkladu 1.3. Jak je patrné, přesný průběh není zachycen příliš věrně, a to především v počáteční fázi, kdy se napětí  $\sigma(t)$  mění lineárně. To je způsobeno volbou příliš dlouhého kroku  $\Delta t$ . Jeho zkrácení na hodnotu rovnou retardačnímu času  $\Delta t = 10$  s vede k podstatnému zlepšení výsledků. Konečně volba  $\Delta t = 0,3\tau = 3$  s poskytuje průběh, který je od přesného řešení vizuálně téměř neodlišitelný. To ukazuje, že i jednoduchý exponenciální algoritmus je schopen poskytnout dostatečně přesné řešení pro časově proměnné zatížení, je-li zvolený krok řešení „rozumně malý“ vzhledem k retardačnímu času Kelvinova článku. K tomuto tématu se ještě vrátíme v odstavci 1.1.8 při diskusi vylepšené varianty algoritmu.

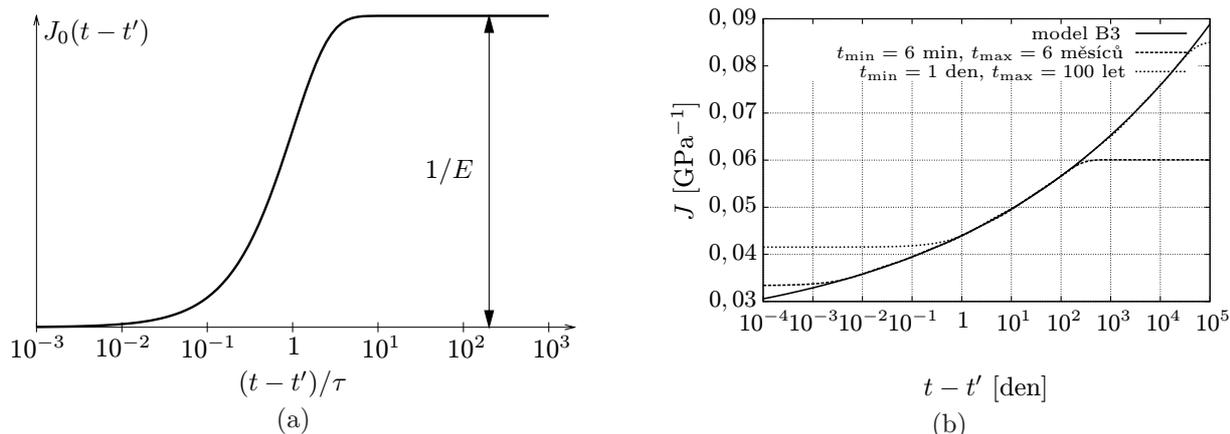
□



Obrázek 1.8: Vývoj deformace vypočtený pomocí exponenciálního algoritmu s různou délkou kroku.

### 1.1.6 Kelvinův řetězec

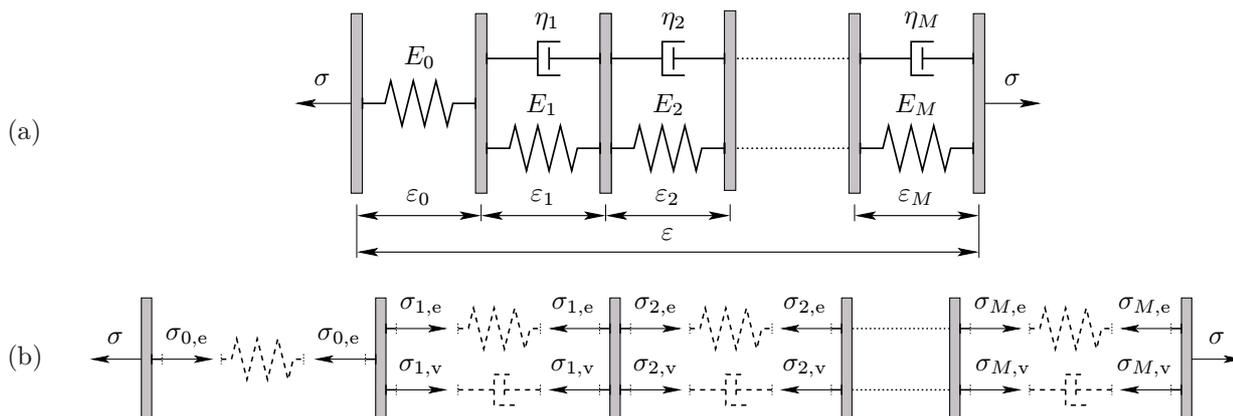
Velkou výhodou numerických postupů založených na řešení diferenciální rovnice popisující určitý reologický model je jejich úspornost ve srovnání s přímým vyhodnocováním integrálního vztahu (1.28). V každém časovém kroku se totiž vychází pouze z hodnot na začátku tohoto kroku a pomocí jistých operací se provede jejich aktualizace, tj. výpočet odpovídajících hodnot na konci kroku. Počet potřebných operací je ve všech krocích stejný, takže délka výpočtu je úměrná počtu časových kroků (a nikoli jeho druhé mocnině, jak tomu bylo pro přímou integraci). Navíc se v paměti počítače ukládají vždy jen hodnoty ze (zatím) posledního kroku a všechny předchozí hodnoty je možno „zapomenout“. Nároky na paměť tudíž vůbec nezávisí na počtu prováděných kroků, zatímco při přímé integraci se zvyšují úměrně počtu kroků. Je tedy zřejmé, že pro rozsáhlé inženýrské aplikace je jedinou rozumnou volbou postup vycházející z diferenciální rovnice. Takovou rovnici jsme ale zatím odvodili pouze pro Kelvinův model a pokud bychom chtěli pomocí příslušné funkce poddajnosti (1.22) aproximovat skutečné viskoelastické chování betonu (i jiných materiálů), narazíme na významná omezení.



Obrázek 1.9: (a) Funkce poddajnosti pro Kelvinův model, (b) funkce poddajnosti pro beton a její aproximace Dirichletovou řadou.

Příčina problémů při aproximaci skutečné funkce poddajnosti je nejlépe patrná z grafu této funkce v semilogaritmickém měřítku, viz obr. 1.7. Analogický graf pro funkci poddajnosti Kelvinova modelu (1.22) je vynesena na obr. 1.9a. Jak je vidět, funkční hodnota se významným způsobem mění pouze pro časy  $t - t'$  řádově srovnatelné s retardačním časem  $\tau$ . Pro  $t - t'$  řádově menší než  $\tau$  je hodnota  $J_0(t - t')$  prakticky nulová a pro  $t - t'$  řádově větší než  $\tau$  je  $J_0(t - t')$  velmi blízké konstantě  $1/E$ . Pomocí funkce (1.22) tedy není možno aproximovat funkci typu (1.33), ať už zvolíme parametry  $E$  a  $\tau$  jakkoli.

Jak už bylo dříve vysvětleno, retardační čas  $\tau$  hraje pro Kelvinův model roli charakteristického času, který zhruba vymezuje hranici mezi „rychlými“ a „pomalými“ procesy. Procesy, které proběhnou za časy kratší než  $0,05 \tau$  jsou z hlediska tohoto modelu prakticky okamžité, zatímco pro časy delší než  $3 \tau$  nejsou téměř vůbec aktivovány viskózní účinky. Ve skutečném materiálu probíhá celá řada fyzikálních procesů s rozdílnými charakteristickými časy. Proto je třeba v realistickém modelu použít několik článků s rozdílnými retardačními časy. Kelvinovy články nemá smysl navzájem spojovat paralelně, protože výsledek by byl ekvivalentní jedinému Kelvinovu článku (tuhosti pružin a viskozity tlumičů se při paralelním zapojení sčítají). Při sériovém zapojení několika Kelvinových článků vznikne tzv. *Kelvinův řetězec*, který představuje velmi užitečný reologický model. Pokud navíc u jednoho z článků řetězce odebereme tlumič a ponecháme jen pružinu, odstraníme hlavní nedostatek jednoduchého Kelvinova modelu, a sice jeho neschopnost postihnout okamžitou deformaci.



Obrázek 1.10: Kelvinův řetězec: (a) reologické schéma, (b) složkový obrazec.

**Příklad 1.5: Funkce poddajnosti Kelvinova řetězce**

Kelvinův řetězec znázorněný na obr. 1.10a se skládá z jedné pružiny o tuhosti  $E_0$  a  $M$  Kelvinových jednotek popsaných tuhostmi  $E_j$  a viskozitami  $\eta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . Vzhledem k sériovému zapojení jednotek je celková deformace řetězce

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^M \varepsilon_j(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \dots + \varepsilon_M(t) \quad (1.43)$$

součtem deformací jednotlivých částí. Jak je zřejmé ze složkového obrazce 1.10b, každá jednotka přenáší stejné celkové napětí  $\sigma(t)$ . Podmínky rovnováhy je tedy možné zapsat pro každou jednotku zvlášť ve tvaru

$$\sigma(t) = \sigma_{0,e}(t), \quad \sigma(t) = \sigma_{j,e}(t) + \sigma_{j,v}(t), \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (1.44)$$

Dílčí napětí přenášená pružinou a tlumičem v  $j$ -té jednotce se vypočtou ze vztahů (1.6)–(1.7), kam za  $\varepsilon_e$  a  $\dot{\varepsilon}_v$  dosazujeme deformaci  $j$ -té jednotky  $\varepsilon_j$  a její rychlost  $\dot{\varepsilon}_j$ . Po uplatnění vztahů  $\sigma_{j,e} = E_j \varepsilon_j$  a  $\sigma_{j,v} = \eta_j \dot{\varepsilon}_j$  v (1.44) dostaneme soustavu navzájem nezávislých rovnic

$$E_0 \varepsilon_0(t) = \sigma(t), \quad E_j \varepsilon_j(t) + \eta_j \dot{\varepsilon}_j(t) = \sigma(t), \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (1.45)$$

Výpočtem vývoje jednotlivých dílčích deformací  $\varepsilon_j$  z těchto rovnic a jejich dosazením zpět do (1.43) lze získat odezvu celého řetězce na libovolný zatěžovací program  $\sigma(t)$ .

Nyní přistoupíme k odvození funkce poddajnosti a zatížíme model od času 0 konstantním napětím  $\sigma(t) = \hat{\sigma}$ . Rovnice (1.45) přejdou na

$$E_0 \varepsilon_0(t) = \hat{\sigma}, \quad E_j \varepsilon_j(t) + \eta_j \dot{\varepsilon}_j(t) = \hat{\sigma}, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (1.46)$$

Konstantní hodnota deformace pružiny  $\varepsilon_0(t) = \hat{\sigma}/E_0$  vyplývá přímo z první rovnice (1.46), zatímco pro zbývající jednotky je třeba řešit diferenciální rovnice podobného tvaru jako (1.17), jejichž obecné řešení

$$\varepsilon_j(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E_j} + C_j \exp\left(-\frac{E_j}{\eta_j} t\right) \quad (1.47)$$

má podobný tvar jako (1.18). Integrační konstanty  $C_j = -\hat{\sigma}/E_j$  se snadno určí z podmínek nulových počátečních deformací jednotlivých článků. Sečtením deformací všech jednotek podle (1.43) získáváme časový průběh celkové deformace řetězce

$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{\hat{\sigma}}{E_j} \left(1 - e^{-t/\tau_j}\right) \quad (1.48)$$

kde  $\tau_j = \eta_j/E_j$  jsou retardační časy. Funkce poddajnosti pro Kelvinův řetězec

$$J_0(t) = \left[ \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j} \left(1 - e^{-t/\tau_j}\right) \right] H(t) \quad (1.49)$$

je tedy součtem funkcí poddajnosti jednotlivých článků, jak je vidět při porovnání (1.49) s (1.20).

□

Na pravé straně rovnice (1.49) se objevila řada obsahující členy exponenciálního typu, která se v matematické literatuře označuje jako *Dirichletova řada*, případně *Pronyho řada*. Pomocí takové řady lze aproximovat funkci poddajnosti tak, aby bylo docíleno dobré shody v širokém pásmu časů  $t - t'$ , které se mohou lišit o mnoho řádů. Při konečném počtu členů řady však vždy zbyde oblast velmi krátkých časů a oblast velmi dlouhých časů, ve kterých je aproximační funkce téměř konstantní. Každý z Kelvinových článků má totiž svůj retardační čas  $\tau_i$  a pro  $t - t'$  řádově menší než  $\min \tau_j$  (resp. řádově větší než  $\max \tau_j$ ) bude příslušný proces celým modelem vnímán jako okamžitý (resp. jako nekonečně pomalý). Nicméně z praktického hlediska je možné se s tímto omezením snadno vyrovnat. Vždy je třeba vymezit určitý minimální a maximální čas  $t_{\min}$  a  $t_{\max}$ , které jsou pro dané konkrétní účely zajímavé, a Kelvinův řetězec pak zkonstruovat tak, aby funkce poddajnosti byla dobře aproximována v oblasti mezi těmito časy. Například se můžeme rozhodnout, že nás zajímá postupný nárůst deformací a průhybů na dané konstrukci po dobu její životnosti až do  $t_{\max} = 100$  let, ale zatížení se mění plynule a výpočet budeme provádět s počátečním krokem 1 den, takže stačí položit  $t_{\min} = 1$  den. V jiném případě zase provedeme detailní analýzu raných stádií výstavby s krokem  $t_{\min} = 6$  minut, ale výpočet nebudeme provádět v intervalu delším než  $t_{\max} = 6$  měsíců. Jakmile jsou časy  $t_{\min}$  a  $t_{\max}$  zvoleny, je třeba pokrýt rozpětí mezi nimi pomocí vhodně zvolených retardačních časů  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$ . Přitom je zbytečné volit tyto časy příliš blízko sebe a na druhou stranu při velkých rozdílech by pro určité časy  $t - t'$  byla aproximace funkce poddajnosti zatížena velkou chybou. Doporučuje se volit retardační časy v geometrické posloupnosti s kvocientem 10, tj.  $\tau_2 = 10 \tau_1$ ,  $\tau_3 = 100 \tau_1$ ,  $\tau_M = 10^{M-1} \tau_1$ , a pro nejmenší a největší z nich splnit podmínky  $\tau_1 \leq 3 t_{\min}$  a  $\tau_M \geq 0,5 t_{\max}$ . Jakmile jsou retardační časy zvoleny, je třeba určit tuhostní konstanty  $E_1, E_2, \dots, E_M$  pro odpovídající Kelvinovy články, a také konstantu  $E_0$ , charakterizující samostatnou pružinu předřazenou před tyto články. Pokud je nejmenší retardační čas  $\tau_1$

velmi krátký (zlomek sekundy), je  $E_0$  téměř rovno asymptotickému modulu pružnosti a vystihuje okamžitou tuhost v pravém slova smyslu. Jestliže však retardační časy začínají až od vyšších hodnot, zahrnuje poddajnost pružiny  $1/E_0$  nejen okamžité účinky, ale i tu část dotvarování, ke které dojde za čas kratší než asi  $0,3\tau_1$ .

### Příklad 1.6: Aproximace funkce poddajnosti Dirichletovou řadou

Při určení parametrů Dirichletovy řady vyjdeme ze skutečnosti, že při pevně daných  $M$  retardačních časech  $\tau_j$  závisí hodnota funkce poddajnosti daná rovnicí (1.49) **lineárně** na  $M + 1$  poddajnostech článků řetězce  $1/E_j$ . Proto můžeme k určení těchto poddajností použít lineární metodu nejmenších čtverců, založenou na minimalizaci součtu čtverců rozdílů mezi cílovou funkcí poddajnosti  $J(t, t')$  a jejím rozvojem do Dirichletovy řady  $J^D(t, t')$ . Rozdíly funkčních hodnot se vyhodnocují v  $N$  zvolených porovnávacích časech  $t_k$ . Volba těchto časů obecně závisí na způsobu zadání funkce poddajnosti  $J(t, t')$ . V případě, kdy je funkce poddajnosti určena experimentálně, odpovídají tyto časy okamžikům měření funkce poddajnosti. Výsledky měření jsou nutně zatíženy určitou chybou, a proto by počet porovnávacích časů  $N$  měl být podstatně větší než počet určovaných koeficientů  $M + 1$ , jinak by mohly některé poddajnosti vyjít záporné a funkce poddajnosti by vykazovala oscilace. V případě, že je funkce poddajnosti dána analytickým předpisem (například zkráceným modelem B3 představeným v odstavci 1.1.4) se volba těchto časů řídí podobnými pravidly jako u retardačních časů  $\tau_j$ . Počet porovnávacích časů  $N$  nesmí být menší než počet neznámých  $M + 1$ , jinak by určení koeficientů  $1/E_i$  nebylo jednoznačné.

Odvodíme nejprve obecný postup a pak předvedeme jeho použití pro konkrétní případ. Pro zjednodušení zápisu zavedeme pomocné funkce

$$\alpha_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = 0 \\ 1 - e^{-(t-t')/\tau_j} & \text{pro } j = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (1.50)$$

abychom mohli Dirichletovu řadu použitou pro aproximaci funkce poddajnosti pro  $t \geq t'$  zapsat jako

$$J^D(t, t') = c_0 + \sum_{j=1}^M c_j \left(1 - e^{-(t-t')/\tau_j}\right) = \sum_{j=0}^M c_j \alpha_j(t) \quad (1.51)$$

kde koeficienty  $c_j$  mají význam poddajností jednotlivých článků Kelvinova řetězce  $1/E_j$ . Retardační časy  $\tau_j$  jsou pevně zvoleny a naším cílem je najít hodnoty  $c_j$  tak, aby byl rozdíl mezi skutečnou funkcí poddajnosti  $J(t, t')$  a její aproximací  $J^D(t, t')$  co nejmenší. Zavedeme proto funkci

$$F(c_0, c_1, \dots, c_M) = \sum_{k=1}^N \left( \sum_{j=0}^M c_j \alpha_j(t_k) - J(t_k, t') \right)^2 \quad (1.52)$$

jejíž hodnota je mírou rozdílu mezi funkcemi  $J^D(t, t')$  a  $J(t, t')$ , a pro pevně zvolené  $t'$  budeme hledat hodnoty  $c_j$ , které tuto funkci minimalizují. Je vidět, že  $F$  je kvadratickou funkcí proměnných  $c_j$ , a proto podmínky jejich nulových parciálních derivací podle  $c_j$  vedou na soustavu lineárních rovnic. Po úpravách můžeme výslednou soustavu zapsat jako

$$\sum_{j=0}^M A_{ij} c_j = b_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M \quad (1.53)$$

kde

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \alpha_i(t_k) \alpha_j(t_k), \quad b_i = \sum_{k=1}^N J(t_k, t') \alpha_i(t_k) \quad (1.54)$$

Matice soustavy lineárních rovnic (1.53) skládající se z koeficientů  $A_{ij}$  je symetrická ( $A_{ij} = A_{ji}$ ) a dá se poměrně snadno ukázat, že pro  $N > M$  je i pozitivně definitní, tedy nutně regulární. Proto má soustava (1.53) jednoznačné řešení, jímž jsou hledané poddajnosti  $c_j$ .

Odvozený obecný postup předvedeme na příkladu aproximace funkce poddajnosti zkrácené verze modelu B3, viz rovnice (1.33) na straně 15. Budeme uvažovat beton třídy C 30/37, pro který je podle Procházky a kol. (2003) střední hodnota modulu pružnosti  $E_{28} = 28$  GPa. To nám umožňuje odhadnout základní parametry modelu

$$E_0 = \frac{E_{28}}{0,6} = \frac{28}{0,6} \text{ GPa} \doteq 46,67 \text{ GPa}, \quad q_s = \frac{11,4}{E_{28}} = \frac{11,4}{28} \text{ GPa}^{-1} \doteq 0,4071 \text{ GPa}^{-1} \quad (1.55)$$

Ostatní parametry jsou rovny doporučeným hodnotám uvedeným v odstavci 1.1.4 za rovnicí (1.33). Stáří betonu v okamžiku začátku působení zatížení je uvažováno jako  $t' = 28$  dní. Stejně jako v diskusi předcházející tomuto příkladu budeme uvažovat dvě varianty výpočtu: jednak podrobnější pro časový horizont  $t_{\max} = 6$  měsíců  $\doteq 180$  dní s krokem  $t_{\min} = 6$  min  $\doteq 0,004$  dne, jednak dlouhodobější analýzu s krokem  $t_{\min} = 1$  den prováděnou až do doby životnosti  $t_{\max} = 100$  let  $\doteq 36500$  dní. Jelikož  $t_{\max}$  a  $t_{\min}$  se v obou případech liší o méně než pět řádů, stačí pět retardačních časů ( $M = 5$ ), které se pochopitelně pro obě varianty liší, viz tab. 1.2. Posledním

Tabulka 1.2: Parametry Dirichletových řad aproximujících zjednodušený model B3 na dvou různých intervalech.

$j$	$t_{\min} = 6 \text{ min}, t_{\max} = 6 \text{ měsíců}$		$t_{\min} = 1 \text{ den}, t_{\max} = 100 \text{ let}$	
	$E_j$ [GPa]	$\tau_j$ [den]	$E_j$ [GPa]	$\tau_j$ [den]
0	29,956	×	24,078	×
1	312,99	$10^{-2}$	188,38	$2 \cdot 10^0$
2	264,92	$10^{-1}$	160,37	$2 \cdot 10^1$
3	216,44	$10^0$	131,89	$2 \cdot 10^2$
4	173,42	$10^1$	106,41	$2 \cdot 10^3$
5	107,12	$10^2$	66,610	$2 \cdot 10^4$

krokem před vlastním výpočtem je volba porovnávacích časů  $t_i$ . V našem případě volíme minimální počet, tj.  $N = M + 1 = 6$ , přičemž první a poslední čas uvažujeme stejný jako příslušné retardační časy, tj.  $t_1 = \tau_1$  a  $t_N = \tau_M$ . Mezilehlé časy volíme tak, aby tvořily geometrickou posloupnost s kvocientem  $q = \sqrt[N-1]{t_N/t_1} = \sqrt[5]{\tau_5/\tau_1} = \sqrt[5]{10^4} = 6,31$ .

Parametry  $E_j$  určené popsáním postupem založeným na metodě nejmenších čtverců jsou uvedeny v tab. 1.2. Jak je zřejmé, nejedná se v žádném případě o materiálové vlastnosti, jejich hodnota silně závisí na zvolených retardačních časech. Dále tyto výsledky ilustrují, jak se hodnota tuhosti pružného článku  $E_0$  se zmenšujícím se retardačním časem  $\tau_1$  blíží asymptotickému modulu pružnosti, který je tomto případě roven 46,7 GPa. Porovnání průběhů „přesné“ funkce poddajnosti a její aproximace Dirichletovou řadou je vyneseno v semilogaritmickém měřítku na obr. 1.9b, str. 18. Jak je vidět, v rámci časového intervalu  $[t_{\min}, t_{\max}]$  je aproximace Dirichletovou řadou v obou případech téměř nerozlišitelná od původní funkce  $J(t, t')$ . Kvalita aproximace mimo tento interval ale velmi rychle klesá. Toto omezení je nutné mít na paměti při provádění praktických výpočtů.

□

### 1.1.7 Vliv stárnutí

Až dosud jsme parametry Kelvinova řetězce považovali za konstanty a výsledná funkce poddajnosti pak závisela pouze na době  $t - t'$ , která uběhla od počátku dotvarovací zkoušky. Stáří betonu  $t'$  na počátku této zkoušky jsme mlčky chápali jako pevně dané a pracovali jsme vlastně s funkcí  $J_0(t - t')$ . Jestliže chceme skutečně postihnout stárnutí a jeho vliv na viskoelastické vlastnosti, musíme připustit, že tuhosti a viskozity jednotlivých článků se mohou v čase měnit. Tato proměna odpovídá postupnému vývoji mikrostruktury materiálu, např. hydrataci cementové pasty. Zdá se celkem přirozené přejít ke stárnoucímu Kelvinovu řetězci a uvažovat tuhosti  $E_j$  a viskozity  $\eta_j = \tau_j E_j$  jako funkce stáří betonu  $t'$ . Při sestavování základních rovnic a konstrukci příslušné Dirichletovy řady je však třeba jistě obezřetnosti.

Uvažujme nejprve pružinu, jejíž tuhost se mění v čase a je popsána rostoucí funkcí  $E(t)$ . Zdálo by se, že odpovídající vztah mezi napětím a deformací lze zapsat jednoduše jako  $\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t)$ . To by ovšem mimo jiné znamenalo, že při konstantní nenulové deformaci vzrůstá napětí úměrně rostoucímu modulu pružnosti. Nárůst tuhosti je ale způsoben změnami v mikrostruktuře, které si lze v případě betonu zjednodušeně představit jako vytváření nových vrstviček hydratačních produktů. Podstatné je si uvědomit, že pokud je materiál již zdeformován, nová vrstvička se vytvoří v deformované mikrostruktuře a v okamžiku svého vzniku nepřenáší žádné napětí. Zvýšená tuhost se tedy projeví jenom při **změně** deformace, která nově vytvořenou vrstvičku zaktivuje a vyvolá v ní napětí úměrné nikoli celkové deformaci, ale jen jejímu přírůstku od okamžiku vytvoření nové vrstvičky. Po přechodu k nekonečně malým přírůstkům odpovídajícím spojitému vývoji tuhosti, napětí a deformace můžeme pro stárnoucí pružinu zapsat příslušný konstitutivní vztah v rychlostním tvaru

$$\dot{\sigma}(t) = E(t)\dot{\varepsilon}(t) \quad (1.56)$$

a celková hodnota napětí se pak vypočte integrací této rovnice.

Pokud chceme stárnoucí Kelvinův článek popsat diferenciální rovnicí, nemůžeme jednoduše sečíst napětí v pružině a tlumiči, jako jsme to udělali v případě nestárnoucího materiálu (v rovnici by se totiž objevil integrál, který vznikne při vyjádření napětí v pružině integrací jeho rychlosti dané vztahem (1.56)). Místo toho ale můžeme sečíst rychlosti těchto napětí. V případě stárnoucího materiálu se samozřejmě bude měnit i viskozita, kterou popíšeme funkcí  $\eta(t)$ . Napětí ve viskózním článku je dáno vztahem  $\sigma(t) = \eta(t)\dot{\varepsilon}(t)$  a jeho derivací dostaneme  $\dot{\sigma}(t) = \dot{\eta}(t)\dot{\varepsilon}(t) + \eta(t)\ddot{\varepsilon}(t)$ . V těchto vztazích je ovšem třeba  $\sigma$  chápat jako část napětí  $\sigma_v$  přenášenou tlumičem, zatímco v rovnici (1.56) bylo  $\sigma$  vlastně napětí  $\sigma_e$  přenášené pružinou. Při paralelním zapojení do Kelvinova modelu se obě části napětí sčítají (zatímco deformace obou článků jsou stejné) a pro celkovou rychlost napětí  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_e + \dot{\sigma}_v$  můžeme psát

$$\dot{\sigma}(t) = [E(t) + \dot{\eta}(t)]\dot{\varepsilon}(t) + \eta(t)\ddot{\varepsilon}(t) \quad (1.57)$$

Pokud je vývoj napětí v čase předepsán, představuje (1.57) diferenciální rovnici 2. řádu pro výpočet odpovídajícího vývoje deformace.

**Příklad 1.7: Funkce poddajnosti pro stárnoucí Kelvinův model**

Pro zjednodušení zápisu označíme  $D(t) = E(t) + \dot{\eta}(t)$  a rovnici (1.57) přepíšeme jako

$$D(t) \dot{\varepsilon}(t) + \eta(t) \ddot{\varepsilon}(t) = \dot{\sigma}(t) \quad (1.58)$$

Při dotvarovací zkoušce je až do jistého okamžiku  $t'$  napětí nulové a od tohoto okamžiku je rovno konstantě  $\hat{\sigma}$ . Pro  $t \neq t'$  je tudíž časová derivace napětí  $\dot{\sigma}(t)$  nulová, ale pro  $t = t'$  tato derivace (v klasickém smyslu) neexistuje. Rovnici (1.58) budeme tedy řešit až pro časy větší než  $t'$ , ale situaci v čase  $t = t'$  musíme popsat pomocí vhodných počátečních podmínek. Jak je známo, pro diferenciální rovnici 2. řádu potřebujeme dvě počáteční podmínky, a sice pro neznámou funkci a její první derivaci. V našem případě to znamená, že musíme předepsat deformaci  $\varepsilon(t')$  a rychlost deformace  $\dot{\varepsilon}(t')$  chápané jako hodnoty těsně **po** aplikaci napětí  $\hat{\sigma}$ . Pro Kelvinův model se deformace ani při skokové změně napětí nemůže změnit skokem, takže máme  $\varepsilon(t') = 0$ . Naproti tomu rychlost deformace musí skočit na nenulovou hodnotu, aby se ve viskózním članku aktivovalo napětí  $\hat{\sigma}$ . Připomeňme, že v Kelvinově modelu je na počátku dotvarovací zkoušky veškeré napětí přenášeno viskózním článkem. Ze vztahu  $\hat{\sigma} = \eta(t') \dot{\varepsilon}(t')$  snadno získáme počáteční rychlost deformace  $\dot{\varepsilon}(t') = \hat{\sigma}/\eta(t')$ .

Zatím jsme ukázali, že při odvozování funkce poddajnosti je třeba řešit rovnici (1.58) s nulovou pravou stranou a s počátečními podmínkami  $\varepsilon(t') = 0$  a  $\dot{\varepsilon}(t') = \hat{\sigma}/\eta(t')$ . Pro obecné funkce  $D(t)$  a  $\eta(t)$  by analytické řešení nebylo možné. Pokud ale předpokládáme, že poměr  $\tau = \eta(t)/D(t)$  zůstává konstantní, přejde řešená rovnice na rovnici s konstantními koeficienty

$$\dot{\varepsilon}(t) + \tau \ddot{\varepsilon}(t) = 0 \quad (1.59)$$

jejíž obecné řešení má podle dodatku A tvar

$$\varepsilon(t) = C_1 + C_2 e^{-t/\tau} \quad (1.60)$$

Z počátečních podmínek pak určíme integrační konstanty

$$C_1 = \frac{\hat{\sigma}\tau}{\eta(t')} \quad (1.61)$$

$$C_2 = -\frac{\hat{\sigma}\tau}{\eta(t')} e^{t'/\tau} \quad (1.62)$$

Po dosazení zpět do (1.60) bychom získali funkci popisující vývoj deformace v průběhu dotvarovací zkoušky. Dále uplatníme vztah  $\tau/\eta(t') = 1/D(t')$  a po vydělení deformace napětím  $\hat{\sigma}$  dostaneme funkci poddajnosti

$$J(t, t') = \frac{1 - e^{-(t-t')/\tau}}{D(t')} H(t - t') \quad (1.63)$$

□

Porovnáním (1.63) s (1.22) zjistíme, že funkce poddajnosti pro stárnoucí Kelvinův model má formálně stejný tvar jako v případě bez stárnutí. Je však třeba si uvědomit, že časově proměnný parametr  $D(t')$  není přímo roven tuhosti stárnoucí pružiny Kelvinova modelu  $E(t')$ , ale souvisí s ní a s časovou derivací viskozity podle vztahu  $D(t) = E(t) + \dot{\eta}(t)$ , resp.  $E(t) = D(t) - \dot{\eta}(t) = D(t) - \tau \dot{D}(t)$ .

Pro stárnoucí Kelvinův řetězec složený z  $M$  sériově zapojených Kelvinových článků a navíc stárnoucí pružiny o tuhosti  $D_0(t)$  se funkce poddajnosti získá sečtením funkcí poddajnosti jednotlivých článků:

$$J(t, t') = \left( \frac{1}{D_0(t')} + \sum_{j=1}^M \frac{1 - e^{-(t-t')/\tau_j}}{D_j(t')} \right) H(t - t') \quad (1.64)$$

Suma na pravé straně (1.64) je zobecněním Dirichletovy řady s uvážením stárnutí a lze jej použít pro aproximaci experimentálně určené funkce poddajnosti pro stárnoucí materiál.

**1.1.8 Exponenciální algoritmus pro stárnoucí Kelvinův řetězec**

Výsledky získané v předchozím odstavci ukazují, že vliv stárnutí se na tvaru funkce poddajnosti projeví „jen“ nahrazením konstant  $E_j$  časově závislými parametry  $D_j(t')$ . Toto zdánlivě formální rozšíření má ale zásadní dopad na analytické určení odezvy tohoto modelu. Časová závislost parametrů  $D_j(t')$  totiž velmi komplikuje možnost řešení příslušných diferenciálních rovnic v uzavřeném tvaru, a to i pro nejjednodušší zatěžovací programy. Proto je užitečné vhodně rozšířit exponenciální algoritmus, s jehož nejjednodušší variantou jsme se seznámili v článku 1.1.5, na případ Kelvinova řetězce, skládajícího se ze stárnoucí pružiny a  $M$  stárnoucích Kelvinových článků.

Stejně jako v případě nestárnoucího materiálu v časovém intervalu  $[t_0, t_{\max}]$  vymežíme okamžiky  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ve kterých budeme určovat hodnotu deformace  $\varepsilon(t)$  pro daný průběh napětí  $\sigma(t)$ . Časové kroky mezi

jednotlivými okamžiky jsou  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ . Základem pro odvození zobecněného exponenciálního algoritmu je diferenciální rovnice (1.58), upravená při popisu chování  $j$ -tého článku stárnoucího Kelvinova řetězce do tvaru

$$D_j(t) \dot{\varepsilon}_j(t) + \eta_j(t) \ddot{\varepsilon}_j(t) = \dot{\sigma}(t) \quad (1.65)$$

Řešení této rovnice komplikuje skutečnost, že  $D_j$ ,  $\eta_j$  a  $\sigma$  jsou časově závislé funkce. Proto budeme předpokládat, že se jejich hodnota v rámci jednoho výpočetního kroku v časovém intervalu  $[t_{i-1}, t_i]$  příliš nemění, takže se nedopustíme zásadní chyby, nahradíme-li je konstantami:

$$D_j(t) \approx D_j(t_{i-1/2}) = D_j^{(i-1/2)}, \quad \eta_j(t) = \tau_j D_j(t) \approx \tau_j D_j^{(i-1/2)}, \quad \dot{\sigma}(t) \approx \frac{\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i} \quad (1.66)$$

Pozvolna se měnící hodnoty materiálových parametrů jsou tedy přibližně nahrazeny konstantními hodnotami odpovídajícími středu daného intervalu a časová derivace napětí je nahrazena konečnou diferencí s krokem  $\Delta t_i$ . Poznamenejme, že pro nestárnoucí materiál by přijatá zjednodušení nevnášela do řešení žádnou chybu v případě, že by průběh napětí  $\sigma(t)$  byl na uvažovaném intervalu lineární. To ukazuje, že můžeme očekávat zvýšení přesnosti vzhledem k základní variantě algoritmu z odstavce 1.1.5, která byla přesná jen pro konstantní napětí.

Přijetí přibližných náhrad (1.66) nám umožňuje přepsat rovnici (1.65) do poněkud jednoduššího tvaru

$$\dot{\varepsilon}_j(t) + \tau_j \ddot{\varepsilon}_j(t) = \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} \quad (1.67)$$

Řešení pro případ nulové pravé strany máme už k dispozici díky analogii s rovnicí (1.59) a jejím řešením (1.60). Jako partikulární řešení lze v tomto případě použít vhodně zvolenou lineární funkci proměnné  $t$ . Obecné řešení rovnice (1.67) je tedy

$$\varepsilon_j(t) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{t - t_{i-1}}{\tau_j}\right) + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}}(t - t_{i-1}) \quad (1.68)$$

Integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$  určíme na základě znalosti hodnoty deformace  $\varepsilon_j^{(i-1)}$  a její rychlosti  $\dot{\varepsilon}_j^{(i-1)}$  na počátku zkoumaného intervalu. Tyto veličiny představují v prvním výpočetním kroku počáteční podmínky a v dalších krocích odpovídají situaci na konci předcházejícího kroku. Pro pohodlí si nejprve připravíme derivaci obecného řešení

$$\dot{\varepsilon}_j(t) = -\frac{C_2}{\tau_j} \exp\left(-\frac{t - t_{i-1}}{\tau_j}\right) + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} \quad (1.69)$$

a pak už můžeme vyhodnotit (1.68) a (1.69) pro  $t = t_{i-1}$  a dosadit do „počátečních“ podmínek:

$$\dot{\varepsilon}_j(t_{i-1}) = \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} \quad \dots \quad -\frac{C_2}{\tau_j} + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} = \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{\tau_j \Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} - \tau_j \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} \quad (1.70)$$

$$\varepsilon_j(t_{i-1}) = \varepsilon_j^{(i-1)} \quad \dots \quad C_1 + C_2 = \varepsilon_j^{(i-1)} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \varepsilon_j^{(i-1)} + \tau_j \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} - \frac{\tau_j \Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} \quad (1.71)$$

Po dosazení odvozených výrazů pro  $C_1$  a  $C_2$  do (1.68) a (1.69) dostaneme funkce popisující vývoj deformace a její rychlosti v rámci daného časového intervalu a vyhodnocením těchto funkcí pro  $t = t_i$  získáme hodnoty na konci tohoto intervalu, které se pak použijí jako počáteční podmínky v navazujícím kroku. Zavedeme-li pro zjednodušení pomocné konstanty

$$\beta_j^{(i)} = \exp\left(-\frac{\Delta t_i}{\tau_j}\right), \quad \lambda_j^{(i)} = \frac{\tau_j}{\Delta t_i} \left(1 - \beta_j^{(i)}\right) \quad (1.72)$$

můžeme výsledné vzorce pro deformaci a její rychlost na konci kroku zapsat jako

$$\dot{\varepsilon}_j^{(i)} = \beta_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{1 - \beta_j^{(i)}}{\Delta t_i D_j^{(i-1/2)}} \Delta\sigma^{(i)} \quad (1.73)$$

$$\varepsilon_j^{(i)} = \varepsilon_j^{(i-1)} + \Delta t_i \lambda_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{1 - \lambda_j^{(i)}}{D_j^{(i-1/2)}} \Delta\sigma^{(i)} \quad (1.74)$$

Tyto vzorce platí i pro pružný článek, který můžeme považovat za limitní případ Kelvinova článku s nulovou viskozitou  $\eta_0$ , tedy s nulovým retardačním časem  $\tau_0$ . V limitě pro  $\tau_0 \rightarrow 0^+$  dostaneme podle (1.72)  $\beta_0^{(i)} = 0$  a  $\lambda_0^{(i)} = 0$ .

Celková deformace řetězce je součtem deformací jednotlivých komponent včetně pružného článku:

$$\varepsilon^{(i)} = \sum_{j=0}^M \varepsilon_j^{(i)} = \sum_{j=0}^M \varepsilon_j^{(i-1)} + \Delta t_i \sum_{j=1}^M \lambda_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \left( \frac{1}{D_0^{(i-1/2)}} + \sum_{j=1}^M \frac{1 - \lambda_j^{(i)}}{D_j^{(i-1/2)}} \right) \Delta\sigma^{(i)} \quad (1.75)$$

Předchozí vztah může být přepsán do kompaktního tvaru

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i-1)} + \Delta\bar{\varepsilon}^{(i)} + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\bar{E}^{(i)}} \quad (1.76)$$

kde

$$\Delta\bar{\varepsilon}^{(i)} = \Delta t_i \sum_{j=1}^M \lambda_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} \quad (1.77)$$

představuje přírůstek deformace za konstantního napětí (tedy vliv „čistého“ dotvarování) a

$$\bar{E}^{(i)} = \left( \frac{1}{D_0^{(i-1/2)}} + \sum_{j=1}^M \frac{1 - \lambda_j^{(i)}}{D_j^{(i-1/2)}} \right)^{-1} \quad (1.78)$$

má význam efektivního modulu celého řetězce v  $i$ -tém kroku.

Zatím jsme si pro jednoduchost představovali, že je dán vývoj napětí a vyhodnocujeme odpovídající vývoj deformace. Často se však setkáme i s obrácenou úlohou, kdy máme vyhodnotit vývoj napětí způsobený předepsaným vývojem deformace. Vztah (1.76) lze interpretovat jako návod pro výpočet přírůstku deformace  $\Delta\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(i-1)}$  a přírůstkem napětí  $\Delta\sigma^{(i)}$  a vzhledem k jeho lineárnímu charakteru není problém jej invertovat a přepsat jako

$$\Delta\sigma^{(i)} = \bar{E}^{(i)} \left( \Delta\varepsilon^{(i)} - \Delta\bar{\varepsilon}^{(i)} \right) \quad (1.79)$$

Exponenciální algoritmus tedy převádí chování časově závislého Kelvinova řetězce na posloupnost lineárně pružných problémů s tuhostí  $\bar{E}^{(i)}$ , která se v jednotlivých krocích mění. Právě odvozený algoritmus je numericky náročnější než jeho základní varianta z článku 1.1.5. Tato komplikace je ale bohatě vyvážena podstatným zvýšením přesnosti metody a hlavně možností aplikace na materiál s časově proměnnými vlastnostmi.

Chování jednotlivých článků řetězce v průběhu řešeného kroku se řídí poměrem délky kroku  $\Delta t_i$  ku retardačnímu času  $\tau_j$ . Pokud platí  $\Delta t_i/\tau_j < 0,01$ , pak ze vztahu (1.72) vyplývá, že hodnota výrazu  $1 - \lambda_j^{(i)}$  je prakticky nulová a ve vzorci (1.78) tento člen do celkové poddajnosti prakticky nepřispívá (chová se jako téměř tuhý článek). Naopak v případě, kdy  $\Delta t_i/\tau_j > 100$ , se  $1 - \lambda_i$  blíží jedné a příslušný článek se chová jako pružina.

Tyto závěry přímo ovlivňují vhodnou volbu kroku při numerickém výpočtu. Stejně jako v případě základní varianty je i pro zobecněný exponenciální algoritmus výpočetní náročnost úměrná počtu časových kroků. Protože se ale při vyšetřování časově závislého chování betonových konstrukcí pohybujeme v časových intervalech o délce řádově desítek let, vedla by volba konstantního časového kroku v průběhu celé analýzy na velmi zdoluhavý výpočet. Jak bylo totiž vidět v příkladu 1.4, pro získání dostatečně přesných výsledků je třeba volit časový krok alespoň třikrát menší, než je retardační čas Kelvinova článku. Tento odhad můžeme konzervativně použít i pro vylepšenou variantu algoritmu, která je o řád přesnější.

Uvědomme si, že jednotlivé články řetězce vykazují viskoelastické chování jen pro délky kroků zhruba srovnatelné s jejich retardačním časem, a že retardační časy jsou voleny ve tvaru geometrické posloupnosti. Toto pozorování nám poskytuje návod pro volbu délky integračního kroku. Budeme tedy zvětšovat časový krok  $\Delta t_i$  podle geometrické posloupnosti tak, aby po určitém počtu zvětšení (například po třech) krok narostl o jeden řád. Pokud tedy výpočet začneme s krokem  $\Delta t_1$ , další kroky volíme jako  $\Delta t_{i+1} = \sqrt[3]{10} \Delta t_i$ . Touto jednoduchou volbou máme zajištěn **logaritmický** nárůst výpočetní náročnosti algoritmu vzhledem k délce časového intervalu  $[t_0, t_{\max}]$  při zachování rozumné přesnosti výsledků. To umožňuje použití takového algoritmu při řešení rozsáhlých inženýrských úloh.

### 1.1.9 Relaxace a Maxwellův řetězec

Při popisu základních viskoelastických vlastností materiálu jsme se zatím soustředili na funkci poddajnosti, která charakterizuje dotvarování za konstantního napětí. Příslušný laboratorní test lze totiž provést poměrně snadno a většina experimentálních dat pro beton je vztažena právě k tomuto typu zatěžování. Z teoretického hlediska však pozornost zasluhuje také relaxační proces probíhající za konstantní deformace. Při *relaxační zkoušce* je materiálu v čase  $t'$  nucena jistá deformace  $\hat{\varepsilon}$  a nadále je udržována na konstantní hodnotě. Průběh deformace je tedy popsán funkcí  $\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon}H(t-t')$ . Podle principu superpozice je odpovídající průběh napětí úměrný zvolené hodnotě deformace, takže jej můžeme popsat funkcí  $\sigma(t) = \hat{\varepsilon}R(t, t')$ , kde  $R$  je *relaxační funkce*, která charakterizuje časově závislou tuhost materiálu a je v jistém smyslu inverzní k funkci poddajnosti. Pro lineárně pružný materiál bez stárnutí by relaxační funkce byla rovna modulu pružnosti, přesněji řečeno by platilo  $R(t, t') = EH(t-t')$ , zatímco funkce poddajnosti by měla tvar  $J(t, t') = (1/E)H(t-t')$ . V obecném případě ovšem není  $R(t, t')$  rovno převrácené hodnotě  $J(t, t')$ , jak ukazuje následující příklad.

#### Příklad 1.8: Relaxační funkce pro Maxwellův model

Připomeňme, že Maxwellův model vzniká sériovým zapojením pružiny a tlumiče, viz obr. 1.2a. Při jeho zatížení

předepsaným časovým průběhem deformace  $\varepsilon(t)$  není předem známo, jak se budou vyvíjet dílčí deformace  $\varepsilon_e$  a  $\varepsilon_v$  v jednotlivých člancích, musí však být splněna podmínka kompatibility

$$\varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t) = \varepsilon(t) \quad (1.80)$$

Jelikož oba články při sériovém zapojení přenášejí stejné napětí  $\sigma(t)$  (viz obr. 1.2b), pokusíme se pomocí něj vyjádřit jednotlivé dílčí deformace. To není žádný problém pro pružný článek, ve kterém je deformace úměrná napětí. Pro viskózní tlumič ale platí přímá úměrnost mezi napětím a **rychlostí** deformace. Proto musíme nejprve přepsat rovnici (1.80) do rychlostního tvaru

$$\dot{\varepsilon}_e(t) + \dot{\varepsilon}_v(t) = \dot{\varepsilon}(t) \quad (1.81)$$

a teprve pak se nám podaří dosadit  $\dot{\varepsilon}_e(t) = \dot{\sigma}(t)/E$  a  $\dot{\varepsilon}_v(t) = \sigma(t)/\eta$  a odvodit tak diferenciální rovnici

$$\frac{1}{E}\dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta}\sigma(t) = \dot{\varepsilon}(t) \quad (1.82)$$

kteřou lze obecně použít pro výpočet napětí vyvolaného předepsaným časovým vývojem deformace.

Při určení relaxační funkce zatížíme model od času 0 konstantní deformací  $\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon}$ . Rychlost deformace  $\dot{\varepsilon}(t)$  je tedy pro časy  $t > 0$  nulová a rovnice (1.82) se zjednoduší na

$$\frac{1}{E}\dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta}\sigma(t) = 0 \quad (1.83)$$

Její obecné řešení je

$$\sigma(t) = Ce^{-Et/\eta} = Ce^{-t/\tau} \quad (1.84)$$

kde  $\tau = \eta/E$  je relaxační čas, již zmíněný v odstavci 1.1.2. Pro určení integrační konstanty  $C$  potřebujeme vhodnou počáteční podmínku. V daném případě by nebylo správné položit počáteční napětí rovno nule. V čase 0 se totiž deformace mění skokem a její derivace není v klasickém smyslu definovaná. Rovnice (1.83) tudíž popisuje až spojitý vývoj pro časy  $t > 0$ , zatímco počáteční skok deformace i napětí musíme vzít v úvahu zvlášť. Při skokové změně celkové deformace  $\varepsilon$  musí dojít ke stejné skokové změně pružné deformace  $\varepsilon_e$ , protože skoková změna vazké deformace  $\varepsilon_v$  by vyvolala v tlumiči nekonečné napětí. Pružná deformace na počátku spojitého vývoje tedy má hodnotu  $\hat{\varepsilon}$  a v pružině je napětí  $E\hat{\varepsilon}$ , které použijeme v počáteční podmínce  $\sigma(0) = E\hat{\varepsilon}$ . Z této podmínky určíme integrační konstantu  $C = E\hat{\varepsilon}$  a po dosazení do (1.84) zjistíme, že při relaxační zkoušce Maxwellova modelu je vývoj napětí v čase popsán funkcí

$$\sigma(t) = E\hat{\varepsilon}e^{-t/\tau} \quad (1.85)$$

Relaxační funkce pro Maxwellův model má tedy tvar

$$R_0(t) = Ee^{-t/\tau}H(t) \quad (1.86)$$

který se podstatně liší od převrácené hodnoty funkce

$$J_0(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}\right)H(t) = \frac{1}{E}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)H(t) \quad (1.87)$$

což je funkce poddajnosti Maxwellova modelu (1.14) odvozená v příkladu 1.1. V čase  $t = 0$  ovšem platí  $R_0(0) = E = 1/J_0(0)$ .

□

Na základě principu superpozice můžeme sestavit integrační vzorec pro výpočet vývoje napětí odpovídajícího danému vývoji deformace. Postup je podobný jako v článku 1.1.3, jen si napětí a deformace vymění role a funkce poddajnosti je nahrazena relaxační funkcí. Vyjdeme z jednoduchého případu, kdy je deformace popsána funkcí

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^n \Delta\varepsilon_k H(t - t_k) \quad (1.88)$$

tj. mění se skokem v časech  $t_1, t_2, \dots, t_n$  a mezi těmito časy zůstává beze změny. Podle principu superpozice (rozšířeného indukci na konečný počet členů) je odpovídající vývoj napětí popsán funkcí

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^n \Delta\varepsilon_k R(t, t_k) \quad (1.89)$$

Pro spojitě diferencovatelnou funkci  $\varepsilon(t)$  pak limitním přechodem získáme integrační výraz pro výpočet napětí ve tvaru

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\varepsilon}(t') dt' \quad (1.90)$$

Tento vzorec je vlastně inverzí vzorce (1.28). Jestliže se v čase  $t_0$  deformace změní skokem z nulové hodnoty na  $\varepsilon_0$  a dále je její průběh spojitý a alespoň po částech spojitě diferencovatelný, je třeba (1.90) nahradit obecnějším vzorcem

$$\sigma(t) = R(t, t_0) \varepsilon_0 + \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\varepsilon}(t') dt' \quad (1.91)$$

který představuje inverzní podobu vzorce (1.29). Ke skoku na počátku zatěžování dochází mimo jiné tehdy, jestliže předepíšeme takový vývoj deformace, který odpovídá dotvarování za konstantního napětí  $\hat{\sigma}$  od okamžiku  $t_0$ . Deformace je pak popsána funkcí  $\varepsilon(t) = \hat{\sigma} J(t, t_0)$  a napětí funkcí  $\sigma(t) = \hat{\sigma} H(t - t_0)$ . Po dosazení do (1.91) a vydělení obou stran konstantou  $\hat{\sigma}$  dostaneme jistou identitu, která popisuje vztah mezi relaxační funkcí a funkcí poddajnosti. Abychom však zabránili nedorozumění, přepíšeme nejprve formálně rovnici (1.91) tak, že symbol  $t$  nahradíme symbolem  $s$  a symbol  $t'$  nahradíme symbolem  $t$ . Výsledná identita pak má tvar

$$J(t_0, t_0) R(s, t_0) + \int_{t_0}^s R(s, t) \frac{\partial J(t, t_0)}{\partial t} dt = 1 \quad (1.92)$$

a je platná pro všechna  $s \geq t_0$ . Ve speciálním případě  $s = t_0$  integrál zmizí a dospějeme k jednoduchému algebraickému vztahu

$$J(t_0, t_0) R(t_0, t_0) = 1 \quad (1.93)$$

který vyjadřuje skutečnost, že okamžitá poddajnost je převrácenou hodnotou okamžité tuhosti.

### Příklad 1.9: Vztah mezi relaxační funkcí a funkcí poddajnosti

Platnost identity (1.92) ověříme pro Maxwellův článek. Funkce poddajnosti a dotvarování pro tento model nestárnoucího materiálu jsou dány vzorci (1.23) a (1.86):

$$J(t, t_0) = J_0(t - t_0) = \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{t - t_0}{\tau} \right) H(t - t_0) \quad (1.94)$$

$$R(t, t_0) = R_0(t - t_0) = E \exp \left( -\frac{t - t_0}{\tau} \right) H(t - t_0) \quad (1.95)$$

Začneme s prvním členem na levé straně rovnosti (1.92). Dostáváme

$$J(t_0, t_0) \cdot R(s, t_0) = \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{t_0 - t_0}{\tau} \right) H(t_0 - t_0) \cdot E \exp \left( -\frac{s - t_0}{\tau} \right) H(s - t_0) = \exp \left( -\frac{s - t_0}{\tau} \right) \quad (1.96)$$

kde jsme v posledním kroku využili skutečnosti, že  $s \geq t_0$ , takže  $H(s - t_0) = 1$ . Obdobně pro druhý člen na levé straně výrazu (1.92) platí, díky nerovnostem  $s \geq t \geq t_0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^s R(s, t) \cdot \frac{\partial J(t, t_0)}{\partial t} dt &= \int_{t_0}^s E \exp \left( -\frac{s - t}{\tau} \right) H(s - t) \cdot \frac{1}{\tau E} H(t - t_0) dt = \int_{t_0}^s \frac{1}{\tau} \exp \left( -\frac{s - t}{\tau} \right) dt = \\ &= \left[ \exp \left( -\frac{s - t}{\tau} \right) \right]_{t=t_0}^{t=s} = 1 - \exp \left( -\frac{s - t_0}{\tau} \right) \end{aligned} \quad (1.97)$$

Sečtením výsledků (1.96) a (1.97) ověříme, že skutečně platí (1.92).

□

V článku 1.1.6 jsme ukázali, že k aproximaci funkce poddajnosti se hodí Dirichletova řada tvaru (1.49), kterou je možno interpretovat jako funkci poddajnosti Kelvinova řetězce, vzniklého sériovým zapojením Kelvinových článků o různých retardačních časech. V článku 1.1.7 jsme pak sestrojili zobecnění ve tvaru (1.64), vhodné pro modely se stárnutím. V obdobném duchu je možné aproximovat relaxační funkci jinak zapsanou Dirichletovou řadou, která odpovídá relaxační funkci *Maxwellova řetězce*, vzniklého paralelním zapojením Maxwellových článků o různých relaxačních časech. Při paralelním zapojení se sčítají napětí a tedy i tuhosti, a proto je relaxační funkce Maxwellova řetězce součtem relaxačních funkcí jeho článků. Tvar relaxační funkce pro Maxwellův model (1.86) byl odvozen v příkladu 1.8. Uvážíme-li tedy  $M$  paralelně zapojených Maxwellových článků s tuhostmi  $E_j$  a relaxačními časy  $\tau_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , můžeme výslednou relaxační funkci takového řetězce zapsat jako

$$R_0(t) = \left( \sum_{j=1}^M E_j e^{-t/\tau_j} \right) H(t) \quad (1.98)$$

kde výraz v závorkách představuje zmíněnou Dirichletovu řadu. Pro modely se stárnutím se hodí zobecnění ve tvaru

$$R(t, t') = \left( \sum_{j=1}^M E_j(t') e^{-(t-t')/\tau_j} \right) H(t - t') \quad (1.99)$$

I pro tento typ modelu by bylo možno vyvinout příslušný exponenciální algoritmus pro numerický výpočet napětí odpovídajícího danému vývoji deformace nebo pro řešení opačné úlohy.

Pro beton jsou zpravidla k dispozici výsledky dotvarovací zkoušky spíše než zkoušky relaxační, a navržené modely také většinou formulují analytické vyjádření funkce poddajnosti spíše než relaxační funkce. Pokud potřebujeme pro danou funkci poddajnosti spočítat odpovídající relaxační funkci, můžeme to provést numericky na základě obecného vztahu (1.92). Pro „ruční“ výpočty se hodí přibližný vzorec, který navrhli Bažant a Kim (1979):

$$R(t, t') = \frac{0,992}{J(t, t')} - \frac{0,115}{J(t, t - \Delta t)} \left[ \frac{J(t_m, t')}{J(t, t_m)} - 1 \right], \quad \text{kde } \Delta t = 1 \text{ den}, \quad t_m = \frac{t + t'}{2} \quad (1.100)$$

### 1.1.10 Upravený efektivní modul (AAEM)

V předchozích článcích jsme ukázali, že vývoj deformace nebo napětí v daném bodě tělesa z viskoelastického materiálu lze pro obecné zatížení předepsanou historií napětí nebo deformace analyzovat například na základě aproximace funkce poddajnosti nebo relaxační funkce Dirichletovou řadou, s následným přibližným numerickým řešením odpovídajících diferenciálních rovnic pomocí exponenciálního algoritmu. Přitom se celé sledované období rozdělí na malé časové kroky, takže při výpočtu deformace nebo napětí na konci tohoto období je třeba provést poměrně velké množství početních operací. To samozřejmě není problém, pokud se výpočet provádí na počítači. Nicméně pro řešení praktických úloh je žádoucí mít k dispozici metodu, která umožní získat přibližný odhad výsledného stavu v jediném kroku a jednoduchým způsobem, avšak stále s přijatelnou chybou. Takový postup je vhodný zejména při kombinaci s řešením prutových konstrukcí metodami stavební mechaniky, čímž se budeme zabývat podrobněji v článku 1.2. Nejprve je však třeba odvodit postup použitelný pro jeden materiálový bod.

Vydeme-li ze znalosti funkce poddajnosti, jsme schopni přesně popsat chování materiálu při zatížení konstantním (v čase neměnným) napětím. Takový typ namáhání je však velmi specifický a ve své čisté podobě se vyskytuje velmi vzácně (prakticky jen při laboratorních testech). Podobně známe-li jen relaxační funkci, můžeme přesně popsat pouze chování při zatížení konstantní deformací, což je také velmi specifický případ. Jestliže však známe zároveň funkci poddajnosti i relaxační funkci a využijeme vhodným způsobem principu superpozice, získáme přesné řešení pro obecnější případy, které jsou lineární kombinací dotvarování a relaxace.

Při dotvarování je časový průběh deformace jistým násobkem funkce poddajnosti, zatímco při relaxaci je deformace jistým násobkem Heavisidovy funkce. Uvažujme tedy historii deformace, která je lineární kombinací těchto funkcí, zapsanou ve tvaru

$$\varepsilon(t) = \alpha H(t - t') + \beta J(t, t') \quad (1.101)$$

kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou libovolné konstanty ( $\alpha$  je bezrozměrné,  $\beta$  má rozměr napětí). Odpovídající historie napětí je popsána funkcí

$$\sigma(t) = \alpha R(t, t') + \beta H(t - t') \quad (1.102)$$

Nyní si představme, že místo podrobného vývoje deformace v čase jsou známy jen její hodnoty  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon$  v jistých časech  $t_1$  a  $t_2$ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $t' \leq t_1 < t_2$ , a pro jednoduchost zavedeme zkrácené označení  $J_1 = J(t_1, t')$ ,  $J_2 = J(t_2, t')$ ,  $R_1 = R(t_1, t')$  a  $R_2 = R(t_2, t')$ . Zapišeme-li (1.101) pro časy  $t_1$  a  $t_2$ , získáme dvě podmínky

$$\varepsilon_1 = \alpha + \beta J_1 \quad (1.103)$$

$$\varepsilon_2 = \alpha + \beta J_2 \quad (1.104)$$

ze kterých můžeme určit odpovídající hodnoty koeficientů

$$\alpha = \varepsilon_1 - \frac{J_1}{J_2 - J_1} \Delta\varepsilon \quad (1.105)$$

$$\beta = \frac{\Delta\varepsilon}{J_2 - J_1} \quad (1.106)$$

Tímto způsobem sestrojíme funkci ve tvaru (1.101), jejíž graf přesně prochází dvěma zvolenými body. Obecně se taková funkce samozřejmě může výrazně lišit od skutečného vývoje deformace, ale v úlohách, kde se zatížení od času  $t'$  do času  $t_2$  nijak dramaticky nemění a pouze dochází k postupnému přerozdělování vnitřních sil v konstrukci, bývá tato aproximace dostatečná. Po dosazení (1.105)–(1.106) do rovnice (1.102) zapsané pro čas  $t_1$  získáme pro napětí  $\sigma_1 = \sigma(t_1)$  odhad

$$\sigma_1 = \alpha R_1 + \beta = R_1 \varepsilon_1 + \frac{1 - R_1 J_1}{J_2 - J_1} \Delta\varepsilon \quad (1.107)$$

Podobně dosazením (1.105)–(1.106) do rovnice (1.102) zapsané pro čas  $t_2$  a odečtením výrazu pro  $\sigma_1$  podle předchozí rovnice získáme pro přírůstek napětí  $\Delta\sigma = \sigma(t_2) - \sigma(t_1)$  odhad

$$\Delta\sigma = \alpha(R_2 - R_1) = (R_2 - R_1)\varepsilon_1 - \frac{(R_2 - R_1)J_1}{J_2 - J_1} \Delta\varepsilon = (R_2 - R_1)\varepsilon_1 + E'' \Delta\varepsilon \quad (1.108)$$

První člen,  $(R_2 - R_1)\varepsilon_1$ , vyjadřuje změnu napětí při nulové změně deformace  $\Delta\varepsilon$ , tedy v důsledku relaxace. Uvědomte si, že relaxační funkce  $R$  je klesající, takže  $R_2 - R_1 < 0$  a napětí se při relaxaci snižuje. Druhý člen vyjadřuje změnu napětí v důsledku změny deformace a příslušná konstanta úměrnosti

$$E'' = \frac{(R_1 - R_2)J_1}{J_2 - J_1} \quad (1.109)$$

je *upravený efektivní modul* (v angličtině „age-adjusted effective modulus“, tedy efektivní modul upravený podle stáří).

Při praktických výpočtech je vhodné volit  $t_1$  jako  $t' + \Delta t$ , kde  $\Delta t$  je malá časová prodleva odpovídající definici konvenčního modulu pružnosti, a dále volit  $t_2$  jako obecný čas  $t$ , ve kterém chceme určit hodnotu napětí. V takovém případě můžeme místo  $J_1$  psát  $1/E$  a místo  $R_1$  psát  $E$ , kde  $E$  je okamžitý modul pružnosti pro beton o stáří  $t'$ , a dále místo  $J_2$  a  $R_2$  psát jen  $J$  a  $R$ . Výraz (1.109) pro upravený efektivní modul se pak zjednoduší na

$$E'' = \frac{(E - R)\frac{1}{E}}{J - \frac{1}{E}} = \frac{E - R}{EJ - 1} = \frac{E - R}{\phi} \quad (1.110)$$

kde jsme využili skutečnosti, že  $EJ - 1 = \phi =$  součinitel dotvarování, viz vztah (1.34). Významně se zjednoduší také vztah pro napětí  $\sigma_1$ , protože bude  $R_1J_1 = 1$  a druhý člen v (1.107) zcela odpadne, takže získáme jednoduchý Hookeův zákon

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \quad (1.111)$$

popisující „okamžitou“ odezvu materiálu (přesněji řečeno tu část odezvy, která proběhne v krátkém intervalu  $\Delta t$ ). Inverzí vztahu (1.108) získáme výraz pro přírůstek deformace

$$\Delta\varepsilon = \frac{E - R}{E''}\varepsilon_1 + \frac{\Delta\sigma}{E''} = \phi\varepsilon_1 + \frac{\Delta\sigma}{E''} \quad (1.112)$$

V této rovnici první člen,  $\phi\varepsilon_1$ , vyjadřuje přírůstek deformace při dotvarování za konstantního napětí, zatímco druhý člen,  $\Delta\sigma/E''$ , vyjadřuje změnu deformace způsobenou změnou napětí mezi časy  $t'$  a  $t$ .

Při odvození jsme pro přehlednost použili zjednodušený zápis, ale je třeba si uvědomit, na kterých časech jednotlivé veličiny závisí. Pro jistotu ještě prepíšeme (1.110)–(1.112) s explicitním vyznačením časových proměnných:

$$E''(t, t_1) = \frac{E(t_1) - R(t, t_1)}{\phi(t, t_1)} \quad (1.113)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E(t_1)} \quad (1.114)$$

$$\Delta\varepsilon = \phi(t, t_1)\varepsilon_1 + \frac{\Delta\sigma}{E''(t, t_1)} \quad (1.115)$$

Přitom  $\sigma_1 = \sigma(t_1)$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$  a  $\Delta\varepsilon = \varepsilon(t) - \varepsilon(t_1)$ .

Vztah (1.115) je základem *metody upraveného efektivního modulu (AAEM)*. Je třeba zdůraznit, že se jedná o vztah přibližný, který dává přesné výsledky jen pro procesy, které jsou lineární kombinací dotvarování a relaxace. Čím více se skutečný přetvárný proces odchyluje od tohoto předpokladu, tím více narůstá chyba metody. Uvědomte si, že záznaky se nedějí a přesný integrální výraz pro přírůstek deformace

$$\Delta\varepsilon = \phi(t, t_1)\frac{\sigma_1}{E(t_1)} + \int_{t_1}^t J(t, t')\dot{\sigma}(t')dt' \quad (1.116)$$

nelze v obecném případě nahradit algebraickým výrazem (1.115). O velikosti chyby si uděláme představu pomocí konkrétního příkladu.

### Příklad 1.10: Metoda AAEM pro materiálový bod

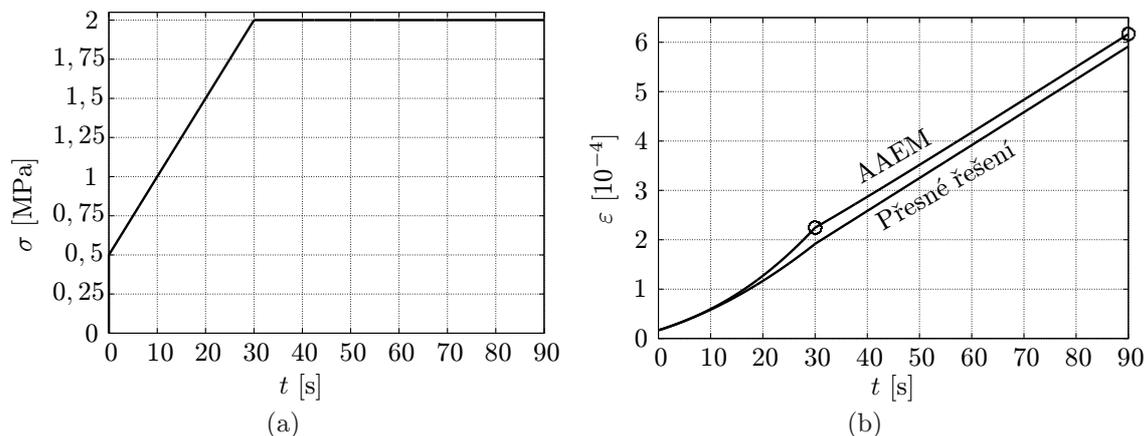
Použití metody AAEM předvedeme pro Maxwellův článek s parametry  $E = 30$  GPa a  $\tau = 10$  s, zatížený časově proměnným napětím s průběhem zobrazeným na obr. 1.11a.

Nejprve připomeňme dříve odvozené vztahy pro funkci poddajnosti a relaxační funkci podle Maxwellova modelu:

$$J(t, t') = \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{t - t'}{\tau} \right), \quad R(t, t') = E \exp \left( -\frac{t - t'}{\tau} \right) \quad (1.117)$$

Pro zjednodušení zápisu jsme vynechali  $H(t - t')$ , protože při dosazování konkrétních hodnot v tomto příkladu bude vždy  $t > t'$ . Z funkce poddajnosti a relaxační funkce můžeme odvodit výrazy pro konvenční modul pružnosti

$$E(t') = E \quad (1.118)$$



Obrázek 1.11: Použití metody AAEM na Maxwellův článek. (a) zatěžovací program, (b) odezva materiálového bodu.

součinitel dotvarování

$$\phi(t, t') = E(t')J(t, t') - 1 = \left(1 + \frac{t - t'}{\tau}\right) - 1 = \frac{t - t'}{\tau} \quad (1.119)$$

a upravený efektivní modul

$$E''(t, t') = \frac{E(t') - R(t, t')}{\phi(t, t')} = E \frac{1 - \exp[-(t - t')/\tau]}{(t - t')/\tau} = \frac{E\tau}{t - t'} \left[1 - \exp\left(-\frac{t - t'}{\tau}\right)\right] \quad (1.120)$$

Všimněte si, že okamžitý modul pružnosti  $E(t')$  pro nestárnoucí Maxwellův model je časově nezávislý a odpovídá tuhosti pružného článku  $E$ .

Právě odvozené vztahy nám poskytují všechny informace pro určení odezvy materiálového bodu pomocí metody AAEM. Za výchozí čas  $t_1$  zvolíme čas 0, ve kterém se napětí změní skokem z nuly na  $\sigma_1 = 0,5$  MPa a způsobí počáteční deformaci, kterou podle (1.114) vypočteme jako  $\varepsilon_1 = \sigma_1/E = 0,5 \text{ MPa}/30 \text{ GPa} = 16,67 \cdot 10^{-6}$ . Podle základní rovnice metody AAEM (1.115) zapíšeme přírůstek deformace od času  $t_1$  do obecného času  $t \geq t_1 = 0$  jako

$$\Delta\varepsilon(t) = \phi(t, 0)\varepsilon_1 + \frac{\Delta\sigma(t)}{E''(t, 0)} = \frac{t}{\tau}\varepsilon_1 + \frac{t}{E\tau} \cdot \frac{\Delta\sigma(t)}{1 - e^{-t/\tau}} \quad (1.121)$$

Zbývá dosadit konkrétní hodnoty  $\varepsilon_1 = 16,67 \cdot 10^{-6}$ ,  $E = 30 \text{ GPa}$  a  $\tau = 10 \text{ s}$  a vyjádřit  $\Delta\sigma(t)$ . Podle obr. 1.11a se v intervalu  $[0, 30 \text{ s}]$  napětí mění lineárně a jeho přírůstek je popsán funkcí  $\Delta\sigma(t) = 1,5 \text{ MPa} \cdot t/30 \text{ s}$ , takže po dosazení do (1.121) dostaneme

$$\Delta\varepsilon(t) = 1,667 \cdot 10^{-6} \cdot t + \frac{0,1667 \cdot 10^{-6} \cdot t^2}{1 - e^{-t/10}}, \quad 0 \leq t \leq 30 \quad (1.122)$$

kde se uvažuje čas  $t$  vyjádřený v sekundách. Od času  $t = 30 \text{ s}$  je napětí konstantní a jeho přírůstek z počáteční hodnoty  $\sigma_1$  je  $1,5 \text{ MPa}$ , takže po dosazení do (1.121) dostaneme

$$\Delta\varepsilon(t) = 1,667 \cdot 10^{-6} \cdot t + \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot t}{1 - e^{-t/10}}, \quad 30 \leq t \quad (1.123)$$

Vypočtená aproximace vývoje deformace je vynesena na obr. 1.11b spolu s přesným vývojem deformace určeným přímou integrací podle (1.116). Shoda je uspokojivá. Například v čase 90 s je přesná hodnota deformace  $591,7 \cdot 10^{-6}$  a přibližná hodnota vypočtená metodou AAEM je  $616,7 \cdot 10^{-6}$ , což odpovídá relativní chybě 4,2%, akceptovatelné z hlediska typické přesnosti inženýrských výpočtů. Hlavní výhodou metody AAEM je ale skutečnost, že hledanou hodnotu deformace můžeme odhadnout pro libovolný čas přímo, bez nutnosti přírůstkového řešení.

□

## 1.2 Analýza viskoelastických prutových konstrukcí

### 1.2.1 Základní rovnice pro viskoelastický prut

V celém článku 1.1 jsme se zabývali analýzou viskoelastického chování na úrovni tzv. materiálového bodu, tj. nekonečně malého elementárního kvádrů. Navíc jsme se zatím omezili na případ jednoosé napjatosti, při které je napjatost charakterizována jedinou nenulovou složkou napětí  $\sigma$ . Nyní postoupíme na úroveň konstrukce,

ale prozatím se budeme soustředit na prutové konstrukce namáhané ohybem, případně kombinací ohybu a tahu-tlaku. Přestože ohyb je zpravidla doprovázen smykem, vliv smykové deformace zanedbáme, takže naše analýza bude založena na klasické Navierově-Bernoulliově hypotéze, podle které všechny průřezy prutu zůstávají rovinné a kolmé na deformovanou střednici.

Začneme stručným připomenutím základních vztahů používaných při analýze prutů za předpokladu lineární pružného chování materiálu. Pracujeme v lokální soustavě souřadnic zvolené tak, že osa  $x$  prochází střednicí prutu a osy  $y$  a  $z$  jsou na ni kolmé. Navíc předpokládáme, že  $y$  a  $z$  jsou hlavní centrální osy průřezu, a že dochází k ohybu pouze kolem jedné z těchto os, konkrétně kolem osy  $y$ , takže nosník se prohýbá v rovině  $xz$ . Z předpokladu o zachování rovinnosti průřezu vyplývá, že podélný posun  $u$  libovolného bodu o souřadnicích  $(x, y, z)$  lze vyjádřit jako

$$u(x, y, z) = u_s(x) + \varphi(x)z \quad (1.124)$$

kde  $u_s$  je podélný posun bodu na střednici (tj. těžiště průřezu) a  $\varphi$  je pootočení průřezu kolem osy  $y$ . Z předpokladu o zachování kolmosti průřezu na deformovanou střednici plyne vztah  $\varphi(x) = -w'(x)$ , kde  $w$  je funkce popisující průhyb prutu (tj. příčný posun ve směru osy  $z$ ) a čárka označuje derivaci podle  $x$ . Vztah (1.124) tedy můžeme přepsat jako

$$u(x, y, z) = u_s(x) - w'(x)z \quad (1.125)$$

Uplatněním známé geometrické rovnice

$$\varepsilon(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = u_s'(x) - w''(x)z = \varepsilon_s(x) + \kappa(x)z \quad (1.126)$$

zjistíme, že normálová deformace  $\varepsilon$  je po průřezu rozdělena lineárně. Přitom jsme zavedli označení  $\varepsilon_s = u_s'$  pro relativní protažení střednice a  $\kappa = -w''$  pro křivost. Tyto dvě veličiny charakterizují deformaci na úrovni elementárního segmentu prutu, omezeného dvěma nekonečně blízkými průřezy. Proto jsou funkcí pouze souřadnice  $x$ , měřené podél osy prutu.

V zájmu stručnosti nadále neuvádíme souřadnici  $y$  v seznamu argumentů, protože za daných předpokladů (ohyb kolem hlavní centrální osy  $y$ ) jsou napětí i deformace na souřadnici  $y$  nezávislé. Pro lineárně pružný materiál se normálové napětí působící kolmo na průřez snadno vypočte z Hookeova zákona

$$\sigma(x, z) = E\varepsilon(x, z) = E\varepsilon_s(x) + E\kappa(x)z \quad (1.127)$$

Integrací napětí po průřezu získáme normálovou sílu

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_A \sigma(x, z) \, dy \, dz = \int_A [E\varepsilon_s(x) + E\kappa(x)z] \, dy \, dz = \\ &= E\varepsilon_s(x) \int_A \, dy \, dz + E\kappa(x) \int_A z \, dy \, dz = EA\varepsilon_s(x) \end{aligned} \quad (1.128)$$

a integrací součinu napětí a souřadnice  $z$  (která hraje roli ramene vzhledem k ose  $y$ ) získáme ohybový moment

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_A z\sigma(x, z) \, dy \, dz = \int_A z[E\varepsilon_s(x) + E\kappa(x)z] \, dy \, dz = \\ &= E\varepsilon_s(x) \int_A z \, dy \, dz + E\kappa(x) \int_A z^2 \, dy \, dz = EI\kappa(x) \end{aligned} \quad (1.129)$$

Při odvození jsme vzali v úvahu, že  $\int_A \, dy \, dz = A =$  obsah průřezové plochy,  $\int_A z \, dy \, dz = S =$  statický moment průřezové plochy k těžiškové ose  $y$ , který je roven nule, a  $\int_A z^2 \, dy \, dz = I =$  moment setrvačnosti průřezové plochy k ose  $y$ . Normálová síla  $N$  je tedy úměrná relativnímu protažení střednice  $\varepsilon_s$  a příslušnou konstantou úměrnosti je normálová tuhost průřezu  $EA$ , zatímco ohybový moment  $M$  je úměrný křivosti  $\kappa$  a konstantou úměrnosti je zde ohybová tuhost průřezu  $EI$ .

Zbývá ještě zmínit rovnice rovnováhy. Ze dvou silových a jedné momentové podmínky rovnováhy elementárního segmentu plynou Schwedlerovy věty

$$-N'(x) = f_x(x) \quad (1.130)$$

$$-Q'(x) = f_z(x) \quad (1.131)$$

$$M'(x) = Q(x) \quad (1.132)$$

ve kterých  $Q$  je posouvající síla a funkce  $f_x$  a  $f_z$  popisují intenzitu spojitěho zatížení působícího ve směru střednice a kolmo na ni. Zderivováním (1.132) a dosazením za  $Q'$  podle (1.131) vyloučíme posouvající sílu a získáme rovnici

$$-M''(x) = f_z(x) \quad (1.133)$$

popisující přímo vztah ohybového momentu a zatížení.

Pokud od nejjednoduššího, lineární pružného modelu materiálu přejdeme k lineární viskoelasticitě, zůstanou rovnice (1.124)–(1.126) a rovnice (1.130)–(1.133) beze změny, ale je třeba zobecnit vztahy mezi vnitřními silami

( $M$  a  $N$ ) a deformačními veličinami ( $\varepsilon_s$  a  $\kappa$ ). Hookeův zákon použitý v (1.127) bude nahrazen integrálním vzorcem pro výpočet napětí ve tvaru (1.90) nebo (1.91). Všechny funkce charakterizující stav prutu nyní musíme chápat nejen jako funkce prostorových souřadnic, ale také jako funkce času  $t$ . Prozatím předpokládáme spojitý vývoj deformace, pro který se odpovídající vývoj napětí spočítá podle vztahu (1.90), tedy jako

$$\begin{aligned}\sigma(x, z, t) &= \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\varepsilon}(x, z, t') dt' \\ &= \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\varepsilon}_s(x, t') dt' + z \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\kappa}(x, t') dt'\end{aligned}\quad (1.134)$$

Je zřejmé, že i zde bude napětí rozloženo po průřezu lineárně, ale bude se měnit v čase. Integrací napětí po průřezu získáme normálovou sílu

$$\begin{aligned}N(x, t) &= \int_A \sigma(x, z, t) dy dz = \int_A \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\varepsilon}_s(x, t') dt' dy dz + \int_A \int_{t_0}^t R(t, t') z \dot{\kappa}(x, t') dt' dy dz = \\ &= \int_A dy dz \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\varepsilon}_s(x, t') dt' + \int_A z dy dz \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\kappa}(x, t') dt' = A \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\varepsilon}_s(x, t') dt'\end{aligned}\quad (1.135)$$

Porovnáním s (1.90) zjistíme, že normálová síla  $N$  se z relativního protažení střednice  $\varepsilon_s$  vypočte stejným způsobem jako napětí  $\sigma$  z deformace  $\varepsilon$ , jen je výsledek přenásoben geometrickou konstantou  $A$  charakterizující průřez. Podobně lze pro ohybový moment odvodit vzorec

$$\begin{aligned}M(x, t) &= \int_A z \sigma(x, z, t) dy dz = \int_A \int_{t_0}^t R(t, t') z \dot{\varepsilon}_s(x, t') dt' dy dz + \int_A \int_{t_0}^t R(t, t') z^2 \dot{\kappa}(x, t') dt' dy dz = \\ &= \int_A z dy dz \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\varepsilon}_s(x, t') dt' + \int_A z^2 dy dz \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\kappa}(x, t') dt' = I \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\kappa}(x, t') dt'\end{aligned}\quad (1.136)$$

To znamená, že i ohybový moment  $M$  se z křivosti  $\kappa$  vypočte stejným způsobem jako napětí  $\sigma$  z deformace  $\varepsilon$ , jen je výsledek přenásoben geometrickou konstantou  $I$ .

Je ovšem důležité si uvědomit, že výše uvedené odvození bylo založeno na nevyssloveném předpokladu homogenního materiálu, tj. materiálu, který má ve všech bodech stejné vlastnosti. Jen díky tomu jsme mohli relaxační funkci  $R(t, t')$  považovat za nezávislou na prostorových souřadnicích a tudíž ji vytknout za integrál přes průřezovou plochu. Pokud by se však nosník skládal z částí o různých vlastnostech, výsledek by byl podstatně složitější. Takový případ nastane mimo jiné tehdy, když je nosník vybetonován postupně a jednotlivé vrstvy mají různé stáří. „Společný čas“  $t$  je pak jen pro jednu vrstvu (obvykle tu nejstarší) skutečným stářím, zatímco pro ostatní je třeba jej upravit, čímž se změní vyjádření relaxační funkce. Ale dokonce ani při jednorázové betonáži celého nosníku není předpoklad materiálové homogenity splněn, pokud je nosník vyztužen. Ocelová výztuž je totiž zcela jiným materiálem, pro který předpoklad lineárně viskoelastického chování není vhodný. V předpínací výztuži za vysokého napětí dochází také k relaxaci, ale v klasické pasivní výztuži je tento efekt zanedbatelný. Lze proto předpokládat, že ocelová výztuž se chová lineárně pružně,<sup>5</sup> a výsledné vnitřní síly získat sečtením příspěvků betonové a ocelové části průřezu.

Zatím jsme pro jednoduchost předpokládali spojitý vývoj deformace. Pokud se na počátku zatěžování, tedy v čase  $t_0$ , deformace změní skokem, lze příslušné vzorce pro výpočet normálové síly a ohybového momentu odvodit podobným způsobem, ale na základě obecnějšího vztahu mezi napětím a deformací (1.91). Uvedeme již jen výsledné vztahy

$$N(x, t) = AR(t, t_0) \varepsilon_s(x, t_0) + A \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\varepsilon}_s(x, t') dt' \quad (1.137)$$

$$M(x, t) = IR(t, t_0) \kappa(x, t_0) + I \int_{t_0}^t R(t, t') \dot{\kappa}(x, t') dt' \quad (1.138)$$

ve kterých přibýly první členy, zahrnující vliv počátečního protažení střednice  $\varepsilon_s(x, t_0)$  a počáteční křivosti  $\kappa(x, t_0)$ . Vidíme, že jde opět o vzorce formálně shodné se vzorcem (1.91) pro výpočet vývoje napětí pro daný vývoj deformace. Této analogie využijeme k sestrojení inverzních vztahů, které budou analogické vztahu (1.29), ale objeví se v nich také převrácené hodnoty geometrických konstant  $A$  a  $I$ . Získáme tak vzorce pro výpočet deformačních veličin  $\varepsilon_s$  a  $\kappa$  ze vnitřních sil  $N$  a  $M$  ve tvaru

$$\varepsilon_s(x, t) = \frac{1}{A} J(t, t_0) N(x, t_0) + \frac{1}{A} \int_{t_0}^t J(t, t') \dot{N}(x, t') dt' \quad (1.139)$$

$$\kappa(x, t) = \frac{1}{I} J(t, t_0) M(x, t_0) + \frac{1}{I} \int_{t_0}^t J(t, t') \dot{M}(x, t') dt' \quad (1.140)$$

<sup>5</sup>Po překročení jistého mezního napětí dochází v oceli k trvalým deformacím, což lze popsat pomocí pružnoplastických modelů, které budou představeny v příští kapitole.

kde tečka nad  $N$  a  $M$  označuje parciální derivaci vzhledem k časové proměnné.

Vidíme, že vztah mezi vývojem normálové síly a relativního protažení střednice, nebo mezi vývojem ohybového momentu a křivosti, je velmi podobný vztahu mezi vývojem napětí a deformace. Podobné vztahy se objeví i na úrovni konstrukce, kde popisují např. souvislost mezi vývojem síly a průhybu. Jestliže jsou takové vztahy zapsány pomocí složitých rovnic typu (1.137)–(1.140), není analogie mezi nimi na první pohled patrná a veškerá další odvození využívající těchto vztahů jsou formálně složitá. Proto zavedeme jednodušší zápis pomocí tzv. relaxačního operátoru a operátoru poddajnosti. Tyto pojmy se mohou zdát příliš abstraktní, ale při řešení složitějších úloh oceníme úspornost a přehlednost zjednodušeného zápisu.

Operátorem se obecně rozumí zobrazení, které dané funkci (vzoru) přiřadí podle určitého pravidla jinou funkci (obraz). Jednoduchým příkladem je operátor, který dané funkci přiřadí její derivaci (což je opět funkce). Obrazem funkce  $\sin x$  je pak funkce  $\cos x$ , zatímco obrazem  $x^3$  je  $3x^2$ . V tomto příkladu se jednalo o funkce proměnné  $x$ , ale podobně můžeme pracovat i s funkcemi časové proměnné  $t$ . Rovnice (1.29) dává návod, jak z funkce  $\sigma(t)$  popisující časový průběh napětí vypočítat funkci  $\varepsilon(t)$  popisující časový průběh deformace, a proto ji lze považovat za definici jistého operátoru zobrazujícího  $\sigma(t)$  na  $\varepsilon(t)$ , kterému budeme říkat *operátor poddajnosti* a značit ho symbolem  $\mathcal{J}$ . Rovnici (1.29) pak přepíšeme jednoduše jako

$$\varepsilon(t) = \mathcal{J}[\sigma(t)] \quad (1.141)$$

Argument operátoru, tedy v daném případě funkci  $\sigma(t)$ , píšeme do hranatých závorek, abychom zdůraznili, že se jedná o operátor a ne o obyčejnou funkci. Zavedeme také tzv. *relaxační operátor*  $\mathcal{R}$ , který funkci popisující časový průběh deformace zobrazuje na funkci popisující odpovídající časový průběh napětí. Rovnici (1.91) tedy přepíšeme jako

$$\sigma(t) = \mathcal{R}[\varepsilon(t)] \quad (1.142)$$

Jak je vidět, operátory  $\mathcal{J}$  a  $\mathcal{R}$  jsou navzájem inverzní, čehož budeme využívat při úpravách rovnic. Důležité také je, že oba operátory jsou lineární, takže pro libovolné funkce  $\sigma_1(t)$ ,  $\sigma_2(t)$ ,  $\varepsilon_1(t)$  a  $\varepsilon_2(t)$  a pro libovolné reálné konstanty  $c_1$  a  $c_2$  platí

$$\mathcal{J}[c_1\sigma_1(t) + c_2\sigma_2(t)] = c_1\mathcal{J}[\sigma_1(t)] + c_2\mathcal{J}[\sigma_2(t)] \quad (1.143)$$

$$\mathcal{R}[c_1\varepsilon_1(t) + c_2\varepsilon_2(t)] = c_1\mathcal{R}[\varepsilon_1(t)] + c_2\mathcal{R}[\varepsilon_2(t)] \quad (1.144)$$

To lze snadno ověřit přepsáním těchto vztahů v explicitní podobě podle (1.29) a (1.91). Koeficienty  $c_1$  a  $c_2$  nesmějí záviset na čase, ale mohou to být nejen konstanty, nýbrž i funkce jiné proměnné než  $t$ , například prostorové souřadnice  $x$ . Indukcí se uvedené vztahy rozšíří na libovolný počet sčítanců a limitním přechodem se odvodí záměnnost operátoru  $\mathcal{J}$  a integrace vzhledem k jiné proměnné než  $t$ , popsaná vzorcem

$$\mathcal{J} \left[ \int_a^b \sigma(x, t) dx \right] = \int_a^b \mathcal{J}[\sigma(x, t)] dx \quad (1.145)$$

Zaměnit lze také pořadí aplikace operátoru  $\mathcal{J}$  a derivace podle jiné proměnné než  $t$ , takže lze psát např.

$$\mathcal{J} \left[ \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{J}[\sigma(x, t)] \quad (1.146)$$

Stejná pravidla platí i pro relaxační operátor  $\mathcal{R}$ .

Dále je dobré si uvědomit, že aplikací relaxačního operátoru na Heavisideovu funkci získáme relaxační funkci, zatímco aplikací operátoru poddajnosti na Heavisideovu funkci získáme funkci poddajnosti, což se formálně zapíše jako

$$\mathcal{R}[H(t - t')] = R(t, t') \quad (1.147)$$

$$\mathcal{J}[H(t - t')] = J(t, t') \quad (1.148)$$

Pro úplnost ještě zmíníme téměř evidentní skutečnost, že operátory  $\mathcal{J}$  a  $\mathcal{R}$  zobrazují nulovou funkci opět na nulovou funkci (tj. jestliže je deformace trvale nulová, zůstává nulové i napětí a naopak).

S využitím základních vlastností lineárních operátorů snadno odvodíme rovnici (1.137). Stačí napsat

$$\begin{aligned} N(x, t) &= \int_A \sigma(x, z, t) dy dz = \int_A \mathcal{R}[\varepsilon(x, z, t)] dy dz = \mathcal{R} \left[ \int_A \varepsilon(x, z, t) dy dz \right] = \\ &= \mathcal{R} \left[ \int_A \varepsilon_s(x, t) dy dz + \int_A z\kappa(x, t) dy dz \right] = \mathcal{R}[A\varepsilon_s(x, t)] = A\mathcal{R}[\varepsilon_s(x, t)] \end{aligned} \quad (1.149)$$

Zcela analogicky se odvodí rovnice (1.138) a výsledek lze zapsat jako

$$M(x, t) = I\mathcal{R}[\kappa(x, t)] \quad (1.150)$$

Výhodou oproti původnímu odvození s explicitním vypisováním integrálů v čase (předvedenému např. v (1.136)) je velmi kompaktní zápis a zároveň naprostá obecnost, protože nemusíme rozlišovat, zda funkce, na kterou

relaxační operátor aplikujeme, je spojitá, nebo se v některých časových okamžicích mění skokem. Dále můžeme vztahy (1.149)–(1.150) pohodlně invertovat, neboť stačí na obě strany aplikovat relaxační operátor  $\mathcal{J}$  a uvážit, že složením  $\mathcal{J}$  a  $\mathcal{R}$  získáme identitu. Inverzní vztahy tedy mají tvar

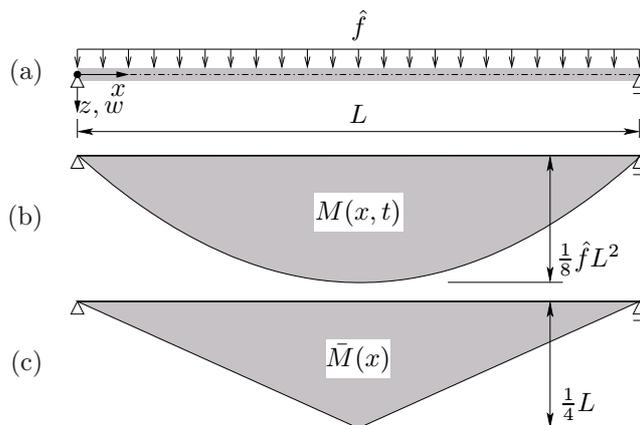
$$\varepsilon_s(x, t) = \frac{1}{A} \mathcal{J}[N(x, t)] = \mathcal{J} \left[ \frac{N(x, t)}{A} \right] \quad (1.151)$$

$$\kappa(x, t) = \frac{1}{I} \mathcal{J}[M(x, t)] = \mathcal{J} \left[ \frac{M(x, t)}{I} \right] \quad (1.152)$$

Ted už můžeme skutečně přejít k analýze konstrukcí.

### 1.2.2 Dotvarování a relaxace homogenní konstrukce

Začneme jednoduchým příkladem staticky určitého nosníku zatíženého konstantním zatížením. Při jeho řešení se záměrně vyhneme použití operátorů  $\mathcal{J}$  a  $\mathcal{R}$ , aby byl výklad srozumitelný i pro čtenáře, kterým tento formalismus připadá příliš abstraktní. Operátorový zápis ale využijeme později při zobecnění výsledků.



Obrázek 1.12: (a) Prostý nosník zatížený rovnoměrně, (b) průběh skutečných ohybových momentů, (c) průběh virtuálních ohybových momentů od jednotkové síly uprostřed rozpětí.

#### Příklad 1.11: Prostý nosník

Na prostý nosník o rozpětí  $L$  začne v čase  $t_0$  působit rovnoměrné spojitě zatížení o intenzitě  $\hat{f}$ , která se dále v čase nemění (obr. 1.12a). To může odpovídat např. vlastní tíže, kterou nosník začne přenášet po odbednění. Intenzita zatížení je v tomto případě popsána funkcí  $f_z(x, t) = \hat{f}H(t - t_0)$ . Odpovídající průběh ohybových momentů se snadno vypočte z podmínek rovnováhy, přesně řečeno z diferenciální rovnice (1.133) a statických okrajových podmínek  $M(0, t) = 0$  a  $M(L, t) = 0$ . Řešením je funkce

$$M(x, t) = \frac{1}{2} \hat{f} x(L - x) H(t - t_0) \quad (1.153)$$

To znamená, že v čase  $t_0$  se momenty skokem změni z nuly na známé rozdělení kvadratické po délce nosníku (obr. 1.12b), které pak zůstává v čase konstantní. Ze vztahu (1.140) určíme vývoj křivostí, přičemž dosazujeme  $M(x, t_0) = \frac{1}{2} \hat{f} x(L - x)$  a  $\dot{M}(x, t') = 0$  pro libovolné  $t' > t_0$ . Výsledná křivost

$$\kappa(x, t) = \frac{1}{I} J(t, t_0) \frac{1}{2} \hat{f} x(L - x) = \frac{\hat{f}}{2I} x(L - x) J(t, t_0) \quad (1.154)$$

je tedy po délce nosníku také rozdělena kvadraticky a v čase se mění úměrně funkci poddajnosti. Podobným způsobem budou v čase narůstat i průhyby. Například maximální průhyb uprostřed nosníku se s využitím principu virtuálních sil vypočte jako

$$w \left( \frac{L}{2}, t \right) = \int_0^L \bar{M}(x) \kappa(x, t) dx = \int_0^L \bar{M}(x) \frac{\hat{f}}{2I} x(L - x) J(t, t_0) dx = \frac{\hat{f}}{2I} J(t, t_0) \int_0^L \bar{M}(x) x(L - x) dx \quad (1.155)$$

kde  $\bar{M}(x)$  jsou virtuální ohybové momenty vyvolané svislou jednotkovou silou působící uprostřed nosníku, vykreslené na obr. 1.12c). Konkrétně je  $\bar{M}(x) = x/2$  pro  $0 \leq x \leq L/2$  a  $\bar{M}(x) = (L - x)/2$  pro  $L/2 \leq x \leq L$ , takže hodnota posledního integrálu na pravé straně (1.155) je  $5L^4/192$ . Dosadíme-li také vyjádření funkce poddajnosti pomocí konvenčního modulu pružnosti a součinitele dotvarování podle (1.35), můžeme (1.155) přepsat jako

$$w \left( \frac{L}{2}, t \right) = \frac{5}{384} \frac{\hat{f} L^4}{E(t_0) I} [1 + \phi(t, t_0)] = w_0 [1 + \phi(t, t_0)] \quad (1.156)$$

Veličina  $w_0$  má význam počátečního průhybu po aplikaci zatížení v čase  $t_0$  a spočítá se podle klasického vzorec pro průhyb rovnoměrně zatíženého prostého nosníku s tím, že jako modul pružnosti se použije konvenční modul  $E(t_0)$ . Průhyb ale v čase narůstá a jeho přírůstek od času  $t_0$  do času  $t$  je roven počátečnímu průhybu vynásobenému  $\phi(t, t_0)$ . Průhyb tedy narůstá naprosto stejným způsobem jako deformace při dotvarovací zkoušce. To je logické, protože jestliže se ohybové momenty nemění v čase, bude v čase konstantní také napětí v libovolném bodě nosníku, takže v každém bodě probíhá čisté dotvarování (ovšem na různých hladinách napětí).

□

Výsledek předchozího příkladu lze zobecnit. Jestliže na staticky určitou konstrukci působí v čase neměnné silové zatížení, zůstávají také vnitřní síly konstantní, protože jsou jednoznačně určeny silovým zatížením na základě podmínek rovnováhy. V důsledku toho je i napětí v každém bodě konstrukce v čase neměnné a na celé konstrukci probíhá dotvarování. Vypočteme-li průhyb v libovolném bodě (případně pootočení libovolného průřezu) podle obvyklého postupu za předpokladu lineárně pružného chování materiálu s konvenčním modulem pružnosti  $E(t_0)$ , získáme počáteční hodnotu průhybu (případně pootočení) těsně po aplikaci zatížení. V obecném čase  $t > t_0$  se pak průhyb (nebo pootočení) vypočte přenásobením počáteční hodnoty faktorem  $1 + \phi(t, t_0)$ , kde  $\phi$  je součinitel dotvarování pro daný materiál. Pro jistotu znovu připomeňme, že to vše platí pouze za předpokladu homogenní konstrukce. Navíc jsme mlčky předpokládali, že nedochází ke změně teploty ani ke smršťování. Tyto účinky by sice pro staticky určitou konstrukci neovlivnily rozdělení vnitřních sil, ale měly by vliv na deformace (a navíc nerovnoměrné smršťování by mohlo způsobit i přerozdělení napětí v rámci průřezu).

Úvahy, které jsme právě popsali slovně, se dají elegantně zapsat s využitím operátorové symboliky. Při výpočtu zvolené složky přemístění  $\delta$  (tedy průhybu nebo pootočení daného průřezu) nejprve sestrojíme virtuální ohybové momenty  $\bar{M}(x)$  vyvolané jednotkovou silou nebo jednotkovým momentem s působištem v průřezu, jehož přemístění počítáme. Podle principu virtuálních sil a s využitím (1.152) se pak časový vývoj přemístění  $\delta$  spočte jako

$$\delta(t) = \int_0^L \bar{M}(x) \kappa(x, t) dx = \int_0^L \frac{\bar{M}(x) \mathcal{J}[M(x, t)]}{I} dx \quad (1.157)$$

Tento vztah platí pro libovolný vývoj skutečných ohybových momentů  $M(x, t)$ . Jestliže je v čase  $t_0$  konstrukce naráz zatížena a dále se zatížení v čase nemění, lze psát  $M(x, t) = M(x)H(t - t_0)$  a pro přemístění s využitím (1.143) a (1.148) dostáváme

$$\delta(t) = \int_0^L \frac{\bar{M}(x) \mathcal{J}[M(x)H(t - t_0)]}{I} dx = \int_0^L \frac{\bar{M}(x)M(x)J(t, t_0)}{I} dx = \int_0^L \frac{\bar{M}(x)M(x)}{I} dx J(t, t_0) \quad (1.158)$$

Poslední integrál zjevně odpovídá přemístění vypočtenému pro dané zatížení za předpokladu lineárně pružného chování materiálu s jednotkovou hodnotou modulu pružnosti. Takto vypočtené veličiny budeme nadále značit vlnovkou nad příslušným symbolem. Výsledek tedy zapíšeme jako

$$\delta(t) = \tilde{\delta} J(t, t_0) = \tilde{\delta} \frac{1 + \phi(t, t_0)}{E(t_0)} = \delta_0 [1 + \phi(t, t_0)] \quad (1.159)$$

kde  $\delta_0 = \tilde{\delta}/E(t_0)$  je počáteční hodnota přemístění těsně po aplikaci zatížení. Odvození platí nejen pro prostý nosník, ale pro jakoukoliv staticky určitou prutovou konstrukci, jen je třeba integrál od nuly do  $L$  nahradit součtem integrálů přes jednotlivé pruty.

Ukázali jsme, že na homogenní staticky určité konstrukci namáhané v čase neměnným silovým zatížením odpovídá vývoj průhybů a pootočení v čase funkci poddajnosti daného materiálu. Tento závěr zůstává v platnosti i pro staticky neurčité prutové konstrukce, důkaz je však třeba poněkud modifikovat. Začneme připomenutím diferenciální rovnice ohybové čáry, známé z teorie pružnosti. Pro lineárně pružný materiál dostaneme spojením geometrické rovnice  $\kappa(x) = -w''(x)$ , vztahu mezi momentem a křivostí (1.129) a podmínky rovnováhy (1.133) diferenciální rovnici 4. řádu

$$EIw^{IV}(x) = f_z(x) \quad (1.160)$$

kde horní index  $IV$  označuje čtvrtou derivaci podle  $x$ . K této rovnici patří čtyři okrajové podmínky, popisující uložení a zatížení koncových průřezů. Jejich konkrétní podoba závisí na typu nosníku.

Pro lineárně viskoelastický materiál je třeba (1.129) nahradit obecnějším vztahem mezi momentem a křivostí (1.150). Příslušná rovnice ohybové čáry pak získá tvar

$$(IR[w''(x, t)])'' = f_z(x, t) \quad (1.161)$$

což lze s využitím vlastností relaxačního operátoru (a za předpokladu, že nosník má konstantní průřez, tedy že  $I$  je nezávislé na  $x$ ) přepsat jako

$$IR[w^{IV}(x, t)] = f_z(x, t) \quad (1.162)$$

Pokud zatížení působí od času  $t_0$  a zůstává konstantní, bude na pravé straně  $f_z(x)H(t - t_0)$  a aplikací operátoru poddajnosti  $\mathcal{J}$  převedeme (1.162) na

$$Iw^{IV}(x, t) = \mathcal{J}[f_z(x)H(t - t_0)] = f_z(x)J(t, t_0) \quad (1.163)$$

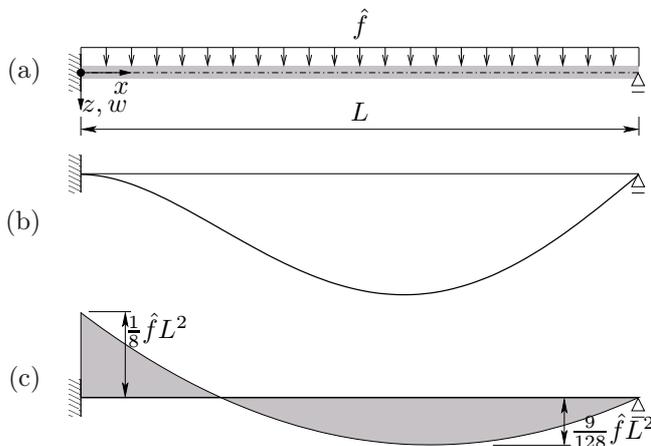
Odtud je již zřejmé, že řešení má tvar

$$w(x, t) = \tilde{w}(x)J(t, t_0) \quad (1.164)$$

kde  $\tilde{w}(x)$  je řešení rovnice

$$I\tilde{w}^{IV}(x) = f_z(x) \quad (1.165)$$

tedy rovnice (1.160) s jednotkovou hodnotou modulu pružnosti  $E$ , samozřejmě s uvážením příslušných okrajových podmínek.



Obrázek 1.13: (a) Staticky neurčitý nosník zatížený rovnoměrně, (b) ohybová čára, (c) průběh ohybových momentů

### Příklad 1.12: Staticky neurčitý nosník, silové zatížení

Nosník vlevo vetknutý a vpravo prostě podepřený je od času  $t_0$  zatížen rovnoměrným spojitým zatížením o intenzitě  $\hat{f}$  (obr. 1.13a). Nejprve předvedeme řešení za předpokladu lineárně pružného chování materiálu. Obecné řešení diferenciální rovnice (1.160) s konstantní pravou stranou  $f_z(x) = \hat{f}$  má tvar

$$w(x) = \frac{\hat{f}x^4}{24EI} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 \quad (1.166)$$

kde  $C_1, C_2, C_3$  a  $C_4$  jsou integrační konstanty. Danému podepření odpovídají okrajové podmínky<sup>6</sup>

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(L) = 0, \quad w''(L) = 0 \quad (1.167)$$

ze kterých po dosazení obecného řešení (1.166) vypočteme

$$C_1 = -\frac{5}{48} \frac{\hat{f}L}{EI}, \quad C_2 = \frac{3}{48} \frac{\hat{f}L^2}{EI}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0 \quad (1.168)$$

Průhyb je tedy popsán funkcí

$$w(x) = \frac{\hat{f}}{48EI} (2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2) \quad (1.169)$$

graficky znázorněnou na obr. 1.13b. Odpovídající průběh ohybových momentů

$$M(x) = -EIw''(x) = -\frac{\hat{f}}{8} (4x^2 - 5Lx + L^2) \quad (1.170)$$

je vyneseno na obr. 1.13c.

Nyní přejdeme k viskoelastickému chování materiálu. Jak jsme ukázali, průhybová funkce má v tomto případě tvar (1.164), kde  $\tilde{w}$  odpovídá pružnému řešení s jednotkovým modulem pružnosti. Průhyb je tedy popsán funkcí

$$w(x, t) = \frac{\hat{f}}{48I} (2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2) J(t, t_0) \quad (1.171)$$

křivost funkcí

$$\kappa(x, t) = -w''(x, t) = -\frac{\hat{f}}{8I} (4x^2 - 5Lx + L^2) J(t, t_0) \quad (1.172)$$

<sup>6</sup>První tři okrajové podmínky jsou geometrické a popisují vazby, které zabraňují svislému posunu a pootočení levého konce a svislému posunu pravého konce. Poslední podmínka je statická a vyjadřuje skutečnost, že ohybový moment je na pravém konci nulový. Jelikož  $M = EI\kappa = -EIw''$ , můžeme místo  $M(L) = 0$  psát  $w''(L) = 0$ .

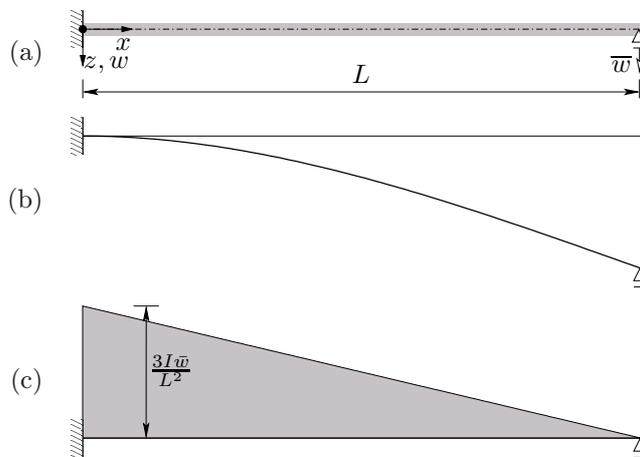
a odpovídající průběh ohybových momentů je

$$M(x, t) = IR[\kappa(x)] = -\frac{\hat{f}}{8} (4x^2 - 5Lx + L^2) H(t - t_0) \quad (1.173)$$

Je vidět, že i viskoelastické řešení splňuje okrajové podmínky (1.167) v libovolném čase  $t$ . Je zde ovšem třeba jisté obezřetnosti. Geometrické okrajové podmínky (první tři) mají samozřejmě stejný tvar pro pružný i viskoelastický model. Statická okrajová podmínka (čtvrtá) však pochází z předepsané hodnoty ohybového momentu na pravém konci nosníku. Pokud ji chceme zapsat pomocí průhybové funkce, použijeme v případě pružného materiálu vztah  $w''(L) = -M(L)/EI$ , zatímco v případě viskoelastického materiálu je třeba psát  $w''(L, t) = -\mathcal{J}[M(L, t)/I]$ . Pokud zůstává ohybový moment trvale nulový, plyne z toho v obou případech, že i druhá derivace průhybu musí být trvale nulová. Pokud by však na pravém konci působil osamělý moment, bylo by třeba při zápisu statické podmínky pomocí druhé derivace průhybu provést příslušnou transformaci s využitím operátoru poddajnosti.

□

Zatím jsme se zabývali pouze silovým zatížením, navíc neměnným v čase. Ukázali jsme, že na homogenní konstrukci pod takovým zatížením dochází k čistému dotvarování. Konstrukce však může být zatížena i nesilovými účinky, např. změnou teploty nebo předepsanými přemístěními podpor.



Obrázek 1.14: (a) Staticky neurčitý nosník zatížený posunem podpory, (b) ohybová čára, (c) průběh ohybových momentů.

### Příklad 1.13: Staticky neurčitý nosník, zatížení posunem podpory

Na nosníku vlevo vetknutém a vpravo prostě podepřeném dojde v čase  $t_0$  k náhlému svislému posunu pravé podpory o  $\bar{w}$ ; poté tento posun zůstává konstantní (obr. 1.14a). To je popsáno okrajovými podmínkami

$$w(0, t) = 0, \quad w'(0, t) = 0, \quad w(L, t) = \bar{w}H(t - t_0), \quad w''(L, t) = 0 \quad (1.174)$$

které mají být splněny pro každý časový okamžik  $t$ . Silové zatížení je nulové, takže základní rovnici (1.162) popisující viskoelastický nosník můžeme přepsat jako

$$IR[w^{IV}(x, t)] = 0 \quad (1.175)$$

a po vydělení momentem setrvačnosti a aplikaci operátoru poddajnosti dostaneme

$$w^{IV}(x, t) = 0 \quad (1.176)$$

Obecným řešením je tedy kubická funkce daná předpisem

$$w(x, t) = C_1(t)x^3 + C_2(t)x^2 + C_3(t)x + C_4(t) \quad (1.177)$$

ve kterém připouštíme, že integrační „konstanty“ mohou být funkcí času. Po dosazení do okrajových podmínek (1.174) zjistíme, že do času  $t_0$  jsou integrační konstanty nulové a od času  $t_0$  jsou rovny hodnotám, které odpovídají pružnému řešení. Výsledná průhybová funkce (graficky znázorněná na obr. 1.14b) je

$$w(x, t) = \frac{\bar{w}}{2L^3} (3Lx^2 - x^3) H(t - t_0) \quad (1.178)$$

a odpovídající vývoj ohybových momentů (vynesený na obr. 1.14c) určíme podle vztahu

$$M(x, t) = IR[\kappa(x, t)] = -IR[w''(x, t)] = -\frac{3I\bar{w}}{L^3} (L - x)\mathcal{R}[H(t - t_0)] = \frac{3I\bar{w}}{L^3} (x - L)R(t, t_0) \quad (1.179)$$

Vidíme tedy, že v okamžiku  $t_0$ , kdy dojde k náhlému posunu podpory, se průhyby skokem zvýší a dále zůstávají konstantní, zatímco ohybové momenty se také skokem zvýší, ale poté plynule klesají úměrně relaxační funkci daného materiálu. Ve všech bodech nosníku je od času  $t_0$  deformace konstantní, takže dochází k relaxaci napětí. Na rozdíl od konstantního silového zatížení, které vede pro homogenní konstrukci k čistému dotvarování, způsobí nesilové zatížení předepsaným posunem podpory čistou relaxaci.

□

Podobná situace jako při zatížení přemístěním podpor nastává i při teplotních změnách. Náhlá změna teploty ve staticky neurčité konstrukci vyvolá vznik vnitřních sil, které se pak zmenšují vlivem probíhající relaxace napětí za konstantní deformace.

Pokud by deformace prutu nebyla nijak omezena, nerovnoměrná změna teploty po výšce průřezu by vedla ke změně křivosti, kterou lze vyjádřit jako

$$\kappa_T = \alpha_T \frac{\Delta T_d - \Delta T_h}{h} \quad (1.180)$$

kde  $\alpha_T$  je koeficient teplotní roztažnosti,  $\Delta T_d$  a  $\Delta T_h$  jsou změny teploty dolních a horních vláken a  $h$  je výška průřezu (tj. vzdálenost mezi dolními a horními vlákny). Obecně by se  $\kappa_T$  mohlo měnit po délce nosníku i v čase, takže by bylo funkcí  $x$  a  $t$  (obvykle se však teplotní změny podél prutu uvažují jako konstantní). Celková křivost se vypočte jako součet příspěvků od teploty a od ohybového momentu, tedy pro pružný materiál jako

$$\kappa(x) = \kappa_T(x) + \frac{M(x)}{EI} \quad (1.181)$$

a pro viskoelastický materiál jako

$$\kappa(x, t) = \kappa_T(x, t) + \mathcal{J} \left[ \frac{M(x, t)}{I} \right] \quad (1.182)$$

Inverzí tohoto vztahu můžeme vyjádřit ohybový moment

$$M(x, t) = I\mathcal{R}[\kappa(x, t) - \kappa_T(x, t)] = -I\mathcal{R}[w''(x, t) + \kappa_T(x, t)] \quad (1.183)$$

V nepřítomnosti silového zatížení získáme dosazením (1.183) do podmínky rovnováhy  $-M''(x, t) = 0$  po vydělení momentem setrvačnosti a aplikaci operátoru poddajnosti rovnici

$$w^{IV}(x, t) + \kappa_T''(x, t) = 0 \quad (1.184)$$

Její integrací a uplatněním okrajových podmínek pak dospějeme k průhybové funkci  $w(x, t)$ . Je zřejmé, že výsledek není ovlivněn konkrétními viskoelastickými vlastnostmi materiálu a pro každý časový okamžik  $t$  je možné vypočítat průhybovou funkci zvlášť, nezávisle na předchozí historii. Speciálně pokud se teplota změní skokem a pak zůstane konstantní, průhybová funkce se také změní skokem a pak zůstane konstantní. Ve všech bodech nosníku tedy bude probíhat relaxace napětí za konstantní deformace. Vývoj ohybových momentů v čase se spočítá dosazením do (1.183). Pokud je průhyb popsán funkcí  $w(x)H(t - t_0)$  a křivost od změny teploty funkcí  $\kappa_T(x)H(t - t_0)$ , dostaneme

$$M(x, t) = -I(w''(x) + \kappa_T(x))R(t, t_0) = \tilde{M}(x)R(t, t_0) \quad (1.185)$$

kde  $\tilde{M}(x)$  jsou ohybové momenty od teplotní změny vypočtené pro pružný nosník s jednotkovým modulem pružnosti.

### 1.2.3 Deformační metoda

V předcházejícím článku jsme analyzovali jednotlivé dílčí případy, např. staticky určitou konstrukci, staticky neurčitou konstrukci se silovým zatížením, předepsaným přemístěním podpor nebo změnou teploty. Získané výsledky lze zobecnit do jednoduché, ale velmi užitečné poučky:

**Při analýze homogenní konstrukce zůstávají v platnosti všechny vzorce odvozené pro lineárně pružný materiál, pokud násobení modulem pružnosti nahradíme aplikací relaxačního operátoru a dělení modulem pružnosti nahradíme aplikací operátoru poddajnosti.** Vztahy, ve kterých se modul pružnosti nevyskytuje, zůstávají beze změny.

Konkrétně to znamená, že např. pro oboustranně vetknutý nosník pod rovnoměrným silovým zatížením o intenzitě  $\hat{f}$  můžeme známé vzorce pro momentovou reakci v levé podpoře a pro maximální průhyb

$$M_{ab} = \frac{\hat{f}L^2}{12}, \quad w = \frac{\hat{f}L^4}{384EI} \quad (1.186)$$

odvozené podle teorie pružnosti snadno zobecnit na vzorce

$$M_{ab}(t) = \frac{\hat{f}(t)L^2}{12}, \quad w(t) = \mathcal{J} \left[ \frac{\hat{f}(t)L^4}{384I} \right] = \frac{\mathcal{J} [\hat{f}(t)] L^4}{384I} \quad (1.187)$$

platné pro viskoelastický materiál. Podobně v případě nerovnoměrné změny teploty o  $\Delta T_d$  v dolních vláknech a  $\Delta T_h$  v horních vláknech se momentová reakce v levé podpoře pro pružný materiál vypočte jako

$$M_{ab} = EI\alpha_T \frac{\Delta T_d - \Delta T_h}{h} \quad (1.188)$$

a pro viskoelastický materiál tento vzorec zobecníme na

$$M_{ab}(t) = \mathcal{R} \left[ I\alpha_T \frac{\Delta T_d(t) - \Delta T_h(t)}{h} \right] = I\alpha_T \frac{\mathcal{R} [\Delta T_d(t) - \Delta T_h(t)]}{h} \quad (1.189)$$

Díky této analogii není obtížné odvodit postup pro řešení staticky neurčitých prutových konstrukcí deformační metodou. V zájmu stručnosti se omezíme na zjednodušenou deformační metodu, která zanedbává změny délky střednice způsobené normálovými silami, tj. považuje normálovou tuhost průřezu za nekonečnou. Přechod k obecné deformační metodě by byl zcela přímočarý.

Jak je známo z předmětu Stavební mechanika, při řešení staticky neurčitého nosníku deformační metodou jsou základními neznámými pootočení styčniců a základními rovnicemi momentové podmínky rovnováhy styčniců. Momentovou podmínku rovnováhy obecného styčnicu  $a$  lze formálně zapsat jako

$$\sum_b M_{ab} = \bar{M}_a \quad (1.190)$$

kde  $\bar{M}_a$  je předepsaný vnější moment působící na styčnic  $a$  (často bývá nulový),  $M_{ab}$  je koncový moment na konci prutu  $ab$  přiléhajícím ke styčnicu  $a$  a součet na levé straně se provádí přes všechny styčnice  $b$  spojené s daným styčnicem  $a$  některým prutem. Podmínky rovnováhy (1.190) je však třeba vyjádřit pomocí základních neznámých, tj. styčnicových pootočení  $\varphi_1, \varphi_2$ , atd. K tomu slouží vztahy mezi koncovými momenty a pootočeními koncových styčniců, které mají obecný tvar

$$M_{ab} = \bar{M}_{ab}^{(f)} + \frac{2EI_{ab}}{L_{ab}} (2\varphi_a + \varphi_b) \quad (1.191)$$

$$M_{ba} = \bar{M}_{ba}^{(f)} + \frac{2EI_{ab}}{L_{ab}} (\varphi_a + 2\varphi_b) \quad (1.192)$$

Přitom  $\bar{M}_{ab}^{(f)}$  a  $\bar{M}_{ba}^{(f)}$  jsou koncové momenty od daného prutového zatížení (určené jako reakce na oboustranně vetknutém nosníku vyvolané daným zatížením),  $k_{ab} = 2EI_{ab}/L_{ab}$  je ohybová tuhost prutu  $ab$  a  $\varphi_a$  a  $\varphi_b$  jsou pootočení levého a pravého konce prutu (shodná s pootočeními příslušných styčniců, ke kterým je prut tuhým způsobem připojen). Například pro prut zatížený rovnoměrným silovým zatížením se moment  $\bar{M}_{ab}^{(f)}$  vyjádří podle vzorce (1.186). Pro jednoduchost prozatím uvažujeme pouze silové zatížení a do výpočtu nezahrnujeme vliv teplotních změn ani předepsaných přemístění podpor.

Vzorce (1.191)–(1.192) platí pro prut připojený na obou koncích ke styčnicu tuhým způsobem. V případě tuhého připojení levého konce a kloubového připojení pravého konce mluvíme o připojení typu „vetknutí-kloub“, zkráceně VK. Na základě podmínky nulového momentu v kloubu ( $M_{ba} = 0$ ) pak můžeme neznámou  $\varphi_b$  vyjádřit v závislosti na daných veličinách a na neznámém pootočení  $\varphi_a$  jako

$$\varphi_b = -\frac{1}{2}\varphi_a - \frac{L_{ab}}{4EI_{ab}} \bar{M}_{ba}^{(f)} \quad (1.193)$$

a po dosazení do (1.191) získáme modifikovanou rovnici, kterou přepíšeme do tvaru

$$M_{ab} = \bar{M}_{ab}^{(f)} - \frac{1}{2}\bar{M}_{ba}^{(f)} + \frac{2EI_{ab}}{L_{ab}} \left( 2\varphi_a - \frac{1}{2}\varphi_a \right) = \bar{M}_{ab}^{(f)VK} + \frac{3EI_{ab}}{L_{ab}} \varphi_a \quad (1.194)$$

Přitom

$$\bar{M}_{ab}^{(f)VK} = \bar{M}_{ab}^{(f)} - \frac{1}{2}\bar{M}_{ba}^{(f)} \quad (1.195)$$

je momentová reakce od daného silového zatížení na nosníku vlevo vetknutém a vpravo prostě podepřeném. Například pro rovnoměrné zatížení o intenzitě  $\hat{f}$  je  $\bar{M}_{ab}^{(f)} = \hat{f}L^2/12$  a  $\bar{M}_{ba}^{(f)} = -\hat{f}L^2/12$ , takže  $\bar{M}_{ab}^{(f)VK} = \hat{f}L^2/8$ . Podobně pro prut připojený vlevo kloubově a vpravo tuhým způsobem, tedy pro připojení typu „kloub-vetknutí“ (KV), dostaneme

$$\varphi_a = -\frac{1}{2}\varphi_b - \frac{L_{ab}}{4EI_{ab}} \bar{M}_{ab}^{(f)} \quad (1.196)$$

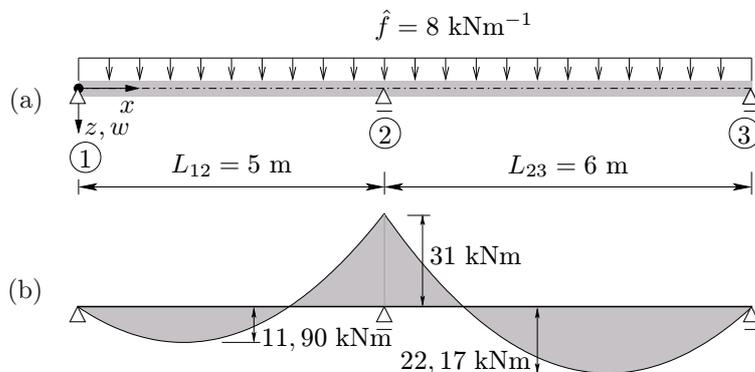
$$M_{ba} = \bar{M}_{ba}^{(f)KV} + \frac{3EI_{ab}}{L_{ab}} \varphi_b \quad (1.197)$$

$$\bar{M}_{ba}^{(f)KV} = \bar{M}_{ba}^{(f)} - \frac{1}{2}\bar{M}_{ab}^{(f)} \quad (1.198)$$

Po dosazení koncových momentů vyjádřených podle rovnic (1.191)–(1.192), případně (1.194) nebo (1.197), do podmínek rovnováhy (1.190) získáme soustavu lineárních rovnic pro neznámá styčnicková pootočení. Známé členy závislé na prutovém zatížení přitom převedeme na pravou stranu. Výslednou soustavu rovnic lze v maticovém tvaru zapsat jako

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{f}} \quad (1.199)$$

kde  $\mathbf{K}$  je matice tuhosti konstrukce,  $\mathbf{u}$  je vektor<sup>7</sup> neznámých styčnickových pootočení a  $\bar{\mathbf{f}}$  je vektor silového zatížení.



Obrázek 1.15: (a) Spojitý nosník o dvou polích, (b) průběh ohybových momentů pro pružný materiál.

#### Příklad 1.14: Spojitý nosník o dvou polích, pružný materiál

Pro ilustraci předvedeme řešení spojitého nosníku o dvou polích, zatíženého po celé délce rovnoměrným zatížením o intenzitě  $\hat{f}$  podle obr. 1.15a, za předpokladu lineárně pružného chování materiálu s ohybovou tuhostí  $EI$  konstantní po celé délce nosníku. Při výpočtu deformační metodou bychom mohli zavést tři základní neznámé,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  a  $\varphi_3$ , a oba pruty uvažovat jako připojené způsobem „vetknutí-vetknutí“. Jednodušší však je uvažovat prut 1-2 jako kloubově připojený ke styčníku 1 a prut 2-3 jako kloubově připojený ke styčníku 3, protože pak stačí zavést jedinou základní neznámou  $\varphi_2$ . Odpovídající rovnicí bude momentová podmínka rovnováhy styčníku 2 ve tvaru

$$M_{21} + M_{23} = 0 \quad (1.200)$$

do které dosadíme podle (1.197) a (1.194)

$$M_{21} = \bar{M}_{21}^{(f)KV} + \frac{3EI_{12}}{L_{12}}\varphi_2 = -\frac{\hat{f}L_{12}^2}{8} + \frac{3EI}{L_{12}}\varphi_2 \quad (1.201)$$

$$M_{23} = \bar{M}_{23}^{(f)VK} + \frac{3EI_{23}}{L_{23}}\varphi_2 = \frac{\hat{f}L_{23}^2}{8} + \frac{3EI}{L_{23}}\varphi_2 \quad (1.202)$$

Po dosazení do (1.200) a převedení známých členů na pravou stranu získáme základní rovnici deformační metody

$$\left(\frac{3EI}{L_{12}} + \frac{3EI}{L_{23}}\right)\varphi_2 = \frac{\hat{f}(L_{12}^2 - L_{23}^2)}{8} \quad (1.203)$$

V tomto jednoduchém případě má matice tuhosti jediný prvek, stejně jako vektor zatížení. Pootočení styčníku 2 se vypočte jako

$$\varphi_2 = \frac{\hat{f}(L_{12}^2 - L_{23}^2)}{8} \frac{L_{12}L_{23}}{3EI(L_{12} + L_{23})} = \frac{\hat{f}}{24EI}(L_{12} - L_{23})L_{12}L_{23} \quad (1.204)$$

Zpětným dosazením do (1.201)–(1.202) pak získáme koncové momenty

$$M_{21} = -\frac{\hat{f}L_{12}^2}{8} + \frac{3EI}{L_{12}}\varphi_2 = -\frac{\hat{f}}{8}(L_{12}^2 + L_{23}^2 - L_{12}L_{23}) \quad (1.205)$$

$$M_{23} = \frac{\hat{f}L_{23}^2}{8} + \frac{3EI}{L_{23}}\varphi_2 = \frac{\hat{f}}{8}(L_{12}^2 + L_{23}^2 - L_{12}L_{23}) \quad (1.206)$$

Jejich absolutní hodnota odpovídá momentu nad prostřední podporou, přičemž u koncového momentu  $M_{21}$  se shoduje i znaménko s ohybovým momentem chápaným jako vnitřní síla. Záporné znaménko ukazuje, že jsou tažena horní vlákna. Výsledný průběh ohybových momentů je pro konkrétní hodnoty  $\hat{f} = 8 \text{ kNm}^{-1}$ ,  $L_{12} = 5 \text{ m}$  a  $L_{23} = 6 \text{ m}$  vykreslen na obr. 1.15b.

□

<sup>7</sup>V daném kontextu pod pojmem „vektor“ rozumíme sloupcovou matici.

Pro viskoelastický materiál zůstává volba základních neznámých a základních rovnic beze změny, ale vztahy mezi koncovými momenty a styčnickými pootočeními je třeba náležitým způsobem zobecnit. V duchu obecného pravidla formulovaného na začátku tohoto článku přepíšeme (1.191)–(1.192) pro viskoelastický materiál jako

$$M_{ab}(t) = \bar{M}_{ab}^{(f)}(t) + \mathcal{R} \left[ \frac{2I_{ab}}{L_{ab}} (2\varphi_a(t) + \varphi_b(t)) \right] \quad (1.207)$$

$$M_{ba}(t) = \bar{M}_{ba}^{(f)}(t) + \mathcal{R} \left[ \frac{2I_{ab}}{L_{ab}} (\varphi_a(t) + 2\varphi_b(t)) \right] \quad (1.208)$$

Tyto vzorce se týkaly připojení typu VV, zatímco pro připojení typu VK platí

$$M_{ab}(t) = \bar{M}_{ab}^{(f)VK}(t) + \mathcal{R} \left[ \frac{3I_{ab}}{L_{ab}} \varphi_a(t) \right] \quad (1.209)$$

$$M_{ba}(t) = 0 \quad (1.210)$$

a pro připojení typu KV platí

$$M_{ab}(t) = 0 \quad (1.211)$$

$$M_{ba}(t) = \bar{M}_{ba}^{(f)KV}(t) + \mathcal{R} \left[ \frac{3I_{ab}}{L_{ab}} \varphi_b(t) \right] \quad (1.212)$$

Přitom koncové momenty od silového zatížení  $\bar{M}_{ab}^{(f)}$ ,  $\bar{M}_{ba}^{(f)}$ , atd. se počítají zcela stejným způsobem jako pro pružný materiál, protože příslušné vzorce (např. první vztah v (1.186)) neobsahují modul pružnosti. Vyznačili jsme pouze, že pro časově proměnné zatížení jsou tyto momenty také funkcí času.

Po dosažení do podmínek rovnováhy a převedení známých členů na pravou stranu dostaneme základní rovnice deformační metody ve tvaru

$$\mathcal{R} \left[ \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u}(t) \right] = \bar{\mathbf{f}}(t) \quad (1.213)$$

kde  $\tilde{\mathbf{K}}$  je matice tuhosti sestavená za předpokladu jednotkové hodnoty modulu pružnosti. Toto jednoduché zobecnění rovnic (1.199) ale platí pouze v případě, že relaxační operátor  $\mathcal{R}$  je tentýž pro všechny pruty dané konstrukce, jinými slovy pro homogenní konstrukci (vyrobenou z materiálu, který má ve všech bodech stejné vlastnosti). Pokud jsou jednotlivé pruty homogenní, ale navzájem rozdílné (např. jsou z betonu různého stáří), je třeba ve vzorcích (1.207)–(1.212) pro různé pruty uvažovat různé operátory  $\mathcal{R}_{ab}$  a výsledný tvar základních rovnic je poněkud složitější. Pokud je však skutečně celá konstrukce homogenní, platí (1.213) a po aplikaci operátoru poddajnosti a vynásobení zleva inverzní maticí ke  $\tilde{\mathbf{K}}$  lze vektor styčnickových přemístění lze vyjádřit jako

$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathcal{J} [\bar{\mathbf{f}}(t)] = \mathbf{K}^{-1} E \mathcal{J} [\bar{\mathbf{f}}(t)] \quad (1.214)$$

Při poslední úpravě jsme využili skutečnost, že  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}/E$ , takže  $\tilde{\mathbf{K}}^{-1} = E\mathbf{K}^{-1}$ . Při výpočtu styčnickových pootočení tedy stačí dané silové zatížení ztransformovat pomocí operátoru poddajnosti vynásobeného pevně zvoleným modulem pružnosti (např. konvenčním modulem na počátku zatěžování) a z takto ztransformovaného časového průběhu zatížení pak styčnicková pootočení vypočítat obvyklým postupem pro pružný materiál. Po zpětném dosažení do (1.207)–(1.212) relaxační operátor  $\mathcal{R}$  složený s operátorem poddajnosti  $\mathcal{J}$  dá identitu a výsledné koncové momenty v libovolném čase budou záviset pouze na okamžité hodnotě zatížení v tomto čase. Totéž pak platí i pro vnitřní síly, např. ohybové momenty, které lze jednoznačně vypočítat z koncových momentů a prutového zatížení. Speciálně pokud silové zatížení začne náhle působit v čase  $t_0$  a nadále zůstane konstantní, budou v čase neměnné i vnitřní síly, zatímco styčnicková pootočení (a také průhyby) budou narůstat v důsledku dotvarování úměrně funkci poddajnosti  $J(t, t_0)$ . Pro libovolnou složku přemístění  $\delta$  (posun nebo pootočení libovolně zvoleného průřezu) bude tedy opět platit vztah (1.159), který jsme původně odvodili pro staticky určité homogenní konstrukce.

### Příklad 1.15: Spojitý nosník o dvou polích, viskoelastický materiál

Ukážeme, jak získané poznatky aplikovat při řešení spojitého nosníku z příkladu 1.14, tentokrát ovšem za předpokladu viskoelastického chování materiálu. Pro pružný nosník měla základní rovnice deformační metody tvar (1.203), přičemž výraz v závorkách na levé straně představoval jediný prvek matice pružné tuhosti  $\mathbf{K}$ . V případě lineárně viskoelastického materiálu násobení modulem pružnosti nahradíme aplikací relaxačního operátoru a (1.203) přepíšeme jako

$$\mathcal{R} \left[ \left( \frac{3I}{L_{12}} + \frac{3I}{L_{23}} \right) \varphi_2(t) \right] = \frac{\hat{f} (L_{12}^2 - L_{23}^2)}{8} H(t - t_0) \quad (1.215)$$

kde  $t_0$  označuje stáří betonu, ve kterém začalo působit spojitě zatížení o intenzitě  $\hat{f}$ . Rovnice (1.215) je konkrétní podobou obecné rovnice (1.213), přičemž výraz na levé straně v kulatých závorkách představuje jediný prvek matice  $\tilde{\mathbf{K}}$ . Obecné řešení (1.214) pak v našem případě nabývá konkrétní podoby

$$\varphi_2(t) = \left( \frac{3I}{L_{12}} + \frac{3I}{L_{23}} \right)^{-1} \mathcal{J} \left[ \frac{\hat{f} (L_{12}^2 - L_{23}^2)}{8} H(t - t_0) \right] = \frac{\hat{f}}{24I} (L_{12} - L_{23}) L_{12} L_{23} J(t, t_0) = \tilde{\varphi}_2 J(t, t_0) \quad (1.216)$$

kde

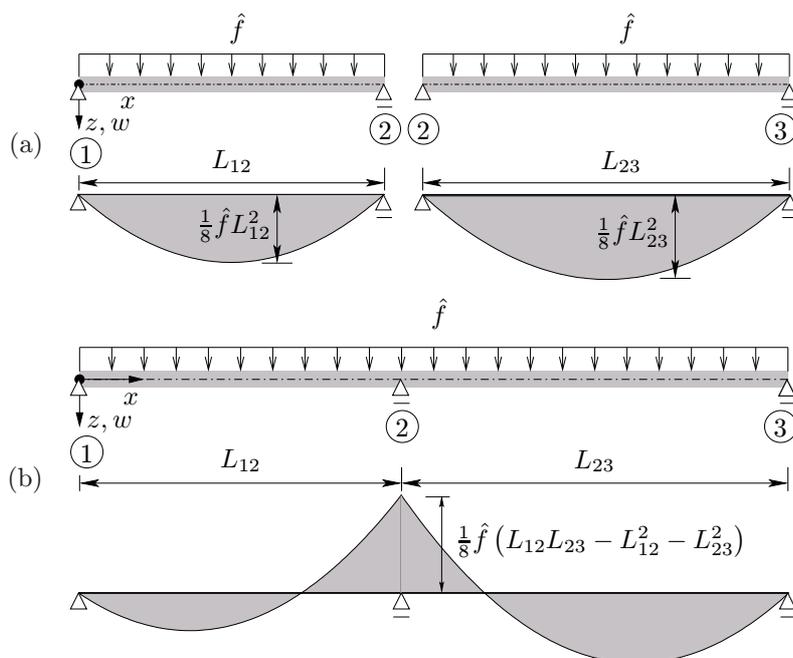
$$\tilde{\varphi}_2 = \frac{\hat{f}}{24I}(L_{12} - L_{23})L_{12}L_{23} \quad (1.217)$$

odpovídá pružnému řešení za předpokladu jednotkového modulu pružnosti, jak snadno ověříme porovnáním s (1.204). Stejně jako pootočení  $\tilde{\varphi}_2$ , i každé jiné pootočení nebo průhyb budou narůstat v čase úměrně tomu, jak narůstá funkce poddajnosti  $J$ . Ohybové momenty se v čase měnit nebudou a jejich rozložení po délce nosníku bude přesně odpovídat pružnému řešení.

□

Zdůrazněme ovšem ještě jednou, že tvrzení uvedená na konci předchozího příkladu platí pouze pro homogenní konstrukce. Na staticky neurčitě konstrukci složené z betonových částí o různém stáří dochází i při konstantním zatížení k přerozdělování vnitřních sil v důsledku nestejněho dotvarování jednotlivých částí. Podobně takové přerozdělování probíhá i v případě, že na zatížené konstrukci dojde ke změně statického schématu, např. k přidání některých vazeb.

V mostním stavitelství se někdy spojitě nosníky sestavují z prefabrikovaných dílů, které se na podpory nejprve osadí jako série prostých nosníků a teprve následně se sousední díly spojí tak, aby styky přenášely ohybové momenty. Pokud by se materiál choval jako lineárně pružný, byla by statická analýza jednoduchá. Pro zatížení působící v okamžiku zmonolitnění by se vnitřní síly vypočetly na jednotlivých prostých nosnících a pro přírůstky zatížení od tohoto okamžiku na spojitěm nosníku; výsledné vnitřní síly by se pak získaly sečtením obou příspěvků. Ve speciálním případě, kdy se zatížení od okamžiku zmonolitnění nemění, zůstávají momenty nad podporami nulové. V případě viskoelastického chování materiálu je ale situace složitější. Po změně statického schématu pokračuje dotvarování od zatížení, které začalo působit před touto změnou, ale dotvarování již neprobíhá volně, protože styky zabraňují vzájemnému otáčení spojených průřezů.



Obrázek 1.16: Konstrukce se změnou statického schématu, působící (a) od času  $t_1$  do času  $t_2$  jako dva prosté nosníky, (b) od času  $t_2$  jako spojitý nosník. Vyneseny jsou též průběhy ohybových momentů odpovídající jednotlivým schématům.

### Příklad 1.16: Spojitý nosník vzniklý spojením dvou prostých nosníků

Pro jednoduchost budeme uvažovat jen dva betonové nosníky stejného stáří a stejného průřezu, zatížené od času  $t_1$  rovnoměrným spojitým zatížením o intenzitě  $\hat{f}$  (obr. 1.16a). V čase  $t_2 > t_1$  je provedeno zmonolitnění a vzniká spojitý nosník o dvou polích (obr. 1.16b). Úkolem je popsat vývoj ohybových momentů v čase.

Nejprve obvyklým způsobem očíslováme podpory 1, 2 a 3 a zkoumané nosníky označíme jako pruty 1-2 a 2-3. Koncové momenty  $M_{12}$  a  $M_{31}$  jsou v libovolném čase nulové, zatímco koncové momenty  $M_{21}$  a  $M_{23}$  jsou nulové jen do okamžiku  $t_2$ . Zároveň se až do tohoto okamžiku mohou koncové průřezy jednotlivých prutů otáčet volně a nezávisle na sobě, takže nad podporou 2 musíme rozlišovat mezi pootočením  $\varphi_{21}$  koncového průřezu prutu 1-2 a pootočením  $\varphi_{23}$  koncového průřezu prutu 2-3. V čase  $t_2$  dojde ke zmonolitnění styku a od tohoto okamžiku musejí být **přírůstky** těchto pootočení stejné. Přitom příslušné koncové momenty mohou nabývat nenulových hodnot, ale musejí splňovat podmínku rovnováhy  $M_{21} + M_{23} = 0$ .

Abychom získali popis platný v libovolném čase, budeme uvažovat pro prut 1-2 připojení typu KV a pro prut 2-3 připojení typu VK, ovšem s tím, že na prutu 1-2 za  $\varphi_b$  dosazujeme  $\varphi_{21}$  a na prutu 2-3 za  $\varphi_a$  dosazujeme

$\varphi_{23}$ . Vztahy mezi koncovými momenty a pootočeními koncových průřezů tedy zapíšeme podle (1.212) a (1.209) jako

$$M_{21}(t) = -\frac{\hat{f}L_{12}^2}{8}H(t-t_1) + \mathcal{R} \left[ \frac{3I}{L_{12}}\varphi_{21}(t) \right] \quad (1.218)$$

$$M_{23}(t) = \frac{\hat{f}L_{23}^2}{8}H(t-t_1) + \mathcal{R} \left[ \frac{3I}{L_{23}}\varphi_{23}(t) \right] \quad (1.219)$$

Pro časy  $t$  mezi  $t_1$  a  $t_2$  je ale  $M_{21}(t) = 0$  a  $M_{23}(t) = 0$ , takže vztahy (1.218)–(1.219) můžeme využít k výpočtu pootočení

$$\varphi_{21}(t) = \frac{L_{12}}{3I} \mathcal{J} \left[ \frac{\hat{f}L_{12}^2}{8}H(t-t_1) \right] = \frac{\hat{f}L_{12}^3}{24I} J(t, t_1) = \tilde{\varphi}_{21} J(t, t_1) \quad (1.220)$$

$$\varphi_{23}(t) = \frac{L_{23}}{3I} \mathcal{J} \left[ -\frac{\hat{f}L_{23}^2}{8}H(t-t_1) \right] = -\frac{\hat{f}L_{23}^3}{24I} J(t, t_1) = \tilde{\varphi}_{23} J(t, t_1) \quad (1.221)$$

kde

$$\tilde{\varphi}_{21} = \frac{\hat{f}L_{12}^3}{24I}, \quad \tilde{\varphi}_{23} = -\frac{\hat{f}L_{23}^3}{24I} \quad (1.222)$$

jsou pootočení na koncích prostých nosníků vypočtená pro pružný materiál s jednotkovým modulem pružnosti.

Po zmonolitnění už nejsou momenty  $M_{21}$  a  $M_{23}$  nulové, musejí pouze splňovat podmínku rovnováhy

$$M_{21}(t) + M_{23}(t) = 0 \quad (1.223)$$

Dosazením podle (1.218)–(1.219) získáme po úpravě rovnici

$$\mathcal{R} \left[ \frac{3I}{L_{12}}\varphi_{21}(t) \right] + \mathcal{R} \left[ \frac{3I}{L_{23}}\varphi_{23}(t) \right] = \frac{\hat{f}(L_{12}^2 - L_{23}^2)}{8}H(t-t_1) \quad (1.224)$$

Všimněte si, že pokud bychom položili  $\varphi_{21} = \varphi_{23} = \varphi_2$ , dostali bychom rovnicí (1.215) popisující spojitý nosník. V našem případě se ale hodnoty  $\varphi_{21}$  a  $\varphi_{23}$  v čase  $t_2$  liší, jen jejich přírůstky od tohoto času jsou stejné. Zavedeme proto jedinou neznámou  $\Delta\varphi_2$  představující společný přírůstek a pro  $t \geq t_2$  popíšeme pootočení nově spojených koncových průřezů funkcemi jako

$$\varphi_{21}(t) = \varphi_{21}(t_2) + \Delta\varphi_2(t) = \tilde{\varphi}_{21}J(t_2, t_1) + \Delta\varphi_2(t) \quad (1.225)$$

$$\varphi_{23}(t) = \varphi_{23}(t_2) + \Delta\varphi_2(t) = \tilde{\varphi}_{23}J(t_2, t_1) + \Delta\varphi_2(t) \quad (1.226)$$

Přitom jsme využili skutečnosti, že v čase  $t_2$  můžeme hodnoty  $\varphi_{21}(t_2)$  a  $\varphi_{23}(t_2)$  určit podle (1.220)–(1.221).

Dříve než dosadíme do podmínky rovnováhy (1.224), je třeba si uvědomit, že se v této podmínce na funkce  $\varphi_{21}(t)$  a  $\varphi_{23}(t)$  aplikuje relaxační operátor a výsledek závisí na celém časovém průběhu  $\varphi_{21}(t)$  a  $\varphi_{23}(t)$  od času  $t_1$ , zatímco vztahy (1.225)–(1.226) platí pouze od času  $t_2$ . Průběh mezi časy  $t_1$  a  $t_2$  je již známý a podle (1.220)–(1.221) je popsán funkcemi  $\varphi_{21}(t) = \tilde{\varphi}_{21}J(t, t_1)$  a  $\varphi_{23}(t) = \tilde{\varphi}_{23}J(t, t_1)$ . Abychom získali univerzálně platný popis např. pro  $\varphi_{21}$ , vynásobíme funkční předpis (1.220) platný v intervalu  $[t_1, t_2]$  funkcí  $1 - H(t - t_2)$  a funkční předpis (1.225) platný v intervalu  $[t_2, \infty)$  funkcí  $H(t - t_2)$  a výsledky sečteme. Funkce  $1 - H(t - t_2)$  má totiž pro  $t < t_2$  hodnotu 1 a pro  $t \geq t_2$  hodnotu 0, zatímco u funkce  $H(t - t_2)$  je tomu naopak. Univerzálně platné vyjádření má tedy tvar<sup>8</sup>

$$\varphi_{21}(t) = \tilde{\varphi}_{21}J(t, t_1)[1 - H(t - t_2)] + [\tilde{\varphi}_{21}J(t_2, t_1) + \Delta\varphi_2(t)]H(t - t_2) = \tilde{\varphi}_{21}[J(t, t_1) - J_\Delta(t, t_2, t_1)] + \Delta\varphi_2(t) \quad (1.227)$$

kde jsme zavedli novou funkci

$$J_\Delta(t, t_2, t_1) = [J(t, t_1) - J(t_2, t_1)]H(t - t_2) \quad (1.228)$$

kteřá bude hrát v dalších úvahách významnou roli a pomůže zjednodušit zápis. Zcela analogicky se odvodí vyjádření pro pootočení  $\varphi_{23}$  ve tvaru

$$\varphi_{23}(t) = \tilde{\varphi}_{23}[J(t, t_1) - J_\Delta(t, t_2, t_1)] + \Delta\varphi_2(t) \quad (1.229)$$

Po dosazení (1.227) a (1.229) do (1.224), převedení známých členů na pravou stranu a drobné úpravě dostaneme

$$\mathcal{R} \left[ \left( \frac{3I}{L_{12}} + \frac{3I}{L_{23}} \right) \Delta\varphi_2(t) \right] = \frac{\hat{f}(L_{12}^2 - L_{23}^2)}{8}H(t-t_1) - \left( \frac{3I}{L_{12}}\tilde{\varphi}_{21} + \frac{3I}{L_{23}}\tilde{\varphi}_{23} \right) \mathcal{R} [J(t, t_1) - J_\Delta(t, t_2, t_1)] \quad (1.230)$$

<sup>8</sup>Všimněte si, že při poslední úpravě v (1.227) vypouštíme násobení  $\Delta\varphi_2(t)$  faktorem  $H(t - t_2)$  jako zbytečné, protože nás zajímají pouze hodnoty  $\Delta\varphi_2(t)$  pro  $t \geq t_2$ , zatímco pro  $t < t_2$  tuto funkci definujeme jako nulovou.

Pravá strana této rovnice vypadá velmi komplikovaně, ale ve skutečnosti ji lze výrazně zjednodušit. Stačí si vzpomenout, že veličiny  $\tilde{\varphi}_{21}$  a  $\tilde{\varphi}_{23}$  byly definovány vzorci (1.222), takže

$$\frac{3I}{L_{12}}\tilde{\varphi}_{21} + \frac{3I}{L_{23}}\tilde{\varphi}_{23} = \frac{3I}{L_{12}}\frac{\hat{f}L_{12}^3}{24I} - \frac{3I}{L_{23}}\frac{\hat{f}L_{23}^3}{24I} = \frac{\hat{f}(L_{12}^2 - L_{23}^2)}{8} \quad (1.231)$$

To znamená, že na pravé straně (1.230) má výraz v kulatých závorkách před  $\mathcal{R}$  stejnou hodnotu jako zlomek násobící  $H(t - t_1)$ . Dále si uvědomíme, že

$$\mathcal{R}[J(t, t_1) - J_{\Delta}(t, t_2, t_1)] = \mathcal{R}[J(t, t_1)] - \mathcal{R}[J_{\Delta}(t, t_2, t_1)] = H(t - t_1) - \mathcal{R}[J_{\Delta}(t, t_2, t_1)] \quad (1.232)$$

S využitím těchto pomocných úvah nakonec (1.230) zjednodušíme na

$$\mathcal{R}\left[\left(\frac{3I}{L_{12}} + \frac{3I}{L_{23}}\right)\Delta\varphi_2(t)\right] = \frac{\hat{f}(L_{12}^2 - L_{23}^2)}{8}\mathcal{R}[J_{\Delta}(t, t_2, t_1)] \quad (1.233)$$

Je pozoruhodné, že tato rovnice má stejnou strukturu jako rovnice (1.215) popisující viskoelastický spojitý nosník, jen je Heavisidova funkce na pravé straně nahrazena funkcí  $\mathcal{R}[J_{\Delta}(t, t_2, t_1)]$ , k jejímuž názornému významu se ještě dostaneme. Zatím však pokračujeme v řešení příkladu. Připomeňme si, že hledanou neznámou je funkce  $\Delta\varphi_2(t)$ . Pokud na obě strany rovnice (1.233) aplikujeme operátor  $\mathcal{J}$ , vydělíme výrazem v kulatých závorkách a využijeme vztahu (1.217), dostaneme

$$\Delta\varphi_2(t) = \frac{\hat{f}(L_{12}^2 - L_{23}^2)}{8\left(\frac{3I}{L_{12}} + \frac{3I}{L_{23}}\right)}\mathcal{R}[J_{\Delta}(t, t_2, t_1)] = \frac{\hat{f}}{24I}(L_{12} - L_{23})L_{12}L_{23}J_{\Delta}(t, t_2, t_1) = \tilde{\varphi}_2 J_{\Delta}(t, t_2, t_1)$$

Asi nepřekvapí, že řešení má opět podobný tvar jako pro viskoelastický spojitý nosník, viz (1.216), jen je funkce poddajnosti  $J$  nahrazena funkcí  $J_{\Delta}$ . Po dosazení do (1.227) a (1.218) nakonec dospějeme k

$$\varphi_{21}(t) = \tilde{\varphi}_{21}J(t, t_1) + (\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_{21})J_{\Delta}(t, t_2, t_1) \quad (1.234)$$

$$M_{21}(t) = \frac{3I(\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_{21})}{L_{12}}\mathcal{R}[J_{\Delta}(t, t_2, t_1)] = \frac{\hat{f}}{8}(L_{12}L_{23} - L_{12}^2 - L_{23}^2)\mathcal{R}[J_{\Delta}(t, t_2, t_1)] \quad (1.235)$$

Tím je popsán vývoj momentu přenášeného průřezem nad střední podporou.

□

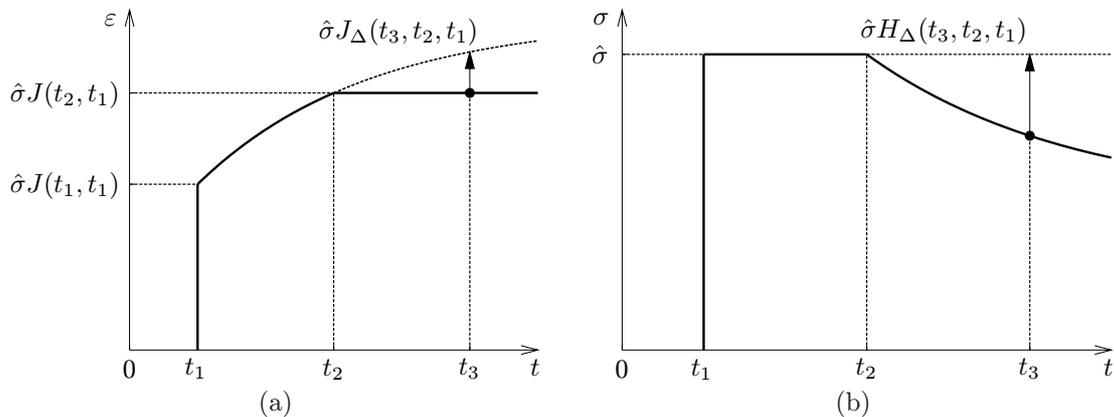
Postup při řešení právě skončeného příkladu vypadá složitě, ale konečný výsledek je pozoruhodně jednoduchý. To vynikne zejména, pokud si uvědomíme, že koeficient násobící funkci  $\mathcal{R}[J_{\Delta}(t, t_2, t_1)]$  na pravé straně (1.235) přesně odpovídá koncovému momentu  $M_{21}$  vypočtenému na spojitěm nosníku za předpokladu pružného chování materiálu v příkladu 1.14, viz vzorec (1.205). Bezrozměrná funkce  $\mathcal{R}[J_{\Delta}(t, t_2, t_1)]$  tedy popisuje, jaká část tohoto momentu bude přenášena v čase  $t$  na konstrukci, která nejprve od času  $t_1$  fungovala jako dva prosté nosníky a teprve v čase  $t_2$  došlo ke změně statického schématu na spojitý nosník. Jelikož tato funkce popisuje přerozdělování vnitřních sil v důsledku změny statického schématu, budeme jí říkat *přerozdělovací funkce* a zavedeme pro ni zvláštní označení  $H_{\Delta}$ . Vzhledem k tomu, že funkce  $J_{\Delta}$  definovaná v (1.228) je jako funkce času  $t$  spojitá, můžeme relaxační operátor aplikovat podle jednoduššího vzorce (1.90) a psát

$$\begin{aligned} H_{\Delta}(t, t_2, t_1) &= \mathcal{R}[J_{\Delta}(t, t_2, t_1)] = \int_{t_1}^t R(t, t')\dot{J}_{\Delta}(t', t_2, t_1) dt' = \int_{t_1}^t R(t, t')\dot{J}(t', t_1)H(t - t_2) dt' = \\ &= \int_{t_2}^t R(t, t')\dot{J}(t', t_1) dt' \end{aligned} \quad (1.236)$$

Při interpretaci je důležité si uvědomit, jaký je vlastně názorný význam funkce  $J_{\Delta}$ . Ta je podle své definice (1.228) závislá na třech proměnných  $t$ ,  $t_2$  a  $t_1$ , přičemž se předpokládá  $t_2 \geq t_1$ . Pro  $t \leq t_2$  je  $J_{\Delta}(t, t_2, t_1) = 0$  a pro  $t > t_2$  je  $J_{\Delta}(t, t_2, t_1)$  rozdílem mezi  $J(t, t_1)$  a  $J(t_2, t_1)$ . To je graficky znázorněno na obr. 1.17a. Pro pevně zvolené  $t_1$  a  $t_2$  tedy  $J_{\Delta}$  jako funkce  $t$  vyjadřuje, o kolik se od času  $t_2$  do času  $t$  zvýšila hodnota funkce poddajnosti odpovídající počátku dotvarování v čase  $t_1$ .

Jelikož pro  $t \leq t_2$  je funkce  $J_{\Delta}(t, t_2, t_1)$  nulová, bude pro takové hodnoty  $t$  nulová i její transformace pomocí relaxačního operátoru, tedy funkce  $H_{\Delta}(t, t_2, t_1)$ . Pro časy  $t > t_2$  hodnota funkce  $H_{\Delta}(t, t_2, t_1)$  spojitě narůstá a její názorný význam je patrný z obr. 1.17b. Jestliže v čase  $t_1$  zatížíme materiál napětím  $\hat{\sigma}$ , které ponecháme až do času  $t_2$  konstantní, dochází k dotvarování a vývoj deformace je popsán funkcí  $\hat{\sigma}J(t, t_1)$ . V čase  $t_2$  zamezíme další změně deformace, takže deformace zůstává od tohoto času na konstantní hodnotě  $\hat{\sigma}J(t_2, t_1)$  a napětí v důsledku relaxace plynule klesá z původní hodnoty  $\hat{\sigma}$ , přičemž jeho úbytek je popsán funkcí  $\hat{\sigma}H_{\Delta}(t, t_2, t_1)$ .

Zobecněním provedených úvah se dostáváme k pravidlům pro vývoj různých veličin v případě, že na homogenní konstrukci od času  $t_1$  působí konstantní zatížení a v čase  $t_2$  dojde ke změně statického schématu. Nejprve se zaměříme na veličiny, které mají charakter přemístění (tedy posunů nebo pootočení). Už víme, že



Obrázek 1.17: Názorný význam (a) funkce  $J_{\Delta}(t, t_2, t_1)$ , (b) funkce  $H_{\Delta}(t, t_2, t_1)$ .

pokud nedochází ke změně statického schématu, lze vývoj libovolné složky přemístění  $\delta$  v čase popsat funkcí  $\delta(t) = \tilde{\delta} J(t, t_1)$ , kde  $\tilde{\delta}$  je hodnota této složky přemístění vypočtená pro dané zatížení za předpokladu pružného chování konstrukce s jednotkovým modulem pružnosti. V obecnějším případě označíme ještě  $\Delta\tilde{\delta}$  rozdíl mezi přemístěním vypočteným na konstrukci po změně statického schématu a před touto změnou, opět za předpokladu lineárně pružného chování s jednotkovým modulem pružnosti. Časový průběh skutečného přemístění  $\delta$  je pak popsán funkcí

$$\delta(t) = \tilde{\delta} J(t, t_1) + \Delta\tilde{\delta} J_{\Delta}(t, t_2, t_1) \quad (1.237)$$

Immediately vidíme, že vývoj pootočení  $\varphi_{21}$  v příkladu 1.16 daný vzorcem (1.234) tomuto obecnému pravidlu skutečně odpovídá, protože  $\tilde{\varphi}_{21}$  představuje hodnotu  $\varphi_{21}$  vypočtenou na prostém nosníku, tedy před změnou statického schématu, a  $\tilde{\varphi}_2$  představuje hodnotu  $\varphi_{21}$  vypočtenou na spojitým nosníku, tedy po změně statického schématu, v obou případech za předpokladu lineárně pružného chování s jednotkovým modulem pružnosti. Stejným obecným pravidlem se řídí vývoj všech veličin geometrického charakteru, tedy nejen přemístění, ale i deformací, např. křivosti.

Poněkud jiným vzorcem je třeba popsat vývoj veličin, které mají charakter vnitřních sil nebo reakcí. Hodnoty takových veličin na pružné homogenní konstrukci nezávisí na konkrétní hodnotě modulu pružnosti. Při popisu časového vývoje jisté statické veličiny  $S$  (což může být např. ohybový moment ve zvoleném průřezu, nebo i posouvající síla či některá reakce) budeme pracovat jednak s její hodnotou  $\tilde{S}$  vypočtenou za předpokladu pružného chování na konstrukci před změnou statického schématu, jednak se změnou  $\Delta\tilde{S}$ , která představuje rozdíl mezi hodnotami této veličiny vypočtenými po změně statického schématu a před ní. V případě homogenní viskoelastické konstrukce zatížené od času  $t_1$  se změnou statického schématu v čase  $t_2$  je časový vývoj veličiny  $S$  popsán funkcí

$$S(t) = \tilde{S}H(t - t_1) + \Delta\tilde{S}H_{\Delta}(t, t_2, t_1) \quad (1.238)$$

V případě momentu  $M_{21}$  v příkladu 1.16 byla hodnota  $\tilde{M}_{21}$  před změnou statického schématu nulová, protože šlo o moment v krajním průřezu prostého nosníku. Přírůstek  $\Delta M_{21}$  pak odpovídal momentu v průřezu nad střední podporou na spojitým nosníku. Je tedy vidět, že podle obecného vzorce (1.238) bychom skutečně dospěli ke stejnému výsledku jako v příkladu 1.16, tedy ke vzorci (1.235).

## 1.2.4 Silová metoda

Pro zajímavost ještě ukážeme, jak by se postupovalo při řešení staticky neurčité prutové konstrukce z viskoelastického materiálu silovou metodou. Základní myšlenku nejlépe vyložíme pomocí jednoduchého příkladu.

### Příklad 1.17: Staticky neurčitý nosník, silová metoda

Nosník vlevo vetknutý a vpravo prostě podepřený je od času  $t_0$  zatížen rovnoměrným spojitým zatížením o intenzitě  $\hat{f}$  (obr. 1.18a). Nejprve předvedeme řešení za předpokladu lineárně pružného chování materiálu. Při řešení silovou metodou zvolíme jako základní soustavu prostý nosník a zavedeme staticky neurčitou veličinu  $X_1$ , která odpovídá momentové reakci v levé podpoře původního nosníku (obr. 1.18b). Od daného zatížení vzniknou na základní soustavě (prostém nosníku) ohybové momenty popsané funkcí (obr. 1.18c)

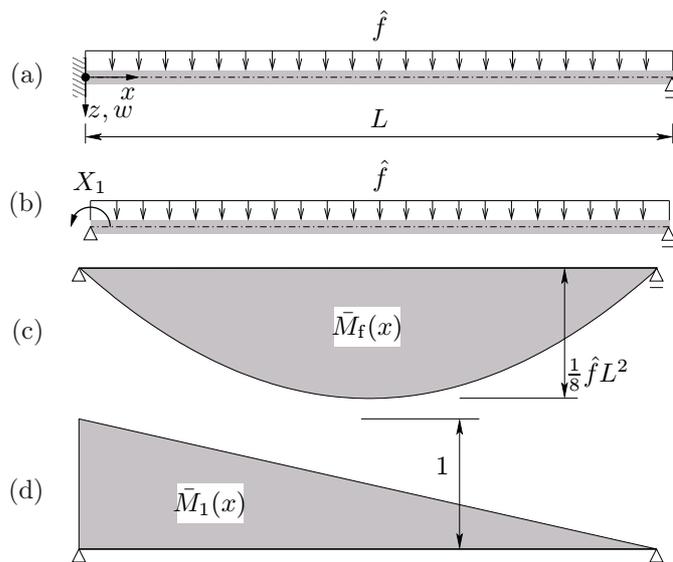
$$\bar{M}_f(x) = \frac{1}{2}\hat{f}x(L - x) \quad (1.239)$$

a od jednotkové staticky neurčité veličiny (tj. od  $X_1 = 1$ ) vzniknou momenty (obr. 1.18d)

$$\bar{M}_1(x) = \frac{x}{L} - 1 \quad (1.240)$$

Výsledné momenty na původním staticky neurčitém nosníku jsou tedy

$$M(x) = \bar{M}_f(x) + X_1\bar{M}_1(x) \quad (1.241)$$



Obrázek 1.18: (a) Staticky neurčitý nosník, (b) základní soustava (prostý nosník) s vyznačením staticky neurčité veličiny, (c) ohybové momenty na základní soustavě od předepsaného zatížení, (d) ohybové momenty na základní soustavě od jednotkové staticky neurčité veličiny.

a odpovídající křivosti se vyjádří jako

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI} = \frac{\bar{M}_f(x)}{EI} + X_1 \frac{\bar{M}_1(x)}{EI} \quad (1.242)$$

Staticky neurčitou veličinu  $X_1$  vypočítáme z přetvárné podmínky

$$\int_0^L \bar{M}_1(x) \kappa(x) dx = 0 \quad (1.243)$$

která vyjadřuje skutečnost, že pootočení levého koncového průřezu je nulové. Po dosazení z (1.242) do (1.243) dospějeme k lineární rovnici

$$\delta_{1f} + \delta_{11} X_1 = 0 \quad (1.244)$$

kde

$$\delta_{1f} = \int_0^L \frac{\bar{M}_1(x) \bar{M}_f(x)}{EI} dx = -\frac{\hat{f} L^3}{24EI} \quad (1.245)$$

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{\bar{M}_1^2(x)}{EI} dx = \frac{L}{3EI} \quad (1.246)$$

Odtud snadno spočítáme

$$X_1 = -\frac{\delta_{1f}}{\delta_{11}} = \frac{\hat{f} L^2}{8} \quad (1.247)$$

a po dosazení zpět do (1.241) získáme výsledný průběh momentů

$$M(x) = \bar{M}_f(x) + X_1 \bar{M}_1(x) = \frac{1}{2} \hat{f} x(L-x) + \frac{\hat{f} L^2}{8} \left( \frac{x}{L} - 1 \right) \frac{\hat{f}}{8} [5Lx - 4x^2 - L^2] \quad (1.248)$$

Pokud je ovšem materiál lineárně viskoelastický, musíme upravit postup při výpočtu křivostí z momentů a místo jednoduchého vztahu  $\kappa(x) = M(x)/EI$  použít integrální vzorec (1.140), který lze pomocí operátoru poddajnosti  $\mathcal{J}$  symbolicky zapsat jako

$$\kappa(x, t) = \frac{1}{I} \mathcal{J}[M(x, t)] \quad (1.249)$$

Po dosazení do přetvárné podmínky  $\int_0^L \bar{M}_1(x) \kappa(x, t) dx = 0$  dostaneme

$$\int_0^L \frac{\bar{M}_1(x) \mathcal{J}[M(x, t)]}{I} dx = 0 \quad (1.250)$$

Díky tomu, že moment  $\bar{M}_1$  od jednotkové staticky neurčité veličiny není funkcí času, můžeme tuto podmínku s využitím vlastností operátoru poddajnosti přepsat jako

$$\mathcal{J} \left[ \int_0^L \frac{\bar{M}_1(x) M(x, t)}{I} dx \right] = 0 \quad (1.251)$$

což se po aplikaci relaxačního operátoru  $\mathcal{R}$  inverzního k  $\mathcal{J}$  a vydělení modulem pružnosti zjednoduší na

$$\int_0^L \frac{\bar{M}_1(x)M(x,t)}{EI} dx = 0 \quad (1.252)$$

To je ovšem velmi podobná podmínka jako pro pružný materiál, jen je skutečný moment  $M(x)$  obecně funkcí času a místo (1.241) ho vyjádříme jako

$$M(x,t) = \bar{M}_f(x,t) + X_1(t)\bar{M}_1(x) \quad (1.253)$$

Uvážili jsme zde, že staticky neurčitá veličina  $X_1$  se může měnit v čase. Po dosazení (1.253) do (1.252) dostaneme základní rovnici silové metody ve tvaru

$$\delta_{1f}(t) + \delta_{11}X_1(t) = 0 \quad (1.254)$$

kde

$$\delta_{1f}(t) = \int_0^L \frac{\bar{M}_1(x)\bar{M}_f(x,t)}{EI} dx \quad (1.255)$$

a  $\delta_{11}$  je dáno stejným vzorcem (1.246) jako při analýze podle pružnosti. Vidíme tedy, že hodnota staticky neurčité veličiny  $X_1$  se v libovolném čase  $t$  vypočte jako  $X_1(t) = -\delta_{1f}(t)/\delta_{11}$  a závisí pouze na zatížení v tomto čase. Speciálně pokud na nosník působí konstantní zatížení od času  $t_0$ , je i staticky neurčitá veličina v čase neměnná a stejně tak i veškeré vnitřní síly. Tím jsme potvrdili jedno z obecných pravidel odvozených při výkladu deformační metody. Například v konkrétním případě nosníku na obr. 1.18a je  $\delta_{1f}(t) = -(\hat{f}L^3/24EI) \cdot H(t - t_0)$  a  $X_1(t) = (\hat{f}L^2/8) \cdot H(t - t_0)$ .

□

### 1.3 Konstitutivní vztahy pro víceosou napjatost

Při řešení plošných a prostorových konstrukcí samozřejmě nevystačíme s modely pro jednoosou napjatost a je třeba provést jejich vhodné zobecnění. Připomeňme, že pro izotropní lineárně pružný materiál je vztah mezi napětím a deformací popsán zobecněným Hookeovým zákonem, který je podrobně diskutován v dodatku B. Pružné vlastnosti materiálu jsou dány Youngovým modulem pružnosti  $E$  a Poissonovým součinitelem  $\nu$ , případně jinou dvojicí nezávislých parametrů, např. objemovým modulem pružnosti  $K$  a modulem pružnosti ve smyku  $G$ . V případě izotropního materiálu lze od sebe oddělit změny objemové a tvarové, přičemž objemové změny jsou charakterizovány středním napětím a objemovou deformací, zatímco tvarové změny jsou charakterizovány deviatorickými složkami napětí a deformace. Podrobnosti lze opět nalézt v dodatku B.

Jaký je přesný charakter časově závislých viskózních deformací za obecné napjatosti je stále předmětem zkoumání. Některé studie naznačují, že viskózní přetváření je převážně deviatorické a k objemovým změnám příliš nepřispívá, ale je zde také rozdíl mezi tzv. krátkodobým a dlouhodobým dotvarováním a zatím nebyl přijat všeobecně uznávaný jednotný model. V zásadě by bylo možno nahradit smykový a objemový modul pružnosti dvěma různými relaxačními operátory, případně jejich převrácené hodnoty dvěma různými operátory poddajnosti. V praktických výpočtech se ale pro jednoduchost předpokládá, že při dotvarovací zkoušce za víceosou napjatost zůstává poměr jednotlivých složek deformace beze změny. V zobecněném Hookeově zákonu nebo jeho inverzní formě tedy považujeme Poissonův součinitel za konstantu, Youngův modul pružnosti nahradíme relaxačním operátorem a jeho převrácenou hodnotu operátorem poddajnosti. Například klasická rovnice (B.5) pro výpočet deformace  $\varepsilon_x$  v pružném materiálu za víceosou napjatost se pro viskoelastický materiál přepíše jako

$$\varepsilon_x(t) = \mathcal{J}[\sigma_x(t) - \nu\sigma_y(t) - \nu\sigma_z(t)] = \mathcal{J}[\sigma_x(t)] - \nu\mathcal{J}[\sigma_y(t)] - \nu\mathcal{J}[\sigma_z(t)] \quad (1.256)$$

a rovnice (B.8) pro výpočet smykové deformace se přepíše jako

$$\gamma_{xy}(t) = 2(1 + \nu)\mathcal{J}[\tau_{xy}(t)] \quad (1.257)$$

V maticové podobě pak místo (B.12) můžeme psát

$$\varepsilon(t) = \tilde{\mathbf{C}}_e \mathcal{J}[\boldsymbol{\sigma}(t)] \quad (1.258)$$

kde  $\tilde{\mathbf{C}}_e$  je matice pružné poddajnosti vyhodnocená pro jednotkový modul pružnosti, je to tedy matice bezrozměrných koeficientů závislých pouze na Poissonově součiniteli. Konkrétně jde o matici následující za zlomkem  $1/E$  v rovnici (B.11). Inverzí (1.258) pak dostaneme

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \tilde{\mathbf{D}}_e \mathcal{R}[\varepsilon(t)] \quad (1.259)$$

kde  $\tilde{\mathbf{D}}_e = \tilde{\mathbf{C}}_e^{-1}$  je matice pružné tuhosti (B.14) vyhodnocená pro jednotkový modul pružnosti.

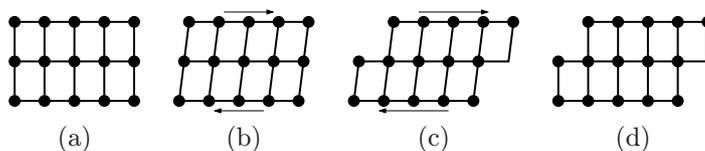
# Kapitola 2

## Plasticita

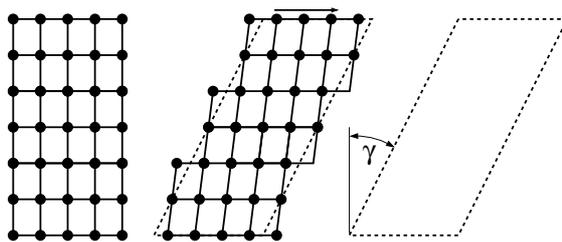
### 2.1 Konstitutivní vztahy pro jednoosou napjatost

#### 2.1.1 Fyzikální motivace

Teorie plasticity se zabývá popisem přetvárných procesů, při kterých dochází ke vzniku trvalých deformací. Typickým příkladem je pokluz podél krystalografických rovin v ideálních krystalech. Jak známo, v krystalických látkách (mezi něž patří za obvyklých podmínek například kovy) jsou atomy uspořádány do pravidelné mřížky, jejíž základní buňka se v prostoru periodicky opakuje. V krystalické mřížce lze identifikovat roviny, ve kterých leží velké množství pravidelně uspořádaných atomů, a v rámci těchto rovin pak najdeme konečný počet krystalografických směrů. Pokud se všechny atomy po jedné straně jisté krystalografické roviny posunou rovnoběžně s touto rovinou v některém z krystalografických směrů o vzdálenost odpovídající rozestupu mezi atomy v příslušném směru, je výsledkem opět pravidelné uspořádání, které je lokálně k nerozeznání od původního. To je zjednodušeným způsobem předvedeno na obr. 2.1, který ukazuje pouze dvourozměrnou mřížku.



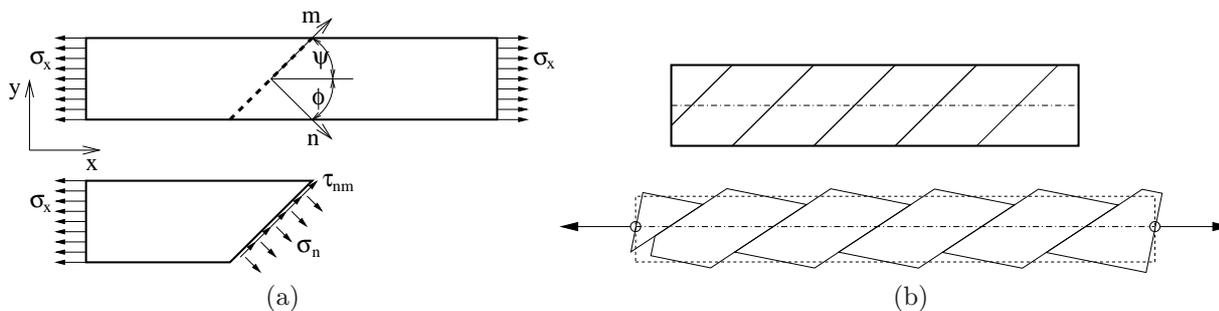
Obrázek 2.1: Deformace krystalické mřížky: (a) výchozí stav, (b) pružná deformace, (c) pružná deformace a deformace plastickým pokluzem, (d) trvalá deformace po odtížení.



Obrázek 2.2: Plastický pokluz podél krystalografických rovin a ekvivalentní smyková deformace  $\gamma$ .

Pokud k takovým posunům dojde v celé řadě navzájem rovnoběžných rovin, z hlediska celého krystalu nazíraného jako spojitě těleso jde o deformaci smykem, viz obr. 2.2. Vhodná kombinace plastického pokluzu podél rovin dvou různých směrů, případně kombinace plastického pokluzu a pootočení celého krystalu jako tuhého celku, vede k přetváření, které z makroskopického hlediska odpovídá protahování krystalu v jistém směru a zkracování ve směru na něj kolmém, viz obr. 2.3b. Společným rysem všech přetvárných mechanismů založených na plastickém pokluzu je zachování objemu. Plastické přetvárné procesy tohoto druhu tedy vedou pouze ke změně tvaru tělesa.

Nejjednodušší popis plastického přetváření krystalů může být založen na tzv. *Schmidově zákonu*, podle kterého k pokluzu dojde v okamžiku, kdy je na některé krystalografické rovině v některém krystalografickém směru dosaženo kritické hodnoty smykového napětí. Jestliže zavedeme lokální souřadnicové osy  $n$  a  $m$  tak, že osa  $n$  je kolmá na krystalografickou rovinu a osa  $m$  je rovnoběžná se směrem pokluzu (viz obr. 2.3a), je podle Schmidova zákona rozhodující hodnota smykového napětí  $\tau_{nm}$ . Pokud známe složky napětí vůči pevně zvolené globální soustavě souřadnic  $x, y, z$ , můžeme pro dané osy  $n$  a  $m$  napětí  $\tau_{nm}$  spočítat pomocí obvyklé transformace.



Obrázek 2.3: (a) Potenciální kluzný systém a veličiny objevující se ve Schmidově zákonu, (b) ilustrace toho, jak plastický pokluz kombinovaný s tuhým pootočením vede z makroskopického hlediska k protažení ve směru působící síly a zkrácení v příčném směru.

Například ve speciálním případě jednoosé napjatosti ve směru osy  $x$  bude

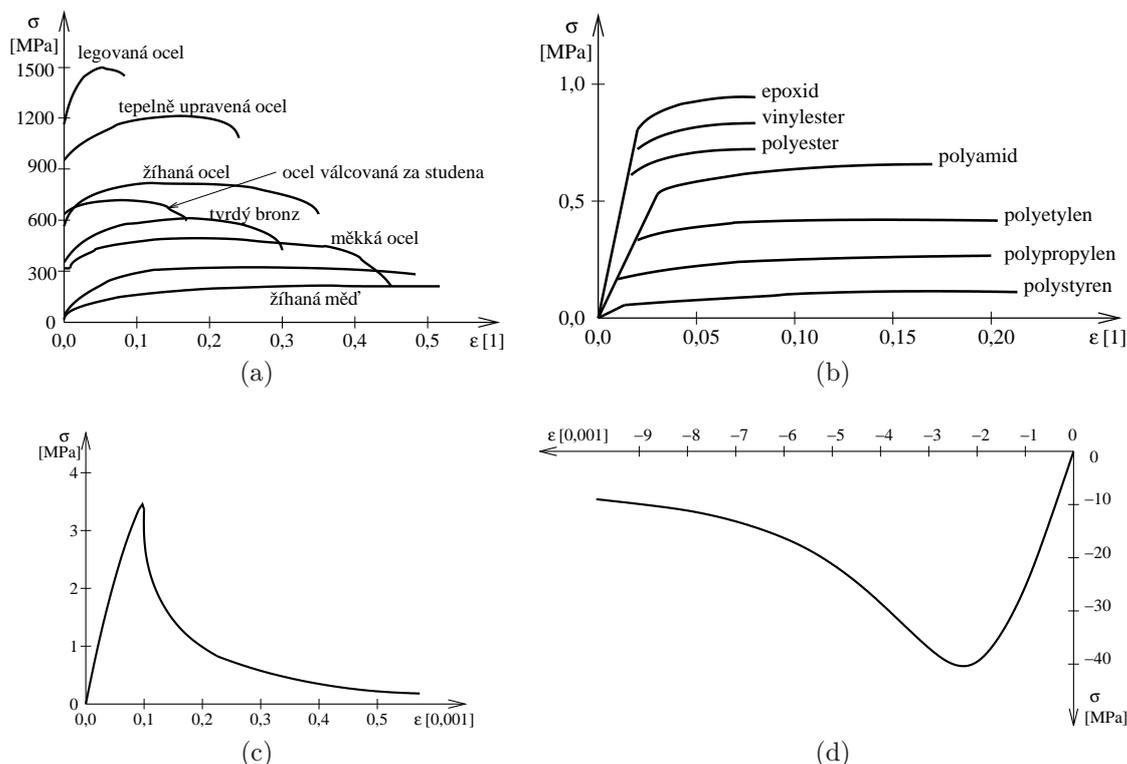
$$\tau_{nm} = \sigma_x n_x m_x = \sigma_x \cos \phi \cos \psi \quad (2.1)$$

kde  $\phi$  je úhel mezi osami  $x$  a  $n$  a  $\psi$  je úhel mezi osami  $x$  a  $m$ , takže  $n_x = \cos \phi$  je  $x$ -ová souřadnice jednotkového vektoru kolmého na rovinu pokluzu a  $m_x = \cos \psi$  je  $x$ -ová souřadnice jednotkového vektoru ve směru pokluzu (při vhodné volbě orientace těchto vektorů). Pro danou úroveň působícího napětí  $\sigma_x$  můžeme vyhodnotit smyková napětí  $\tau_{nm}$  odpovídající různým volbám os  $n$  a  $m$ . Přitom ale každá volba  $n$  musí odpovídat jedné z krystalografických rovin a každá volba  $m$  musí odpovídat jednomu z krystalografických směrů v rámci dané roviny, takže příslušných dvojic  $n$  a  $m$  je jen konečný počet. Každá taková dvojice představuje možný *kluzný systém*. Pro daný krystal jsou jednotlivé kluzné systémy pevně dané, ale konkrétní hodnoty faktorů  $n_x$  a  $m_x$  závisí na natočení krystalické mřížky vzhledem k ose  $x$ , jinými slovy na tom, ve kterém směru na krystal působí napětí.

Ze Schmidova zákona vycházejí nejrůznější modely pro popis plastického přetváření krystalů, které nacházejí uplatnění při detailním zkoumání materiálu na úrovni jeho mikrostruktury. V praktických aplikacích na úrovni konstrukcí se však s dokonale uspořádaným monokrystalem setkáme jen stěží. Při ochlazení tekutého materiálu začne krystalizace na celé řadě míst a z počátečních krystalizačních zárodků se vyvinou jednotlivá zrna. Každé zrno je krystalem s jinou orientací krystalické mřížky než v okolních zrnech, takže vzniká tzv. polykrystal, ve kterém již na makroskopické úrovni žádné preferované směry nerozeznáme. Proto se teorie plasticity může inspirovat představou plastického pokluzu v krystalické mřížce, ale skutečné přetváření je složitější a hrají v něm roli i jiné mechanismy. Navíc se teorie plasticity používá i pro materiály bez krystalické struktury. Je tudíž užitečné mít základní představu o experimentálně zjištěných pracovních diagramech pro různé materiály.

Na obr. 2.4 je ukázka pracovních diagramů pro jednoosé namáhání několika skupin materiálů. Všimněte si, že v jednotlivých grafech jsou použita velmi rozdílná měřítka. Na obr. 2.4a jsou výsledky jednoosých tahových zkoušek pro různé druhy oceli a některé další kovy. Relativní protažení vynášená na vodorovné ose nabývají hodnot až do 0,5, jde tedy o skutečně velké deformace. Proto jsou počáteční větve všech pracovních diagramů téměř svislé. Ve skutečnosti i v počátečním stadiu zatěžování se vzorky deformují, ale pouze pružně. Hodnoty pružné deformace jsou maximálně několik promile a v daném měřítku nejsou vůbec patrné. Tím spíše vynikne rozdíl mezi počáteční pružnou odezvou a pozdějším pružnoplastickým chováním, při kterém vznikají skutečně velké plastické deformace. Dříve či později však ve všech případech dojde k porušení vzorku. Materiály mající schopnost se výrazně deformovat a přitom stále přenášet napětí se nazývají *tažné*, v opačném případě říkáme, že jsou *křehké*. *Pevností* rozumíme největší napětí, které je materiál schopen při daném typu namáhání (např. tahem, tlakem, nebo smykem) přenést. Z grafů na obr. 2.4ab je mimo jiné vidět, že v rámci určité skupiny příbuzných materiálů mají vyšší tažnost obvykle materiály s nižší pevností, i když se samozřejmě najdou výjimky. Na obr. 2.4b jsou výsledky jednoosých tahových zkoušek pro různé typy polymerů. Relativní protažení zde také nabývají vysokých hodnot až do 0,2, ale protože jsou tyto materiály mnohem poddajnější než kovy (mají nižší modul pružnosti), jsou počáteční pružné části pracovních diagramů jasně patrné.

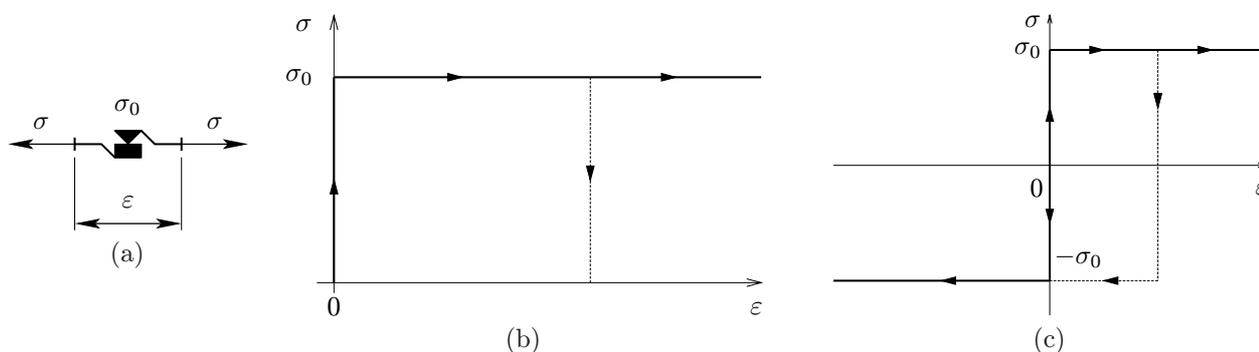
Pro kovy i polymery je velmi zřetelně oddělena počáteční pružná odezva od pozdější pružnoplastické, během které deformace výrazně narůstají, zatímco napětí roste jen zvolna, případně zůstává téměř konstantní a před porušením v některých případech mírně klesá. Velmi odlišné je chování betonu, znázorněné pomocí výsledků jednoosé tahové a tlakové zkoušky na obr. 2.4cd. V tahu je odezva lineárně pružná až téměř po vrchol pracovního diagramu a následuje zprvu velmi prudký a později pozvolnější pokles napětí za vzrůstající deformace. V tlaku jsou odchylky od linearit ve vzestupné části pracovního diagramu výraznější a přechod do sestupné části plynulejší, nicméně i zde je pokles napětí po vyčerpání pevnosti zřetelný. Za povšimnutí stojí i řádový rozdíl mezi tahovou a tlakovou pevností. V porovnání s kovy a polymery je beton pochopitelně mnohem křehčí a hodnoty relativního protažení se pohybují v řádu tisíců.



Obrázek 2.4: Pracovní diagramy pro jednosou napjatost: (a) kovy, (b) polymery, (c) beton v tahu, (d) beton v tlaku.

### 2.1.2 Ideálně tuhoplastický model

Představu o základních mechanismech plastického přetváření a znalost pracovních diagramů typických pružno-plastických materiálů využijeme jako inspiraci pro vývoj jednoduchých modelů pro jednosou napjatost, které později zobecníme. Základním stavebním kamenem takových modelů je *ideálně plastický článek*, který je někdy spojován se jmény Tresca nebo Saint-Venant. Tento článek postihuje tu část deformace, která je způsobena plastickým pokluzem a při odtížení (odstranění napětí) tudíž nemizí. Základním parametrem ideálně plastického článku je *mez kluzu*  $\sigma_0$ , tj. napětí, při kterém dochází k jeho plastickému přetváření. Dokud na článek působí napětí menší než  $\sigma_0$ , zůstává zablokovaný a nedeformuje se. Při dosažení napětí  $\sigma_0$  je aktivován plastický přetvárný proces a deformace neomezeně narůstá za konstatního napětí. To znamená, že ideálně plastický článek nemůže přenést napětí překračující mez kluzu. Při poklesu napětí se plastické přetváření zastaví a deformace se dále nemění. Její hodnota teď již není nulová, ale zůstává rovna hodnotě dosažené v průběhu předcházejícího plastického přetváření.



Obrázek 2.5: (a) Ideálně plastický článek, (b–c) pracovní diagramy ideálně tuhoplastického modelu.

V reologických schématech bude ideálně plastický článek představován symbolem zobrazujícím dvě rovnoběžné vrstvy, které mohou vůči sobě klouzat, ale kladou tomu jistý odpor; viz obr. 2.5a. Situace je podobná jako při vzájemné interakci dvou těles stýkajících se podél kluzné roviny a přitlačovaných k sobě konstantní silou. K vyvození vzájemného posunu v tečném směru je třeba překonat třecí sílu, která v této analogii odpovídá mezi kluzu. Použijeme-li ideálně plastický článek jako jediný prvek reologického schématu, získáme *ideálně tuhoplastický model*. Jeho pracovní diagram je zachycen na obr. 2.5b. Dokud napětí zůstává pod mezí kluzu, deformace se nemění a model se chová jako dokonale tuhý. Při dosažení meze kluzu naopak deformace volně narůstá za konstatního napětí a model se chová jako ideálně plastický. Tuhému chování odpovídají svislé části pracovního

diagramu, ideálně plastickému pak jeho vodorovné části.

Slovně popsané vlastnosti ideálně tuhoplastického modelu nyní převedeme do řeči matematických rovnic. V první řadě je třeba si uvědomit, že pracovní diagram se skládá z vodorovných a svislých segmentů, a proto nelze napětí charakterizovat jako jednoznačnou funkci deformace, ani deformaci jako jednoznačnou funkci napětí. Z dané hodnoty napětí nelze odvodit odpovídající hodnotu deformace, je však možné alespoň částečně určit, jak vypadá rychlost deformace. Pokud je totiž napětí pod mezí kluzu, zůstává deformace konstantní a její rychlost (derivace podle času) je proto nulová. Pokud je napětí na mezi kluzu, může být rychlost deformace nenulová, ale při kladném napětí nesmí být záporná. Napětí překračující mez kluzu pak není přípustné. Uvažujeme-li tedy pouze namáhání tahem (nezáporné hodnoty napětí), můžeme základní pravidla popsat takto:

$$\sigma < \sigma_0 \implies \dot{\epsilon} = 0 \quad (2.2)$$

$$\sigma = \sigma_0 \implies \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (2.3)$$

$$\sigma > \sigma_0 \implies \text{nepřípustné} \quad (2.4)$$

Chování modelu je zde popsáno pomocí několika pravidel, z nichž se v dané konkrétní situaci uplatní vždy pouze jedno. Při analýze složitějších modelů je však výhodné tato pravidla zapsat v ekvivalentním tvaru pomocí podmínek, které jsou splněny v libovolné situaci všechny zároveň. Snadno lze ověřit, že tomu vyhovují podmínky

$$\sigma - \sigma_0 \leq 0, \quad \dot{\epsilon} \geq 0, \quad (\sigma - \sigma_0) \dot{\epsilon} = 0 \quad (2.5)$$

Skutečně, první z těchto podmínek vylučuje překročení meze kluzu, druhá zajišťuje, že při plastickém přetváření (tj. při napětí na mezi kluzu) je rychlost deformace nezáporná, a konečně ze třetí vyplývá, že při napětí pod mezí kluzu je rychlost deformace nulová. Důležité je, že ačkoliv např. druhá podmínka má klíčový význam v režimu plastického přetváření, je splněna i v režimu tuhého chování, a naopak třetí podmínka má klíčový význam v režimu tuhého chování, ale je splněna i v režimu plastického přetváření.

Zatím jsme mlčky předpokládali, že napětí je nezáporné, resp. že při záporném napětí nedochází k plastickému přetváření. Pokud chápeme napětí v našem jednorozměrném modelu jako normálové, znamenalo by to, že se materiál plasticky přetváří pouze v tahu, zatímco v tlaku zůstává tuhý. Pro typické materiály vykazující plastické deformace (např. kovy) však k plastickým deformacím dochází i při tlakovém namáhání. Navíc je vzhledem k fyzikální podstatě plastického přetváření vhodné interpretovat napětí i deformaci spíše jako smykové složky, a pak je zřejmé, že v oboru kladných i záporných hodnot by se model měl chovat „symetricky“. Pracovní diagram ideálně tuhoplastického materiálu se stejnou mezí kluzu v oblasti kladného i záporného napětí je zachycen na obr. 2.5c. Příslušné zobecnění pravidel (2.2)–(2.4) by vypadalo následovně:

$$\sigma < -\sigma_0 \implies \text{nepřípustné} \quad (2.6)$$

$$\sigma = -\sigma_0 \implies \dot{\epsilon} \leq 0 \quad (2.7)$$

$$-\sigma_0 < \sigma < \sigma_0 \implies \dot{\epsilon} = 0 \quad (2.8)$$

$$\sigma = \sigma_0 \implies \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (2.9)$$

$$\sigma > \sigma_0 \implies \text{nepřípustné} \quad (2.10)$$

Tato pravidla můžeme opět zapsat ve tvaru podobném (2.5), ovšem po určitých úpravách. První podmínku, která vylučuje nepřípustné hodnoty napětí, je třeba zobecnit na  $|\sigma| - \sigma_0 \leq 0$ . Druhá podmínka zabezpečuje, aby byl při plastickém přetváření nárůst deformace „soulasně orientován“ s působícím napětím. Při kladném napětí na mezi kluzu tedy musí být rychlost deformace nezáporná a při záporném napětí na mezi kluzu musí být nekladná. Jinými slovy, pokud je rychlost deformace nenulová, musí mít stejné znaménko jako napětí. To lze vyjádřit vztahem

$$\dot{\epsilon} = \dot{\lambda} \operatorname{sgn} \sigma \quad (2.11)$$

doplňným podmínkou  $\dot{\lambda} \geq 0$ . Nově zavedený symbol  $\lambda$  označuje tzv. *plastický násobitel* a  $\dot{\lambda}$  je jeho rychlost. Pro náš jednoduchý model je samozřejmě  $\dot{\lambda} = |\dot{\epsilon}|$ , tj. rychlost plastického násobitele je vlastně rychlost deformace zbavená znaménka. Později uvidíme, že pro složitější modely může mít plastický násobitel poněkud obecnější význam, jeho přírůstek je však vždy nezáporný a nějakým způsobem vyjadřuje míru přírůstku plastické deformace. Rovnice (2.11) vlastně vyjadřuje rozklad přírůstku (plastické) deformace na součin „orientovaného směru“, který je určen znaménkem napětí, a velikosti, která odpovídá přírůstku plastického násobitele a pro ideálně tuhoplastický model zůstává neurčená.

Po nahrazení rychlosti deformace  $\dot{\epsilon}$  rychlostí plastického násobitele  $\dot{\lambda}$  (a napětí jeho absolutní hodnotou) popisují podmínky (2.5) v kombinaci s (2.11) obecnější případ, kdy plastické přetváření může nastat při kladném i záporném napětí. Zavedeme-li navíc tzv. *funkci plasticity*

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_0 \quad (2.12)$$

můžeme výslednou upravenou podobu podmínek (2.5) zapsat ve tvaru

$$f(\sigma) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f(\sigma) = 0 \quad (2.13)$$

Tabulka 2.1: Matematický popis ideálně tuhoplastického modelu pro jednoosou napjatost.

definice funkce plasticity	$f(\sigma) =  \sigma  - \sigma_0$
podmínka plastické přípustnosti	$f(\sigma) \leq 0$
zákon plastického přetváření	$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \operatorname{sgn} \sigma, \quad \dot{\lambda} \geq 0$
podmínka komplementarity	$\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$

Zdánlivě se jedná o zbytečně komplikovaný popis poměrně jednoduchého modelu. Později se však ukáže, že tzv. *zatěžovací-odtěžovací podmínky* (2.13) hrají v teorii plasticity velice důležitou roli a po drobné úpravě (přidání dalších složek napětí mezi argumenty funkce plasticity) zůstávají v platnosti i pro obecné modely pro trojosou napjatost. S formálně podobnými podmínkami se navíc setkáme i v lomové mechanice (kapitola 3) a v mechanice poškození (kapitola 4).

Základní rovnice a nerovnosti popisující ideálně tuhoplastický model jsou shrnuty v tabulce 2.1. V prvním řádku tabulky je jen definice funkce plasticity, která umožňuje přehlednější zápis samotných rovnic. Ve druhém řádku je první ze *zatěžovacích-odtěžovacích* podmínek (2.13), která se v samostatné podobě nazývá *podmínka plastické přípustnosti*. Tato podmínka vylučuje hodnoty napětí, které jsou za hranicí meze kluzu a tudíž nemohou být daným materiálem přeneseny. Pokud je splněna v ostrém smyslu, tj. pokud

$$f(\sigma) < 0 \quad (2.14)$$

pak nedochází k plastickému přetváření a materiál se chová jako tuhý. K plastickému přetváření může docházet pouze, pokud je splněna rovnost

$$f(\sigma) = 0 \quad (2.15)$$

která představuje tzv. *podmínku plasticity*. Ve třetím řádku tabulky 2.1 je uvedeno pravidlo popisující proces plastického přetváření. Toto pravidlo je přepisem vztahu (2.11) a s ním související podmínky  $\dot{\lambda} \geq 0$  a představuje tzv. *zákon plastického přetváření*, jenž určuje, ve kterém orientovaném směru narůstá za daného napětí plastická deformace. Konečně ve čtvrtém řádku tabulky je poslední podmínka z (2.13), které se říká *podmínka komplementarity*, protože vyjadřuje skutečnost, že případy  $\dot{\lambda} > 0$  a  $f(\sigma) < 0$  se navzájem vylučují (jsou tedy doplňkové = komplementární). Jak bylo již zmíněno,  $\dot{\lambda} > 0$  odpovídá plastickému přetváření a  $f(\sigma) < 0$  odpovídá tuhému chování modelu.

Podobně jako pro viskoelastické modely, zkoumané v předchozí kapitole, se i pro plastické modely budeme zabývat základní otázkou, jak určit vývoj napětí odpovídající předepsanému vývoji deformace. Pro ideálně tuhoplastický model je takovou úlohu možné řešit na základě jednoduchých pravidel:

- jestliže deformace roste, napětí je na kladné mezi kluzu,
- jestliže deformace klesá (tj. její časová derivace je záporná), napětí je na záporné mezi kluzu,
- a jestliže deformace zůstává konstantní, napětí nelze jednoznačně určit, pouze víme, že jeho hodnota je mezi zápornou a kladnou mezi kluzu.

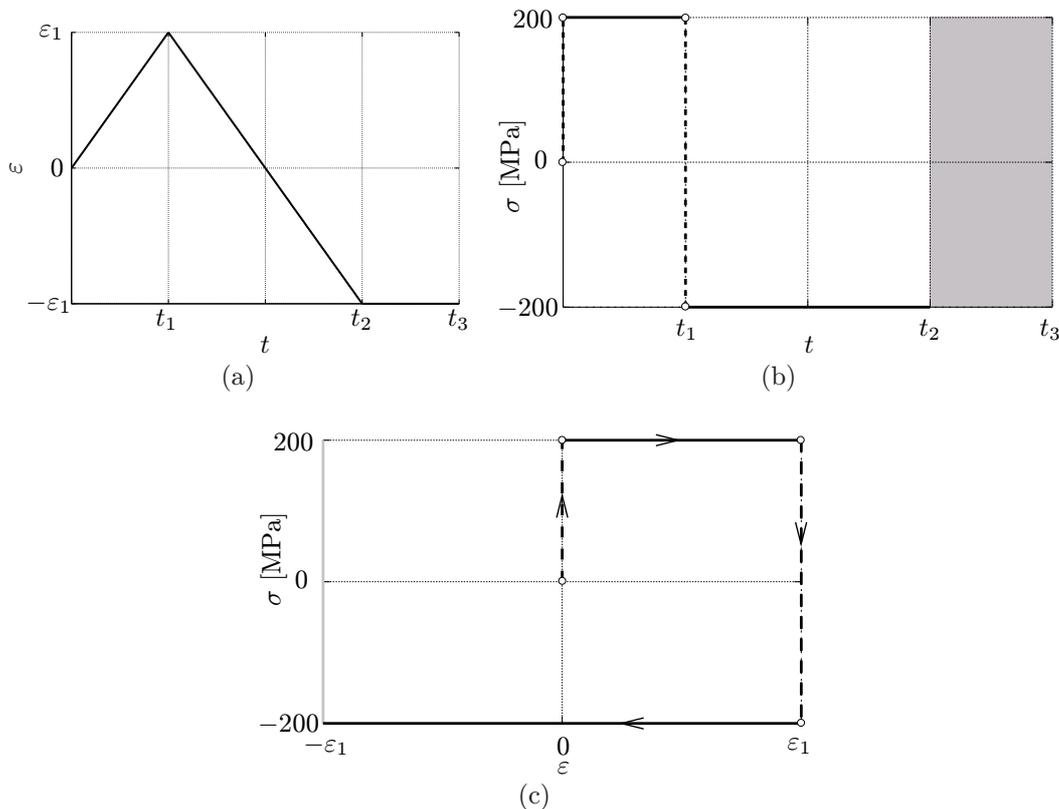
Formálně lze tato pravidla odvodit ze základních rovnic pro ideálně tuhoplastický model uvedených v tab. 2.1.

### Příklad 2.1: Odezva ideálně tuhoplastického modelu

Úkolem je pro vývoj deformace popsany grafem na obr. 2.6a určit odezvu ideálně tuhoplastického modelu charakterizovaného mezi kluzu  $\sigma_0 = 200$  MPa a sestrojít odpovídající pracovní diagram (závislost mezi napětím a deformací). V počátečním intervalu od času 0 do času  $t_1$  deformace vzrůstá, její časová derivace je kladná a napětí musí být rovno 200 MPa. Jestliže napětí interpretujeme jako normálové, tato fáze odezvy odpovídá plastickému přetváření v tahu. Od času  $t_1$  do času  $t_2$  deformace klesá, její časová derivace je záporná a napětí musí být rovno -200 MPa. Dochází přitom k plastickému přetváření v tlaku. Všimněte si, že v čase  $t_1$  se napětí skokem změní z 200 MPa na -200 MPa, viz obr. 2.6b. Od času  $t_2$  do času  $t_3$  je deformace konstantní a plastický článek zůstává zablokovaný, přičemž napětí v něm může být kdekoli mezi -200 MPa a 200 MPa. V této fázi tedy vývoj napětí není jednoznačně určen, což je v grafu na obr. 2.4b schématicky znázorněno šedou oblastí. Pracovní diagram je zachycen na obr. 2.6c.

Na rozdíl od předchozí kapitoly zde čas hraje jen pomocnou roli a konkrétní hodnoty časových okamžiků  $t_1$ ,  $t_2$  a  $t_3$  nemají na výsledný pracovní diagram žádný vliv. Není ani důležité, jestli např. v intervalu  $(t_1, t_2)$  deformace vzrůstá v závislosti na čase lineárně, kvadraticky nebo jakkoli jinak. Podstatná je pouze skutečnost, že deformace v celém tomto intervalu monotónně vzrůstá, tj. že její přírůstky jsou kladné. Místo skutečného času bychom tedy mohli použít jakoukoli jinou veličinu parametrizující celý zatěžovací program. V dané souvislosti zatěžovacím programem rozumíme předepsaný vývoj deformace, jindy to může být předepsaný vývoj napětí.

□



Obrázek 2.6: (a) Předepsaný vývoj deformace, (b) odpovídající vývoj napětí, (c) odpovídající pracovní diagram ideálně tuhoplastického modelu.

Ideálně tuhoplastický model je velmi jednoduchý, ale jeho nevýhodou je právě nejednoznačnost odezvy při předepsaném vývoji deformace. Pokud bychom místo vývoje deformace předepsali vývoj napětí, situace by byla ještě horší. Při dosažení meze kluzu by byl odpovídající vývoj deformace nejednoznačný a po jejím překročení by dokonce úloha neměla řešení. Podobné problémy jsou alespoň částečně odstraněny přechodem ke složitějším modelům, které jsou navíc i výstižnější.

### 2.1.3 Ideálně pružoplastický model

Nejjednodušší model, představený v předchozím článku, považuje za jediný zdroj deformace plastické přetvárné procesy. Ve skutečnosti však v materiálu dochází také k pružnému přetváření, a to i při nízké úrovni působícího napětí. Celková deformace tedy vzniká složením příspěvků pružné a plastické deformace, přičemž pružná deformace má vratný charakter, tj. vymizí po odstranění působícího napětí, zatímco plastická deformace je trvalá (nevratná).

Představme si prut konstantního průřezu, který má v počátečním nezatíženém stavu délku  $L_0$ . Pod působením podélného zatížení (vyvozujiícího v prutu stav jednoosého tahu) se prut protáhne na délku  $L$  a po odtížení se jeho délka zmenší na  $L_p$ . Rozdíl mezi  $L_0$  a  $L_p$  je způsoben trvalou deformací; pokud by se materiál deformoval pouze pružným způsobem, bylo by  $L_p = L_0$ . Obvyklou inženýrskou mírou deformace je relativní protažení, definované jako rozdíl nové a původní délky vydělený původní délkou. Takto definovanou deformační veličinu budeme označovat písmenem  $\varepsilon$ . Při vyhodnocení celkové deformace v zatíženém stavu samozřejmě dosazujeme za novou délku  $L$  a za původní  $L_0$ , takže

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{L}{L_0} - 1 \quad (2.16)$$

Po odtížení pružná část deformace zmizí a zůstane jen část plastická, jejíž inženýrskou mírou

$$\varepsilon_p = \frac{L_p - L_0}{L_0} = \frac{L_p}{L_0} - 1 \quad (2.17)$$

vypočteme dosazením  $L_p$  za novou délku a  $L_0$  za původní. Pozor je však třeba dát při vyhodnocování pružné deformace  $\varepsilon_e$ . Ta se získá porovnáním délky  $L$  v zatíženém stavu s délkou  $L_p$  v odtíženém stavu, je tedy

$$\varepsilon_e = \frac{L - L_p}{L_p} = \frac{L}{L_p} - 1 \quad (2.18)$$

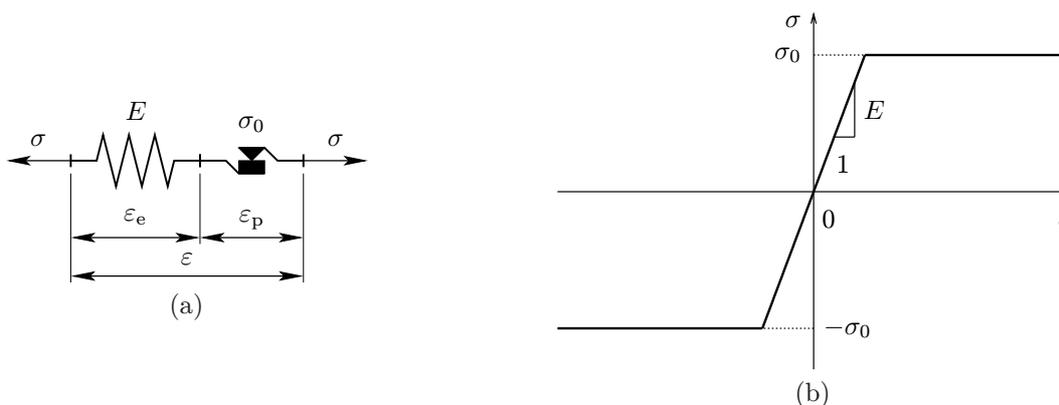
Jelikož poměr  $L/L_0$  je součinem poměrů  $L/L_p$  a  $L_p/L_0$ , mezi celkovou deformací a její pružnou a plastickou částí platí vztah

$$\varepsilon = \frac{L}{L_0} - 1 = \frac{L}{L_p} \frac{L_p}{L_0} - 1 = (1 + \varepsilon_e)(1 + \varepsilon_p) - 1 = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_e \varepsilon_p \quad (2.19)$$

Vidíme tedy, že obecně je vztah mezi celkovou deformací a její pružnou a plastickou částí poměrně komplikovaný. Situace se však zjednoduší, pokud se omezíme na malé deformace, tj. na případy, kdy  $\varepsilon_e \ll 1$  a  $\varepsilon_p \ll 1$ . Součin  $\varepsilon_e \varepsilon_p$  pak lze zanedbat a celkovou deformaci  $\varepsilon$  lze vyjádřit jako součet pružné deformace  $\varepsilon_e$  a plastické deformace  $\varepsilon_p$ . Získáváme tzv. *aditivní rozklad* deformace na pružnou a plastickou část,

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (2.20)$$

kteřý se později snadno zobecní i na případ víceosé napjatosti, viz (2.142). Na stavebních konstrukcích většinou velké deformace nepřipouštíme a výše uvedený předpoklad malých deformací je oprávněný. Je však třeba mít na paměti, že v jiných aplikačních oblastech, např. při popisu tváření kovů, je třeba pracovat s velkými deformacemi a matematický popis rozkladu deformace na pružnou a plastickou část je pak podstatně složitější, zejména při víceosé napjatosti.



Obrázek 2.7: (a) Ideálně pružnoplastický model, (b) odpovídající pracovní diagram.

Aditivní (tj. součtový) tvar rozkladu deformace (2.20) naznačuje, že v příslušném modelu by měly být články odpovídající pružnému a plastickému přetváření zapojeny sériově (za sebou). Tak dospíváme k *ideálně pružno-plastickému modelu*, který vznikne sériovým zapojením lineární pružiny a ideálně plastického článku; viz obr. 2.7a. Při sériovém zapojení je napětí v obou člancích stejné a odpovídá celkovému napětí  $\sigma$  přenášenému materiálem v daném bodě. Konstitutivní vztah pro pružný článek tedy zapíšeme jako

$$\sigma = E\varepsilon_e \quad (2.21)$$

kde  $E$  je tuhost pružiny, která pro tento model odpovídá Youngovu modulu pružnosti materiálu. Všimněte si, že v Hookeově zákonu (2.21) se objevuje celkové napětí  $\sigma$ , ale jen pružná část deformace  $\varepsilon_e$ . Pro ideálně plastickou část modelu použijeme stejný popis jako v článku 2.1.2, jen je třeba celkovou deformaci  $\varepsilon$  nahradit její plastickou částí  $\varepsilon_p$ . Celá soustava rovnic (a nerovností) popisujících ideálně pružnoplastický model je uvedena v tab. 2.2.

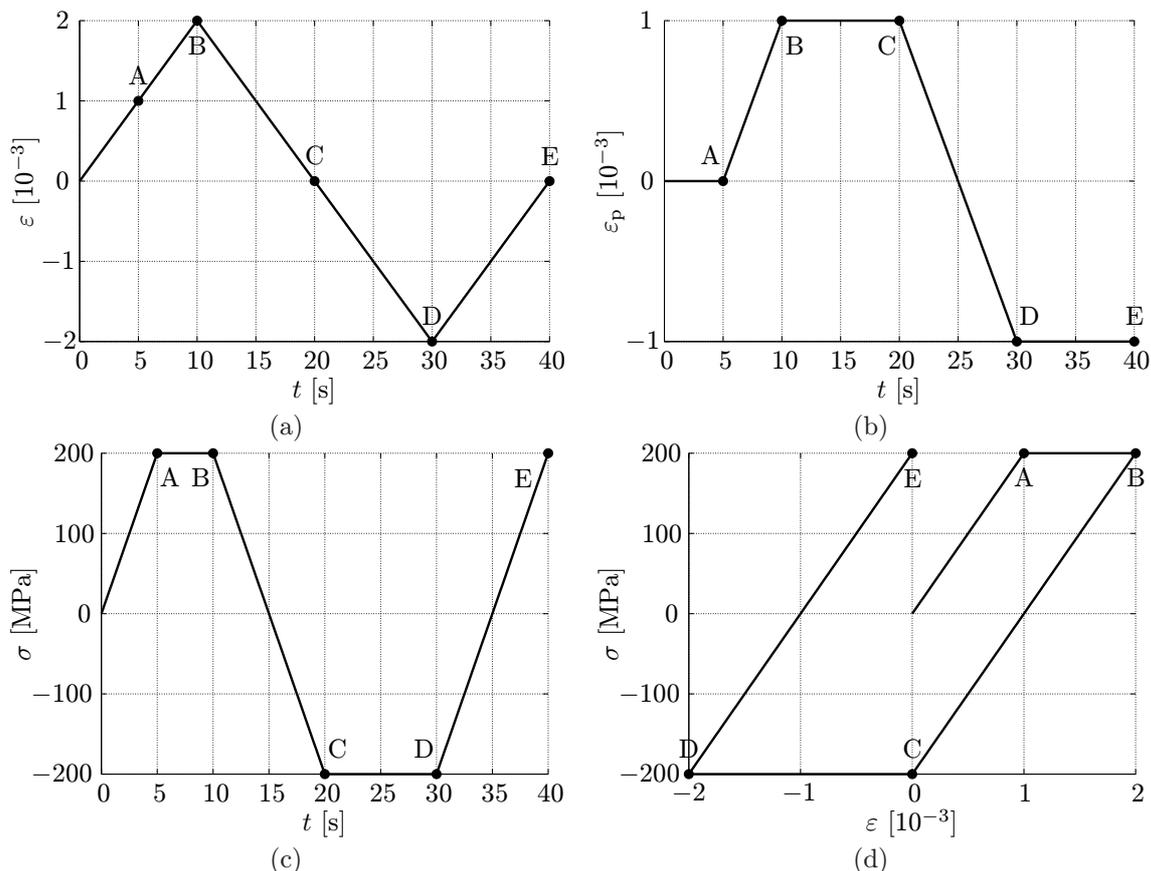
Tabulka 2.2: Matematický popis ideálně pružnoplastického modelu pro jednoosou napjatost.

rozklad deformace	$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$
Hookeův zákon	$\sigma = E\varepsilon_e$
definice funkce plasticity	$f(\sigma) =  \sigma  - \sigma_0$
podmínka plastické přípustnosti	$f(\sigma) \leq 0$
zákon plastického přetváření	$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \operatorname{sgn} \sigma, \quad \dot{\lambda} \geq 0$
podmínka komplementarity	$\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$

### Příklad 2.2: Odezva ideálně pružnoplastického modelu

Pro ideálně pružnoplastický model charakterizovaný modulem pružnosti  $E = 200$  GPa a mezí kluzu  $\sigma_0 = 200$  MPa určíme vývoj napětí odpovídající předepsanému vývoji deformace podle obr. 2.8a.

V první fázi daného zatěžovacího programu se ideálně pružnoplastický model chová jako pružina s modulem pružnosti  $E$ . Dokud totiž je napětí přenášené ideálně plastickým článkem menší než mez kluzu, zůstává tento



Obrázek 2.8: (a) Předepsaný vývoj deformace, (b) odpovídající vývoj plastické deformace, (c) odpovídající vývoj napětí, (d) odpovídající pracovní diagram ideálně pružnoplastického modelu.

článek neaktivní a celý model se chová jako lineárně pružný. Jinými slovy, platí  $\varepsilon_p = 0$ ,  $\varepsilon_e = \varepsilon$  a  $\sigma = E\varepsilon_e = E\varepsilon$ . Mezní pružná deformace, která omezuje oblast lineárního chování modelu, je určena poměrem meze kluzu a modulu pružnosti, který budeme v dalším textu označovat jako

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{200 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} = 10^{-3} \quad (2.22)$$

V počátečním intervalu  $[0, 5]$  s se tedy model chová jako lineárně pružný, hodnota deformace v pružném článku  $\varepsilon_e$  je rovna celkové deformaci  $\varepsilon$  a plastická deformace  $\varepsilon_p$  zůstává nulová. V čase  $t = 5$  s je celkové napětí rovno  $\sigma(5 \text{ s}) = \sigma_0 = 200 \text{ MPa}$  a plastická deformace  $\varepsilon_p(5 \text{ s}) = 0$ . Tento stav označujeme v grafech vynesných na obr. 2.8 symbolem A.

Jakmile hodnota deformace přestoupí mezní elastickou hodnotu  $\varepsilon_0$ , dojde k aktivaci ideálně plastického článku. Protože v obou článcích modelu je stejné napětí  $\sigma$  a ideálně plastický článek přeneše pouze napětí odpovídající mezi kluzu  $\sigma_0$ , musí zůstat deformace v elastickém článku rovna  $\varepsilon_0$ . Zbylá část deformace  $\varepsilon - \varepsilon_0$  pak odpovídá deformaci ideálně plastického článku. V intervalu  $[5, 10]$  s se tedy nijak nemění stav pružného článku, veškerá změna deformace se odehrává v plastickém článku a model se chová plasticky. V čase  $t = 10$  s, který je označen na obr. 2.8 jako B, je tedy celkové napětí rovno  $\sigma(10 \text{ s}) = \sigma_0 = 200 \text{ MPa}$ , elastická deformace  $\varepsilon_e(10 \text{ s})$  je stále rovna  $\varepsilon_0$  a plastická deformace je

$$\varepsilon_p(10 \text{ s}) = \varepsilon(10 \text{ s}) - \varepsilon_e(10 \text{ s}) = 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 = 10^{-3} \quad (2.23)$$

V čase  $t = 10$  s dochází ke změně charakteru zatěžovacího procesu. Zatímco v intervalu  $[0, 10]$  s deformace rostla (docházelo k protahování), v rozmezí  $10-20$  s naopak klesá (dochází ke zkrácování). V okamžiku, kdy začne deformace klesat, dojde ke zkrácení pružiny a tím pádem i k poklesu napětí  $\sigma$  a k deaktivaci ideálně plastického článku. Hodnota plastické deformace se nadále nemění a pokles celkové deformace se projeví zkrácením pružiny  $\varepsilon_e$ . Formálně vývoj pružné deformace a napětí popíšeme vztahy

$$\varepsilon_e(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_p(10 \text{ s}) = \varepsilon_0 \cdot \left(4 - 2\frac{t}{10}\right) - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \cdot \left(3 - \frac{t}{5}\right) \quad (2.24)$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon_e(t) = \sigma_0 \cdot \left(3 - \frac{t}{5}\right) \quad (2.25)$$

K aktivaci ideálně plastického článku v tlaku dojde v okamžiku, kdy napětí nabude hodnoty  $-\sigma_0$ . Odpovídající

čas určíme z poslední rovnice:

$$-\sigma_0 = \sigma_0 \cdot \left(3 - \frac{t}{5}\right) \Rightarrow t = 20 \text{ s} \quad (2.26)$$

Odpovídající hodnota elastické deformace je  $\varepsilon_e(20 \text{ s}) = -\varepsilon_0$ . V časovém intervalu  $[10, 20]$  s se model chová jako lineárně pružný. Na rozdíl od počáteční fáze zatěžovacího programu ale model vykazuje nenulovou počáteční deformaci  $\varepsilon_p$ , která se projeví ve vztahu mezi napětím a deformací (např. v čase  $t = 15$  s je celková deformace nulová, hodnota napětí je ale  $-\sigma_0$ ). Proto toto chování označujeme jako *pružné odtížení*. Konci pružného odtěžení odpovídá na obr. 2.8 značka C.

V čase  $t = 20$  s se opět aktivuje ideálně plastický článek a deformace v elastickém článku  $\varepsilon_e$  zůstává v průběhu dalšího tlakového zatěžování rovna  $-\varepsilon_0$ . Vývoj plastické deformace je popsán funkcí

$$\varepsilon_p(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_e(20 \text{ s}) = 2\varepsilon_0 \cdot \left(2 - \frac{t}{10}\right) + \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \cdot \left(5 - \frac{t}{5}\right), \quad (2.27)$$

Na konci tohoto intervalu, v čase  $t = 30$  s odpovídajícím bodu D, je hodnota plastické deformace  $\varepsilon_p(30 \text{ s}) = -\varepsilon_0$ . Hodnota napětí  $\sigma$  zůstává v časovém rozmezí 20–30 s na záporné mezi kluzu  $-\sigma_0$ . Jedná se tedy opět o fázi plastického přetváření, tentokrát v tlaku.

V čase  $t = 30$  s dochází znovu ke změně znaménka rychlosti deformace a z tlakového namáhání přecházíme postupně do tahového. Stejně jako v čase  $t = 10$  s i v tomto případě dojde k „vypnutí“ ideálně plastického členu a tedy k „zapnutí“ pružiny. Probíhá elastické odtěžení, při kterém je vývoj pružné deformace a napětí popsán funkcemi

$$\varepsilon_e(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_p(30 \text{ s}) = 2\varepsilon_0 \cdot \left(-4 + \frac{t}{10}\right) + \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \cdot \left(-7 + \frac{t}{5}\right) \quad (2.28)$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon_e(t) = \sigma_0 \cdot \left(-7 + \frac{t}{5}\right) \quad (2.29)$$

Dosažením do posledního vztahu vidíme, že v čase  $t = 40$  s bude hodnota napětí  $\sigma(40 \text{ s}) = \sigma_0$ , elastické odtěžení tedy trvá do konce uvažovaného zatěžovacího programu, označeného jako stav E.

□

Právě skončený příklad jsme řešili spíše intuitivně, z názoru, aby čtenář získal základní představu o chování pružnoplastického modelu. Nyní provedeme formální matematický rozbor, který povede k obecnému návodu, jak analyzovat odezvu daného modelu. Především je třeba přesně vymezit, v jakém smyslu budeme používat pojmy stav a proces. Pojem *stav* se týká okamžitých hodnot různých veličin, např. deformace nebo napětí, zatímco pojem *proces* se týká změn (přírůstků, rychlostí) probíhajících v jistém časovém intervalu. Proces pochopitelně začíná v jistém stavu a tento stav se během procesu postupně mění. Při rozboru chování pružnoplastického materiálu pak rozlišujeme mezi pružnými a plastickými stavy a také mezi pružnými a plastickými procesy. V předcházejícím příkladu byl přetvárný proces pružný v intervalech  $[0, 5]$ ,  $[10, 20]$  a  $[30, 40]$ s a plastický v intervalech  $[5, 10]$  a  $[20, 30]$ s. Stav označené A, B, C, D a E byly všechny plastické, ale např. stav v čase 15s byl pružný.

Zda je stav pružný nebo plastický poznáme podle okamžité hodnoty funkce plasticity. V pružném stavu je funkce plasticity záporná, tj. splňuje podmínku (2.14), zatímco v plastickém stavu je nulová, tj. splňuje podmínku plasticity (2.15). Při klasifikaci přetvárných procesů se řídíme tím, zda se plastická deformace mění, nebo zůstává konstantní. Plastický proces je charakterizován kladnou hodnotou rychlosti plastického násobitele, zatímco nulová hodnota této rychlosti odpovídá pružnému procesu. Pokud se hodnota napětí mění spojitě (nedochází k náhlým skokům), zůstává při procesu vycházejícím z pružného stavu hodnota funkce plasticity aspoň v rámci krátkého časového intervalu záporná a podle podmínky komplementarity  $\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$  musí být  $\dot{\lambda} = 0$ , takže příslušný přetvárný proces je pružný. Proces vycházející z plastického stavu může být plastický, pokud funkce plasticity zůstává rovna nule a plastický násobitel  $\lambda$  se zvětšuje, ale může se také stát, že hodnota funkce plasticity poklesne, takže materiál se dostane do pružného stavu a příslušný proces odpovídá pružnému odtěžení za konstantní plastické deformace.

Dosavadní výsledky rozboru jsou shrnuty v levé části tabulky 2.3. Příklad pružného procesu vycházejícího z pružného stavu označíme písmenem E (elastický), pružné odtížení z plastického stavu označíme P→E (výchozí

Tabulka 2.3: Klasifikace stavů a procesů pro ideálně pružnoplastický model.

případ	$f(\sigma)$	stav	$\dot{\lambda}$	proces	$\dot{f}$	$\dot{\varepsilon} \operatorname{sgn} \sigma$	vztah mezi $\dot{\sigma}$ a $\dot{\varepsilon}$
E	$< 0$	pružný	$= 0$	pružný	libovolné	libovolné	$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$
P→E	$= 0$	plastický	$= 0$	pružný	$\leq 0$	$\leq 0$	$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$
P	$= 0$	plastický	$> 0$	plastický	$= 0$	$> 0$	$\dot{\sigma} = 0$

stav plastický, proces elastický), a plastické přetváření označíme jako případ P. Pravé části tabulky 2.3 se budou týkat další úvahy.

Typ přetvárného procesu (pružný/plastický) jsme zatím schopni posoudit jen, pokud známe rychlost (resp. přírůstek) plastického násobitele. Ten však v praktických úlohách není přímo předepsán. Místo toho obvykle známe hodnoty všech veličin v určitém stavu a dále rychlost nebo přírůstek celkové deformace. Není přitom předem známo, jak se tento přírůstek rozloží na pružnou a plastickou část. Pokud je výchozí stav pružný, bude i proces pružný (alespoň dokud hodnota funkce plasticity nedosáhne nuly) a přírůstek plastické deformace bude nulový. Vztah mezi přírůstky napětí a deformace pak bude dán Hookeovým zákonem, protože nebude rozdíl mezi přírůstkem celkové a pružné deformace. Pro pružný proces (případ E) tedy můžeme psát

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} \quad (2.30)$$

Naproti tomu pokud je výchozí stav plastický, může dojít k plastickému přetváření (případ P), nebo k pružnému odtěžování (případ P→E). Otázka zní, podle jakého kritéria zjistíme, který z těchto případů nastává. Z názoru je zřejmé, že pokud je napětí na mezi kluzu v tahu, vedou kladné přírůstky deformace k plastickému přetváření a záporné k pružnému odtěžování, zatímco při napětí na mezi kluzu v tlaku je tomu naopak. Ukážeme, že toto kritérium lze odvodit také formální analýzou. Významnou roli přitom bude hrát časová derivace funkce plasticity, pro kterou nejprve odvodíme vhodné vyjádření.

Derivujeme-li funkci plasticity definovanou předpisem (2.12) podle času, je třeba uplatnit vzorec pro derivaci složené funkce, neboť  $f$  je funkcí napětí  $\sigma$  a  $\sigma$  je funkcí času  $t$ . Máme tedy

$$\dot{f} = \frac{df(\sigma(t))}{dt} = \frac{df(\sigma)}{d\sigma} \frac{d\sigma(t)}{dt} = (\operatorname{sgn} \sigma) \dot{\sigma} \quad (2.31)$$

Přitom jsme využili skutečnosti, že derivací funkce  $|\sigma|$  podle  $\sigma$  je funkce  $\operatorname{sgn} \sigma$ , což platí pro všechna  $\sigma \neq 0$ . Případ  $\sigma = 0$  ale můžeme vyloučit, protože provádíme analýzu procesů vycházejících z plastického stavu, ve kterém může být  $\sigma$  rovno pouze  $\sigma_0$  nebo  $-\sigma_0$ . Podle času můžeme snadno zderivovat i rozklad deformace (2.20) a Hookeův zákon (2.21). Spojením obou rovnic a uplatněním zákona plastického tečení (2.11) dostaneme výraz pro rychlost napětí

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}_e = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p) = E(\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \operatorname{sgn} \sigma) \quad (2.32)$$

a po jeho dosazení do (2.31) zjistíme, že

$$\dot{f} = (\operatorname{sgn} \sigma) \dot{\sigma} = (\operatorname{sgn} \sigma) E(\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \operatorname{sgn} \sigma) = E(\dot{\epsilon} \operatorname{sgn} \sigma - \dot{\lambda}) \quad (2.33)$$

Při úpravě jsme využili toho, že  $\operatorname{sgn} \sigma$  je buď 1 nebo  $-1$  a proto  $(\operatorname{sgn} \sigma)^2 = 1$  (stále vylučujeme případ  $\sigma = 0$ ).

Po přípravných úvahách můžeme přistoupit k odvození výše ohlášeného kritéria pro procesy vycházející z plastického stavu. Předpokládejme nejprve, že dochází k pružnému odtěžování (nastává případ P→E). Pak je  $\dot{\lambda} = 0$  a z (2.32) plyne  $\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}$ . Jelikož výchozí hodnota funkce plasticity je nulová, musí být její derivace záporná nebo v krajním případě nulová, jinak by se funkce plasticity vzápětí dostala do nepřipustné oblasti kladných hodnot. Předpoklad pružného odtěžování je tedy oprávněný pouze, pokud  $\dot{f} = E(\dot{\epsilon} \operatorname{sgn} \sigma - \dot{\lambda}) = E\dot{\epsilon} \operatorname{sgn} \sigma$  je nekladné. Jelikož  $E$  je kladná konstanta, můžeme tuto podmínku přepsat jako

$$\dot{\epsilon} \operatorname{sgn} \sigma \leq 0 \quad (2.34)$$

Nyní předpokládejme, že dochází k plastickému přetváření (případ P). Potom musí funkce plasticity zůstat nulová a její časová derivace je tudíž také nulová. Tato úvaha vede k tzv. *podmínce plastické konzistence*

$$\dot{f} = E(\dot{\epsilon} \operatorname{sgn} \sigma - \dot{\lambda}) = 0 \quad (2.35)$$

z níž můžeme snadno vypočítat rychlost plastického násobitele

$$\dot{\lambda} = \dot{\epsilon} \operatorname{sgn} \sigma \quad (2.36)$$

Toto řešení je ale přípustné pouze, pokud  $\dot{\lambda} \geq 0$ , tedy pokud

$$\dot{\epsilon} \operatorname{sgn} \sigma \geq 0 \quad (2.37)$$

Je-li tomu tak, můžeme (2.36) dosadit do (2.32) a získat tak výraz pro rychlost napětí

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \operatorname{sgn} \sigma) = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}) = 0 \quad (2.38)$$

Jak bylo možno očekávat, pro daný model zůstává v průběhu plastického přetváření napětí konstantní (na mezi kluzu).

Hlavní výsledky provedené analýzy jsou shrnuty v pravé části tabulky 2.3. Případ pružného odtěžování z plastického stavu (P→E) nastává, pokud platí (2.34), a případ plastického přetváření (P) nastává, pokud platí (2.37). Porovnáním zjistíme, že obě podmínky se navzájem doplňují v tom smyslu, že je vždy splněna aspoň jedna z nich, a navíc obě zároveň jsou splněny pouze ve speciálním případě, kdy  $\dot{\epsilon} = 0$ , tj. kdy deformace zůstává beze

změny a tudíž se nemění ani napětí. Jde o tzv. neutrální případ, který je na hranici mezi pružným odtěžováním a plastickým přetvářením. Neutrální případ by bylo možné považovat jak za případ P, tak i za případ P→E, ale protože při něm nedochází k nárůstu plastických deformací, ve formální klasifikaci jej přiřadíme k případu P→E. Proto je v tabulce 2.3 neostrá nerovnost (2.37) nahrazena ostrou.

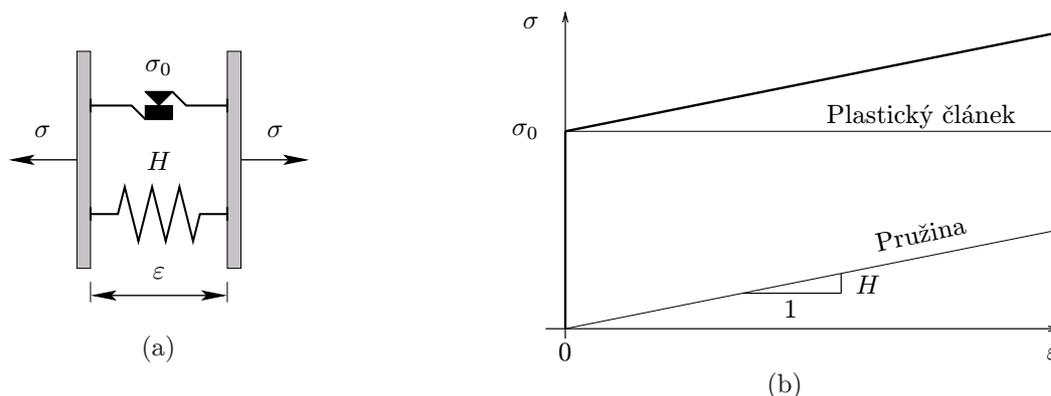
Provedená analýza může působit dojmem formálního cvičení vedoucího zbytečně složitou cestou ke zcela předvídatelným výsledkům. Její užitečnost doceníme až po rozšíření na pružnoplastický model se zpevněním a zejména po zobecnění na víceosou napjatost. Ukáže se totiž, že logická struktura celého postupu zůstane beze změny, jen se vhodným způsobem zobecní dosazované vztahy. Výsledné kritérium zatěžování a přírůstkový vztah mezi napětím a deformací pak už nebudou v žádném případě triviální.

### 2.1.4 Tuhoplastický model s lineárním kinematickým zpevněním

Zatím jsme pracovali s jednoduchým pružnoplastickým modelem, ve kterém jsou základní články, tedy pružina a plastický článek, zapojeny sériově, tedy za sebou (obr. 2.7a). Tento způsob zapojení je v souladu s aditivním rozkladem deformace na pružnou a plastickou část. Je ale zajímavé prozkoumat, k jakému modelu by vedlo paralelní zapojení podle obr. 2.9a. Pokud oba články zapojíme vedle sebe, bude v nich stejná deformace a celkové napětí bude součtem dílčích napětí v obou člancích. Výsledný pracovní diagram tedy můžeme sestavit tak, že pracovní diagramy pro pružný a ideálně plastický článek nakreslíme do společného grafu a pro jednotlivé úrovně deformace sčítáme příslušná napětí. Tento postup je předveden na obr. 2.9b a vede k výslednému pracovnímu diagramu vynesnému silnou čarou. Pro nulovou deformaci se napětí pohybuje kdekoli pod mezí kluzu plastického článku a pokud deformace vzrůstá, napětí roste lineárně podle vztahu

$$\sigma = \sigma_0 + H\varepsilon \quad (2.39)$$

Konstantu charakterizující tuhost pružiny jsme označili  $H$  místo  $E$ , protože při tomto zapojení nemá fyzikální význam modulu pružnosti.



Obrázek 2.9: (a) Tuhoplastický model s kinematickým zpevněním, (b) sestavení pracovního diagramu pro paralelní zapojení pružiny a plastického článku.

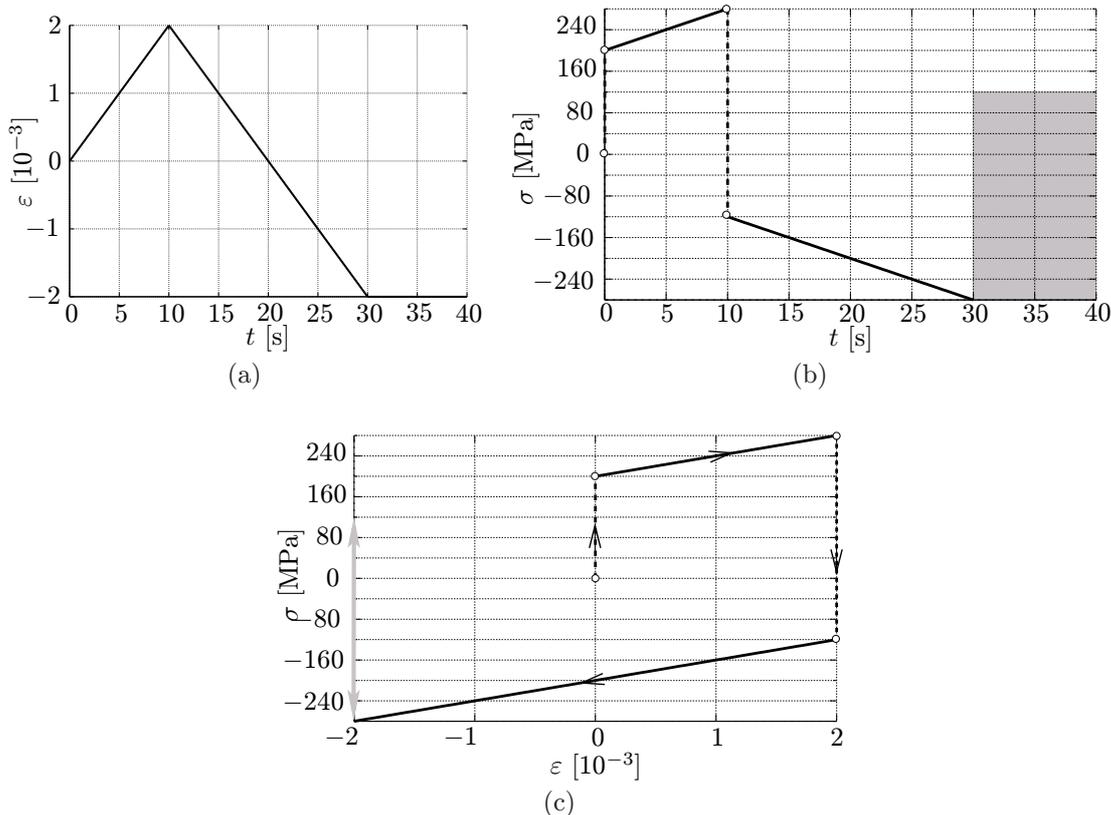
Svislá větev pracovního diagramu odpovídá tuhému chování, šikmá větev pak plastickému přetváření za rostoucího napětí. Znamená to, že jde o tuhoplastický model, ale na rozdíl od ideálně tuhoplastického modelu ze článku 2.1.2 klade materiál při plastickém přetváření stále větší odpor, dochází tedy k jeho *zpevnění*. Příslušný model charakterizujeme jako *tuhoplastický model se zpevněním*. Přesněji řečeno hovoříme o lineárním zpevnění, protože přírůstek napětí je úměrný přírůstku deformace. Za zvýšení celkového napětí  $\sigma$  ve srovnání s mezí kluzu plastického článku  $\sigma_0$  je zodpovědné napětí v paralelně připojené pružině,

$$\sigma_b = H\varepsilon \quad (2.40)$$

kterému se v této souvislosti říká *zpětné napětí* (anglicky „back stress“, odtud index b). Přívlastek „zpětné“ souvisí s tím, že toto dílčí napětí se po odtižení (tj. po odstranění celkového napětí  $\sigma$  působícího na model) snaží plastický článek posunout zpátky, proti směru původního pohybu. Při monotónním plastickém přetváření tedy zpětné napětí zvyšuje odpor materiálu, ale pokud dojde k odtižení a posléze k zatížení s opačnou orientací (např. k přechodu z tahu do tlaku), zpětné napětí zprvu „pomáhá“ deformovat plastický článek v opačném smyslu a tím vlastně snižuje odpor materiálu. Tuhostní konstanta  $H$  se nazývá *modul zpevnění* nebo *plastický modul*, protože její hodnota ovlivňuje „rychlost“ zpevnění. Anglický výraz pro zpevnění je „hardening“, odtud volba písmene  $H$ .

#### Příklad 2.3: Odezva tuhoplastického modelu se zpevněním

Rozdíl mezi chováním chování tuhoplastického modelu se zpevněním a bez něj budeme ilustrovat na stejném zatěžovacím programu jako v příkladu 2.1, nyní ovšem s konkrétní hodnotou deformace  $\varepsilon_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  a časy  $t_1 = 10\text{s}$ ,  $t_2 = 30\text{s}$  a  $t_3 = 40\text{s}$ . Mez kluzu budeme uvažovat hodnotu  $\sigma_0 = 200\text{ MPa}$  a modul zpevnění  $H = 40\text{ GPa}$ .



Obrázek 2.10: (a) Předepsaný vývoj deformace, (b) odpovídající vývoj napětí, (c) odpovídající pracovní diagram tuhoplastického modelu se zpevněním.

Vlastní výpočet začneme na časovém intervalu  $0 \text{ s} < t < 10 \text{ s}$ . Jelikož na tomto časovém intervalu je rychlost deformace kladná, napětí v ideálně plastickém článku je na mezi kluzu  $\sigma_0$  a celkové napětí se řídí vztahem (2.39), takže jeho vývoj v čase je popsán funkcí<sup>1</sup>

$$\sigma(t) = \sigma_0 + H \cdot \varepsilon(t) = 200 \text{ MPa} + 40 \text{ GPa} \cdot \frac{t}{t_1} \varepsilon_1 = (200 + 8t) \text{ MPa} \quad (2.41)$$

V čase  $t = 10 \text{ s}$  se změni znaménko rychlosti deformace  $\dot{\varepsilon}$ . Proto dochází ke skokové změně napětí v ideálně plastickém článku ze  $\sigma_0$  na  $-\sigma_0$ . Napětí v pružném článku se řídí celkovou deformací a proto žádnou nespojitost nevykazuje. V intervalu  $10 \text{ s} < t < 30 \text{ s}$  je vývoj napětí popsán funkcí

$$\sigma(t) = -\sigma_0 + H \cdot \varepsilon(t) = -200 \text{ MPa} + 40 \text{ GPa} \cdot \left(4 - \frac{t}{5}\right) \cdot 10^{-3} = (-40 - 8t) \text{ MPa} \quad (2.42)$$

Pokles hodnoty napětí v čase  $t = 10 \text{ s}$  můžeme vypočítat podle rovnic (2.41) a (2.42) jako  $280 - (-120) = 400 \text{ MPa} = 2\sigma_0$ .

V poslední části zatěžovacího programu zůstává rychlost deformace nulová (deformace je konstantní) a napětí v ideálně plastickém článku může nabývat libovolných hodnot v rozmezí od  $-\sigma_0$  do  $\sigma_0$ . Nejednoznačnost v odezvě modelu není paralelním připojením pružného článku odstraněna. Hodnota zpětného napětí je v tomto případě  $\sigma_b = H \cdot (-\varepsilon_1) = 40 \text{ GPa} \cdot (-2 \cdot 10^{-3}) = -80 \text{ MPa}$ , proto je šedivá oblast v obrázku obr. 2.10b o tuto hodnotu posunuta vzhledem k odezvě ideálně plastického článku zobrazené na obr. 2.6b. Na závěr příkladu zobrazíme chování modelu pracovním diagramem na obr. 2.10c.

□

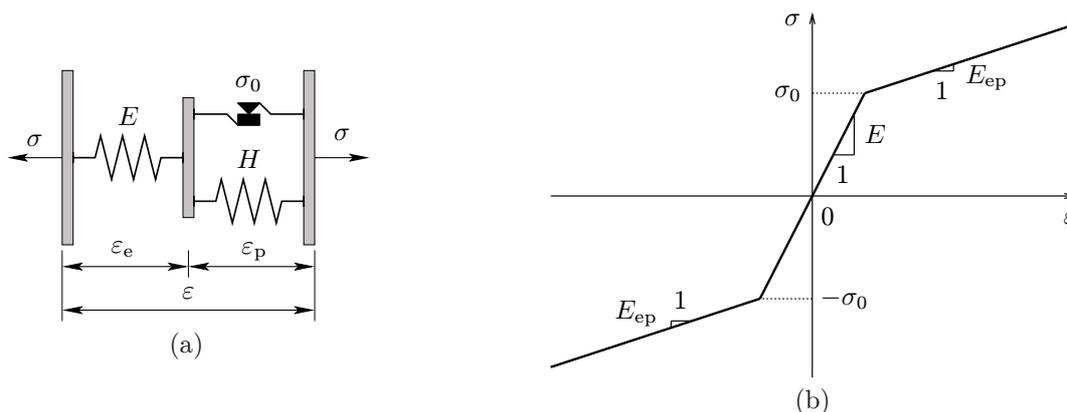
Pro modely se zpevněním dochází v průběhu plastického přetváření ke změně napětí potřebného k tomu, aby pokračoval plastický pokluz. Takové napětí budeme označovat za *okamžitou mez kluzu*, zatímco materiálovou konstantu, která charakterizuje napětí potřebné k zahájení plastického pokluzu v materiálu dosud nedotčeném plastickými procesy, budeme označovat za *počáteční mez kluzu*. Počáteční mez kluzu zpravidla odpovídá konstantě  $\sigma_0$  charakterizující mez kluzu ideálně plastického článku, který je zakomponován do modelu se zpevněním. Předcházející příklad ukazuje, že v modelu vzniklém paralelním spojením pružiny a plastického článku se např. při tahovém namáhání okamžitá mez kluzu v tahu zvyšuje, ale po změně namáhání z tahového na tlakové začne plastické přetváření na nižší úrovni tlakového napětí, než jaká by odpovídala počáteční mezi kluzu  $-\sigma_0$ , takže se vlastně okamžitá mez kluzu v tlaku snížila (v absolutní hodnotě). Pro uvažovaný model je dokonce možné říci, že vede-li předcházející plastické přetváření k výsledné (plastické) deformaci  $\varepsilon$ , je okamžitá mez kluzu v tahu

<sup>1</sup>Pro jednoduchost pracujeme s časem  $t$  jako by šlo o bezrozměrnou veličinu (konkrétní hodnotu je třeba dosadit v sekundách).

$\sigma_0 + H\varepsilon$  a okamžitá mez kluzu v tlaku  $-\sigma_0 + H\varepsilon$ , takže jejich rozdíl je vždy roven  $2\sigma_0$  a zůstává konstantní. Jinými slovy, zvýšení meze kluzu v tahu je doprovázeno stejně velkým snížením meze kluzu v tlaku a naopak. Takovému zpevnění se říká *kinematické*. Model vzniklý paralelním zapojením lineární pružiny a ideálně plastického článku je tedy tuhoplastický model s lineárním kinematickým zpevněním. Tento model umožňuje alespoň přibližně popsat změny meze kluzu v průběhu plastického přetváření, ale zanedbává pružnou část deformace a proto napětí není jednoznačně určeno, pokud se plastické přetváření zastaví a model se chová jako tuhý. Zpevnění a zároveň i pružnou deformaci lze popsat, jestliže k tuhoplastickému modelu se zpevněním přidáme sériově zapojenou pružinu.

### 2.1.5 Pružnoplastický model s lineárním kinematickým zpevněním

Uvažujme model zachycený na obr. 2.11a, který obsahuje dvě pružiny o tuhostech  $E$  a  $H$  a plastický článek s mezí kluzu  $\sigma_0$ . Odpovídající pracovní diagram můžeme opět sestavit vhodnou kombinací již známých pracovních diagramů jednodušších modelů. Jde vlastně o sériové spojení pružiny o tuhosti  $E$  a tuhoplastického modelu s lineárním kinematickým zpevněním, charakterizovaného počáteční mezí kluzu  $\sigma_0$  a modulem zpevnění  $H$ . Vzhledem k zapojení „za sebou“ je v obou dílčích modelech stejné napětí a jejich deformace se počítají. Pokud tedy nakreslíme příslušné pracovní diagramy do stejného grafu, sčítáme při konstrukci výsledného pracovního diagramu hodnoty deformace na různých zvolených úrovních napětí. Výsledkem je diagram na obr. 2.11b, který obsahuje šikmé větve o dvou různých sklonech. Na počátku zatěžování, dokud napětí nepřestoupí počáteční mez kluzu  $\sigma_0$ , zůstává plastický článek zablokovaný a deformuje se pouze pružina o tuhosti  $E$ . To odpovídá lineárně pružnému chování materiálu a  $E$  hraje roli modulu pružnosti. Po dosažení napětí  $\sigma_0$  nastává v plastickém článku pokluz, ale aby tento pokluz pokračoval, je třeba překonávat také stále se zvyšující zpětné napětí  $\sigma_b$  vznikající v deformující se pružině o tuhosti  $H$ . Při plastickém přetváření tedy dochází ke zpevňování materiálu. Zpětné napětí však na rozdíl od tuhoplastického modelu závisí nikoli na celkové deformaci, nýbrž jen na její plastické části. Model je možno charakterizovat jako pružnoplastický s lineárním kinematickým zpevněním.



Obrázek 2.11: (a) Pružnoplastický model s kinematickým zpevněním, (b) sestavení odpovídajícího pracovního diagramu.

Všimněte si, že pro  $H = 0$  bychom jako zvláštní případ dostali ideálně pružnoplastický model, pro který byly základní rovnice odvozeny v článku 2.1.3. Jejich vhodným zobecněním získáme popis pružnoplastického modelu se zpevněním. Rozklad deformace a Hookeův zákon pro pružnou část modelu zůstávají beze změny. Pozměnit je však třeba funkci plasticity. Napětí, jehož absolutní hodnota se porovnává s konstantou  $\sigma_0$ , je napětí přenášené plastickým článkem. Pro model bez zpevnění je toto napětí rovno celkovému napětí  $\sigma$ , ale pro model se zpevněním je to rozdíl mezi celkovým napětím  $\sigma$  a zpětným napětím  $\sigma_b$  (napětím přenášeným pružinou paralelně připojenou k plastickému článku). Zpětné napětí ovšem není materiálová konstanta, nýbrž vnitřní proměnná charakterizující okamžitý stav materiálu, která se může v průběhu přetváření postupně měnit. Proto funkci plasticity napíšeme jako funkci dvou proměnných

$$f(\sigma, \sigma_b) = |\sigma - \sigma_b| - \sigma_0 \quad (2.43)$$

Po této modifikaci skutečně záporná hodnota funkce plasticity indikuje pružný stav a nulová hodnota plastický stav. Je však ještě třeba základní rovnice doplnit o pravidlo, podle kterého se určí hodnota zpětného napětí. Pro daný model jde o jednoduchý vztah

$$\sigma_b = H\varepsilon_p \quad (2.44)$$

představující tzv. *zákon plastického zpevnění*. Také v zákonu plastického přetváření je nutné vzít v úvahu, že napětí přenášené plastickým článkem není  $\sigma$ , ale  $\sigma - \sigma_b$ . Rovnici (2.11) tedy přepíšeme jako

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b) \quad (2.45)$$

Souhrnný přehled zmíněných základních rovnic je uveden v tabulce 2.4.

Tabulka 2.4: Matematický popis pružnoplastického modelu s lineárním kinematickým zpevněním (pro jednoosou napjatost).

rozklad deformace	$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$
Hookeův zákon	$\sigma = E\varepsilon_e$
definice funkce plasticity	$f(\sigma, \sigma_b) =  \sigma - \sigma_b  - \sigma_0$
podmínka plastické přípustnosti	$f(\sigma, \sigma_b) \leq 0$
zákon plastického přetváření	$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b), \quad \dot{\lambda} \geq 0$
podmínka komplementarity	$\dot{\lambda} f(\sigma, \sigma_b) = 0$
zákon plastického zpevnění	$\sigma_b = H\varepsilon_p$

Tabulka 2.5: Klasifikace stavů a procesů pro pružnoplastický model s lineárním kinematickým zpevněním.

případ	$f(\sigma, \sigma_b)$	stav	$\dot{\lambda}$	proces	$\dot{f}$	$\dot{\varepsilon} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b)$	vztah mezi $\dot{\sigma}$ a $\dot{\varepsilon}$
E	$< 0$	pružný	$= 0$	pružný	libovolné	libovolné	$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$
P→E	$= 0$	plastický	$= 0$	pružný	$\leq 0$	$\leq 0$	$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$
P	$= 0$	plastický	$> 0$	plastický	$= 0$	$> 0$	$\dot{\sigma} = E_{ep}\dot{\varepsilon}$

Nyní provedeme analýzu základních rovnic, jejímž cílem je jednak stanovit kritéria pro rozlišení mezi případy E, P→E a P, jednak odvodit přímé vztahy mezi přírůstky napětí a deformace (ve kterých se již neobjevují přírůstky plastické deformace). Postup je velmi podobný jako v článku 2.1.3 při analýze ideálně pružnoplastického modelu. Základní případy jsou uvedeny v tabulce 2.5. Hodnota funkce plasticity určuje, zda je okamžitý stav pružný nebo plastický. Proces vycházející z pružného stavu může být jedině pružný (E), plastická deformace se při něm nemění a vztah mezi přírůstky napětí a deformace je dán Hookeovým zákonem. Pokud je materiál v plastickém stavu, může pokračovat plastické přetváření (P), nebo může dojít k pružnému odtížení (P→E). Opět je užitečné vyjádřit časovou derivaci funkce plasticity v závislosti na rychlosti deformace a rychlosti plastického násobitele. Tentokrát je funkce plasticity dána předpisem (2.43) a její diferenciací dostaneme

$$\dot{f} = \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b) (\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_b) \quad (2.46)$$

Pro ideálně pružnoplastický model jsme rychlost napětí vyjádřili vztahem (2.32). Pro model s kinematickým zpevněním dospějeme podobným postupem ke vztahu

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}_e = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p) = E[\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b)] \quad (2.47)$$

Rychlost zpětného napětí

$$\dot{\sigma}_b = H\dot{\varepsilon}_p = H\dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b) \quad (2.48)$$

odvodíme diferenciací (2.44) a uplatněním (2.45). Nakonec dosazením (2.47) a (2.48) zpět do (2.46) sestrojíme finální výraz pro časovou derivaci funkce plasticity:

$$\dot{f} = \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b) \left\{ E[\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b)] - H\dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b) \right\} = E\dot{\varepsilon} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b) - (E + H)\dot{\lambda} \quad (2.49)$$

V případě pružného odtížení (P→E) je  $\dot{\lambda} = 0$  a toto řešení je přípustné, pokud  $\dot{f} = E\dot{\varepsilon} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b)$  je nekladné, tedy pokud  $\dot{\varepsilon} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b) \leq 0$ . V případě plastického přetváření (P) je  $\dot{f} = 0$  a z této podmínky plastické konzistence na základě (2.49) vypočteme

$$\dot{\lambda} = \frac{E}{E + H} \dot{\varepsilon} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b) \quad (2.50)$$

Řešení je přípustné, pokud je výsledek nezáporný. Jelikož  $E$  i  $H$  jsou kladné konstanty, znamená tato podmínka, že  $\dot{\varepsilon} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b) \geq 0$ , což je právě doplňkový případ k podmínce odvozené pro pružné odtěžování. Dosazením (2.50) do (2.47) získáme vztah mezi rychlostmi napětí a deformace:

$$\dot{\sigma} = E[\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \operatorname{sgn}(\sigma - \sigma_b)] = E \left( \dot{\varepsilon} - \frac{E}{E + H} \dot{\varepsilon} \right) = \frac{EH}{E + H} \dot{\varepsilon} = E_{ep} \dot{\varepsilon} \quad (2.51)$$

Při plastickém přetváření jsou tedy přírůstky napětí úměrné přírůstkům deformace, přičemž příslušnou konstantou úměrnosti je

$$E_{ep} = \frac{EH}{E + H} \quad (2.52)$$

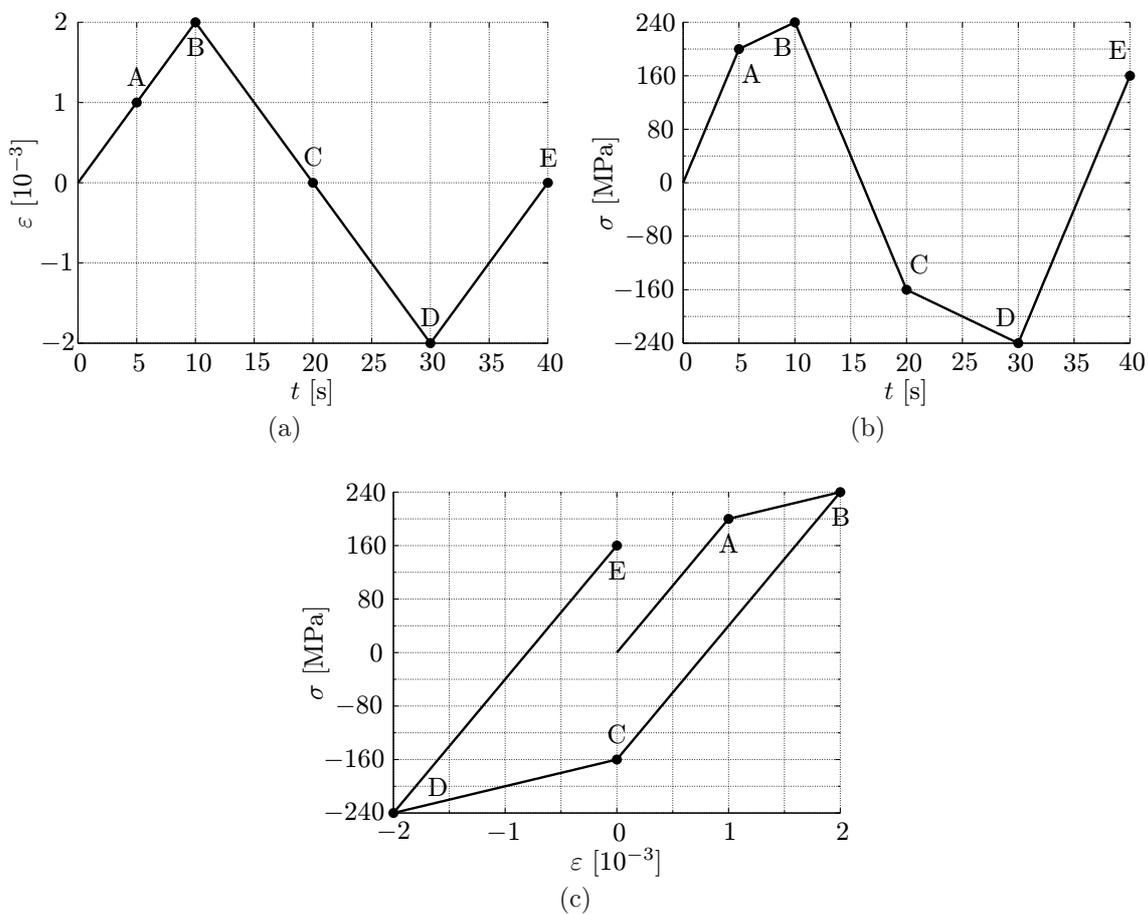
Tato konstanta je směrnici té šikmé větve pracovního diagramu, která odpovídá plastické odezvě, viz obr. 2.11b. Jde o tzv. *pružnoplastický modul*, který hraje při plastickém přetváření roli tečné (okamžité) tuhosti. Povšimněte si rozdíl mezi pojmy

- **plastický modul** (modul zpevnění)  $H$  = poměr mezi přírůstkem napětí a **plastické** deformace,
- a **pružnoplastický modul**  $E_{ep}$  = poměr mezi přírůstkem napětí a **celkové** deformace.

#### Příklad 2.4: Odezva pružnoplastického modelu s kinematickým zpevněním

Chování pružnoplastického modelu s kinematickým zpevněním si přiblížíme pomocí výpočtu jeho odezvy na zatěžovací program použitý v příkladu 2.2 a znovu vyneseny na obr. 2.12a. Počáteční mez kluzu je  $\sigma_0 = 200$  MPa, modul pružnosti  $E = 200$  GPa a modul zpevnění  $H = 50$  GPa.

Na počátku zatěžovacího procesu je napětí nulové a materiál se nachází v pružném stavu. Probíhá tedy pružné přetváření popsané Hookeovým zákonem  $\sigma = E\varepsilon$  až do okamžiku, kdy napětí  $\sigma$  dosáhne počáteční meze kluzu  $\sigma_0$ . K tomu dojde při deformaci  $\varepsilon^A = \sigma_0/E = 200 \text{ MPa}/200 \text{ GPa} = 10^{-3}$  v čase  $t = 5$  s. Odpovídající stav je v grafech na obr. 2.12 označen A. Plastická deformace  $\varepsilon_p^A$  a zpětné napětí  $\sigma_b^A$  jsou zatím stále nulové, napětí  $\sigma^A = 200$  MPa je na mezi kluzu.



Obrázek 2.12: (a) Předepsaný vývoj deformace, (b) odpovídající vývoj napětí, (c) odpovídající pracovní diagram pružnoplastického modelu s kinematickým zpevněním.

Mezi stavy A a B se deformace nadále zvětšuje, platí tedy  $\dot{\varepsilon} \text{sgn}(\sigma - \sigma_b) > 0$  a dochází k plastickému přetváření, při kterém je konstantou úměrnosti mezi přírůstkem napětí a přírůstkem deformace pružnoplastický modul

$$E_{ep} = \frac{EH}{E+H} = \frac{200 \text{ GPa} \cdot 50 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa} + 50 \text{ GPa}} = 40 \text{ GPa} \quad (2.53)$$

Přírůstek deformace mezi stavy A a B je  $\Delta\varepsilon^{AB} = 10^{-3}$ , odpovídající přírůstek napětí je tedy  $\Delta\sigma^{AB} = E_{ep}\Delta\varepsilon^{AB} = 40 \text{ GPa} \cdot 10^{-3} = 40 \text{ MPa}$  a celkové napětí ve stavu B je  $\sigma^B = \sigma^A + \Delta\sigma^{AB} = 240 \text{ MPa}$ . Podle (2.50) můžeme také vypočítat přírůstek plastického násobitele

$$\Delta\lambda^{AB} = \frac{E}{E+H} \Delta\varepsilon^{AB} \text{sgn}(\sigma - \sigma_b) = \frac{200 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa} + 50 \text{ GPa}} \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 0,8 \cdot 10^{-3} \quad (2.54)$$

který zároveň představuje přírůstek plastické deformace, protože  $\Delta\varepsilon_p^{AB} = \Delta\lambda^{AB} \text{sgn}(\sigma - \sigma_b) = 0,8 \cdot 10^{-3}$ . Výchozí plastická deformace ve stavu A byla nulová, takže plastická deformace ve stavu B je  $\varepsilon_p^B = \Delta\varepsilon_p^{AB} = 0,8 \cdot 10^{-3}$ .

Odpovídající zpětné napětí se podle (2.44) určí jako  $\sigma_b^B = H\varepsilon_p^B = 50 \text{ GPa} \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} = 40 \text{ MPa}$  a lze ověřit, že je skutečně splněna podmínka plasticity  $\sigma^B = \sigma_0 + \sigma_b^B$ .

Stavu B je dosaženo v čase  $t = 10\text{s}$ , kdy se změní znaménko rychlosti deformace a tím i znaménko výrazu  $\dot{\varepsilon} \text{sgn}(\sigma - \sigma_b)$ . Podle kritérií v tabulce 2.5 nastává pružné odtěžování z plastického stavu. Plastické přetváření se zastaví a vztah mezi přírůstkem napětí a deformace je popsán Hookeovým zákonem až do okamžiku, kdy funkce plasticity nabyde znovu nulové hodnoty. Z podmínky  $|\sigma^B + E\Delta\varepsilon^{BC} - \sigma_b^B| - \sigma_0 = 0$  určíme odpovídající přírůstek (v tomto případě záporný) deformace  $\Delta\varepsilon^{BC} = -2\sigma_0/E = -2 \cdot 200 \text{ MPa}/200 \text{ GPa} = -2 \cdot 10^{-3}$ , po kterém se ocitneme ve stavu C s hodnotami deformace  $\varepsilon^C = \varepsilon^B + \Delta\varepsilon^{BC} = 0$  a napětí  $\sigma^C = \sigma^B + E\Delta\varepsilon^{BC} = -160 \text{ MPa}$ . Plastická deformace ani zpětné napětí se při pružném procesu nezmění, takže je  $\varepsilon_p^C = \varepsilon_p^B$  a  $\sigma_b^C = \sigma_b^B$ .

Mezi stavy C a D má rychlost deformace záporné znaménko a rozdíl  $\sigma - \sigma_b$  také, takže podle kritérií v tabulce 2.5 probíhá plastické přetváření. Přírůstek deformace je  $\Delta\varepsilon^{CD} = -2 \cdot 10^{-3}$ , odpovídající přírůstek napětí spočítáme jako  $\Delta\sigma^{CD} = E_{ep}\Delta\varepsilon^{CD} = 40 \text{ GPa} \cdot (-2 \cdot 10^{-3}) = -80 \text{ MPa}$ , přírůstek plastického násobitele jako

$$\Delta\lambda^{CD} = \frac{E}{E+H}\Delta\varepsilon^{CD} \text{sgn}(\sigma - \sigma_b) = \frac{200 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa} + 50 \text{ GPa}} \cdot (-2 \cdot 10^{-3}) \cdot (-1) = 1,6 \cdot 10^{-3} \quad (2.55)$$

a přírůstek plastické deformace jako  $\Delta\varepsilon_p^{CD} = \Delta\lambda^{CD} \text{sgn}(\sigma - \sigma_b) = 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot (-1) = -1,6 \cdot 10^{-3}$ . Snadno pak můžeme aktualizovat hodnoty napětí  $\sigma^D = \sigma^C + \Delta\sigma^{CD} = -160 \text{ MPa} + (-80 \text{ MPa}) = -240 \text{ MPa}$ , plastické deformace  $\varepsilon_p^D = \varepsilon_p^C + \Delta\varepsilon_p^{CD} = 0,8 \cdot 10^{-3} - 1,6 \cdot 10^{-3} = -0,8 \cdot 10^{-3}$  a zpětného napětí  $\sigma_b^D = H\varepsilon_p^D = 50 \text{ GPa} \cdot (-0,8 \cdot 10^{-3}) = -40 \text{ MPa}$ .

Ve stavu D pak rychlost deformace opět změní znaménko a nastane pružné odtěžování, přetváření bude pružné až do stavu E, přírůstek napětí se spočítá jako  $\Delta\sigma^{DE} = E\Delta\varepsilon^{DE} = 200 \text{ GPa} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 400 \text{ MPa}$  a výsledné napětí je  $\sigma^E = \sigma^D + \Delta\sigma^{DE} = -240 \text{ MPa} + 400 \text{ MPa} = 160 \text{ MPa}$ . Plastická deformace ani zpětné napětí se během pružného procesu nezmění. Shodou okolností je ve finálním stavu E opět splněna podmínka plasticity, protože  $\sigma^E - \sigma_b^E = 160 \text{ MPa} - (-40 \text{ MPa}) = 200 \text{ MPa} = \sigma_0$ . Kdyby se deformace dále zvyšovala, začalo by ve stavu E znovu plastické přetváření.

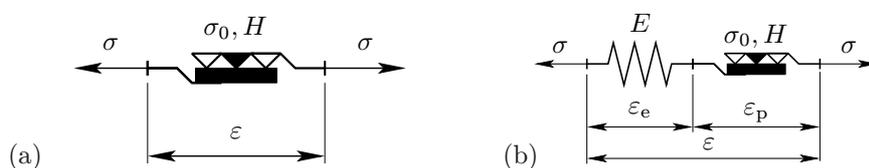
□

Je poučné porovnat chování ideálně tuhoplastického modelu (TPI), ideálně pružnoplastického modelu (PPI), tuhoplastického modelu se zpevněním (TPZ) a pružnoplastického modelu se zpevněním (PPZ) z hlediska jednoznačnosti odezvy na zatěžovací program, který může být dán buď předepsaným vývojem deformace, nebo předepsaným vývojem napětí. Pro libovolně předepsaný vývoj deformace je odpovídající průběh napětí jednoznačně určen jen pro pružnoplastické modely, tedy PPI nebo PPZ, zatímco pro tuhoplastické modely je v intervalech s konstantní deformací napětí neurčené (jen omezené podmínkou plasticité přípustnosti). Předepíšeme-li vývoj napětí, je vývoj deformace pro modely bez zpevnění, tedy TPI a PPI, jednoznačně určen pouze v tuhém či pružném režimu a při dosažení meze kluzu se jednoznačnost ztrácí, navíc při překročení meze kluzu neexistuje žádné přípustné řešení. Naproti tomu modely se zpevněním, tedy TPZ a PPZ, dávají jednoznačný vývoj deformace i po překročení meze kluzu, samozřejmě jen dokud není vyčerpána pevnost materiálu, tj. dokud se při zpevnění nedosáhne maximální hodnoty napětí, kterou daný materiál přenesne. Celkově tedy lze říci, že z hlediska jednoznačnosti vztahů mezi napětím a deformací má nejpříznivější vlastnosti model PPZ, tj. pružnoplastický se zpevněním.

### 2.1.6 Pružnoplastický model s izotropním zpevněním

V předcházejících dvou článcích jsme se zabývali kinematickým zpevněním, které lze názorně motivovat představou pružiny paralelně připojené k ideálně plastickému článku. Takový model automaticky vede k tomu, že při tahovém namáhání se mez kluzu v tahu zvyšuje, ale v tlaku snižuje, a při tlakovém namáhání je tomu naopak. Dochází tedy k tzv. *Bauschingerovu efektu*, který lze skutečně pro některé materiály experimentálně pozorovat. Přesto je někdy vhodnější použít pro zpevnění jiný model, založený na předpokladu, že při plastickém přetváření se zároveň zvyšuje mez kluzu v tahu i v tlaku. Takové zpevnění se pak nazývá *izotropní*.

Pro izotropní zpevnění je těžké najít názorný mechanický model vzniklý kombinací elementárních článků, jako jsou pružiny a ideálně plastické články. Nezbyvá, než si představit zobecněnou podobu plastického článku, ve kterém odpor proti pokluzu v průběhu plastického přetváření vzrůstá. Pro takový článek použijeme symbol zachycený na obr. 2.13a. Nevyplněné trojúhelníčky zde zjednodušeně představují překážky vůči plastickému pokluzu, které se teprve postupně vytvářejí. Pro krystalické materiály je lze interpretovat např. jako průsečky



Obrázek 2.13: (a) Plastický článek s izotropním zpevněním, (b) pružnoplastický model s izotropním zpevněním.

dislokací, které se šíří v různých rovinách a navzájem se ve svém pohybu omezují, přičemž hustota takových průsečíků vzrůstá v závislosti na celkové změně plastické deformace. Důležité je, že na zpevňování má vliv velikost jednotlivých přírůstků plastické deformace, ale nikoli jejich znaménko. V průběhu plastického přetváření v materiálu dochází k nevratným změnám, takže okamžitou mez kluzu nelze vztáhnout jen k okamžité hodnotě plastické deformace. Jestliže totiž materiál plasticky zdeformujeme nejprve v tahu a pak v tlaku tak, aby výsledná plastická deformace byla nulová, výsledný stav materiálu se liší od počátečního, přestože hodnota plastické deformace je stejná jako před deformačním procesem.

Abychom vzali v úvahu vliv plastických přetvárných procesů, zavedeme novou vnitřní proměnnou, tzv. *kumulovanou plastickou deformaci*  $\kappa$ , která vznikne posčítáním absolutních hodnot jednotlivých přírůstků plastické deformace. Rozdělíme-li celou historii zatěžování na nekonečně malé kroky, můžeme infinitezimální přírůstek  $\kappa$  zapsat jako

$$d\kappa = |d\varepsilon_p| \quad (2.56)$$

a po vydělení odpovídajícím infinitezimální přírůstkem času  $dt$  získáme vztah mezi rychlostí (časovou derivací) vnitřní proměnné  $\kappa$  a rychlostí (časovou derivací) plastické deformace ve tvaru

$$\dot{\kappa} = |\dot{\varepsilon}_p| \quad (2.57)$$

V počátečním nedeformovaném stavu položíme výchozí hodnotu  $\kappa$  rovnu nule a její vývoj v průběhu plastického přetváření pak získáme integrací rovnice (2.57). Formálně to lze zapsat jako

$$\kappa(t) = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_p(t')| dt' \quad (2.58)$$

Je zřejmé, že kumulovaná plastická deformace  $\kappa$  během pružného procesu zůstává konstantní, protože  $\dot{\varepsilon}_p$  je rovno nule, a během plastického procesu vzrůstá, protože absolutní hodnota  $\dot{\varepsilon}_p$  je kladná. Pokud dochází k přetváření pouze v tahu, odpovídá hodnota  $\kappa$  plastické deformaci  $\varepsilon_p$ , zatímco při výhradně tlakovém přetváření odpovídá  $-\varepsilon_p$ . Při střídavém namáhání tahem i tlakem nese  $\kappa$  informaci o celkové míře plastických změn, které v materiálu proběhly. Je pak přirozené postulovat, že okamžitá hodnota meze kluzu  $\sigma_Y$  je funkcí okamžité hodnoty kumulované plastické deformace  $\kappa$ . Speciálně pokud položíme

$$\sigma_Y = \sigma_0 + H\kappa \quad (2.59)$$

získáme model s lineární závislostí meze kluzu na kumulované plastické deformaci.

Okamžitá mez kluzu  $\sigma_Y$  představuje absolutní hodnotu napětí, kterým je třeba působit na zpevněný plastický článek, aby v něm došlo k pokluzu. Funkci plasticity tedy zapíšeme jako

$$f(\sigma, \sigma_Y) = |\sigma| - \sigma_Y \quad (2.60)$$

Uvedením  $\sigma_Y$  mezi argumenty funkce plasticity  $f$  zdůrazňujeme, že tato veličina není konstantním parametrem (jako je třeba  $\sigma_0$ ), ale proměnnou, jejíž hodnota se během přetváření materiálu mění. Rovnice typu (2.59) představuje návod, jak okamžitou mez kluzu vypočítat, je to tedy *zákon zpevnění*. V konkrétním případě (2.59) je tento zákon lineární a získáváme pružnoplastický model s lineárním izotropním zpevněním. Základní rovnice popisující tento model jsou shrnuty v tabulce 2.6.

Podobně jako pro modely představené v předcházejících dvou článcích, i pro model s izotropním zpevněním lze provést rozbor základních případů a odvodit jednak kritéria pro rozlišení mezi pružným odtížením a plastickým přetvářením, jednak vztah mezi přírůstky napětí a deformace. Vzhledem k tomu, že postup je zcela analogický jako pro již známé modely, nebudeme jej podrobně opakovat a soustředíme se jen na nejzajímavější případ plastického přetváření (P). V tomto případě musí být splněna podmínka konzistence  $\dot{f} = 0$  a na jejím základě

Tabulka 2.6: Matematický popis pružnoplastického modelu s lineárním izotropním zpevněním (pro jednoosou napjatost).

rozklad deformace	$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$
Hookeův zákon	$\sigma = E\varepsilon_e$
definice funkce plasticity	$f(\sigma, \sigma_Y) =  \sigma  - \sigma_Y$
podmínka plastické přípustnosti	$f(\sigma, \sigma_Y) \leq 0$
zákon plastického přetváření	$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \operatorname{sgn} \sigma, \dot{\lambda} \geq 0$
podmínka komplementarity	$\dot{\lambda} f(\sigma, \sigma_Y) = 0$
definice kumulované plastické deformace	$\dot{\kappa} =  \dot{\varepsilon}_p $
zákon plastického zpevnění	$\sigma_Y = \sigma_0 + H\kappa$

můžeme najít vztah mezi rychlostí plastického násobitele a rychlostí celkové deformace. Nejprve je ovšem třeba vyjádřit časovou derivaci funkce plasticity

$$\dot{f} = (\operatorname{sgn} \sigma) \dot{\sigma} - \dot{\sigma}_Y = (\operatorname{sgn} \sigma) E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p) - H\dot{\kappa} = (\operatorname{sgn} \sigma) E(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \operatorname{sgn} \sigma) - H\dot{\lambda} = E\dot{\varepsilon} \operatorname{sgn} \sigma - (E + H)\dot{\lambda} \quad (2.61)$$

Z podmínky  $\dot{f} = 0$  pak plyne

$$\dot{\lambda} = (\operatorname{sgn} \sigma) \frac{E}{E + H} \dot{\varepsilon} \quad (2.62)$$

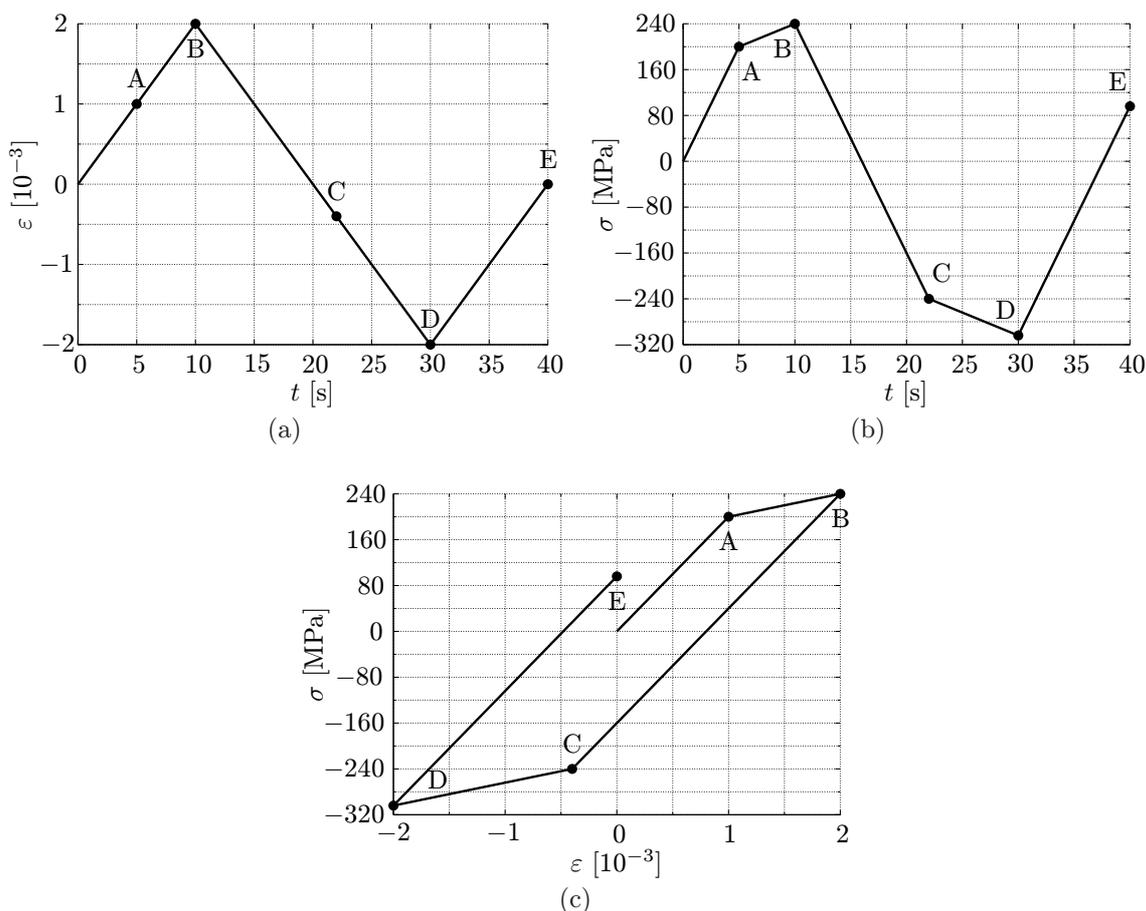
a po dosazení do výrazu pro časovou derivaci napětí dostaneme

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \operatorname{sgn} \sigma) = \frac{EH}{E + H} \dot{\varepsilon} = E_{ep} \dot{\varepsilon} \quad (2.63)$$

Výsledek je stejný jako v (2.51) a  $E_{ep}$  je opět pružnoplastický modul daný předpisem (2.52). Pokud tedy v modelech s kinematickým a izotropním zpevněním použijeme stejný modul zpevnění  $H$ , bude výsledný vztah mezi přírůstkem napětí a deformace zcela stejný. Rozdíl mezi oběma modely je jen v tom, při jaké hodnotě napětí začne plastické přetváření po přechodu z tahu do tlaku nebo naopak.

### Příklad 2.5: Odezva pružnoplastického modelu s izotropním zpevněním

Rozbor chování pružnoplastického modelu s izotropním zpevněním si opět předvedeme pro zatěžovací program s předepsaným vývojem deformace podle obr. 2.14a, který byl již použit v příkladech 2.2 a 2.4. Parametry modelu, tj. modul pružnosti  $E = 200$  GPa, mez kluzu  $\sigma_0 = 200$  MPa a modul zpevnění  $H = 50$  MPa, zůstávají stejné jako v příkladu 2.4, kde jsme analyzovali model s kinematickým zpevněním.



Obrázek 2.14: (a) Předepsaný vývoj deformace, (b) odpovídající vývoj napětí, (c) odpovídající pracovní diagram pružnoplastického s izotropním zpevněním.

Při monotónním zatěžování až do stavu B se modely s kinematickým i izotropním zpevněním chovají stejně: do stavu A dochází k pružnému přetváření a mezi stavy A a B probíhá plastické přetváření s pružnoplastickým modulem  $E_{ep} = 40$  MPa. Stav B je charakterizován hodnotami deformace  $\varepsilon^B = 2 \cdot 10^{-3}$ , napětí  $\sigma^B = 240$  MPa a plastické deformace  $\varepsilon_p^B = 0,8 \cdot 10^{-3}$ . Pro model s izotropním zpevněním ještě potřebujeme kumulovanou plastickou deformaci  $\kappa^B$ , která je rovna plastické deformaci  $\varepsilon_p^B$ , protože plastické přetváření zatím probíhalo pouze v tahu. Ze zákona zpevnění se určí okamžitá mez kluzu  $\sigma_Y^B = \sigma_0 + H\kappa^B = 200$  GPa + 50 GPa  $\cdot 0,8 \cdot 10^{-3} = 240$  MPa, která je pochopitelně rovna napětí  $\sigma^B$ , jelikož až do stavu B dochází k plastickému přetváření v tahu.

Ve stavu B začne pružné odtěžování a je třeba určit (záporný) přírůstek deformace  $\Delta\varepsilon^{BC}$ , na jehož konci začne plastické přetváření v tlaku. Během pružného procesu je vztah mezi přírůstky napětí a deformace dán Hookeovým zákonem, takže můžeme do podmínky plasticity  $\sigma^C = -\sigma_Y^C$  dosadit  $\sigma^C = \sigma^B + E\Delta\varepsilon^{BC}$ . Navíc se okamžitá mez kluzu  $\sigma_Y$  v průběhu pružného přetváření nemění, protože i kumulovaná plastická deformace  $\kappa$  zůstává konstantní. Položíme tedy  $\sigma_Y^C = \sigma_Y^B$  a vypočteme  $\Delta\varepsilon^{BC} = -(\sigma_Y^B + \sigma^B)/E = -(240 \text{ MPa} + 240 \text{ MPa})/200 \text{ GPa} = -2,4 \cdot 10^{-3}$ . Stav C, ve kterém začne plastické přetváření v tlaku, tedy nastane později než pro model s kinematickým zpevněním, konkrétně v čase  $t = 22 \text{ s}$ , viz obr. 2.14a. Odpovídající napětí je  $\sigma^C = -240 \text{ MPa}$  a plastická deformace i její kumulovaná hodnota jsou stejné jako ve stavu B, tedy  $\kappa^C = \varepsilon_p^C = 0,8 \cdot 10^{-3}$ .

Přechodu ze stavu C do stavu D, ve kterém deformace dosáhne extrémní hodnoty, odpovídá přírůstek deformace  $\Delta\varepsilon^{CD} = -1,6 \cdot 10^{-3}$ . Odpovídající přírůstky dalších veličin vypočteme jako

$$\Delta\sigma^{CD} = E_{ep}\Delta\varepsilon^{CD} = 40 \text{ GPa} \cdot (-1,6 \cdot 10^{-3}) = -64 \text{ MPa} \quad (2.64)$$

$$\Delta\lambda^{CD} = (\text{sgn } \sigma) \frac{E}{E+H} \Delta\varepsilon^{CD} = (-1) \cdot \frac{200 \text{ GPa}}{200 \text{ GPa} + 50 \text{ GPa}} (-1,6 \cdot 10^{-3}) = 1,28 \cdot 10^{-3} \quad (2.65)$$

$$\Delta\varepsilon_p^{CD} = \Delta\lambda^{CD} (\text{sgn } \sigma) = -1,28 \cdot 10^{-3} \quad (2.66)$$

$$\Delta\kappa^{CD} = |\Delta\varepsilon_p^{CD}| = 1,28 \cdot 10^{-3} \quad (2.67)$$

a jejich přičtením k hodnotám ve stavu C dostaneme hodnoty ve stavu D, konkrétně  $\sigma^D = -304 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_p^D = -0,48 \cdot 10^{-3}$  a  $\kappa^D = 2,08 \cdot 10^{-3}$ . Jak je vidět, plastická deformace  $\varepsilon_p$  se při přetváření v tlaku zmenšila, ale kumulovaná plastická deformace  $\kappa$  se zvětšila. Okamžitá mez kluzu  $\sigma_Y^D = \sigma_0 + H\kappa^D = 304 \text{ MPa}$  pochopitelně odpovídá absolutní hodnotě napětí, protože stav D je stále ještě plastický. Další přírůstek deformace  $\Delta\varepsilon^{DE} = 2 \cdot 10^{-3}$  však má opačné znaménko než mezi stavy C a D a nastává pružné odtěžování. Na konci celého zatěžovacího procesu ve stavu E bude materiál přenášet napětí  $\sigma^E = \sigma^D + E\Delta\varepsilon^{DE} = -304 \text{ MPa} + 200 \text{ GPa} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 96 \text{ MPa}$ , které je menší než okamžitá mez kluzu  $\sigma_Y^E = \sigma_Y^D = 304 \text{ MPa}$ , takže jde o pružný stav.

Celý pracovní diagram je vyneseno na obr. 2.14c, který můžeme porovnat s obr. 2.12c, kde je pracovní diagram pro stejný zatěžovací program, ale pro model s kinematickým zpevněním.

□

## 2.2 Plastická analýza prutových konstrukcí

Zatím jsme se zabývali tuhoplastickými a pružnoplastickými modely popisujícími vztah mezi napětím a deformací. Pracovali jsme tedy na úrovni materiálového bodu, resp. elementárního kvádrů o nekonečně malém objemu, vyňatého ze zkoumaného tělesa. V inženýrských aplikacích nás ovšem zajímá především chování celé konstrukce. Prozatím se omezíme na takové konstrukce, ve kterých vzniká ve všech bodech jednoosá napjatost. Takový případ nastává zejména pro příhradové konstrukce, jejichž pruty jsou namáhány pouze osovými (normálovými) silami, které v jednotlivých průřezích vyvodí normálové napětí rovnoměrně rozložené po průřezu. Za jednoosou napjatost ale můžeme považovat i stav v nosnících nebo rámových konstrukcích, namáhaných ohybovými momenty a případně i normálovými silami, pokud zanedbáme vliv smykového napětí způsobeného posouvajícími silami. Za ohybu ovšem normálové napětí není po průřezu rozloženo rovnoměrně.

Příhradovým konstrukcím bude věnován článek 2.2.1 a objeví se také v příkladech článku 2.2.3, zatímco nosníky a rámy se budou zkoumat v článku 2.2.4. Chování materiálu budeme v obou případech považovat za ideálně pružnoplastické.

### 2.2.1 Příhradové konstrukce

Pro jednoduchost se omezíme pouze na pruty konstantního průřezu. Uvažujme prut o počáteční délce  $L$  s průřezem o obsahu  $A$ . Tyto geometrické charakteristiky poslouží při transformaci mezi veličinami popisujícími stav materiálového bodu, tedy deformací (relativním protažením)  $\varepsilon$  a napětím  $\sigma$ , a veličinami popisujícími stav celého prutu, tedy celkovým (absolutním) protažením

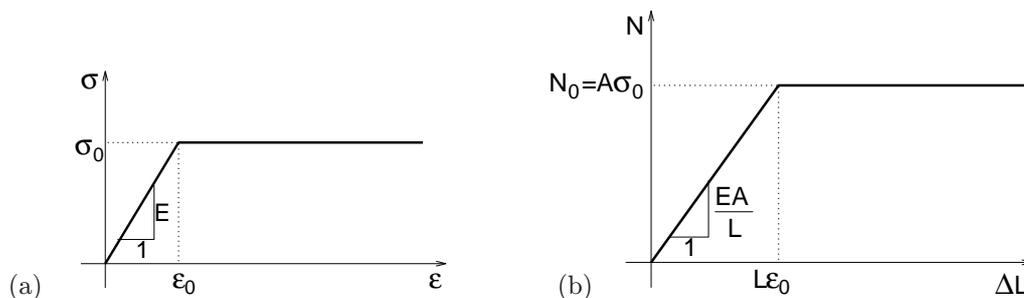
$$\Delta L = L\varepsilon \quad (2.68)$$

a osovou (normálovou) silou

$$N = A\sigma \quad (2.69)$$

Pracovní diagram celého prutu (graf závislosti normálové síly  $N$  na celkovém protažení  $\Delta L$ ) se tedy liší od pracovního diagramu materiálu (grafu závislosti normálového napětí  $\sigma$  na poměrné deformaci  $\varepsilon$ ) pouze měřítkem na jednotlivých osách, viz obr. 2.15. V pružné části odpovídá sklon tohoto diagramu pružné tuhosti prutu  $EA/L$  a plastické přetváření začne, pokud normálová síla dostoupí hodnoty  $N_0 = A\sigma_0$ , které budeme říkat *mezní plastická síla*. Samozřejmě může dojít také k plastickému přetváření v tlaku, pokud v prutu působí normálová síla  $N = -N_0$ . Podmínku plastické přípustnosti pro osově namáhaný prut tedy můžeme zapsat jako

$$|N| \leq N_0 \quad (2.70)$$



Obrázek 2.15: Pracovní diagram pro ideálně pružnoplastický materiál na úrovni (a) materiálového bodu, (b) taženého prutu.

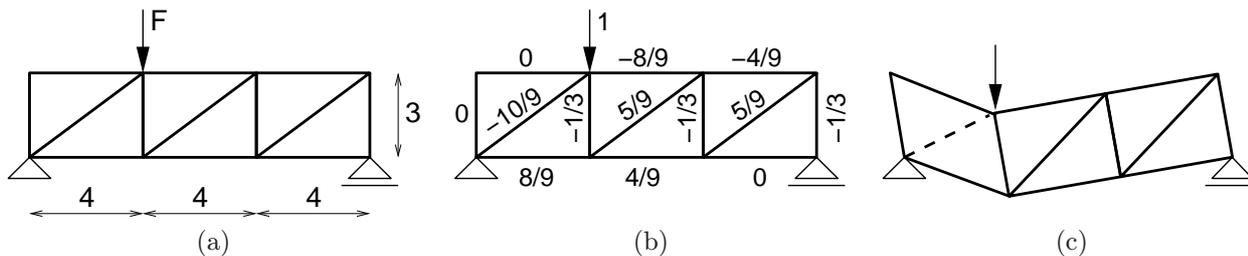
a podmínku plasticity jako

$$|N| = N_0 \quad (2.71)$$

Nyní přikročíme k analýze příhradových konstrukcí za obvyklého předpokladu, že jejich pruty jsou namáhány pouze osovými (tj. normálovými) silami. Namísto běžně uvažovaného pružného chování materiálu ale použijeme ideálně pružnoplastický model.

### Příklad 2.6: Staticky určitá příhradová konstrukce

Zkoumáme příhradový nosník zatížený podle obr. 2.16a. Úloha je staticky určitá, takže pro danou sílu  $F$  lze osové síly jednoznačně určit z podmínek rovnováhy běžným postupem známým ze stavební mechaniky. Osové síly způsobené jednotkovou silou  $F$  jsou připsány k jednotlivým prutům na obr. 2.16b.



Obrázek 2.16: Staticky určitá příhradová konstrukce: (a) statické schéma a zatížení, (b) osové síly od jednotkového zatížení, (c) mechanismus plastického kolapsu.

Pro jednoduchost předpokládáme, že všechny pruty mají stejný průřez a jsou vyrobeny ze stejného materiálu, mají tedy i stejnou hodnotu mezní plastické síly  $N_0$ . Dokud jsou všechny osové síly v absolutní hodnotě menší než  $N_0$ , celá konstrukce se chová lineárně pružně, takže průhyby se zvětšují úměrně zatěžující síle  $F$ . Do plastického stavu se jako první dostane prut s největší absolutní hodnotou osové síly, tedy levá diagonála, ve které je osová síla  $N = -(10/9) \cdot F$ , a to v okamžiku, kdy působící síla  $F$  dosáhne hodnoty  $F_0 = 0,9N_0$ .

Vztahy mezi osovými silami a zatížením vyplynuly z podmínek rovnováhy a při jejich odvození nebyly použity žádné předpoklady o chování materiálu. Podmínky rovnováhy musejí být splněny i v průběhu plastického přetváření. Osová síla v nejméně namáhaném prutu ale nesmí v absolutní hodnotě překročit mezní plastickou sílu, takže konstrukce nemůže přenést větší sílu než  $F_0$ .

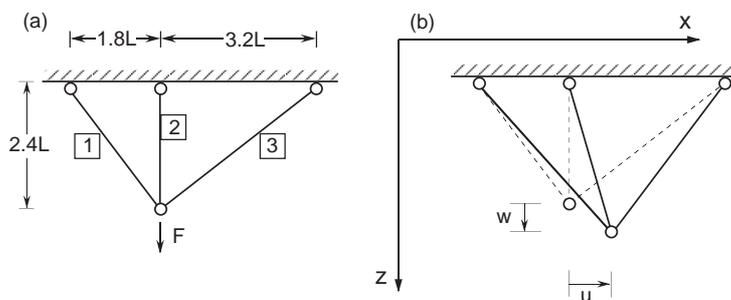
□

V příkladu došlo k vyčerpání únosnosti konstrukce v okamžiku, kdy osová síla v nejméně namáhaném prutu dosáhla mezní plastické hodnoty. Konstrukce pak už nebyla schopna přenést další přírůstky zatížení, přestože všechny pruty až na jeden byly stále v pružném stavu a osové síly by v nich ještě mohly růst. Takové chování je charakteristické pro staticky určité konstrukce, pro které přechod jediného prutu do plastického stavu vede ke vzniku pohyblivého mechanismu (obr. 2.16c) a tedy ke kolapsu konstrukce. Protážení zplastizovaného prutu může neomezeně narůstat za konstantní osové síly, přičemž protážení nebo stlačení ostatních prutů zůstává konstantní a tudíž se příslušné osové síly také nemění. Konstrukce proto nemůže přenést vyšší zatížení než to, které vedlo k plastifikaci prvního prutu.

Situace je podstatně odlišná pro staticky neurčité konstrukce, na kterých i po plastifikaci jednoho prutu mohou zbylé pruty, které jsou stále v pružném stavu, přenášet přírůstky zatížení.

### Příklad 2.7: Staticky neurčitá příhradová konstrukce — přírůstková analýza

Aby bylo možno řešení staticky neurčité konstrukce pohodlně sledovat, předvedeme si je pro velmi jednoduchý případ: závěs skládající se ze tří prutů připojených ke společnému styčníku, na který působí svislá síla, viz



Obrázek 2.17: Staticky neurčitý závěs: (a) statické schéma, (b) mechanismus plastického kolapsu.

obr. 2.17a. Sestrojíme globální pracovní diagram, tj. graf závislosti mezi silou  $F$  a posunem jejího působíště. Opět předpokládáme, že všechny pruty mají stejnou průřezovou plochu  $A$  a stejné materiálové vlastnosti (modul pružnosti  $E$  a mez kluzu  $\sigma_0$ ). Pruty očíslovujeme podle obr. 2.17a a jejich délky  $L_1 = 3L$ ,  $L_2 = 2,4L$  a  $L_3 = 4L$  vypočteme podle Pythagorovy věty.

V počáteční fázi zatěžování jsou všechny pruty v pružném stavu a můžeme použít obvyklé metody řešení lineárně pružných staticky neurčitých konstrukcí, např. deformační metodu. Jejím základem jsou podmínky rovnováhy nepodepřeného styčnicku, zapsané nejprve pomocí normálových sil jako

$$0,6N_1 - 0,8N_3 = 0 \quad (2.72)$$

$$0,8N_1 + N_2 + 0,6N_3 = F \quad (2.73)$$

Jde o dvě rovnice o třech neznámých, takže normálové síly nelze jednoznačně určit jen z podmínek rovnováhy. Proto s využitím geometrických rovnic a zobecněných materiálových rovnic vyjádříme normálové síly v závislosti na posunech nepodepřeného styčnicku  $u$  a  $w$ , znázorněných na obr. 2.17b:

$$N_1 = \frac{EA}{L_1} \Delta L_1 = \frac{EA}{3L} (0,6u + 0,8w) \quad (2.74)$$

$$N_2 = \frac{EA}{L_2} \Delta L_2 = \frac{EA}{2,4L} w \quad (2.75)$$

$$N_3 = \frac{EA}{L_3} \Delta L_3 = \frac{EA}{4L} (-0,8u + 0,6w) \quad (2.76)$$

Po dosazení do (2.72)–(2.73) získáme dvě rovnice o dvou neznámých  $u$  a  $w$ , které je možno upravit do tvaru

$$0,28u + 0,04w = 0 \quad (2.77)$$

$$0,04u + 0,72w = FL/EA \quad (2.78)$$

Jejich řešení  $u = -0,2FL/EA$  a  $w = 1,4FL/EA$  pak dosadíme zpět do (2.74)–(2.76) a tím dostaneme vztahy mezi normálovými silami a zatížením:

$$N_1 = 0,333F, \quad N_2 = 0,583F, \quad N_3 = 0,250F \quad (2.79)$$

Dokud pro všechny normálové síly platí  $|N_i| < N_0$ , odezva konstrukce je lineárně pružná a průhyb  $w$  narůstá úměrně působící síle  $F$ . Je zřejmé, že mezní plastické hodnoty dosáhne jako první normálová síla v prutu 2, a to při zatížení silou  $F^A = N_0/0,583 = 1,714N_0$ . Odpovídající stav A je *mezním elastickým stavem konstrukce*. Normálové síly v tomto stavu nabývají hodnot

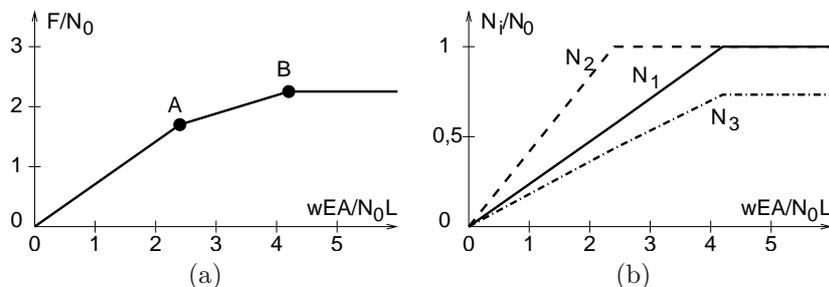
$$N_1^A = 0,333F^A = 0,571N_0, \quad N_2^A = 0,583F^A = N_0, \quad N_3^A = 0,250F^A = 0,429N_0 \quad (2.80)$$

Při dalším nárůstu zatěžující síly  $F$  probíhá v prutu 2 plastické přetváření a normálová síla  $N_2$  zůstává konstantní, její přírůstek  $\Delta N_2$  je tedy nulový. Z hlediska přírůstků se tedy konstrukce chová, jako by prut 2 byl vyřazen. Pruty 1 a 3 však zatím zůstávají pružné a pro přírůstky normálových sil  $\Delta N_1$  a  $\Delta N_3$  stále platí vztahy (2.74) a (2.76), ve kterých je ovšem třeba nahradit posuny  $u$  a  $w$  jejich přírůstky  $\Delta u$  a  $\Delta w$ . Po dosazení do rovnic rovnováhy (2.72)–(2.73) zapsaných pro přírůstky normálových sil a zatížení získáme rovnice

$$0,28\Delta u + 0,04\Delta w = 0 \quad (2.81)$$

$$0,04\Delta u + 0,3033\Delta w = \Delta FL/EA \quad (2.82)$$

ze kterých vypočteme  $\Delta u = -0,48\Delta FL/EA$  a  $\Delta w = 3,36\Delta FL/EA$ . Po zpětném dosazení do výrazů pro přírůstky normálových sil dostaneme  $\Delta N_1 = 0,8\Delta F$  a  $\Delta N_3 = 0,6\Delta F$ . Tyto vztahy mezi přírůstky platí až do okamžiku, kdy se prut 1 nebo 3 ocitne v plastickém stavu. K tomu dojde při přírůstku zatížení  $\Delta F^{AB} = 0,536N_0$ ,



Obrázek 2.18: Staticky neurčitý závěs: (a) pracovní diagram, (b) vývoj normálových sil v závislosti na svislém posunu.

kdy normálová síla  $N_1^B = N_1^A + 0,8\Delta F^{AB}$  dosáhne mezní plastické hodnoty  $N_0$ , zatímco v prutu 3 je normálová síla  $N_3^B = N_3^A + 0,6\Delta F^{AB} = 0,75N_0$  stále v pružné oblasti.

Přestože v prutu 3 by ještě normálová síla mohla růst, konstrukce už větší zatížení nepřenese, protože zbývající pruty jsou již v plastickém stavu a vzniká pohyblivý mechanismus, který vede ke kolapsu. Mluvíme o *mezním plastickém stavu konstrukce*, který nastává při zatížení silou

$$F_0 = F^B = F^A + \Delta F^{AB} = 1,714N_0 + 0,536N_0 = 2,25N_0 \quad (2.83)$$

V mezním plastickém stavu může průhyb  $w$  volně narůstat při konstantní úrovni zatížení, čemuž odpovídá vodorovná část pracovního diagramu na obr. 2.18a. Při sestavení pracovního diagramu jsme využili toho, že ve stavu A má svislý posun hodnotu  $w^A = 1,4F^A L/EA = 2,4N_0 L/EA$  a ve stavu B má hodnotu  $w^B = w^A + 3,36\Delta F^{AB} L/EA = 4,2N_0 L/EA$ . Závislost mezi normálovými silami a zatížením je vynesena na obr. 2.18b. □

Postup použitý v předcházejícím příkladu je ukázkou *přírůstkové pružnoplastické analýzy*, při které na konstrukci postupně přidáváme vhodné přírůstky zatížení, volené tak, aby k přechodu jednotlivých prutů z pružného do plastického stavu docházelo vždy jen na konci některého přírůstku. V rámci každého přírůstku se mění osově síly pouze v těch prutech, které ještě nepřešly do plastického stavu. Pro již zplastizované pruty zůstávají osově síly konstantní, tj. přírůstky osových sil jsou nulové. Proto můžeme při analýze daného přírůstku zplastizované pruty myšleně odstranit a provést výpočet pro upravenou konstrukci, skládající se pouze z prutů chovajících se dosud pružně. Výpočet se provede běžnými metodami mechaniky staticky neurčitých pružných konstrukcí. Na základě znalosti osových sil na začátku výpočetního kroku a vztahu mezi přírůstkem osových sil a přírůstkem zatížení zjistíme, který dosud pružný prut jako první dosáhne plastického stavu a pro jakou konkrétní hodnotu přírůstku zatížení. Pak tento prut vyřadíme a pro zbytek konstrukce analýzu opakujeme, až dojde ke vzniku pohyblivého mechanismu a zatížení nelze dále zvyšovat.

Přírůstková analýza je obecnou metodou, kterou lze použít nejen pro ideálně pružnoplastický materiál, ale také pro materiál se zpevněním, dokonce i nelineárním (pak je ale třeba v jednotlivých přírůstcích iterovat). Pokud je ale materiál ideálně pružnoplastický a zajímá nás pouze mezní plastický stav konstrukce, tj. stav, ve kterém je dosaženo maximální možné úrovně zatížení a únosnost konstrukce je zcela vyčerpána, lze místo postupného řešení po jednotlivých přírůstcích hledat přímo výsledný mezní stav. Vyšetřování mezního plastického stavu se provádí metodami *mezní plastické analýzy*, jejichž teoretickým základem je *princip maxima plastické dissipace*. Dříve než tento princip vysvětlíme, předvedeme si jednoduchou ukázkou mezní analýzy, vycházející z odhadu výsledného mechanismu plastického kolapsu.

### Příklad 2.8: Staticky neurčitá příhradová konstrukce — mezní analýza

Vraťme se k závěsu na obr. 2.17a, který jsme v předchozím příkladu 2.7 řešili přírůstkovou metodou. Je to jednou staticky neurčitá konstrukce a pohyblivý mechanismus z ní vznikne vyřazením dvou prutů. V mezním plastickém stavu konstrukce tedy musejí být dva pruty zplastizovány. Víme-li, že to budou pruty 1 a 2, je snadné určit odpovídající hodnotu zatížení vedoucí ke kolapsu. I v mezním plastickém stavu totiž musejí být splněny podmínky rovnováhy (2.72)–(2.73). Dá se čekat, že pruty 1 a 2 budou tažené, takže normálové síly v těchto prutech budou rovny mezní plastické síle  $N_0$  s kladným znaménkem. Po dosazení  $N_1 = N_0$  a  $N_2 = N_0$  do (2.72)–(2.73) zbydou jen dvě neznámé,  $N_3$  a  $F$ , které z těchto rovnic můžeme snadno vypočítat:

$$0,6N_0 - 0,8N_3 = 0 \quad \implies \quad N_3 = 0,75N_0 \quad (2.84)$$

$$0,8N_0 + N_0 + 0,6N_3 = F \quad \implies \quad F = 2,25N_0 \quad (2.85)$$

Vidíme, že jsme prakticky bez jakékoli námahy získali mezní hodnotu síly  $F$ , ke které jsme se v příkladu 2.7 dostali až po opakovaném řešení deformační metodou. Navíc jsme získali i hodnotu síly  $N_3$  v prutu, o kterém jsme předpokládali, že zůstává pružný. Jelikož je  $N_3 = 0,75N_0 < N_0$ , je náš předpoklad potvrzen. □

V příkladu jsme ukázali, že pokud známe (nebo správně odhadneme) mechanismus kolapsu, tj. víme, které pruty přejdou do plastického stavu, můžeme odpovídající mezní zatížení vypočítat pouze z podmínek rovnováhy, přestože konstrukce je původně staticky neurčitá. Jestliže ale vyjdeme z nesprávného předpokladu, vypočtené zatížení zdánlivě vedoucí ke zhroutilí konstrukce se bude od skutečné mezní hodnoty lišit. Pomocí principu maxima plastické disipace lze odvodit dvě varianty základní věty mezní analýzy, které umožní využít i výsledky výpočtu založeného na ne zcela správném odhadu skutečného mechanismu kolapsu. Konkrétně podle tzv. statické věty mezní analýzy je zatížení vypočtené statickou metodou pro jakoukoli (ne nutně správnou) volbu zplastizovaných prutů vždy menší nebo rovno skutečnému meznímu zatížení. Výsledek takového výpočtu je tedy dolním odhadem mezního zatížení. Navíc tzv. kinematická věta mezní analýzy vede k alternativnímu postupu výpočtu, jehož výsledek je vždy větší nebo roven skutečnému meznímu zatížení, poskytuje tedy jeho horní odhad. Tato předběžná informace snad ve čtenáři probudí zájem o pochopení zmíněného principu, který by se jinak na první pohled mohl jevit jako zbytečná teoretická hříčka.

### 2.2.2 Princip maxima plastické disipace

Abychom si usnadnili obecnou formulaci principu maxima plastické disipace, která bude snadno rozšiřitelná i na případy víceosé napjatosti, zavedeme již nyní příslušný formalismus, byť se pro jednoosou napjatost může zdát poněkud samoúčelný. Začneme na úrovni materiálového bodu. Již víme, že napětí  $\sigma$  je plasticky přípustné, pokud jeho absolutní hodnota nepřekračuje mez kluzu, tj. pokud je  $|\sigma| \leq \sigma_0$ . Tuto podmínku lze formálně zapsat také ve tvaru  $f(\sigma) \leq 0$ , kde  $f$  je funkce plasticity. Množinu všech plasticky přípustných stavů napětí označíme

$$\mathcal{S}_{ep} = \{\sigma \mid f(\sigma) \leq 0\} \quad (2.86)$$

Indexy e a p připomínají, že tato množina obsahuje stavy elastické (pružné), pro které  $f(\sigma) < 0$ , i stavy plastické, pro které  $f(\sigma) = 0$ . Množina  $\mathcal{S}_{ep}$  je *plasticky přípustná oblast* v prostoru napětí.<sup>2</sup> Body vně této oblasti odpovídají hodnotám napětí, které daným materiálem nemohou být přeneseny a proto jsou považovány za plasticky nepřípustné. V případě jednoosé napjatosti stačí napětí charakterizovat jedinou složkou a plasticky přípustnou oblastí je uzavřený interval

$$\mathcal{S}_{ep} = [-\sigma_0, \sigma_0] \quad (2.87)$$

Jak uvidíme později, pro víceosou napjatost se budou plasticky přípustné oblasti znázorňovat ve vícerozměrných prostorech a jejich tvar bude záviset na konkrétním typu funkce plasticity vhodné pro daný materiál.

Nyní můžeme provést jednoduchou úvahu, která vede přímo k formulaci principu maxima plastické disipace pro jednoosou napjatost. Předpokládejme, že pro daný materiálový bod a daný okamžik známe skutečnou hodnotu napětí  $\sigma$  a skutečnou rychlost plastické deformace  $\dot{\epsilon}_p$ . Dále budeme pracovat s pomocnou hodnotou napětí  $\sigma^*$ , kterou můžeme zvolit do jisté míry libovolně, ale tak, aby byla plasticky přípustná. Podstatou principu maxima plastické disipace je porovnání součinů  $\sigma \dot{\epsilon}_p$  a  $\sigma^* \dot{\epsilon}_p$ . Podle znaménka  $\dot{\epsilon}_p$  můžeme rozlišit tři základní případy:

1. Pokud je  $\dot{\epsilon}_p > 0$ , dochází k plastickému přetváření v tahu a napětí  $\sigma$  musí být na kladné mezi kluzu, tedy  $\sigma = \sigma_0$ . Formálně to plyne ze zákona plastického přetváření, podmínky komplementarity a definice funkce plasticity, viz tab. 2.2. Pro libovolné plasticky přípustné napětí  $\sigma^*$  platí  $\sigma^* \leq \sigma_0 = \sigma$  a po vynásobení kladnou hodnotou  $\dot{\epsilon}_p$  zůstane smysl této nerovnosti zachován, takže dostaneme

$$\sigma^* \dot{\epsilon}_p \leq \sigma \dot{\epsilon}_p \quad (2.88)$$

2. V případě  $\dot{\epsilon}_p < 0$  dochází k plastickému přetváření v tlaku a napětí  $\sigma$  musí být na záporné mezi kluzu, tedy  $\sigma = -\sigma_0$ . Pro libovolné plasticky přípustné napětí  $\sigma^*$  musí být  $\sigma^* \geq -\sigma_0 = \sigma$  a po vynásobení zápornou hodnotou  $\dot{\epsilon}_p$  se smysl této nerovnosti obrátí, takže dostaneme opět (2.88). Tato nerovnost je tedy splněna, ať už je rychlost plastické deformace kladná nebo záporná.
3. V případě  $\dot{\epsilon}_p = 0$  sice mezi  $\sigma$  a  $\sigma^*$  neplatí žádný obecný vztah, ale nerovnost (2.88) je stále splněna, protože na obou stranách jsou nuly.

Vidíme tedy, že nerovnost (2.88) platí zcela univerzálně, samozřejmě za výše uvedených předpokladů, že  $\sigma$  je skutečné napětí,  $\dot{\epsilon}_p$  je skutečná rychlost plastické deformace a  $\sigma^*$  je libovolné plasticky přípustné napětí. Jelikož skutečné napětí  $\sigma$  je také jedním z plasticky přípustných, můžeme výsledek rozboru shrnout konstatováním, že ze všech plasticky přípustných napětí  $\sigma^*$  dává skutečné napětí  $\sigma$  součinu  $\sigma^* \dot{\epsilon}_p$  maximální hodnotu. To je matematicky zapsáno jako

$$\max_{\sigma^* \in \mathcal{S}_{ep}} \sigma^* \dot{\epsilon}_p = \sigma \dot{\epsilon}_p \quad (2.89)$$

Tato rovnice již vlastně představuje princip maxima plastické disipace, ale pro pochopení fyzikální podstaty je ještě třeba vysvětlit názorný význam součinu napětí a rychlosti plastické deformace. Pozor, následující úvahy

<sup>2</sup>Pro jednoosou napjatost je stav napětí charakterizován jedinou hodnotou a prostor napětí je tedy jednorozměrný (je to v podstatě množina všech reálných čísel). Pro obecnou trojosou napjatost půjde o prostor šestiřozměrný.

platí pro jednoosou napjatost a ideálně pružnoplastický model. Pro trojosou napjatost, případně pro modely se zpevněním, by bylo třeba některá tvrzení mírně upravit.

Připomeňme, že pokud na elementární objem materiálu  $dV$  působí jednoosé napětí  $\sigma$  a jeho deformace ve směru působícího napětí se zvýší o infinitezimální přírůstek  $d\varepsilon$ , vykoná napětí práci  $\sigma d\varepsilon dV$ , takže vykonaná práce vztážená na jednotku objemu je  $\sigma d\varepsilon$ . Jestliže je přírůstek deformace pružný, přispěje práce vykonaná napětím ke zvýšení potenciální energie pružné deformace. Jestliže je ale přírůstek deformace plastický, zůstává potenciální energie pružné deformace beze změny a vykonaná práce je disipována (rozptýlena) v plastických přetvárných procesech. Proto součin  $\sigma d\varepsilon_p$  odpovídá přírůstku disipované energie (na jednotku objemu). Po vydělení infinitezimálním přírůstkem času  $dt$ , během kterého k přírůstku deformace  $d\varepsilon$  došlo, dostaneme disipační výkon (stručně disipaci)  $\mathcal{D} = \sigma d\varepsilon_p / dt = \sigma \dot{\varepsilon}_p$ , vztážený na jednotku objemu. Vidíme tedy, že součin napětí a rychlosti plastické deformace odpovídá hustotě plastické disipace v daném materiálovém bodě. Při výpočtu hustoty plastické disipace stačí znát rychlost plastické deformace, protože odpovídající hodnota napětí je touto rychlostí již jednoznačně určena ( $\sigma = \sigma_0$  pro  $\dot{\varepsilon}_p > 0$  a  $\sigma = -\sigma_0$  pro  $\dot{\varepsilon}_p < 0$ ). Místo  $\mathcal{D} = \sigma \dot{\varepsilon}_p$  tedy můžeme psát  $\mathcal{D} = \sigma_0 |\dot{\varepsilon}_p|$ , přičemž  $\sigma_0$  je materiálová konstanta, takže  $\mathcal{D}$  je funkcí  $\dot{\varepsilon}_p$ .

Teď už je zřejmé, jak rovnice (2.89) souvisí s maximem plastické disipace. Výraz na pravé straně představuje skutečnou disipaci, součin  $\sigma^* \dot{\varepsilon}_p$  představuje fiktivní výkon (na jednotku objemu), který by napětí  $\sigma^*$  podalo na rychlosti plastické deformace  $\dot{\varepsilon}_p$ . Finální verzi *principu maxima plastické disipace* tedy zapíšeme ve tvaru

$$\max_{\sigma^* \in E_{ep}} \sigma^* \dot{\varepsilon}_p = \sigma \dot{\varepsilon}_p = \sigma_0 |\dot{\varepsilon}_p| = \mathcal{D}(\dot{\varepsilon}_p) \quad (2.90)$$

a vyjádříme následující slovní formulací:

**Plastická disipace, tj. výkon skutečného napětí na skutečné rychlosti plastické deformace, je největší za všech (myšlených) výkonů, které by libovolné plasticky přípustné napětí podávalo na skutečné rychlosti plastické deformace.**

Stručně by bylo možno říci, že **pro danou rychlost plastické deformace je skutečné napětí to plasticky přípustné napětí, které maximalizuje plastickou disipaci**, proto tedy hovoříme o principu maxima plastické disipace.

Pro materiálový bod a jednoosou napjatost je uvedené tvrzení zcela evidentní a je otázka, proč ho považovat za nějaký „vyšší princip“. Jeho skutečný význam doceníme teprve časem, až přejdeme k celé konstrukci a k víceosé napjatosti. Začneme rozšířením principu na tažený-tlačený prut, tedy prut namáhaný osovou silou  $N$ . Celkovou plastickou disipaci v prutu získáme integrací její hustoty  $\mathcal{D}$  přes objem prutu. Pokud dochází k rovnoměrnému přetváření (tj. deformace je ve všech bodech prutu popsána stejnou funkcí času), je i hustota plastické disipace konstantní a stačí ji vynásobit objemem prutu  $V$ , který je roven součinu jeho délky  $L$  a obsahu průřezové plochy  $A$ . Celková plastická disipace v prutu,

$$D = \mathcal{D} \cdot V = \sigma \dot{\varepsilon}_p LA = (\sigma A) \cdot (\dot{\varepsilon}_p L) = N \Delta \dot{L}_p \quad (2.91)$$

je pak součinem osově síly  $N$  a rychlosti plastického protažení  $\Delta \dot{L}_p$ . Rychlost plastického protažení je časovou derivací plastického protažení  $\Delta L_p$ , tj. té části celkového protažení, která nezmizí po odtižení a má tedy trvalý charakter. Disipaci na úrovni prutu lze jednoznačně vypočíst z rychlosti  $\Delta \dot{L}_p$ , protože pro  $\Delta \dot{L}_p > 0$  je  $N = N_0$  a pro  $\Delta \dot{L}_p < 0$  je  $N = -N_0$ , takže v obou případech je  $D = N \Delta \dot{L}_p = N_0 |\Delta \dot{L}_p|$ . Sečtením příspěvků jednotlivých prutů získáme plastickou disipaci v celé příhradové konstrukci,

$$D = \sum_{i=1}^n N_i \Delta \dot{L}_{p,i} = \sum_{i=1}^n N_{0,i} |\Delta \dot{L}_{p,i}| \quad (2.92)$$

Přitom  $N_i$  je skutečná osová síla a  $N_{0,i}$  je mezní plastická síla v prutu číslo  $i$ ,  $\Delta \dot{L}_{p,i}$  je rychlost plastického protažení tohoto prutu a  $n$  je celkový počet prutů.

### 2.2.3 Věty mezní plastické analýzy

Naznačíme nyní odvození základní věty mezní plastické analýzy, které se nejsnáze provede s využitím maticového zápisu základních rovnic. Nejprve proto musíme uspořádat základní veličiny vhodným způsobem do sloupcových matic, který budeme stručně říkat vektory. Počet styčníků zkoumané příhradové konstrukce označíme  $m$  a počet prutů jsme již označili  $n$ . Pro jednoduchost pracujeme s rovinnou příhradovou konstrukcí, ale zobecnění na prostorové příhradové konstrukce by bylo zcela přímočaré. Konstrukce je umístěna v rovině  $xz$ , složky posunu  $i$ -tého styčnicku ve směru os  $x$  a  $z$  označíme  $u_i$  a  $w_i$  a složky vnějších sil působících na tento styčnick označíme

$F_{ix}$  a  $F_{iz}$ . Styčnickové posuny a síly pak uspořádáme do vektorů

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \\ w_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{xm} \\ F_{zm} \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

Zavedeme také vektory

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \Delta L_1 \\ \Delta L_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta L_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ N_n \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

obsahující protažení jednotlivých prutů a osově síly v těchto prutech.

Vektor  $\mathbf{u}$  charakterizuje přemístění styčnicků, vektor  $\mathbf{e}$  zachycuje deformace prutů, vektor  $\mathbf{s}$  obsahuje vnitřní síly a vektor  $\mathbf{f}$  vnější síly. Tyto veličiny jsou svázány třemi typy základních rovnic. Geometrické rovnice popisují, jak se ze styčnickových posunů vypočtou protažení prutů, a obecně je zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.95)$$

kde  $\mathbf{B}$  je geometrická matice konstrukce, obsahující směrové kosiny jednotlivých prutů. Zobecněné materiálové rovnice vzniknou přenesením vztahu mezi napětím a deformací na úroveň prutů, tedy jeho transformací na vztah mezi osovou silou a protažením. Pro lineární pružný materiál mají tvar

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{e} \quad (2.96)$$

kde  $\mathbf{D}$  je diagonální matice obsahující normálové tuhosti jednotlivých prutů  $n_i = EA_i/L_i$ . Pro pružnoplastický materiál vztah (2.96) zobecníme na

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_p) \quad (2.97)$$

kde  $\mathbf{e}_p$  je vektor obsahující plastické části protažení jednotlivých prutů, tj. veličiny  $\Delta L_{p,i}$ . Konečně statické rovnice jsou vlastně silové podmínky rovnováhy jednotlivých styčnicků a lze je zapsat ve tvaru

$$\mathbf{B}^T \mathbf{s} = \mathbf{f} \quad (2.98)$$

Matice  $\mathbf{B}^T$  je statická matice konstrukce. Při naznačeném pravidelném uspořádání prvků ve vektorech  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{s}$  a  $\mathbf{f}$  je tato matice transpozicí geometrické matice  $\mathbf{B}$ , a proto jsme ji rovnou označili symbolem  $\mathbf{B}^T$ .

Podobně jako pro materiálový bod zavedeme i na úrovni celé konstrukce pojem *plasticky přípustného stavu*. Za plasticky přípustné budeme považovat takové hodnoty vnitřních sil, kterým odpovídají napětí, jejichž absolutní hodnota v žádném bodě konstrukce nepřekračuje mez kluzu. Pro příhradovou konstrukci složenou z prutů konstantního průřezu se napětí ve všech bodech prutu číslo  $i$  vypočte jako  $\sigma_i = N_i/A_i$ , kde  $N_i$  je osová síla v tomto prutu a  $A_i$  je obsah příslušného průřezu. Hodnoty osových sil jsou tedy plasticky přípustné, pokud jsou splněny podmínky  $|N_i| \leq N_{0,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Množinu všech plasticky přípustných vektorů vnitřních sil  $\mathbf{s}$  nazveme opět plasticky přípustnou oblastí a označíme ji  $\mathcal{S}_{ep}$ .

Mezní plastická analýza pracuje s pojmy staticky přípustného stavu a kinematicky přípustného procesu. Předpokládejme, že je dáno zatížení konstrukce, popsané vektorem vnějších sil  $\mathbf{f}$ . *Staticky přípustným stavem* rozumíme libovolné plasticky přípustné vnitřní síly, které jsou s daným zatížením v rovnováze. Formálně je tedy takový stav popsán vektorem  $\mathbf{s}_s \in \mathcal{S}_{ep}$  splňujícím statické rovnice  $\mathbf{B}^T \mathbf{s}_s = \mathbf{f}$ . *Kinematicky přípustným procesem* pak rozumíme libovolný přetvárný mechanismus, při kterém se některé pruty konstrukce plasticky protahují nebo stlačují a ostatní zachovávají svou současnou délku, přičemž dané zatížení podává kladný výkon. Formálně je takový proces popsán libovolným vektorem rychlosti styčnickových posunů  $\dot{\mathbf{u}}_k$ , pro který je skalární součin  $\mathbf{f}^T \dot{\mathbf{u}}_k$  kladný, a odpovídajícím vektorem rychlosti plastického protažení prutů  $\dot{\mathbf{e}}_{pk}$ , který je vypočten na základě geometrických rovnic<sup>3</sup>  $\dot{\mathbf{e}}_{pk} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}_k$ . Všimněte si, že skalární součin  $\mathbf{f}^T \dot{\mathbf{u}}_k$  je součtem součinů jednotlivých styčnickových sil a odpovídajících rychlostí styčnickových posunů a vyjadřuje tudíž výkon podávaný danými vnějšími silami  $\mathbf{f}$  na uvažovaném mechanismu.

Zdůrazněme, že skutečný mechanismus plastického kolapsu konstrukce je kinematicky přípustný ve smyslu výše uvedené definice a navíc vnější a vnitřní síly, při kterých k tomuto kolapsu dochází, splňují podmínky pro

<sup>3</sup>Během plastického kolapsu dochází k plastickému přetváření některých prutů, ale pružné deformace zůstávají konstantní a jejich rychlost je tudíž nulová. Proto můžeme v geometrických rovnicích rychlost celkové deformace  $\dot{\mathbf{e}}$  nahradit rychlostí plastické deformace  $\dot{\mathbf{e}}_p$ .

staticky přípustný stav. Kromě toho však existuje i celá řada jiných staticky přípustných stavů a celá řada jiných kinematicky přípustných procesů, které splňují příslušné podmínky, ale neodpovídají skutečné situaci při kolapsu a v našich úvahách budou hrát jen pomocnou roli.

Představme si nyní, že je předepsáno jisté zatížení a naším úkolem je zjistit, zda toto zatížení může konstrukce bezpečně přenést. Navíc bychom však chtěli mít i představu o tom, jakou rezervu ještě konstrukce má v případě kladné odpovědi, nebo jak výrazně je její únosnost překročena v případě záporné odpovědi. Dané zatížení proto budeme považovat za referenční (srovnávací) úroveň a budeme hledat, pro jaký násobek tohoto zatížení by došlo k plastickému kolapsu. Vektor vnějších sil tedy zapíšeme ve tvaru  $\mathbf{f} = \mu \bar{\mathbf{f}}$ , kde  $\bar{\mathbf{f}}$  je vektor daných referenčních hodnot a  $\mu$  je proměnný *součinitel zatížení*, jehož mezní hodnotu hledáme. Pokud zjistíme, že ke kolapsu by došlo pro  $\mu = \mu_0 > 1$ , může být referenční zatížení bezpečně přeneseno a mezní hodnota součinitele  $\mu_0$  představuje faktor bezpečnosti. Je-li např.  $\mu_0 = 2$ , vyčerpá referenční zatížení pouze 50% únosnosti konstrukce.

Teď už se dostáváme k samotnému jádru mezní plastické analýzy. Předpokládáme, že je dána konstrukce a její referenční zatížení  $\bar{\mathbf{f}}$ , a naším úkolem je najít mezní plastickou hodnotu součinitele zatížení, neboli takovou hodnotu  $\mu_0$ , aby pro zatížení  $\mu_0 \bar{\mathbf{f}}$  dosáhla konstrukce mezního plastického stavu (tj. nastal její plastický kolaps). Místo přímého výpočtu  $\mu_0$  ale popíšeme způsob, jak sestavit jeho horní a dolní odhady. Jestliže pro některou hodnotu součinitele zatížení  $\mu_s$  existuje takový stav vnitřních sil, který je v rovnováze s vnějšími silami  $\mu_s \bar{\mathbf{f}}$  a splňuje podmínky plastické přípustnosti, pak toto  $\mu_s$  nazýváme *staticky přípustným součinitelem zatížení*. Každý staticky přípustný součinitel zatížení tedy odpovídá jistému staticky přípustnému stavu konstrukce. Podobně pro každý kinematicky přípustný proces (popsaný rychlostmi styčnickových posunů  $\dot{\mathbf{u}}_k$  a rychlostmi plastického protažení prutů  $\dot{\mathbf{e}}_{pk} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}_k$ ) můžeme definovat odpovídající *kinematicky přípustný součinitel zatížení*  $\mu_k$  na základě rovnice

$$\mu_k \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{u}}_k = D(\dot{\mathbf{e}}_{pk}) \quad (2.99)$$

kteřá vyjadřuje skutečnost, že výkon vnějších sil  $\mu_k \bar{\mathbf{f}}$  na rychlostech styčnickových posunů  $\dot{\mathbf{u}}_k$  je roven disipaci, vypočtené pro příslušné rychlosti plastického protažení  $\dot{\mathbf{e}}_{pk}$  podle rovnice (2.92).

**Základní věta mezní plastické analýzy: Pro libovolný staticky přípustný součinitel zatížení  $\mu_s$  a libovolný kinematicky přípustný součinitel zatížení  $\mu_k$  platí nerovnost**

$$\mu_s \leq \mu_k \quad (2.100)$$

Na první pohled možná není zřejmé, jak nám tato věta pomůže při výpočtu součinitele zatížení  $\mu_0$  odpovídajícího meznímu plastickému stavu konstrukce. Užitečnost věty se ovšem vyjasní, jakmile si uvědomíme, že hledaná mezní hodnota součinitele zatížení  $\mu_0$  je zároveň staticky i kinematicky přípustná. V okamžiku dosažení mezního plastického stavu konstrukce jsou totiž skutečné vnitřní síly plasticky přípustné a zároveň jsou v rovnováze s vnějšími silami  $\mu_0 \bar{\mathbf{f}}$ , takže  $\mu_0$  splňuje podmínky kladené na staticky přípustné součinitele. Zároveň vzniká mechanismus kolapsu, při kterém ve zplastizovaných prutech dochází k plastickému přetváření a v ostatních prutech zůstávají protažení konstantní. Skutečné rychlosti styčnickových posunů a plastických protažení splňují podmínky kinematické přípustnosti a zároveň se veškerý výkon vnějších sil disipuje v plasticky se deformujících prutech, protože pružné deformace zůstávají beze změny, a tedy i změna potenciální energie pružné deformace je nulová. Pro  $\mu_k = \mu_0$  je splněna rovnice (2.99), dosadíme-li za  $\dot{\mathbf{u}}_k$  skutečné rychlosti styčnickových posunů během kolapsu  $\dot{\mathbf{u}}$  a za  $\dot{\mathbf{e}}_{pk}$  skutečné rychlosti protažení prutů během kolapsu  $\dot{\mathbf{e}}$ .

Nyní stačí si uvědomit, že součinitel zatížení v mezním plastickém stavu  $\mu_0$  je jedním ze staticky přípustných součinitelů, a protože je zároveň kinematicky přípustný, musí být podle (2.100) větší nebo roven všem ostatním staticky přípustným součinitelům. To znamená, že je ze všech staticky přípustných součinitelů ten největší. Analogickou úvahou dospějeme k závěru, že je také ze všech kinematicky přípustných součinitelů ten nejmenší. Tím jsme odvodili dva důsledky základní věty, které už mají přímé praktické využití.

**Statická věta mezní plastické analýzy: Součinitel zatížení v mezním plastickém stavu je největší ze všech staticky přípustných součinitelů. Libovolný staticky přípustný součinitel je tedy jeho dolním odhadem.**

**Kinematická věta mezní plastické analýzy: Součinitel zatížení v mezním plastickém stavu je nejmenší ze všech kinematicky přípustných součinitelů. Libovolný kinematicky přípustný součinitel je tedy jeho horním odhadem.**

Ze zřejmých důvodů se tyto věty někdy nazývají větami o dolním a horním odhadu (anglicky „lower bound theorem“ a „upper bound theorem“).

Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že základní větu jsme zatím uvedli bez důkazu. Naší snahou bylo ihned vysvětlit, v čem spočívá její význam a jak bude užitečná při praktických výpočtech. Nyní můžeme přikročit k samotnému formálnímu důkazu.

**Důkaz základní věty mezní plastické analýzy:** Jestliže  $\mu_s$  je staticky přípustný součinitel zatížení, existují vnitřní síly  $\mathbf{s}_s$ , které jsou plasticky přípustné a jsou v rovnováze s vnějšími silami  $\mu_s \bar{\mathbf{f}}$ , což matematicky zapíšeme jako

$$\mathbf{s}_s \in \mathcal{S}_{ep}, \quad \mathbf{B}^T \mathbf{s}_s = \mu_s \bar{\mathbf{f}} \quad (2.101)$$

Jestliže  $\mu_k$  je kinematicky přípustný součinitel zatížení, platí pro něj rovnice

$$\mu_k \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{u}}_k = D(\dot{\mathbf{e}}_{pk}) \quad (2.102)$$

ve které rychlosti plastických protažení

$$\dot{\mathbf{e}}_{pk} = \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}}_k \quad (2.103)$$

jsou vypočteny z rychlostí styčnickových posunů  $\dot{\mathbf{u}}_k$  podle geometrických rovnic a navíc jsou rychlosti  $\dot{\mathbf{u}}_k$  voleny tak, aby bylo

$$\bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{u}}_k > 0 \quad (2.104)$$

Teď už stačí si uvědomit, že podle principu maxima plastické disipace platí

$$D(\dot{\mathbf{e}}_{pk}) \geq \mathbf{s}_s^T \dot{\mathbf{e}}_{pk} \quad (2.105)$$

neboť vnitřní síly  $\mathbf{s}_s$  splňují podmínky plastické přípustnosti (a tedy předpoklady zmíněného principu). Levou stranu nerovnosti (2.105) můžeme přepsat podle (2.102) a pravou stranu upravíme s využitím (2.103) a (2.101):

$$\mu_k \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{u}}_k = D(\dot{\mathbf{e}}_{pk}) \geq \mathbf{s}_s^T \dot{\mathbf{e}}_{pk} = \mathbf{s}_s^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}}_k = (\mathbf{B}^T \mathbf{s}_s)^T \dot{\mathbf{u}}_k = \mu_s \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{u}}_k \quad (2.106)$$

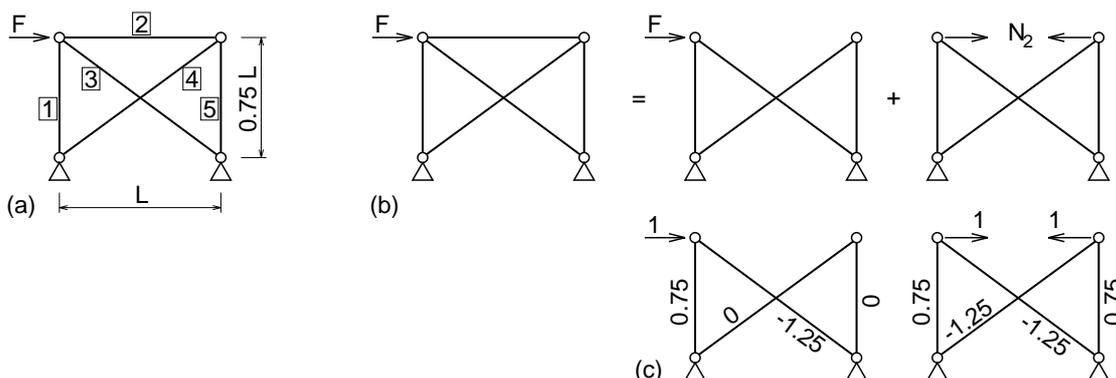
Na závěr využijeme podmínky (2.104) a nerovnost  $\mu_k \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{u}}_k \geq \mu_s \bar{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{u}}_k$  zjednodušíme na  $\mu_k \geq \mu_s$ , což je právě nerovnost (2.100) ze základní věty, kterou jsme tímto dokázali.

Po zvládnutí teoretických základů můžeme přistoupit k jejich aplikaci v praktických výpočtech. Metody mezní plastické analýzy lze v zásadě rozdělit na statické a kinematické, podle toho, o kterou z výše uvedených vět se opírají. Statické metody sestavují staticky přípustné stavy a příslušné součinitele zatížení  $\mu_s$  jsou dolním odhadem skutečného součinitele v mezním plastickém stavu, jsou tedy na straně bezpečnosti. Kinematické metody sestavují kinematicky přípustné stavy a příslušné součinitele zatížení  $\mu_k$  jsou horním odhadem skutečného součinitele v mezním plastickém stavu, nejsou tedy na straně bezpečnosti a samy o sobě nejsou použitelné. Nicméně pokud dospějeme k nejmenší možné hodnotě kinematicky přípustného součinitele, získáme přímo součinitel  $\mu_0$  odpovídající meznímu stavu.

Pro konstrukce zatížené jedinou silou můžeme za součinitel zatížení  $\mu$  považovat přímo působící sílu  $F$ , takže pak pracujeme se staticky přípustnými silami  $F_s$  a kinematicky přípustnými silami  $F_k$  a hledáme mezní sílu  $F_0 = \max F_s = \min F_k$ .

### Příklad 2.9: Staticky neurčitá příhradová konstrukce — mezní analýza statickou metodou

Konkrétní použití statické věty mezní analýzy ukážeme na příkladu jednoduché příhradové konstrukce zatížené vodorovnou silou  $F$  podle obr. 2.19a. Konstrukce má dva nepodepřené styčníky, takže můžeme zapsat čtyři podmínky rovnováhy, ve kterých se objevuje pět normálových sil  $N_1$  až  $N_5$  a zatížení  $F$ . Jednu z normálových sil, např.  $N_2$ , můžeme vybrat jako staticky neurčitou veličinu a na základě podmínek rovnováhy vyjádřit ostatní normálové síly v závislosti na  $N_2$  a  $F$ . Této operaci je možno dát také názorný význam: odstraněním prutu 2 vytvoříme základní staticky určitou soustavu (obr. 2.19b) a na ní vyřešíme zvlášť normálové síly od jednotkového zatížení  $F$  a od jednotkové síly  $N_2$ . Tím získáme koeficienty objevující se ve vyjádření jednotlivých osových sil



Obrázek 2.19: Staticky neurčitá příhradová konstrukce: (a) statické schéma a zatížení, (b) základní staticky určitá konstrukce, (c) normálové síly od jednotkového zatížení a jednotkové staticky neurčité veličiny.

v závislosti na  $F$  a  $N_2$ . Normálové síly v jednotkových zatěžovacích stavech na základní staticky určité konstrukci jsou patrné z obr. 2.19c. Například normálovou sílu v prutu 1 na základě těchto výsledků můžeme zapsat jako  $N_1 = 0,75F + 0,75N_2$ . Pro každou dvojici hodnot  $F$  a  $N_2$  tak dostáváme stav splňující podmínky rovnováhy. Aby byl takový stav považován za staticky přípustný ve smyslu naší definice, musejí být splněny podmínky plastické přípustnosti, tj. všechny normálové síly musejí být mezi  $-N_0$  a  $N_0$ . Tomu odpovídá celkem 10 nerovností, které zapíšeme jako

$$-N_0 \leq N_1 = 0,75F_s + 0,75N_2 \leq N_0 \quad (2.107)$$

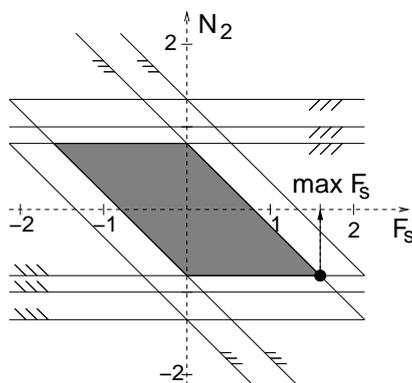
$$-N_0 \leq N_2 = N_2 \leq N_0 \quad (2.108)$$

$$-N_0 \leq N_3 = -1,25F_s - 1,25N_2 \leq N_0 \quad (2.109)$$

$$-N_0 \leq N_4 = -1,25N_2 \leq N_0 \quad (2.110)$$

$$-N_0 \leq N_5 = 0,75N_2 \leq N_0 \quad (2.111)$$

Indexem „s“ zdůrazňujeme, že síla  $F_s$  vyhovující těmto nerovnostem je staticky přípustná. V rovině proměnných  $(F_s, N_2)$  každé nerovnosti odpovídá polorovina a společným průnikem všech těchto polorovin je rovnoběžník vyznačený na obr. 2.20 šedě.



Obrázek 2.20: Grafické znázornění nerovností (2.107)–(2.111) a staticky přípustné oblasti v rovině  $(F_s, N_2)$ .

Z obrázku je zřejmé, že největší staticky přípustná hodnota zatěžující síly je  $\max F_s = 1,6N_0$  a odpovídající hodnota normálové síly  $N_2$  je  $-0,8N_0$ . Dosazením pak určíme ostatní normálové síly

$$N_1 = 0,75 \cdot 1,6N_0 + 0,75 \cdot (-0,8N_0) = 0,6N_0 \quad (2.112)$$

$$N_3 = -1,25 \cdot 1,6N_0 - 1,25 \cdot (-0,8N_0) = -N_0 \quad (2.113)$$

$$N_4 = -1,25 \cdot (-0,8N_0) = N_0 \quad (2.114)$$

$$N_5 = 0,75 \cdot (-0,8N_0) = -0,6N_0 \quad (2.115)$$

Vidíme, že všechny jsou plasticky přípustné a dvě z nich,  $N_3$  a  $N_4$ , jsou v absolutní hodnotě rovny mezní plastické síle  $N_0$ . To znamená, že k plastickému kolapsu konstrukce dojde při zatížení silou  $F_0 = \max F_s = 1,6N_0$  a zplastizovány budou pruty 3 a 4.

□

### Příklad 2.10: Staticky neurčitá příhradová konstrukce — mezní analýza kinematickou metodou

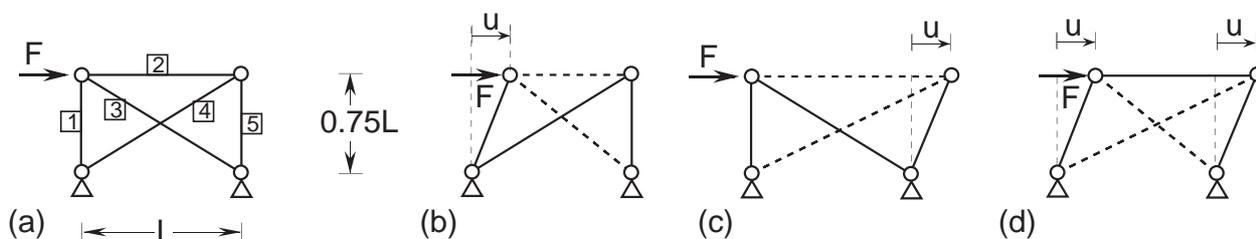
Pro porovnání ukážeme, jak by se konstrukce z předcházejícího příkladu (připomenutá na obr. 2.21a) vyšetřila kinematickou metodou. Konstrukce je jednou staticky neurčitá a pohyblivý mechanismus z ní vznikne vyřazením dvou prutů. V mezním plastickém stavu konstrukce tedy budou dva pruty zplastizovány. Konstrukce má celkem pět prutů a existuje deset možností, jak z nich dva pruty vybrat. Ne každá z těchto možností však vede ke kinematicky přípustnému mechanismu, protože je třeba splnit také podmínku kladného výkonu vnějších sil, což v našem případě znamená, že se levý horní styčník při kolapsu musí posouvat doprava (a může se přitom samozřejmě také posouvat nahoru nebo dolů, ale vodorovná složka jeho posunu musí být kladná).

Jedním z kinematicky přípustných mechanismů je ten, který odpovídá plastickému přetváření prutů 2 a 3, viz obr. 2.21b. Jelikož pruty 4 a 5 při kolapsu nemění svou délku, pravý horní styčník se nepohybuje, a jelikož také prut 1 nemění délku, levý horní styčník se posouvá pouze vodorovně. Rychlost jeho posunu označíme  $\dot{u}$  a podle obvyklých geometrických rovnic vyjádříme rychlosti protažení prutů 2 a 3 jako

$$\Delta \dot{L}_2 = -\dot{u} \quad (2.116)$$

$$\Delta \dot{L}_3 = -0,8\dot{u} \quad (2.117)$$

Kinematicky přípustnou hodnotu zatížení odpovídající zvolenému mechanismu vypočteme z rovnosti výkonu vnějších sil a disipačního výkonu, obecně popsané rovnicí (2.99), do které na pravé straně dosadíme disipační



Obrázek 2.21: Staticky neurčitá příhradová konstrukce: (a) statické schéma, (b–d) možné mechanismy plastického kolapsu.

výkon vyjádřený podle (2.92). Navíc místo rychlostí plastického protažení  $\Delta\dot{L}_{p,i}$  můžeme použít rychlosti celkového protažení  $\Delta\dot{L}_i$ , protože při kolapsu zůstávají pružné části protažení konstantní. Rovnost výkonů tedy v našem případě zapíšeme jako

$$F_k \dot{u} = N_0 |\Delta\dot{L}_2| + N_0 |\Delta\dot{L}_3| \quad (2.118)$$

a po dosazení z (2.116)–(2.117) zjistíme, že  $F_k = 1,8N_0$ . Tím jsme získali jednu z kinematically přípustných hodnot zatížení. Nevíme ale, zda se jedná o nejmenší možnou hodnotu, takže máme pouze horní odhad skutečného zatížení  $F_0$  vedoucího ke kolapsu.

Abychom s jistotou určili  $F_0$ , měli bychom prozkoumat dalších pět možných mechanismů. Můžeme ale nejprve ověřit, jestli již vyšetřenému mechanismu a příslušnému kinematically přípustnému zatížení odpovídají staticky přípustné hodnoty vnitřních sil, protože pokud by tomu tak bylo, šlo by zároveň o staticky přípustné zatížení a tedy o skutečné zatížení vedoucí ke kolapsu. Uvažovali jsme mechanismus s pruty 2 a 3 v plastickém stavu, přičemž ze vztahů (2.116)–(2.117) je vidět, že pro kladnou rychlost posunu  $\dot{u}$  by bylo  $\Delta\dot{L}_2$  i  $\Delta\dot{L}_3$  záporné, takže pruty 2 a 3 by se plasticky přetvářely v tlaku a normálové síly v těchto prutech by byly  $N_2 = -N_0$  a  $N_3 = -N_0$ . Z podmínek rovnováhy snadno dopočítáme další normálové síly  $N_1 = 0,6N_0$ ,  $N_4 = 1,25N_0$  a  $N_5 = -0,75N_0$ . Jelikož takto vypočtená síla  $N_4$  není plasticky přípustná, nejde o skutečný mechanismus a musíme hledat dál. Zřejmě je nadějně vyzkoušet některý mechanismus se zplastizovaným prutem 4.

Kombinace prutů 2 a 4 vede k mechanismu, který neumožňuje vodorovný posun zatíženého styčnicku a proto není přípustný, viz obr. 2.21c. Zkusíme tedy kombinaci prutů 3 a 4. Při jejich plastickém přetváření se oba horní styčnický posouvají vodorovně stejnou rychlostí  $\dot{u}$ , viz obr. 2.21d. Z geometrických rovnic určíme rychlosti protažení  $\Delta\dot{L}_3 = -0,8\dot{u}$  a  $\Delta\dot{L}_4 = 0,8\dot{u}$  a rovnost výkonu vnějších sil a disipačního výkonu zapíšeme jako

$$F_k \dot{u} = N_0 |\Delta\dot{L}_3| + N_0 |\Delta\dot{L}_4| \quad (2.119)$$

odkud po dosazení vyplyne  $F_k = 1,6N_0$ . Z podmínek rovnováhy pak dopočteme normálové síly  $N_1 = 0,6N_0$ ,  $N_2 = -0,8N_0$  a  $N_5 = -0,6N_0$  a zjistíme, že jsou všechny plasticky přípustné. Tím je ověřeno, že kinematically přípustné zatížení  $F_k = 1,6N_0$  je i staticky přípustné a tudíž jde o skutečné mezní zatížení  $F_0$  vedoucí ke kolapsu. Výsledek přesně souhlasí s předcházejícím příkladem řešeným statickou metodou.

□

## 2.2.4 Nosníky a rámové konstrukce

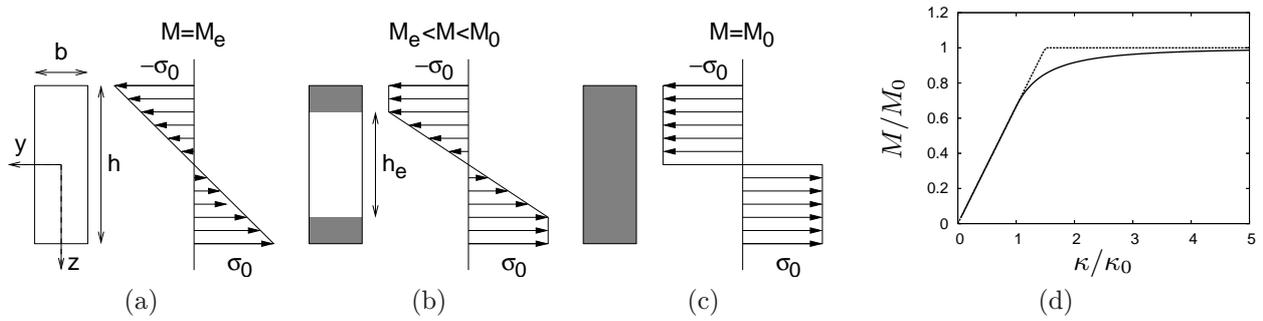
Až dosud jsme ve výkladu věnovali pozornost výhradně příhradovým konstrukcím. Vzhledem k jejich jednoduchosti bylo možno základní pojmy, věty a metody plastické analýzy poměrně snadno vysvětlit. Velkou výhodou maticového přístupu je skutečnost, že všechny odvozené výsledky a postupy lze bez problémů rozšířit na jiné typy konstrukcí, jakmile vhodným způsobem pozměníme definice vektorů základních veličin  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{s}$  a  $\mathbf{f}$ , které popisují přemístění, deformace, vnitřní a vnější síly.

V tomto článku se budeme věnovat prutovým konstrukcím namáhaným převážně ohybem.<sup>4</sup> Jelikož za ohybu už normálové napětí není po průřezu rozloženo rovnoměrně, začneme pružnoplastickou analýzou ohybaného průřezu a teprve následně přejdeme k celé konstrukci. Základní znalosti o vývoji napětí za ohybu v případě ideálně pružnoplastického chování materiálu by měl čtenář mít z předmětu Pružnost a pevnost, proto jeho paměť jen osvěžíme pomocí jednoduchého příkladu.

### Příklad 2.11: Pružnoplastická analýza obdélníkového průřezu namáhaného ohybem

Zkoumáme vývoj napětí v obdélníkovém průřezu, ve kterém postupně vzrůstá ohybový moment  $M$ . Už v článku 1.2 jsme připomněli, že jedním z důsledků předpokladu o zachování rovinnosti průřezu je lineární rozdělení deformace po průřezu, popsané v případě jednoduchého ohybu kolem osy  $y$  funkcí  $\varepsilon(x, z) = \kappa(x) \cdot z$ , kde  $\kappa$  je

<sup>4</sup>Ohyb je zpravidla doprovázen smykem a v případě rámových konstrukcí také protažením nebo stlačením. Pro jednoduchost se však omezíme na případy, kdy dominantní roli hraje napětí způsobené ohybovými momenty, zatímco účinky posouvajících a normálových sil na pružné přetváření i na vznik plastických přetvářných mechanismů jsou zanedbatelné.



Obrázek 2.22: Pružnoplastická analýza obdélníkového průřezu: rozložení napětí (a) v mezním pružném stavu, (b) v pružnoplastickém stavu a (c) v mezním plastickém stavu (šedá oblast označuje zplastizovanou část průřezu); (d) graf závislosti mezi momentem a křivostí a jeho bilineární aproximace.

křivost. V tomto příkladu se soustředíme na jediný průřez, a proto nebudeme závislost na podélné souřadnici  $x$  vyznačovat.

Pro lineárně pružný materiál je  $\sigma(z) = E\varepsilon(z) = E\kappa z$ , takže i napětí je po průřezu rozděleno lineárně a integrací jeho součinu se souřadnicí  $z$  vypočítáme ohybový moment k ose  $y$ :

$$M = \int_A z \sigma(z) dA = b \int_{-h/2}^{h/2} E\kappa z^2 dz = \frac{Ebh^3}{12} \kappa \quad (2.120)$$

Získali jsme samozřejmě známý vztah mezi momentem a křivostí,  $M = EI\kappa$ , kde  $I$  je obecně moment setrvačnosti průřezu k ose  $y$  a pro obdélník se vypočte jako  $I = bh^3/12$ .

Hookeův zákon  $\sigma = E\varepsilon$  ovšem platí pouze, dokud napětí nepřekročí mez kluzu  $\sigma_0$ . Meze kluzu bude poprvé dosaženo v krajních vláknech, viz obr. 2.22a. Dojde k tomu při křivosti  $\kappa_0 = 2\sigma_0/Eh$ , spočtené z podmínky  $\sigma(h/2) = E\kappa_0 h/2 = \sigma_0$ . Průřez přitom přenáší *mezní elastický moment*

$$M_e = \frac{1}{12} Ebh^3 \kappa_0 = \frac{1}{6} bh^2 \sigma_0 = W_e \sigma_0 \quad (2.121)$$

kde  $W_e = bh^2/6$  je *elastický průřezový modul*. Při dalším vzrůstu křivosti se při horním a dolním okraji průřezu vytvoří plastické oblasti, ve kterých je napětí na mezi kluzu v tahu (dole) a v tlaku (nahore), viz obr. 2.22b. Ve střední části průřezu je stále napětí pod mezí kluzu, materiál se chová lineárně pružně a napětí je zde rozděleno lineárně. Označíme-li výšku pružné oblasti  $h_e$ , můžeme z podmínky  $\varepsilon(h_e/2) = \kappa h_e/2 = \varepsilon_0 = \sigma_0/E$  najít závislost této výšky na křivosti. Dostáváme  $h_e = 2\sigma_0/E\kappa$ , takže výška pružné oblasti je nepřímo úměrná křivosti a pro křivost rostoucí nade všechny meze se blíží nule. Každé hodnotě  $h_e$  mezi  $h$  a nulou odpovídá pružnoplastický stav průřezu s rozdělením napětí podle obr. 2.22b a odpovídající ohybový moment vypočteme jako

$$\begin{aligned} M &= \int_A z \sigma(z) dy dz = b \int_{-h/2}^{-h_e/2} z \cdot (-\sigma_0) dz + b \int_{-h_e/2}^{h_e/2} z \cdot \sigma_0 \frac{2z}{h_e} dz + b \int_{h_e/2}^{h/2} z \cdot \sigma_0 dz = \\ &= b\sigma_0 \frac{h^2 - h_e^2}{8} + b\sigma_0 \frac{h_e^2}{6} + b\sigma_0 \frac{h^2 - h_e^2}{8} = b\sigma_0 \frac{3h^2 - h_e^2}{12} = \frac{bh^2\sigma_0}{4} \left(1 - \frac{h_e^2}{3h^2}\right) \end{aligned} \quad (2.122)$$

Při růstu křivosti  $\kappa$  se výška pružné oblasti  $h_e$  blíží k nule a moment přenášený průřezem se asymptoticky blíží k hodnotě

$$M_0 = \frac{1}{4} bh^2 \sigma_0 \quad (2.123)$$

kteřá představuje *mezní plastický moment*. Odpovídající rozdělení napětí v mezním plastickém stavu průřezu je vykresleno na obr. 2.22c.

Již zmíněný vztah  $h_e = 2\sigma_0/E\kappa$  mezi výškou pružné oblasti  $h_e$  a křivostí  $\kappa$  platí pro stavy mezi mezním elastickým a mezním plastickým. V mezním elastickém stavu je  $h_e = h$  a  $\kappa = \kappa_0$ , takže platí  $h = 2\sigma_0/E\kappa_0$ . Poměr  $h_e/h$  je tedy roven poměru  $\kappa_0/\kappa$  a vyjádření momentu podle (2.122) můžeme přepsat jako vztah mezi momentem a křivostí,

$$M = M_0 \left(1 - \frac{\kappa_0^2}{3\kappa^2}\right) \quad (2.124)$$

Graf závislosti mezi momentem a křivostí v celém rozsahu možných hodnot je vyneseno na obr. 2.22d. Rozeznáváme zde počáteční přímou část, popsanou vztahem  $M = EI\kappa$  a odpovídající pružnému chování celého průřezu, a navazující nelineární část, popsanou vztahem (2.124) a odpovídající postupné plastifikaci až po vytvoření plastického kloubu, ve kterém již moment nemůže růst.

□

Pro účely mezní plastické analýzy ohýbaných konstrukcí má zásadní význam pojem mezního plastického momentu, což je maximální moment, který v nepřítomnosti normálové síly daný průřez z ideálně pružnoplastického materiálu přeneše. Tento moment lze vždy vyjádřit jako

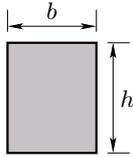
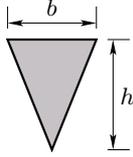
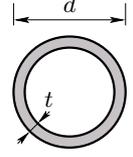
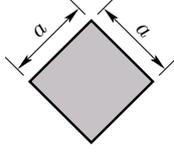
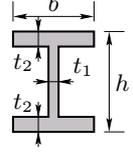
$$M_0 = \sigma_0 W_0 \quad (2.125)$$

kde  $\sigma_0$  je mez kluzu, charakterizující materiál, a  $W_0$  je *plastický průřezový modul*, závislý na tvaru a rozměrech průřezu. Jak vyplývá z předcházejícího příkladu, pro obdélníkový průřez o šířce  $b$  a výšce  $h$  je tento modul dán vzorcem

$$W_0 = \frac{1}{4}bh^2 \quad (2.126)$$

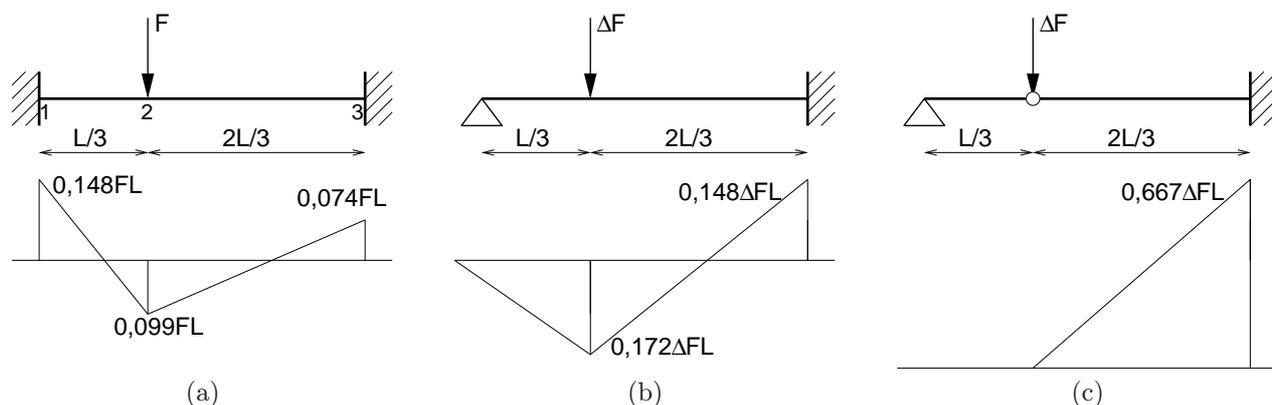
Plastické průřezové moduly některých dalších jednoduchých průřezů jsou uvedeny v tab. 2.7. Týkají se vesměs ohybu ve svislé rovině, tj. s vodorovnou neutrální osou.

Tabulka 2.7: Vzorce pro plastické průřezové moduly.

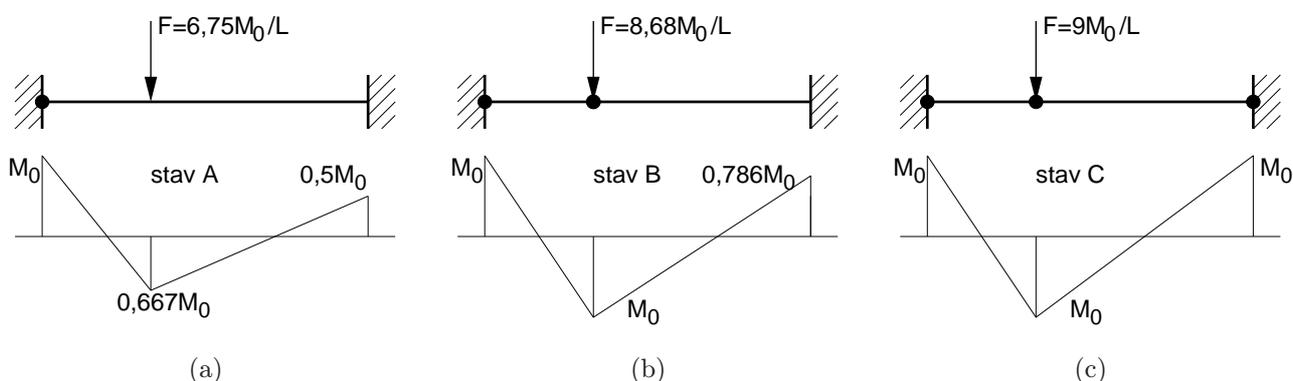
Průřez	$W_0$
	$\frac{bh^2}{4}$
	$\frac{(2 - \sqrt{2})bh^2}{6}$
	$\left[1 - \left(1 - \frac{2t}{d}\right)^3\right] \frac{d^3}{6}$
	$\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$
	$bt_2(h - t_2) + t_1\left(\frac{1}{2}h - t_2\right)^2$

Při postupném pružnoplastickém přetváření ohýbaného průřezu dochází k rozvoji plastické oblasti nejen v průřezu samotném, ale i v jeho blízkém okolí. Výsledný plastický kloub není omezen na jediný průřez, ale je to prostorový útvar o určité nenulové délce ve směru osy prutu. Přesný tvar a rozměry plastického kloubu by bylo možno podrobně vyšetřovat, ale z hlediska analýzy celé konstrukce tyto detaily zpravidla nejsou podstatné. Proto si zjednodušeně představíme, že plastický kloub vzniká pouze v průřezu s maximálním ohybovým momentem a okolní materiál zůstává v pružném stavu. Navíc zanedbáme i skutečnost, že vztah mezi ohybovým momentem a křivostí je při pružnoplastickém chování průřezu po překročení mezního pružného momentu nelineární a příslušná ohybová tuhost se postupně snižuje. Místo toho budeme předpokládat, že se odchylka od lineární pružného chování projeví až při dosažení mezního plastického momentu, po kterém začne křivost prutu v daném průřezu neomezeně narůstat a ohybový moment zůstává konstantní. Skutečný nelineární vztah mezi momentem a křivostí tedy přibližně nahradíme idealizovaným bilineárním modelem, podobně jako jsme takovým modelem aproximovali nelineární vztah mezi napětím a deformací na úrovni materiálového bodu. Toto zjednodušení vede k určitým nepřesnostem ve tvaru vypočteného pracovního diagramu na úrovni konstrukce, ale mezní hodnotu zatížení vedoucí k plastickému kolapsu nijak neovlivní.

Pružnoplastické chování nosníků a rámců můžeme zkoumat podobnými metodami, jaké jsme již použili v případě příhradových konstrukcí. Začneme ukázkou přírůstkové analýzy a později přejdeme k mezní analýze.



Obrázek 2.23: Přírůstková pružnoplastická analýza vetknutého nosníku: statické schéma a rozložení ohybových momentů (a) v prvním kroku (během pružné odezvy konstrukce), (b) ve druhém kroku (do vzniku druhého plastického kloubu), (c) ve třetím kroku (do mezního plastického stavu).



Obrázek 2.24: Přírůstková pružnoplastická analýza vetknutého nosníku: rozložení ohybových momentů (a) v mezním elastickém stavu konstrukce, (b) v okamžiku vzniku druhého plastického kloubu, (c) v mezním plastickém stavu konstrukce.

### Příklad 2.12: Vetknutý nosník — přírůstková pružnoplastická analýza

Oboustranně vetknutý nosník je zatížen svislou silou  $F$  působící ve třetině rozpětí  $L$ , viz obr. 2.23a. Zpočátku se celý nosník chová lineárně pružně a rozložení ohybových momentů můžeme určit tradičními postupy stavební mechaniky, např. deformační nebo silovou metodou. Ušetříme si však práci, protože řešení můžeme najít pro daný jednoduchý případ ve známých tabulkách koncových momentů pro deformační metodu. V obou podporách jsou tažena horní vlákna, ohybové momenty jsou tedy záporné a jejich velikost se spočítá pro levou podporu jako  $Fab^2/L^2$  a pro pravou podporu jako  $Fa^2b/L^2$ , kam dosazujeme  $a = L/3$  a  $b = 2L/3$ . Pracovně si označíme levou podporu, působíště síly a pravou podporu jako průřezy 1, 2 a 3. Při pružném chování nosníku je tedy  $M_1 = -(4/27)FL$  a  $M_3 = -(2/27)FL$  a snadno dopočteme  $M_2 = (8/81)FL$ . Průběh ohybových momentů v částech prutu mezi průřezy 1 a 2 a mezi 2 a 3 je lineární, takže extrémního momentu musí být dosaženo v jednom z označených průřezů. Porovnáním absolutních hodnot zjistíme, že extrémní moment je  $M_1$ . Předpokládáme konstantní průřez nosníku, takže první plastický kloub vznikne v levé podpoře, a to při zatížení  $F^A = (27/4)M_0/L = 6,75M_0/L$ , které vede k momentu  $M_1 = -M_0$ . Ve stavu A, který odpovídá vzniku prvního plastického kloubu, je tedy

$$M_1^A = -\frac{4}{27}F^A L = -M_0, \quad M_2^A = \frac{8}{81}F^A L = \frac{2}{3}M_0, \quad M_3^A = -\frac{2}{27}F^A L = -\frac{1}{2}M_0 \quad (2.127)$$

Vznik prvního plastického kloubu považujeme za mezní elastický stav konstrukce. Odpovídající průběh momentů je vykreslen na obr. 2.24a. Vyplněný kroužek zde znázorňuje plastický kloub.

Při dalším zvyšování působící síly se již nemůže zvětšovat moment v levé podpoře, kde vznikl plastický kloub. Z hlediska přírůstků tedy konstrukce funguje jako pružný nosník vpravo vetknutý a vlevo prostě podepřený. Rozdělení přírůstků momentů od stavu A určíme analýzou nosníku na obr. 2.23b zatíženého přírůstkem síly  $\Delta F$ . Pro momenty ve vetknutí na takovém nosníku najdeme v tabulkách vzorec  $Fab(a+L)/2L^2$  a po dosazení získáme  $\Delta M_3 = -(4/27)\Delta FL$  a dopočteme  $\Delta M_2 = (14/81)\Delta FL$ . Toto řešení platí až do stavu B, ve kterém dojde ke vzniku druhého plastického kloubu. Podmínka  $M_2 = M_0$  vede na rovnici  $M_2^A + (14/81)\Delta FL = M_0$ , která by byla splněna pro  $\Delta F = (27/14)M_0/L$ . Podmínka  $M_3 = -M_0$  vede na rovnici  $M_3^A - (4/27)\Delta FL = -M_0$ , která by byla splněna pro  $\Delta F = (27/8)M_0/L$ . Protože první výsledek je menší, druhý plastický kloub vznikne v průřezu 2 pod působící silou v okamžiku, kdy její přírůstek dosáhne hodnoty  $\Delta F^{AB} = (27/14)M_0/L$ . Celková síla  $F$  působící ve stavu B tedy bude  $F^B = F^A + \Delta F^{AB} = (27/4)M_0/L + (27/14)M_0/L = (243/28)M_0 \doteq 8,68M_0/L$ .

Momenty přenášené ve stavu B sledovanými průřezy vyhodnotíme jako

$$M_1^B = -M_0 + 0 = -M_0, \quad M_2^B = \frac{2}{3}M_0 + \frac{14}{81}\frac{27}{14}M_0 = M_0, \quad M_3^B = -\frac{1}{2}M_0 - \frac{4}{27}\frac{27}{14}M_0 = -\frac{11}{14}M_0 \quad (2.128)$$

Průběh ohybových momentů ve stavu B je vynesena na obr. 2.24b.

Ani po vzniku druhého plastického kloubu není zcela vyčerpána únosnost konstrukce. Momenty v průřezech 1 a 2 se sice už zvětšovat nemohou, ale moment v pravé podpoře ještě ano. Pro přírůstek zatížení od stavu B konstrukce funguje jako Gerberův nosník na obr. 2.23c. Úloha je tedy staticky určitá a přírůstek momentu v pravé podpoře vyjádříme z rovnováhy jako  $\Delta M_3 = -(2/3)\Delta FL$ . Snadno pak určíme přírůstek síly  $\Delta F^{BC} = (9/28)M_0/L$ , po kterém moment  $M_3$  dosáhne  $-M_0$  a v průřezu 3 vznikne plastický kloub. K tomu dojde při celkové síle  $F^C = F^B + \Delta F^{BC} = 9M_0/L$ . Stav C při vzniku třetího plastického kloubu je mezním plastickým stavem konstrukce, ve kterém je její únosnost zcela vyčerpána. Pro další přírůstek zatížení by se totiž konstrukce chovala jako pohyblivý mechanismus. V mezním plastickém stavu jsou v průřezích 1, 2 a 3 mezní plastické momenty (s příslušnými znaménky) a odpovídající průběh ohybových momentů na celém nosníku je vykreslen na obr. 2.24c.

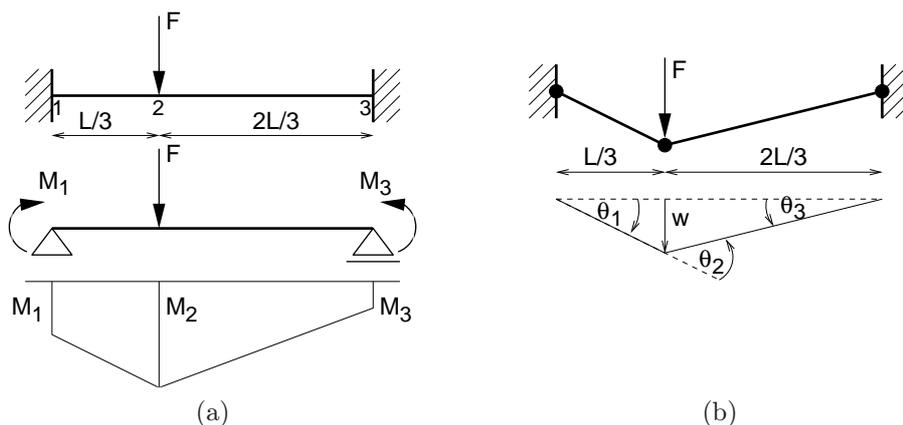
□

Pokud nás zajímá pouze mezní plastický stav, můžeme použít statickou nebo kinematickou metodu mezní analýzy, ovšem po příslušných úpravách. Disipace nyní probíhá v plastických kloubech a je třeba vhodným způsobem modifikovat výraz pro její výpočet. Integrací po průřezu lze ukázat, že výkon disipovaný v jednom plastickém kloubu je součinem ohybového momentu a rychlosti otáčení průřezů spojených tímto kloubem. Protože při plastickém přetváření je moment v plastickém kloubu roven kladnému nebo zápornému meznímu plastickému momentu a přírůstek úhlu vzájemného pootočení mají stejné znaménko jako tento moment, lze disipaci v plastickém kloubu vyjádřit také jako součin mezního plastického momentu a absolutní hodnoty rychlosti otáčení v kloubu. Disipace na celé konstrukci se spočte sečtením příspěvků jednotlivých plastických kloubů, takže píšeme

$$D = \sum_{i=1}^n M_i \dot{\theta}_i = \sum_{i=1}^n M_{0,i} |\dot{\theta}_i| \quad (2.129)$$

kde  $n$  je nyní počet plastických kloubů,  $M_i$  je ohybový moment a  $M_{0,i}$  je mezní plastický moment v kloubu číslo  $i$ , a konečně  $\dot{\theta}_i$  je rychlost vzájemného otáčení průřezů spojených tímto kloubem. K tomuto otáčení dochází pouze v důsledku plastického přetváření, takže samo pootočení  $\theta_i$  již představuje plastickou deformaci a není třeba je rozkládat na pružnou a plastickou část. Vzorec (2.129) je tedy zcela analogický vzorcí (2.92), jen jsou osově síly nahrazeny ohybovými momenty, mezní plastické síly mezními plastickými momenty a plastická protažení prutů pootočeními v plastických kloubech.

Jak již bylo řečeno, základní věty mezní plastické analýzy ve svém obecném znění zůstávají v platnosti, je však třeba vhodným způsobem interpretovat význam jednotlivých pojmů a rovnic. Použití statické a kinematické věty si ukážeme na dalších příkladech.



Obrázek 2.25: Mezní plastická analýza vetknutého nosníku (a) statickou metodou, (b) kinematickou metodou.

### Příklad 2.13: Vetknutý nosník — mezní plastická analýza statickou metodou

Pro nosník z příkladu 2.12 hledáme mezní plastický stav na základě statické věty mezní analýzy. Naší snahou je tedy nalézt největší staticky přípustnou hodnotu zatížení. Staticky přípustné stavy musejí splňovat podmínky rovnováhy, a protože je konstrukce z hlediska ohybu dvakrát staticky neurčitá,<sup>5</sup> vybereme dvě staticky neurčené veličiny a všechny ostatní pak můžeme vyjádřit v závislosti na dvou vybraných a na zatěžující síle  $F$ . Za staticky neurčené veličiny zvolíme např. momenty ve vetknutí  $M_1$  a  $M_3$ , jejichž kladnou orientaci volíme tak, aby

<sup>5</sup>Oboustranně vetknutý nosník je celkově třikrát staticky neurčitý, ale jeden stupeň statické neurčitosti připadá na podélné účinky (tah-tlak) a při řešení ohybu se smykem se neuplatní.

odpovídala tahu ve spodních vláknech. Základní staticky určitou soustavou je pak prostý nosník na obr. 2.25a, na kterém z podmínek rovnováhy snadno vypočteme moment

$$M_2 = M_1 + \left( \frac{2}{3}F + \frac{M_3 - M_1}{L} \right) \frac{L}{3} = \frac{2FL}{9} + \frac{2M_1 + M_3}{3} \quad (2.130)$$

Kromě podmínek rovnováhy však staticky přípustný stav musí splňovat i podmínky plastické přípustnosti. Vzhledem k po částech lineárnímu průběhu ohybových momentů stačí zajistit, aby momenty v průřezích 1, 2 a 3 nepřekračovaly v absolutní hodnotě mezní plastický moment  $M_0$ . Dostáváme tedy celkem šest nerovností

$$-M_0 \leq M_1 \leq M_0 \quad (2.131)$$

$$-M_0 \leq M_2 = \frac{2}{9}F_s L + \frac{2}{3}M_1 + \frac{1}{3}M_3 \leq M_0 \quad (2.132)$$

$$-M_0 \leq M_3 \leq M_0 \quad (2.133)$$

Hledáme největší hodnotu síly  $F_s$  pro kterou existují momenty  $M_1$  a  $M_3$  splňující všechny výše uvedené nerovnosti. Pro omezení síly  $F_s$  shora je zřejmě rozhodující pravá nerovnost v (2.132), kterou můžeme přepsat jako

$$\frac{2}{9}F_s L \leq M_0 - \frac{2}{3}M_1 - \frac{1}{3}M_3 \quad (2.134)$$

Aby mohla síla  $F_s$  nabýt co největší hodnoty, je třeba volit  $M_1$  a  $M_3$  co nejmenší (algebraicky), přitom však musíme respektovat omezení  $-M_0 \leq M_1$  a  $-M_0 \leq M_3$ . Největší staticky přípustnou hodnotu zatížení tedy vypočteme jako

$$\max F_s = \frac{9}{2L} \left( M_0 - \frac{-2M_0 - M_0}{3} \right) = \frac{9M_0}{L} \quad (2.135)$$

Podle statické věty mezní analýzy tato hodnota odpovídá meznímu zatížení  $F_0$ . Výsledek je v souladu s příkladem 2.12.

□

#### Příklad 2.14: Vetknutý nosník — mezní plastická analýza kinematickou metodou

Mezní plastický stav nosníku z příkladů 2.12 a 2.13 můžeme vyšetřit také kinematickou metodou. Pro danou úlohu je tento postup nejjednodušší, protože nosník je (z hlediska ohybu) dvakrát staticky neurčitý a mechanismus kolapsu vyžaduje vznik tří plastických kloubů, přitom však tyto klouby mohou vzniknout pouze v průřezích s extrémními hodnotami ohybových momentů, které jsou také tři. Mechanismus kolapsu je tudíž evidentní a vyhodnocením odpovídající kinematicky přípustné hodnoty zatížení  $F_k$  dostaneme rovnou hledané zatížení  $F_0$  vedoucí ke kolapsu.

Po vzniku plastických kloubů na vetknutých koncích a pod silou  $F$  se může působitě síly posouvat svisle a zároveň dochází k otáčení dvou částí nosníku spojených plastickým kloubem v průřezu 2, jak je naznačeno na obr. 2.25b. Pokud se průřez 2 svisle posune o  $w$ , levá část se pootočí po ručičkách o úhel<sup>6</sup>  $\theta_{12} = w/(L/3) = 3w/L$  a pravá část proti ručičkám o úhel  $\theta_{23} = w/(2L/3) = 1,5w/L$ . V plastickém kloubu 1 přitom dojde k pootočení o  $\theta_1 = -3w/L$  (znaménko se řídí stejnou konvencí, jaká se používá pro ohybové momenty), v plastickém kloubu 3 o  $\theta_3 = -1,5w/L$  a v plastickém kloubu 2 o  $\theta_2 = 3w/L + 1,5w/L = 4,5w/L$ . Obdobné vztahy platí mezi rychlostmi otáčení a rychlostí posunu. Z rovnosti výkonu vnějších sil  $F_k \dot{w}$  a disipačního výkonu

$$D = M_1 \dot{\theta}_1 + M_2 \dot{\theta}_2 + M_3 \dot{\theta}_3 = M_0 |\dot{\theta}_1| + M_0 |\dot{\theta}_2| + M_0 |\dot{\theta}_3| = M_0 \left( \frac{3\dot{w}}{L} + \frac{1,5\dot{w}}{L} + \frac{4,5\dot{w}}{L} \right) = \frac{9M_0 \dot{w}}{L} \quad (2.136)$$

se pak vypočte kinematicky přípustné zatížení

$$F_k = \frac{9M_0}{L} \quad (2.137)$$

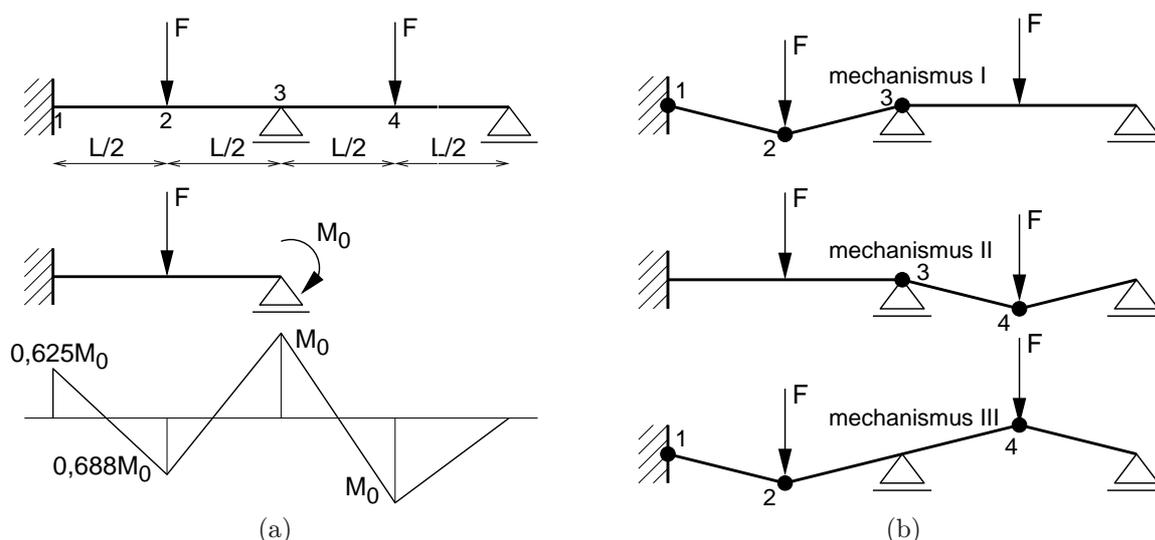
kteří představuje mezní plastické zatížení  $F_0$ . Výsledek je v souladu s příklady 2.12 a 2.13 a navíc jsme jej získali velmi snadno a rychle.

□

#### Příklad 2.15: Spojitý nosník — mezní plastická analýza kinematickou metodou

Povzbuzení úspěchem kinematické metody v předchozím příkladu ji zkusíme použít i při mezní plastické analýze spojitého nosníku na obr. 2.26a. Na nosníku najdeme celkem čtyři průřezy, ve kterých se momentová čára lomí a aspoň lokálně je dosaženo momentového extrému, takže by zde mohl vzniknout plastický kloub. Tyto průřezy jsou na obrázku označeny čísly 1, 2, 3 a 4. Při hledání možných mechanismů kolapsu na složitějších konstrukcích se nelze striktně držet pravidla, podle kterého je potřebný počet plastických kloubů o jedničku větší než stupeň statické neurčitosti. Takový počet kloubů zaručeně stačí ke vzniku mechanismu, někdy však mohou vznikat i

<sup>6</sup>Přesný geometrický vztah mezi posunem a pootočením by sice byl složitější, ale jsou-li pootočení mnohem menší než 1, můžeme pracovat s přibližnými lineárními vztahy.



Obrázek 2.26: Mezní plastická analýza spojitého nosníku kinematickou metodou: (a) statické schéma, pomocné statické schéma a průběh momentů v mezním plastickém stavu, (b) možné mechanismy.

tzv. částečné mechanismy s menším počtem kloubů. Například náš nosník je z hlediska ohybu dvakrát staticky neurčitý, takže tři plastické klouby zaručeně vedou ke kolapsu, viz mechanismus I na obr. 2.26b. Ovšem pokud se vytvoří plastické klouby v průřezích 3 a 4, také to stačí ke kolapsu, viz mechanismus II na obr. 2.26b. Lze si představit i mechanismus III s plastickými klouby v průřezích 1, 2 a 4, ale ten je při daném typu zatížení nepřijatelný, protože výkon vnějších sil by byl nulový (mohl by ale vzniknout např. v případě, že by síla v pravém poli působila nahoru). Při výpočtu kinematickou metodou se snažíme najít mechanismus, který umožňuje co největší výkon vnějších sil (tj. co největší posuny ve směru působících sil) při co nejmenším disipačním výkonu (tj. co nejmenším otáčení v plastických kloubech).

Pro mechanismus I označíme písmenem  $w$  svislý posun průřezu 2 (působíště síly  $F$  v levém poli) a vyjádříme pootočení v plastických kloubech jako  $\theta_1 = -2w/L$ ,  $\theta_2 = 4w/L$  a  $\theta_3 = -2w/L$ . Z rovnosti výkonu vnějších sil a disipačního výkonu, zapsané jako

$$F_k \dot{w} = M_0 |\dot{\theta}_1| + M_0 |\dot{\theta}_2| + M_0 |\dot{\theta}_3| = M_0 \left( \frac{2\dot{w}}{L} + \frac{4\dot{w}}{L} + \frac{2\dot{w}}{L} \right) \quad (2.138)$$

vypočteme kinematicky přípustnou hodnotu  $F_k = 8M_0/L$ .

Podobně pro mechanismus II označíme  $w$  svislý posun průřezu 4 (působíště síly  $F$  v pravém poli) a vyjádříme pootočení v plastických kloubech jako  $\theta_3 = -2w/L$  a  $\theta_4 = 4w/L$ . Z rovnosti výkonu vnějších sil a disipačního výkonu, zapsané jako

$$F_k \dot{w} = M_0 |\dot{\theta}_3| + M_0 |\dot{\theta}_4| = M_0 \left( \frac{2\dot{w}}{L} + \frac{4\dot{w}}{L} \right) \quad (2.139)$$

vypočteme kinematicky přípustnou hodnotu  $F_k = 6M_0/L$ , která je menší než pro mechanismus I. Lze tedy očekávat, že skutečným mechanismem kolapsu bude mechanismus II. To ověříme tak, že na konstrukci určíme průběh ohybových momentů pro zatížení dvěma silami  $F = 6M_0/L$  s tím, že hodnoty momentů v plastických kloubech  $M_3 = -M_0$  a  $M_4 = M_0$  jsou známé. V pravém poli průběh ohybových momentů snadno určíme z podmínek rovnováhy, ale protože mechanismus kolapsu je pouze částečný (počet plastických kloubů je menší než stupeň statické neurčitosti plus jedna), levé pole zůstalo staticky neurčité a při určování průběhu ohybových momentů nevystačíme jen s podmínkami rovnováhy. Problém můžeme převést na nosník vlevo vetknutý a vpravo prostě uložený, který je uprostřed rozpětí zatížen silou  $F = 6M_0/L$  a navíc na pravém konci osamělým momentem  $M_0$ , který nahrazuje působení pravého pole. Pokud tuto pomocnou úlohu (na obr. 2.26a uprostřed) vyřešíme např. silovou metodou nebo najdeme momentovou reakci v tabulkách koncových momentů pro deformační metodu, zjistíme, že v průřezu 1 vzniká moment  $M_1 = -(5/8)M_0$ , který nepřekračuje mezní plastický moment. Z podmínek rovnováhy pak dopočítáme moment  $M_2 = (11/16)M_0$ , jehož hodnota je také plasticky přípustná. Tím jsme pro kinematicky přípustné zatížení  $F_k = 6M_0/L$  zkonstruovali staticky přípustný stav a dokázali, že tato hodnota je i staticky přípustná a tudíž je rovna meznímu zatížení  $F_0$ . Výsledný průběh ohybových momentů v mezním plastickém stavu je vynesena na obr. 2.26a dole.

□

## 2.3 Konstitutivní vztahy pro víceosou napjatost

### 2.3.1 Struktura základních rovnic

Až dosud jsme se zabývali pružnoplastickým chováním materiálu za jednoosé napjatosti, případně analýzou konstrukcí, ve kterých je skutečná napjatost ve všech bodech blízká jednoosé. V plošných a masivních konstrukcích je však napjatost obvykle složitější a jejich analýza vyžaduje zobecnění příslušných konstitutivních rovnic.

Základní rovnice plasticity tedy přepíšeme do tvaru použitelného při obecně trojosé napjatosti, který pak lze následně redukovat s ohledem na speciální typ úlohy, např. při rovinné napjatosti, rovinné deformaci nebo rotační symetrii. Zaměříme se nejprve na ideálně pružnoplastický model a poté naznačíme, jak jej obohatit o kinematické nebo izotropní zpevnění.

Základní rozdíl oproti jednoosé napjatosti spočívá v tom, že napjatost je obecně třeba charakterizovat šesti složkami napětí a přetvoření šesti složkami deformace. V dodatku B je připomenuto, jak se tyto složky značí a jak jsou uspořádány do sloupcových matic  $\sigma$  a  $\varepsilon$ . Čtenář tam také najde základní rovnice lineární pružnosti ve skalárním i maticovém zápisu a definice různých elastických konstant, jako jsou Youngův modul pružnosti  $E$ , smykový modul  $G$ , objemový modul  $K$ , nebo Poissonův součinitel  $\nu$ . Pro lineárně pružný materiál je vztah mezi napětím a deformací popsán zobecněným Hookeovým zákonem

$$\sigma = \mathbf{D}_e \varepsilon \quad (2.140)$$

který lze zapsat také v inverzní formě jako

$$\varepsilon = \mathbf{C}_e \sigma \quad (2.141)$$

kde  $\mathbf{D}_e$  je matice pružné tuhosti a  $\mathbf{C}_e = \mathbf{D}_e^{-1}$  je matice pružné poddajnosti.

Pro pružnoplastický materiál použijeme za předpokladu malých deformací opět aditivní (součtový) rozklad deformace na pružnou a plastickou část, podobně jako v případě jednoosé napjatosti. Každou složku deformace tedy vyjádříme jako součet pružné a plastické části, např.  $\gamma_{xy} = \gamma_{exy} + \gamma_{pxy}$ . Indexy e a p jako obvykle označují elastickou (pružnou) a plastickou část, zatímco indexy  $xy$  označují, o kterou složku deformace se jedná. V maticovém tvaru rozklad deformace zapíšeme jako

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (2.142)$$

kde  $\varepsilon_e$  je sloupcová matice složek pružné deformace a  $\varepsilon_p$  je sloupcová matice složek plastické deformace. V zobecněném Hookeově zákonu se pak místo celkové deformace objeví jen její pružná část, takže (2.140) přepíšeme jako

$$\sigma = \mathbf{D}_e \varepsilon_e \quad (2.143)$$

Rovnice (2.142) a (2.143) představují zobecnění rovnic (2.20) a (2.21) pro případ víceosé napjatosti. Nyní je třeba zobecnit i další rovnice z tab. 2.2 popisující ideálně pružnoplastický model.

Začneme zobecněním funkce plasticity. Ta bude nyní záviset na všech složkách napětí, bude to tedy funkce více proměnných. Symbolicky ji můžeme zapsat jako funkci  $f(\sigma)$ , kde argument  $\sigma$  má charakter sloupcové matice. Konkrétní tvar této funkce závisí na typu materiálu a souvisí s tím, jaký tvar má plasticky přípustná oblast v prostoru napětí, tj. při jakých kombinacích složek napětí dochází v materiálu k plastickému přetváření. Nejužívanější typy funkcí plasticity budou představeny v článcích 2.3.2 a 2.3.3. Zatím podáváme pouze celkový přehled základních rovnic pro ideálně pružnoplastický model. Role funkce plasticity zůstane i při zobecnění na víceosou napjatost zachována. To znamená, že záporná hodnota této funkce odpovídá pružnému stavu, nulová hodnota plastickému stavu a kladná hodnota odpovídá plasticky nepřípustnému stavu, neboli takovému stavu napětí, který daný materiál nemůže přenést. Podmínku plastické přípustnosti tedy zapíšeme ve tvaru

$$f(\sigma) \leq 0 \quad (2.144)$$

který se od čtvrtého řádku v tab. 2.2 liší jedině tím, že funkce  $f$  nyní závisí na více složkách napětí.

Poněkud obtížnější je ovšem zobecnění zákona plastického přetváření. Tento zákon udává, jakým způsobem narůstají plastické deformace. Nemůže ale přímo specifikovat rychlost plastické deformace, protože ta závisí nejen na okamžitém stavu, ale také na průběhu příslušného přetvárného procesu, např. na rychlosti celkové deformace. V jednoosém případě určuje zákon plastického přetváření v pátém řádku tab. 2.2 pouze znaménko přírůstku plastické deformace, zatímco jeho velikost je specifikována zatím neurčeným nezáporným násobitelem  $\dot{\lambda}$ , jehož konkrétní hodnota se později vypočítá z podmínky plastické konzistence  $\dot{f} = 0$ . Rovnice  $\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \operatorname{sgn} \sigma$  spolu s podmínkou  $\dot{\lambda} \geq 0$  vyjadřuje skutečnost, že za kladného napětí plastická deformace vzrůstá, zatímco za záporného napětí její algebraická hodnota klesá, tj. vzrůstá záporná plastická deformace. V případě víceosé napjatosti je třeba na základě znalosti okamžitého stavu specifikovat, v jakém „orientovaném směru“<sup>7</sup> bude plastická deformace narůstat. Jinými slovy, pro plastické procesy probíhající za různých stavů napětí jsme schopni experimentálně zjistit, jaký je vzájemný poměr jednotlivých složek přírůstku plastické deformace. Velikost tohoto

<sup>7</sup>Zde máme na mysli směr v prostoru deformací, nikoli v geometrickém prostoru, v němž se daný materiálový bod nachází.

přírůstku závisí na tom, jak se přetvárný proces dále vyvíjí (např. jak měníme celkovou deformaci), takže ji prozatím ponecháme neurčenou. Zákon plastického přetváření tedy v nejobecnějším případě nabývá tvaru

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.145)$$

kde se pod symbolem  $\mathbf{g}$  skrývá šest funkcí, každá z nich závislá na šesti složkách napětí. Určení těchto funkcí pro všechny plastické stavy napětí na základě experimentálních měření by samozřejmě bylo velmi náročné. V článku 2.3.4 ukážeme, že pokud přijmeme zobecněnou variantu principu maxima plastické disipace, dají se všechny tyto funkce jednoznačně odvodit z funkce plasticity. Pro daný materiál pak stačí najít vhodnou funkci plasticity  $f$ , což je mnohem jednodušší než hledání šesti složek funkce  $\mathbf{g}$ .

Výčet základních rovnic pro ideálně pružnoplastický materiál zobecněných pro víceosou napjatost je již téměř ukončen, zbývá jen podmínka komplementarity. Její smysl zůstává zachován — jde o podmínku, že v pružném stavu se plastická deformace nemůže měnit, neboli pokud je hodnota funkce plasticity  $f$  nenulová, musí být rychlost plastického násobitele  $\dot{\lambda}$  nulová. Matematicky stačí napsat, že součin funkce plasticity a rychlosti plastického násobitele je vždy roven nule. Jediným rozdílem oproti jednoosému případu je opět závislost funkce plasticity na větším počtu složek napětí.

Přehled právě probraných základních rovnic je podán v tabulce 2.8. Některé důležité komponenty celého modelu jsou však pouze obecně naznačeny. Konkrétně jde o funkci plasticity  $f$  a funkci  $\mathbf{g}$  objevující se v zákonu plastického přetváření. Možné podoby těchto funkcí budou rozpracovány v následujících třech článcích.

Tabulka 2.8: Matematický popis ideálně pružnoplastického modelu pro víceosou napjatost.

rozklad deformace	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p$
Hookeův zákon	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e$
definice funkce plasticity	$f(\boldsymbol{\sigma}) = \dots$
podmínka plastické přípustnosti	$f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$
zákon plastického přetváření	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}), \quad \dot{\lambda} \geq 0$
podmínka komplementarity	$\dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$

### 2.3.2 Podmínky plasticity pro materiály bez vnitřního tření

Podmínkou plasticity obecně rozumíme rovnici tvaru

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.146)$$

charakterizující plastické stavy materiálu, tj. takové stavy napětí, za kterých může probíhat plastické přetváření. Funkce plasticity  $f$  je přitom volena tak, aby záporných hodnot nabývala pro pružné stavy a kladných hodnot pro stavy plasticity nepřípustné. V případě jednoosé napjatosti a pro materiál se stejnou mezí kluzu v tahu a v tlaku má funkce plasticity tvar  $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_0$  a rovnice (2.146) je splněna pro dvě hodnoty napětí,  $\sigma = \sigma_0$  a  $\sigma = -\sigma_0$ , které ohraničují plasticity přípustnou oblast  $\mathcal{S}_{ep} = [-\sigma_0, \sigma_0]$  v jednorozměrném prostoru napětí. Pro víceosou napjatost je prostor napětí obecně šestiřozměrný (protože napětí je charakterizováno šesti nezávislými složkami) a grafické znázornění plasticity přípustné oblasti je tudíž velmi obtížné.

Pro izotropní materiál lze počet argumentů funkce plasticity zredukovat na tři. Funkce plasticity totiž v izotropním případě nemůže mít zcela libovolný tvar. Její hodnota musí zůstat beze změny, pokud pootočíme v prostoru souřadnicové osy, k nimž vztahujeme jednotlivé složky napětí. Například pokud se materiál ocitne v plastickém stavu při jednoosém napětí  $\sigma_x = \sigma_0$ , musí být v plastickém stavu i v případech, že jedinou nenulovou složkou napětí je  $\sigma_y = \sigma_0$  nebo  $\sigma_z = \sigma_0$ . Proto je vyloučeno, aby pro izotropní materiál měla funkce plasticity např. tvar  $f(\boldsymbol{\sigma}) = |\sigma_x| - \sigma_0$ . Podrobnou matematickou analýzou lze ukázat, že funkci plasticity pro izotropní materiál lze vždy vyjádřit pomocí tří nezávislých invariantů napětí, což jsou veličiny, které se nemění při libovolném pootočení soustavy souřadnic (pokud samotný stav napětí přitom zůstává stejný). Příkladem takového invariantu je třeba *střední napětí*  $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ , které popisuje hydrostatickou část daného stavu napětí, nebo *hlavní napětí*  $\sigma_1, \sigma_2$  a  $\sigma_3$ , viz dodatek B. Pouze tři invarianty mohou být nezávislé, ostatní se dají pomocí tří vybraných vyjádřit. Například při volbě tří hlavních napětí jako nezávislých invariantů se střední napětí vyjádří jako  $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ .

Při jednoosé napjatosti je plastický stav charakterizován tím, že napětí (resp. jeho absolutní hodnota) dosáhne meze kluzu. Pro obecnou napjatost lze s mezí kluzu porovnávat vhodnou skalární veličinu, která představuje v jistém smyslu ekvivalentní jednoosé napětí. V případě izotropního materiálu tato veličina musí být invariantem. Zároveň je vhodné, aby podmínka plasticity měla jasný fyzikální význam a popisovala situaci, která odpovídá aktivaci předpokládaného (pochopitelně idealizovaného) mechanismu plastického přetváření.

V úvodu kapitoly jsme se stručně seznámili s mechanismem plastického pokluzu v krystalické mřížce a formulovali Schmidův zákon, podle kterého rozhodující roli hraje smykové napětí působící **na** kluznou rovinu<sup>8</sup> ve směru pokluzu. Pro čistý krystal (který mimochodem představuje anizotropní materiál) existuje konečný počet potenciálních kluzných rovin a na každé z nich konečný počet směrů, ve kterých může k pokluzu dojít. Proto se pro danou napjatost zjistí hodnoty smykového napětí působícího na jednotlivé tyto roviny v příslušných směrech a největší z nich se porovná s materiálovou konstantou představující mez kluzu ve smyku. V praxi se však většinou setkáváme s materiály, které mají charakter polykrystalu, nebo jsou amorfní. Polykrystalické látky jsou složeny z množství zrn, z nichž každé je blízké ideálnímu krystalu, ale s různou orientací základních krystalografických směrů. Mechanismus plastického přetváření je pak složitější a důležitou roli v něm hrají procesy probíhající na rozhraních mezi jednotlivými zrny. Pokud jsou jednotlivá zrna dostatečně malá a náhodně orientovaná (s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti výskytu jednotlivých směrů), lze materiál považovat z makroskopického hlediska za izotropní a formulovat podmínku, že k plastickému přetváření dochází, pokud smykové napětí působící na libovolnou rovinu v libovolném směru dosáhne jisté kritické hodnoty, kterou označíme  $\tau_0$ . Tak dospíváme k *Trescově podmínce*, která pracuje s funkcí plasticity ve tvaru

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \tau_{\max}(\boldsymbol{\sigma}) - \tau_0 \quad (2.147)$$

kde  $\tau_{\max}$  označuje výše zmíněné maximální smykové napětí. Podrobnou analýzou lze ukázat, že maximální smykové napětí vzniká v rovině<sup>9</sup> kolmé na směr prostředního hlavního napětí, a to ve směrech pŮlcih pravý úhel mezi směry největšího a nejmenšího hlavního napětí. Velikost tohoto napětí je rovna polovině rozdílu mezi největším a nejmenším hlavním napětím. Matematicky to můžeme zapsat jako

$$\tau_{\max}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_{\max}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_{\min}(\boldsymbol{\sigma})}{2} \quad (2.148)$$

kde  $\sigma_{\max}$  a  $\sigma_{\min}$  jsou největší a nejmenší hlavní napětí, vypočtená pro daný stav napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  řešením příslušné charakteristické rovnice (B.16). Jestliže jsou známa hlavní napětí  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$ , ale nejsou uspořádána podle velikosti, je

$$\tau_{\max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|) \quad (2.149)$$

### Příklad 2.16: Trescova podmínka pro rovinnou napjatost

Pro názornost prozkoumáme tvar Trescovy plochy plasticity nejprve pro rovinnou napjatost v rovině  $xy$ , při které mohou být nenulové pouze složky napětí  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  a  $\tau_{xy}$ . Mohli bychom tedy plochu plasticity zobrazit ve trojrozměrném prostoru, ve kterém se na jednotlivé osy vynášejí dvě normálová a jedno smykové napětí. Jednodušší však je rovinnou napjatost charakterizovat pomocí dvou hlavních napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ , která působí v rovině  $xy$  a ze složek  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  a  $\tau_{xy}$  se vypočtou podle vzorce (B.20). Zbývající hlavní napětí  $\sigma_3$  je v případě rovinné napjatosti identicky rovno nule a odpovídá směru kolmému na rovinu analýzy.

Při zobrazení v rovině hlavních napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  už množina bodů splňujících podmínku plasticity  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  není plochou, ale křivkou, nicméně je zvykem o ní stále hovořit jako o „ploše plasticity“. I pokud bychom napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  uspořádali podle velikosti, nemůžeme obecně říci, že větší z nich je  $\sigma_{\max}$  a menší je  $\sigma_{\min}$ , protože je třeba vzít v úvahu také třetí hlavní napětí  $\sigma_3 = 0$ . Maximální smykové napětí tedy vyjádříme podle (2.149) jako

$$\tau_{\max}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \quad (2.150)$$

a plasticky přípustné stavy jsou charakterizovány podmínkou  $\tau_{\max}(\sigma_1, \sigma_2) \leq \tau_0$ , která je ekvivalentní s nerovnostmi

$$-2\tau_0 \leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq 2\tau_0 \quad (2.151)$$

$$-2\tau_0 \leq \sigma_1 \leq 2\tau_0 \quad (2.152)$$

$$-2\tau_0 \leq \sigma_2 \leq 2\tau_0 \quad (2.153)$$

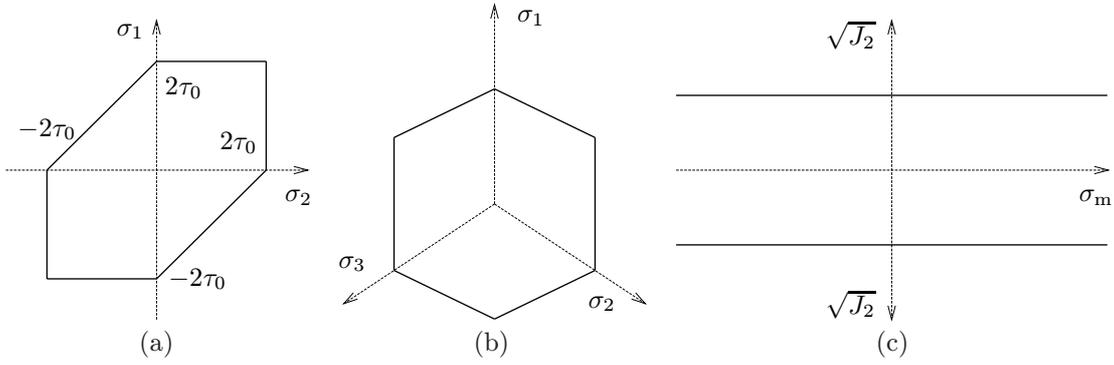
Plasticky přípustná oblast v rovině hlavních napětí se tedy sestojí jako průnik šesti polorovin, resp. tří pásů, čímž vznikne šestiúhelník na obr. 2.27a, ohraničený šesti úsečkami, které procházejí body  $\pm 2\tau_0$  na osách  $\sigma_1$  nebo  $\sigma_2$ .

Při zatěžování jednoosým tahem se odpovídající bod v rovině hlavních napětí pohybuje po ose  $\sigma_1$  nahoru a na ploše plasticity se ocitne, pokud  $\sigma_1 = 2\tau_0$ . Tato hodnota představuje pevnost<sup>10</sup> v jednoosém tahu, kterou

<sup>8</sup>Pokud hovoříme o smykovém napětí, je třeba dát dobrý pozor na rozdíl mezi významem předložek „na“ a „v“ v souvislosti s rovinou působení. Obrat „smykové napětí působí **na** rovinu“ znamená, že toto napětí působí na plošku ležící v této rovině. Naproti tomu obrat „smykové napětí působí **v** rovině“ se vztahuje k rovině, ve které dochází vlivem tohoto napětí ke smykovému zkosení, tedy k rovině určené směrem působení napětí a normálovu k rovině, na niž toto napětí působí. Například složky napětí  $\tau_{xy}$  a  $\tau_{yx}$  působí v rovině  $xy$ , přičemž  $\tau_{xy}$  působí ve směru  $y$  na rovinu kolmou na osu  $x$ , tedy rovnoběžnou s rovinou  $yz$ , zatímco  $\tau_{yx}$  působí ve směru  $x$  na rovinu kolmou na osu  $y$ , tedy rovnoběžnou s rovinou  $xz$ .

<sup>9</sup>Zde se projeví terminologický rozdíl předložkami „na“ a „v“ vysvětlený v předchozí poznámce pod čarou.

<sup>10</sup>Pevností rozumíme absolutní hodnotu maximálního napětí, které je materiál při daném typu namáhání schopen přenést (tedy tahová pevnost je maximální tahové napětí, smyková je maximální smykové napětí, atd.). Pro ideálně pružnoplastické modely je pevnost v podstatě synonymem meze kluzu, ale v případě zpevnění je rozdíl mezi počáteční mezí kluzu a pevností, představující maximální hodnotu meze kluzu. Navíc se pojem pevností používá např. i v teorii poškozování, kde již o mezi kluzu vůbec nehovoříme.



Obrázek 2.27: Řezy Trescovou plochou plasticity: (a) řez odpovídající rovinné napjatosti, (b) deviatorický řez, (c) meridiány.

označíme  $f_t$ . Podobně při zatěžování jednoosým tlakem se odpovídající bod v prostoru hlavních napětí pohybuje po ose  $\sigma_1$  dolů a na ploše plasticity se ocitne, pokud  $\sigma_1 = -2\tau_0$ . Tato hodnota uvažovaná bez znaménka představuje mez kluzu v jednoosém tlaku, kterou označíme  $f_c$ . Pro Trescovu podmínku je tedy  $f_t = f_c = 2\tau_0$  a model založený na takové podmínce dává stejnou pevnost v tahu i v tlaku.

V případě čistého smyku se mění pouze složka napětí  $\tau_{xy}$ , zatímco normálová napětí zůstávají nulová. Příslušné hodnoty hlavních napětí se podle (B.20) vypočtou jako  $\sigma_1 = \tau_{xy}$ ,  $\sigma_2 = -\tau_{xy}$ . Materiál se ocitne v plastickém stavu pro  $\tau_{xy} = \pm\tau_0$ , což se na základě úvah, kterými jsme Trescovu podmínku plasticity motivovali, dalo očekávat. Absolutní hodnotu smykového napětí vedoucího k plastickému stavu označíme obecně jako smykovou pevnost  $f_s$  a pro Trescovu podmínku je rovna přímo parametru  $\tau_0$ . Při zatěžování smykem se odpovídající bod v rovině hlavních napětí pohybuje po přímce popsané rovnicí  $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ , která svírá s osami  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  úhel  $45^\circ$  a prochází kvadranty s rozdílnými znaménky hlavních napětí.

Jako poslední charakteristiku odvodíme pevnost v dvojosém tlaku  $f_b$ , která odpovídá absolutní hodnotě hlavního napětí v plastickém stavu při zatěžování stejnými tlakovými napětími ve dvou navzájem kolmých směrech. Příslušný bod v rovině hlavních napětí se pohybuje po přímce popsané rovnicí  $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ , která svírá s osami  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  úhel  $45^\circ$  a prochází kvadranty se stejnými znaménky hlavních napětí. Položíme-li  $\sigma_1 = \sigma_2 = -f_b < 0$  a dosadíme do podmínky plasticity, získáme řešení  $f_b = 2\tau_0$ . Pro Trescovu podmínku je tedy pevnost ve dvojosém tlaku  $f_b$  stejná jako pevnost v jednoosém tlaku  $f_c$ .

□

Trescova podmínka má jasný fyzikální význam a je schopna s přijatelnou chybou aproximovat skutečné chování např. pro typické kovové materiály. Její nevýhodou je skutečnost, že definice funkce plasticity založená na maximalizaci rozdílů mezi dvojcemi různých hlavních napětí je poněkud kostrbatá a výsledná plocha plasticity není hladká. V bodech odpovídajících stavům se dvěma stejnými hlavními napětími není funkce plasticity diferencovatelná, a to přináší jisté komplikace při numerickém řešení, zejména pokud používáme tzv. sdružený zákon plastického přetváření. Tuto nevýhodu odstraňuje podmínka *von Misesova*,<sup>11</sup> která je bezpochyby nejčastěji používanou podmínkou plasticity vůbec.

Fyzikálně je možné Misesovu podmínku motivovat předpokladem, že k plastickému přetváření dochází, pokud energie uložená v pružné deformaci materiálu dostoupí kritické hodnoty. Jelikož je ale plastický pokluz v ideálním krystalu mechanismem, který vede ke změně tvaru, ale nikoli ke změně objemu, nekoná hydrostatická část napětí při takovém pokluzu žádnou práci, a proto nelze očekávat, že by v důsledku čistě hydrostatické napjatosti došlo k plastickému přetváření.<sup>12</sup> Proto budeme za rozhodující pokládat tu část energie pružné deformace, která odpovídá změně tvaru. Tuto energii (resp. její hustotu) jsme v dodatku B označili symbolem  $W_{eD}$  a podle vzorce (B.52) se vypočte jako  $\mathbf{s}^T \mathbf{P} \mathbf{s} / 4G$ , kde  $\mathbf{s}$  je sloupcová matice deviatorických složek napětí a  $\mathbf{P}$  je škálovací matice (B.24), která je diagonální a má na hlavní diagonále tři jedničky a tři dvojky. Místo veličiny s rozměrem energie na jednotku objemu bychom však rádi pracovali s veličinou o rozměru napětí. Proto se soustředíme na výraz  $\mathbf{s}^T \mathbf{P} \mathbf{s}$ , kterému je energie  $W_{eD}$  úměrná. Tento výraz musí být invariantem napětí, protože energie deformace odpovídající změně tvaru je objektivně definovanou fyzikální veličinou a její hodnota nemůže záviset na tom, jak zvolíme pomocnou soustavu souřadnic při jejím výpočtu. Lze ukázat, že  $\mathbf{s}^T \mathbf{P} \mathbf{s}$  je dvojnásobkem tzv. druhého invariantu deviatorického napětí, který se tradičně značí symbolem  $J_2$ . Zavedení invariantu  $J_2$  souvisí s charakteristickou rovnicí pro výpočet hlavních deviatorických napětí  $s_I$ ,  $I = 1, 2, 3$ , ale s tím si zde nemusíme lámat hlavu. Pro naše účely můžeme za jeho definici považovat vztah  $J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{P} \mathbf{s}$  a po roznásobení matic dostaneme pro jeho vyjádření pomocí deviatorických složek napětí vzorec

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{P} \mathbf{s} = \frac{1}{2} (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \quad (2.154)$$

Invariant musí mít stejnou hodnotu při libovolné volbě soustavy souřadnic. S výhodou můžeme zvolit souřadni-

<sup>11</sup>Ve starší literatuře se Misesova podmínka někdy označovala jako Huberova-Misesova-Henckyho, neboli HMM.

<sup>12</sup>Hovoříme zatím stále o materiálech, ve kterých je předpokládaným dominantním mechanismem plastického přetváření pokluz podél krystalografických rovin.

ové osy ve směrech hlavních napětí, pro něž smykové složky napětí vymizí a normálové jsou rovny hlavním napětím. Totéž pak platí pro deviatorickou část, takže máme např.  $s_x = s_1$ ,  $s_y = s_2$ ,  $s_z = s_3$  a  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Po dosazení do (2.154) získáme jednodušší vyjádření

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad (2.155)$$

Pokud chceme hodnotu  $J_2$  vypočítat přímo z celkového napětí  $\sigma$ , aniž bychom ho museli rozkládat na deviatorickou a hydrostatickou část, můžeme použít vztah odvozený z (2.154) dosazením za deviatorická normálová napětí podle (B.38)–(B.40). Výsledný vzorec lze po algebraických úpravách, které zde nebudeme detailně vypisovat, převést do tvaru

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \quad (2.156)$$

Při zápisu pomocí hlavních napětí se tento vzorec zjednoduší na

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad (2.157)$$

### Příklad 2.17: Deviatorická část napětí a invariant $J_2$ za jednoosého tahu a za smyku

Za jednoosého tahu ve směru osy  $x$  je jedinou nenulovou složkou napětí  $\sigma_x$ . Dosazením do (2.156) snadno získáme odpovídající hodnotu invariantu

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \frac{1}{6} (\sigma_x^2 + \sigma_x^2) = \frac{1}{3} \sigma_x^2 \quad (2.158)$$

Střední napětí, definované výrazem (B.15), má za jednoosého tahu hodnotu

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + 0 + 0) = \frac{1}{3}\sigma_x \quad (2.159)$$

a deviatorické složky normálových napětí

$$s_x = \sigma_x - \sigma_m = \sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_x = \frac{2}{3}\sigma_x, \quad s_y = s_z = \sigma_y - \sigma_m = 0 - \frac{1}{3}\sigma_x = -\frac{1}{3}\sigma_x \quad (2.160)$$

určíme ze vztahů (B.38)–(B.40). Dosazením do (2.154) pak můžeme ověřit, že hodnota

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{4\sigma_x^2}{9} + \frac{\sigma_x^2}{9} + \frac{\sigma_x^2}{9} \right) = \frac{\sigma_x^2}{3} \quad (2.161)$$

vyjde stejná jako podle (2.158).

Případ čistého smyku, kdy je jedinou nenulovou složkou např.  $\tau_{xy}$ , je ještě jednodušší. Střední napětí je v tomto případě nulové, deviatorická část napětí je tedy rovna napětí samotnému. Říkáme také, že za čistého smyku má napětí ryze deviatorický charakter. Dosazení do rovnice (2.154) nebo (2.156) vede na

$$J_2 = \tau_{xy}^2 \quad (2.162)$$

Stejný výsledek bychom dostali i podle (2.157), protože hlavní napětí mají při čistém smyku hodnoty  $\sigma_1 = \tau_{xy}$ ,  $\sigma_2 = -\tau_{xy}$  a  $\sigma_3 = 0$ .

□

Teď už můžeme přikročit k přesné formulaci Misesovy podmínky plasticity. Základem je předpoklad, že k plastickému přetváření dochází při dosažení kritické hodnoty energie pružné deformace odpovídající změně tvaru. Tato energie je úměrná invariantu  $J_2$ , takže je možné podmínku vztáhnout také ke kritické hodnotě tohoto invariantu. Jak ukázal předchozí příklad, při namáhání čistým smykem je  $J_2$  rovno druhé mocnině smykového napětí, kritická hodnota  $J_2$  proto odpovídá druhé mocnině meze kluzu ve smyku. Misesova podmínka se skutečně někdy píše ve tvaru  $J_2 = \tau_0^2$ , ale my zvolíme její ekvivalentní podobu  $\sqrt{J_2} = \tau_0$ . Proto zavedeme funkci plasticity předpisem

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2(\sigma)} - \tau_0 \quad (2.163)$$

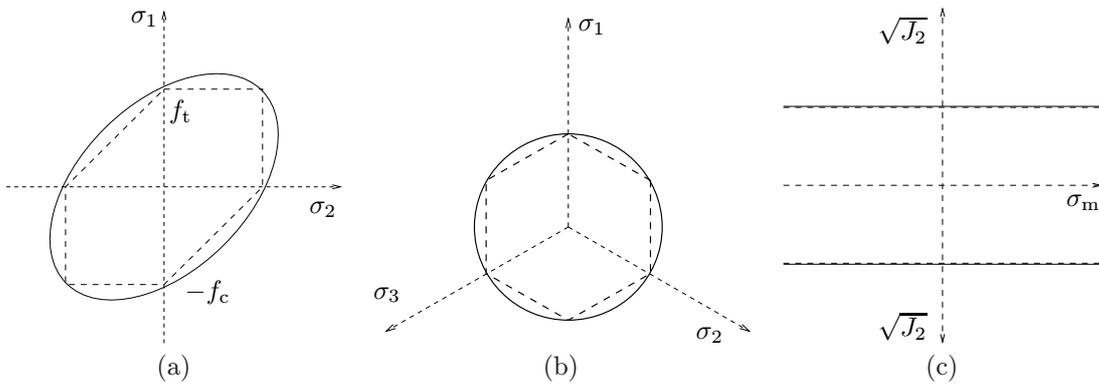
kde jsme explicitně vyznačili, že  $J_2$  je invariant vypočítaný ze složek napětí v sloupcové matici  $\sigma$ .

Za jednoosého tahu charakterizovaného napětím  $\sigma_x$  je podle předchozího příkladu  $J_2 = \sigma_x^2/3$ . K plastickému přetváření podle Misesovy podmínky dojde, pokud je  $\sqrt{J_2} = \tau_0$ , tedy za napětí  $\sigma_x = \sqrt{3}\tau_0$ . Tato hodnota normálového napětí odpovídá mezi kluzu v tahu  $\sigma_0$ , takže poměr mezi kluzu v tahu a ve smyku je pro Misesovu podmínku  $\sigma_0/\tau_0 = \sqrt{3}$ . Naproti tomu pro Trescovu podmínku bylo  $\sigma_0/\tau_0 = 2$ , jak jsme ukázali v příkladu 2.16. Je proto zřejmé, že obě podmínky dávají rozdílné výsledky a záleží na konkrétním materiálu, která z nich je vhodnější. Pokud lze experimentálně zjistit meze kluzu v tahu a ve smyku, je jejich skutečný poměr jedním z indikátorů, kterou podmínku zvolit. Ideální je ovšem mít představu o celé ploše plasticity, nebo aspoň o jejím průniku s rovinou odpovídající rovinné napjatosti.

### Příklad 2.18: Misesova podmínka pro rovinnou napjatost

Při rovinné napjatosti, kdy  $\sigma_3 = 0$ , lze Misesovu funkci plasticity (2.163) s využitím vzorce (2.157) pro výpočet invariantu  $J_2$  přepsat jako

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2]} - \tau_0 = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} - \tau_0 \quad (2.164)$$



Obrázek 2.28: Řezy Misesovou plochou plasticity: (a) řez odpovídající rovinné napjatosti, (b) deviatorický řez, (c) meridiány. Pro porovnání jsou čárkovaně vyneseny řezy Trescovou plochou plasticity.

Z podmínky plasticity  $f(\sigma_1, \sigma_2) = 0$  po úpravě získáme rovnici

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 3\tau_0^2 \quad (2.165)$$

popisující elipsu o poloosách  $\sqrt{6}\tau_0$  a  $\sqrt{2}\tau_0$  pootočených vůči osám hlavních napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  o  $45^\circ$ , viz obr. 2.28a.

Podobně jako v příkladu 2.16 určíme pevnosti pro základní způsoby namáhání materiálů. Pro čistý smyk dosadíme  $\sigma_1 = f_s$  a  $\sigma_2 = -f_s$  a z rovnice (2.165) vypočteme pevnost ve smyku  $f_s = \tau_0$ , což odpovídá očekávání. Pro jednoosý tah (resp. tlak) dosadíme  $\sigma_1 = f_t$  a  $\sigma_2 = 0$  (resp.  $\sigma_1 = -f_c$  a  $\sigma_2 = 0$ ) a z rovnice (2.165) vypočteme pevnosti v tahu a v tlaku  $f_t = f_c = \sqrt{3}\tau_0$ . Nakonec po dosažení  $\sigma_1 = \sigma_2 = -f_b$  zjistíme, že pevnost v dvojosém tlaku  $f_b = \sqrt{3}\tau_0$  je stejná jako pevnost v jednoosém tlaku  $f_c$ .

□

Příklady 2.16 a 2.18 ukázaly, jak lze graficky znázornit plasticky přípustnou oblast v případě víceosé napjatosti. Pro rovinnou napjatost vystačíme se znázorněním v rovině, ale v obecném případě je třeba přejít do trojrozměrného prostoru, ve kterém souřadnice odpovídají hlavním napětím  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$ . Jde o tzv. *Westergaardův prostor*, jehož součástí je mimo jiné rovina hlavních napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ , odpovídající rovinné napjatosti s nulovým hlavním napětím  $\sigma_3$ .

Zkoumání tvaru ploch plasticity lze usnadnit zavedením určitých pomocných pojmů, které nám usnadní orientaci ve Westergaardově prostoru. Základem je tzv. *hydrostatická osa*, což je přímka odpovídající ryze hydrostatickým stavům napětí, ve kterých jsou všechna hlavní napětí stejná. Tato přímka je tedy popsána rovnicemi  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Pokud bod o souřadnicích  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  znázorňující obecnou napjatost promítneme kolmo na hydrostatickou osu, získáme bod o souřadnicích  $(\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m)$ , který reprezentuje hydrostatickou část napětí. Rozdíl mezi tímto průmětem a původním bodem tedy odpovídá deviatorické části napětí a je popsán vektorem o souřadnicích  $(s_1, s_2, s_3)$ . Norma tohoto vektoru se vypočte jako  $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$  a představuje vzdálenost původního bodu od hydrostatické osy. Vzhledem ke vztahu (2.155) je tato vzdálenost rovna odmocnině z dvojnásobku invariantu  $J_2$ , tj. platí  $\rho = \sqrt{2J_2}$ .

Rovinám kolmým na hydrostatickou osu říkáme *deviatorické roviny* a jejich průniky s plochou plasticity jsou *deviatorické řezy*. Rovinám procházejícím hydrostatickou osou se říká *Rendulíčovovy roviny*, případně *meridiánové roviny*, a jejich průniky s plochou plasticity jsou *Rendulíčovovy řezy*, které se obvykle skládají ze dvou *meridiánů*. Zobrazení v deviatorické rovině tedy odpovídá pohledu podél hydrostatické osy, zatímco meridiánová rovina zachycuje pohled kolmo na hydrostatickou osu. Pokud bychom zemský povrch považovali za plochu plasticity a osu rotace za hydrostatickou osu, odpovídaly by deviatorické řezy rovnoběžkám a meridiány poledníkům.

### Příklad 2.19: Misesova a Trescova plocha plasticity ve Westergaardově prostoru

Na základě předchozích úvah o geometrické interpretaci různých veličin ve Westergaardově prostoru lze velmi snadno zkonstruovat Misesovu plochu plasticity. Tato plocha je tvořena body o stejné hodnotě invariantu  $J_2 = \tau_0^2$ , tedy body o stejné vzdálenosti  $\sqrt{2J_2} = \sqrt{2}\tau_0$  od hydrostatické osy. Geometrická představa nás tedy vede k závěru, že Misesovou plochou plasticity v prostoru hlavních napětí je povrch nekonečného válce, jehož osou je právě hydrostatická osa. Deviatorické řezy jsou kružnice a meridiány jsou přímky rovnoběžné s hydrostatickou osou, viz obr. 2.28bc. Pro úplnost poznamenejme, že v souladu se zvyklostmi používanými v literatuře se na obr. 2.28c vynášejí v horní části tzv. *tahový meridián*, který leží v polorovině určené hydrostatickou osou a kladnou poloosou  $\sigma_1$ , zatímco v dolní polorovině *tlakový meridián*, který leží v polorovině určené hydrostatickou osou a zápornou poloosou  $\sigma_1$ . Na tahovém meridiánu jsou stavy napětí, pro které  $s_1 > s_2 = s_3$ , což platí mimo jiné při jednoosém tahu, zatímco na tlakovém meridiánu jsou stavy napětí, pro které  $s_1 < s_2 = s_3$ , což platí mimo jiné při jednoosém tlaku.

Vzhledem k tomu, že Misesova funkce plasticity závisí pouze na deviatorické části napětí, jsou všechny deviatorické řezy Misesovou plochou plasticity stejné, nezávisle na tom, kterým bodem na hydrostatické ose vedeme deviatorickou rovinu. Totéž musí platit pro Trescovu plochu (protože Trescova funkce plasticity také závisí pouze na deviatorické části napětí), ale příslušné deviatorické řezy už pochopitelně nebudou kružnice.

Pro Trescovu funkci plasticity musí plasticky přípustné stavy za obecné napjatosti splňovat podmínku  $\tau_{\max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \tau_0$ , která je ekvivalentní s šesti nerovnostmi

$$-2\tau_0 \leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq 2\tau_0 \quad (2.166)$$

$$-2\tau_0 \leq \sigma_1 - \sigma_3 \leq 2\tau_0 \quad (2.167)$$

$$-2\tau_0 \leq \sigma_2 - \sigma_3 \leq 2\tau_0 \quad (2.168)$$

Každé z těchto nerovností odpovídá poloprostor omezený rovinou rovnoběžnou s hydrostatickou osou. Průnikem takových šesti poloprostorů je nekonečný šestiboký hranol, který každou deviatorickou rovinu protíná v pravidelném šestiúhelníku, znázorněném na obr. 2.27b. Meridiány jsou opět přímky rovnoběžné s hydrostatickou osou, viz obr. 2.27c. Pro porovnání jsou řezy Trescovou plochou plasticity na obr. 2.28 zopakovány čárkovanou čarou. Při volbě stejné tahové pevnosti je Trescův hranol vepsán Misesově válci. Pokud bychom ovšem zvolili stejné smykové pevnosti, tj. stejné hodnoty parametru  $\tau_0$  v podmínkách (2.147) a (2.163), byl by Trescův hranol opsán Misesově válci.

□

Poznamenejme ještě, že v literatuře se Misesova funkce plasticity často objevuje ve tvaru

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \sigma_0 \quad (2.169)$$

což je samozřejmě funkce (2.163) přenásobená konstantou  $\sqrt{3}$  a parametr  $\sigma_0 = \sqrt{3}\tau_0$  představuje jako obvykle mez kluzu v tahu. Vynásobením kladnou konstantou nijak nezmění množiny stavů napětí vyhovujících podmínkám  $f < 0$ ,  $f = 0$  a  $f > 0$ , takže z fyzikálního hlediska jedna a tatáž podmínka může být zapsána různými způsoby. Veličina  $\sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})}$  se obvykle označuje za *Misesovo napětí* a její zobrazení je často nabízeno programy pro grafické zpracování výsledků analýzy napětí metodou konečných prvků.

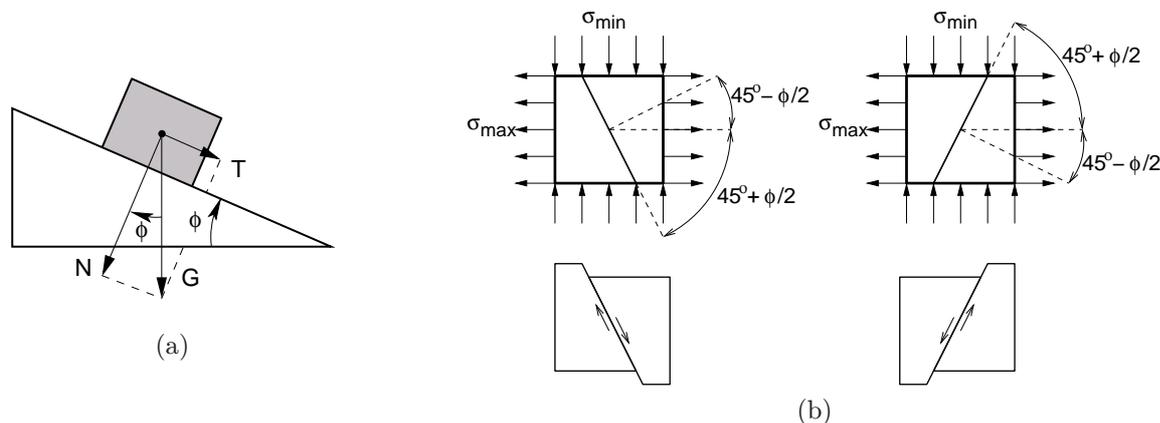
Příklady 2.16 a 2.18 ukázaly, že pro Trescovu i pro Misesovu podmínku plasticity je mez kluzu v jednoosém tlaku stejná jako v jednoosém tahu. To souvisí s výchozími předpoklady, na jejichž základě byly tyto podmínky sestaveny. V případě Trescovy podmínky hraje rozhodující roli maximální smykové napětí, které při jednoosém tahu i tlaku vzniká na rovinách ukloněných o  $45^\circ$  vůči směru zatěžování a jeho velikost je polovinou absolutní hodnoty aplikovaného normálového napětí. V případě Misesovy podmínky je rozhodující veličinou energie spotřebovaná na změnu tvaru, která je opět při namáhání jednoosým tahem stejná jako při namáhání jednoosým tlakem se stejnou absolutní hodnotou působícího normálového napětí.

Je tedy zřejmé, že dosud zmíněné podmínky plasticity jsou použitelné pouze pro materiály, jejichž pevnost v tahu je aspoň přibližně stejná jako v tlaku. To platí pro běžné kovy, mimo jiné i pro ocel používanou jako konstrukční materiál kovových stavebních konstrukcí nebo jako výztuž do železobetonu. Naproti tomu většina geomateriálů, jako jsou horniny, zeminy a beton, vykazuje v tlaku podstatně vyšší pevnost než v tahu. Extrémním příkladem jsou sypké, nesoudržné materiály, jako je písek nebo štěrk, které vůbec nemohou přenášet tahová napětí, ale tlaku vzdorují, přinejmenším pokud stlačování v daném směru probíhá za sevření určitým tlakovým napětím ve směrech na něj kolmých. Pro takové materiály je třeba mít k dispozici jiný typ podmínek plasticity, které vedou k rozdílným hodnotám tahové a tlakové pevnosti.

### 2.3.3 Podmínky plasticity pro materiály s vnitřním třením

Pro beton a podobné materiály jsou mechanismy nepružného přetváření podstatně jiné než pro typické plastické materiály, jako jsou kovy. Především v nich dochází ke vzniku a rozvoji trhlin, což má vliv nejen na pevnost materiálu, ale i na jeho tuhost (vyjádřenou například modulem pružnosti). Tento efekt nelze popsat pomocí klasické teorie plasticity, ale vhodným teoretickým rámcem je například lomová mechanika (popisující explicitně jednotlivé trhliny jako nespojitosti v poli posunutí) nebo mechanika poškození (popisující vliv trhlin na chování materiálu nepřímou, pomocí redukce tuhostních koeficientů). S oběma zmíněnými teoriemi se podrobněji seznámíme v následujících dvou kapitolách. Za určitých podmínek lze i pro geomateriály použít teorii plasticity, nicméně je třeba ji vhodným způsobem upravit a vzít v úvahu specifické rysy příslušných přetvárných procesů. Nepružné přetváření si lze stále představit jako pokluz podél určitých smykových rovin, ale na rozdíl od plastického pokluzu v krystalu nyní smykové napětí potřebné k překonání odporu materiálu závisí i na normálovém napětí působícím kolmo na kluznou rovinu. Pokluz totiž neprobíhá podél dokonalých rovin, ale podél více či méně drsných ploch, a nepřekonává se při něm pouze soudržnost materiálu, ale i třecí síla, která závisí právě na zmíněném normálovém napětí. Proto se o této skupině materiálů často hovoří jako o *materiálech s vnitřním třením*. V případě sypkých materiálů je dokonce efekt vnitřního tření zcela dominantní. V soudržných zeminách a betonu působí spolu s třením i vnitřní koheze (soudržnost), charakterizujeme je tedy jako *soudržné materiály s vnitřním třením*, anglicky „cohesive-frictional materials“.

Představa kluzných rovin, podél nichž je třeba překonat soudržnost materiálu a vnitřní tření, vede k přirozenému zobecnění Trescovy podmínky, jehož výsledkem je podmínka *Mohrova-Coulombova*. Připomeňme si nejprve, že pokud se tuhý kvádr nachází na nakloněné rovině se sklonem  $\phi$ , lze jeho tíhu  $G$  rozložit na složku kolmou na tuto rovinu,  $N = G \cos \phi$ , která představuje přitlačnou sílu, a složku rovnoběžnou s touto rovinou,  $T = G \sin \phi$ , což je síla uvádějící kvádr do pohybu, viz obr. 2.29a. Pohyb kvádrů ovšem nastane pouze tehdy, jestliže síla  $T$  překoná maximální třecí sílu  $fN$ , kde  $f$  je třecí koeficient. Kvádr zůstává v klidu, pokud  $T < fN$ ,



Obrázek 2.29: (a) Rozklad tíhové síly působící na kvádr na nakloněné rovině, (b) poloha dvou potenciálních rovin pokluzu vůči hlavním osám napětí (podle Mohrovy-Coulombovy podmínky).

tj. pokud  $G \sin \phi < fG \cos \phi$ . Jak je vidět, za daných idealizovaných předpokladů nezáleží na tíze kvádru, ale jen na koeficientu tření  $f$  a úhlu nakloněné roviny  $\phi$ . Kritický je sklon  $\phi$ , pro který  $\tan \phi = f$ .

Pro nesoudržný materiál s vnitřním třením si můžeme představit, že pokluzu podél dané roviny brání třecí síla, jejíž maximální velikost je součinem přítláčné síly kolmé na tuto rovinu a koeficientu vnitřního tření  $\tan \phi$ , kde  $\phi$  je tzv. *úhel vnitřního tření materiálu*. Pokud síly vztáhneme na jednotku plochy, získáme odpovídající napětí. K pokluzu podél dané roviny tedy dojde, pokud smykové napětí  $\tau$  působící na tuto rovinu v libovolném směru dosáhne kritické hodnoty  $-\sigma \tan \phi$ . Záporné znaménko vyjadřuje skutečnost, že přítláčná síla pokluz znesnadňuje, pokud vyvozuje tlakové, tedy záporné napětí. Naproti tomu u smykového napětí znaménko pouze naznačuje orientaci případného pokluzu, ale zda k pokluzu vůbec dojde závisí na absolutní hodnotě smykového napětí.

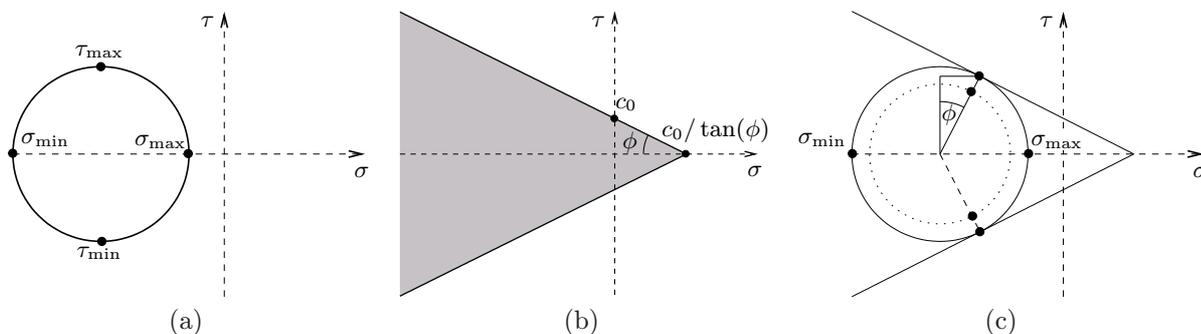
Zatím jsme pro jednoduchost uvažovali materiál s vnitřním třením, ale nesoudržný. Pro soudržný materiál s vnitřním třením musí smykové napětí kromě tření překonat i soudržnost, kterou označíme  $c_0$  (podle anglického výrazu „cohesion“) a budeme ji považovat za danou materiálovou vlastnost. Kritickou hodnotou smykového napětí, při jejímž dosažení nastává pokluz, je tedy  $c_0 - \sigma \tan \phi$ . Podmínku, při jejímž splnění k pokluzu nemůže dojít, zapíšeme jako

$$|\tau| + \sigma \tan \phi - c_0 < 0 \quad (2.170)$$

Tato podmínka se ale týká pouze pokluzu podél dané roviny v daném směru. Abychom zcela vyloučili plastické přetváření, musí být podmínka (2.170) splněna pro každou rovinu a každý směr v této rovině. Odtud již plyne, že funkci plasticity odpovídající zvoleným předpokladům získáme maximalizací levé strany nerovnosti (2.170) přes všechny možné roviny a směry. To je poměrně složitá matematická úloha, kterou nemá smysl zde podrobně řešit. Pro naše účely je podstatný pouze její výsledek, totiž že výraz  $|\tau| + \sigma \tan \phi$  nabývá maximální hodnoty na dvou rovinách, jejichž normály jsou kolmé na směr prostředního hlavního napětí a se směrem maximálního hlavního napětí  $\sigma_{\max}$  svírají úhel  $45^\circ - \phi/2$ , viz obr. 2.29b. Potenciální směr pokluzu je také kolmý na směr prostředního hlavního napětí a se směrem maximálního hlavního napětí svírá úhel  $45^\circ + \phi/2$ . Tento výsledek má názornou geometrickou interpretaci založenou na Mohrově kružnici, sestrojené pro rovinu určenou směry maximálního a minimálního hlavního napětí.

Připomeňme, že body Mohrovy kružnice odpovídají kombinacím normálového a smykového napětí působícím na všechny možné plošky s normálami ve zvolené hlavní rovině (v našem případě jde o rovinu kolmou na směr prostředního hlavního napětí). Mohrova kružnice se vynáší v rovině napětí opatřené souřadnicovými osami  $\sigma$  a  $\tau$  a je symetrická podle osy  $\sigma$ , viz obr. 2.30a. Její dva průsečíky s osou  $\sigma$  odpovídají polohám plošky, pro které smykové napětí vymizí a normálové napětí je rovno jednomu z hlavních napětí, v našem případě buď  $\sigma_{\max}$  nebo  $\sigma_{\min}$ . Jde tedy o polohy plošky, při kterých její normála splývá s jedním z hlavních směrů napětí. Pokud plošku postupně otáčíme mezi těmito dvěma polohami, kombinace na ni působícího normálového a smykového napětí se mění a příslušný bod v rovině napětí  $(\sigma, \tau)$  putuje po Mohrově kružnici. V okamžiku, kdy normála k plošce púli úhel mezi hlavními směry, vzniká na plošce maximální smykové napětí  $\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$  a odpovídající bod Mohrovy kružnice je nejdál od osy  $\sigma$ .

Při kontrole splnění podmínky (2.170) na ploškách všech možných orientací můžeme postupovat graficky a sestrojít v rovině napětí  $(\sigma, \tau)$  množinu bodů, které tuto podmínku splňují. Pokud leží celá Mohrova kružnice uvnitř přípustné oblasti, nemůže dojít k pokluzu na žádné plošce a materiál je tedy v pružném stavu. Pro dané  $c_0$  a  $\phi$  je rovnost  $\tau + \sigma \tan \phi - c_0 = 0$  splněna na přímkou procházející v rovině napětí  $(\sigma, \tau)$  body  $(0, c_0)$  a  $(c_0/\tan \phi, 0)$  a nerovnost  $\tau + \sigma \tan \phi - c_0 < 0$  je splněna v polorovině ležící po „levé dolní straně“ této přímky, viz obr. 2.30b. Tato nerovnost ale odpovídá podmínce (2.170) pouze pro  $\tau \geq 0$ , zatímco pro  $\tau < 0$  je třeba splnit nerovnost  $-\tau + \sigma \tan \phi - c_0 < 0$ . Výslednou množinou bodů splňujících podmínku (2.170) je průnik dvou polorovin vyznačený na obr. 2.30b šedě. Výraz  $|\tau| + \sigma \tan \phi$  nabývá maximální hodnoty ve dvou bodech Mohrovy kružnice vyznačených na obr. 2.30c (v případě, že je celá Mohrova kružnice uvnitř přípustné oblasti, jde o body



Obrázek 2.30: (a) Mohrova kružnice a názorný význam jejich bodů, (b) plasticky přípustné kombinace normálového a smykového napětí, (c) grafické určení bodů Mohrovy kružnice maximalizujících výraz  $|\tau| + \sigma \tan \phi$ .

položené nejbliže k hranici přípustné oblasti). Z geometrického náčrtku snadno určíme souřadnice těchto bodů, mající význam normálového a smykového napětí:

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} + \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin \phi \quad (2.171)$$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \cos \phi \quad (2.172)$$

Maximální hodnota výrazu na levé straně (2.170) je tedy

$$\begin{aligned} |\tau| + \sigma \tan \phi - c_0 &= \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \cos \phi + \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \tan \phi + \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin \phi \tan \phi - c_0 = \\ &= \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2 \cos \phi} + \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \tan \phi - c_0 \end{aligned} \quad (2.173)$$

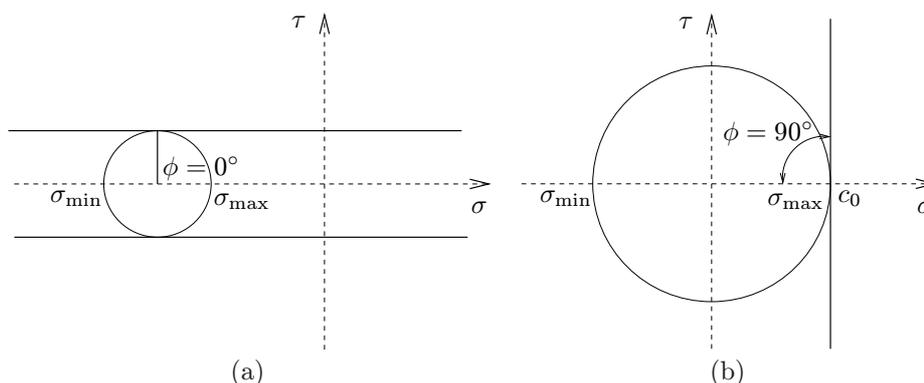
Tento výraz by bylo možné použít jako funkci plasticity, ale pro pohodlí jej ještě přenásobíme kladnou konstantou  $\cos \phi$  (což nijak nezmění význam podmínek  $f < 0$ ,  $f = 0$  a  $f > 0$ , vymezuujících pružné, plastické a nepřípustné stavy). Výsledná Mohrova-Coulombova funkce plasticity má tedy tvar

$$f(\sigma) = \frac{1 + \sin \phi}{2} \sigma_{\max}(\sigma) - \frac{1 - \sin \phi}{2} \sigma_{\min}(\sigma) - c_0 \cos \phi \quad (2.174)$$

Připomeňme, že  $c_0$  a  $\phi$  jsou materiálové konstanty mající význam soudržnosti a úhlu vnitřního tření. Ve (2.174) je tedy lineární funkce maximálního a minimálního hlavního napětí.

Přemýšlivý čtenář si jistě všiml, že Trescova podmínka je zvláštním případem Mohrovy-Coulombovy podmínky. Pokud totiž neuvažujeme vnitřní tření, ale jen soudržnost, odpovídá předpoklad o mechanismu plastického přetváření Trescova předpokladu, podle kterého k pokluzu dojde v okamžiku, kdy smykové napětí na některé rovině v některém jejím směru dosáhne kritické hodnoty. Odpovídající grafické znázornění pomocí Mohrovy kružnice v rovině napětí  $(\sigma, \tau)$  je na obr. 2.31a. Při výkladu Trescovy podmínky jsme kritickou hodnotu smykového napětí značili  $\tau_0$  a hrála roli meze kluzu ve smyku. V případě obecnější Mohrovy-Coulombovy podmínky odpovídá Trescův předpoklad speciálnímu případu bez vnitřního tření, tedy s úhlem vnitřního tření  $\phi = 0$ , a kritickou hodnotou smykového napětí je pak soudržnost  $c_0$ . Skutečně, po dosazení  $\phi = 0$  a  $c_0 = \tau_0$  do (2.174) dostaneme funkci

$$f(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma_{\max}(\sigma) - \frac{1}{2} \sigma_{\min}(\sigma) - \tau_0 \quad (2.175)$$



Obrázek 2.31: Zvláštní případy Mohrovy-Coulombovy podmínky: (a) Trescova podmínka ( $\phi = 0^\circ$ ), (b) Rankinova podmínka ( $\phi = 90^\circ$ ).

kteřá je vzhledem ke vztahu (2.148) totožná s Trescovou funkcí plasticity (2.147). Pro nenulový úhel vnitřního tření však Mohrova-Coulombova podmínka vede k jinému tvaru plasticky přípustné oblasti než Trescova a k rozdílným hodnotám pevností v tahu a v tlaku.

### Příklad 2.20: Mohrova-Coulombova podmínka pro rovinnou napjatost

Díky lineární závislosti Mohrovy-Coulombovy funkce plasticity na  $\sigma_{\max}$  a  $\sigma_{\min}$  je určení tvaru příslušné plastické oblasti poměrně jednoduché. V případě rovinné napjatosti ovšem nesmíme při stanovení maximální a minimální hodnoty hlavního napětí zapomenout na nulové hlavní napětí  $\sigma_3$  působící kolmo na rovinu analýzy, které mírně komplikuje závislost  $\sigma_{\max}$  a  $\sigma_{\min}$  na hlavních napětích  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  působících v rovině analýzy.

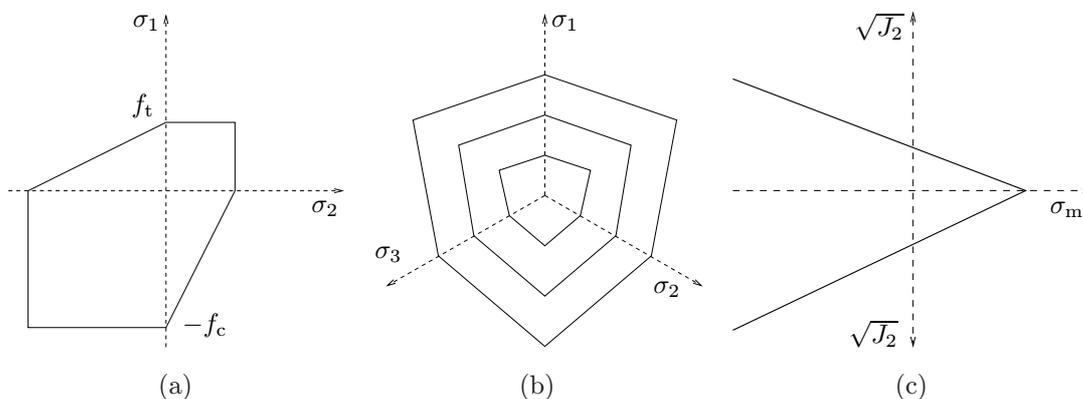
Pro ilustraci uvažujme tu část roviny  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , ve které  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ . Za těchto předpokladů platí

$$\sigma_{\max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, 0) = \sigma_1, \quad \sigma_{\min} = \min(\sigma_1, \sigma_2, 0) = 0 \quad (2.176)$$

Po dosazení těchto vztahů do funkce (2.174) můžeme podmínku plasticity zapsat jako

$$\frac{1 + \sin \phi}{2} \sigma_1 - c_0 \cos \phi = 0 \quad (2.177)$$

Tato podmínka je splněna pro  $\sigma_1 = 2c_0 \cos \phi / (1 + \sin \phi)$ , tedy na přímce vedené rovnoběžně s osou  $\sigma_2$ . Omezíme-li se ale na sektor, v němž jsou splněny předpoklady  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ , zbyde z této přímky úsečka, viz obr. 2.32a. Výše uvedená hodnota napětí  $\sigma_1$  odpovídá tahové pevnosti  $f_t$ . Stejným způsobem zpracujeme podmínku plasticity v dalších sektorech roviny  $(\sigma_1, \sigma_2)$ ; příslušné hodnoty extrémních hlavních napětí jsou pro přehlednost shrnuty v tab. 2.9. Výsledkem analýzy je šestiúhelník symetrický podle osy prvního kvadrantu zobrazený na obr. 2.32a.



Obrázek 2.32: Řezy Mohrovou-Coulombovou plochou plasticity: (a) řez odpovídající rovinné napjatosti, (b) deviatorické řezy pro různé úrovně středního napětí, (c) tahový a tlakový meridián.

Tabulka 2.9: Maximální a minimální hodnoty hlavního napětí pro rovinnou napjatost.

$\sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_{\min}(\boldsymbol{\sigma})$	$\sigma_{\max}(\boldsymbol{\sigma})$	$\sigma_1 \leq \sigma_2$	$\sigma_{\min}(\boldsymbol{\sigma})$	$\sigma_{\max}(\boldsymbol{\sigma})$
$\sigma_1 \geq 0$ $\sigma_2 \geq 0$	0	$\sigma_1$	$\sigma_1 \geq 0$ $\sigma_2 \geq 0$	0	$\sigma_2$
$\sigma_1 \geq 0$ $\sigma_2 \leq 0$	$\sigma_2$	$\sigma_1$	$\sigma_1 \leq 0$ $\sigma_2 \geq 0$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$\sigma_1 \leq 0$ $\sigma_2 \leq 0$	$\sigma_2$	0	$\sigma_1 \leq 0$ $\sigma_2 \leq 0$	$\sigma_1$	0

Budeme pokračovat určením pevností pro základní typy namáhání. Tahová pevnost  $f_t = 2c_0 \cos \phi / (1 + \sin \phi)$  již byla zmíněna. Při jednoosém tlaku je v plastickém stavu  $\sigma_{\min} = -f_c$  a  $\sigma_{\max} = 0$ , takže z podmínky plasticity dostaneme  $f_c = 2c_0 \cos \phi / (1 - \sin \phi)$ . Při dvojosém tlaku je situace velmi podobná, je totiž  $\sigma_{\min} = -f_b$  a  $\sigma_{\max} = 0$ , takže pevnost  $f_b$  vyjde stejná jako  $f_c$ . Konečně při namáhání čistým smykem je v plastickém stavu  $\sigma_{\max} = f_s$  a  $\sigma_{\min} = -f_s$  a z podmínky plasticity

$$\frac{1 + \sin \phi}{2} f_s + \frac{1 - \sin \phi}{2} f_s - c_0 \cos \phi = 0 \quad (2.178)$$

plyne smyková pevnost  $f_s = c_0 \cos \phi$ .

Odvozené hodnoty pevností v jednoosém tahu, jednoosém a dvojosém tlaku a ve smyku jsou uvedeny v pátém sloupci tab. 2.10, kde jsou porovnány s pevnostmi odpovídajícími Trescově a Misesově podmínce.

□

Tabulka 2.10: Pevnosti při základních typech namáhání pro různé podmínky plasticity.

namáhání	pevnost	Tresca	Mises	Mohr-Coulomb	Rankine	Drucker-Prager
smyk	$f_s$	$\tau_0$	$\tau_0$	$c_0 \cos \phi$	$f_t$	$\tau_0$
jednoosý tah	$f_t$	$2\tau_0$	$\sqrt{3}\tau_0$	$\frac{2c_0 \cos \phi}{1 + \sin \phi}$	$f_t$	$\frac{\sqrt{3}\tau_0}{1 + \sqrt{3}\alpha_\phi}$
jednoosý tlak	$f_c$	$2\tau_0$	$\sqrt{3}\tau_0$	$\frac{2c_0 \cos \phi}{1 - \sin \phi}$	$\infty$	$\frac{\sqrt{3}\tau_0}{1 - \sqrt{3}\alpha_\phi}$
dvojosý tlak	$f_b$	$2\tau_0$	$\sqrt{3}\tau_0$	$\frac{2c_0 \cos \phi}{1 - \sin \phi}$	$\infty$	$\frac{\sqrt{3}\tau_0}{1 - 2\sqrt{3}\alpha_\phi}$

**Příklad 2.21: Mohrova-Coulombova plocha plasticity ve Westergaardově prostoru**

Mohrova-Coulombova funkce plasticity (2.174) závisí lineárně na maximálním a minimálním hlavním napětí, takže pokud se omezíme na sektor Westergaardova prostoru s pevně zvoleným uspořádáním hlavních napětí, např.  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , je podmínka plasticity lineární a příslušná část plochy plasticity leží v jisté rovině. Na rozdíl od Trescovy podmínky však taková rovina už není rovnoběžná s hydrostatickou osou, ale protíná ji v bodě odpovídajícím střednímu napětí  $\sigma_m = c_0 / \tan \phi$ , jak lze ověřit dosazením této hodnoty za  $\sigma_{\max}$  i  $\sigma_{\min}$  do (2.174). Plasticky přípustná oblast leží po jedné straně takové roviny. Protože sektorů s různým pořadím hlavních napětí je celkem šest, má plasticky přípustná oblast tvar šestibokého jehlanu s vrcholem ve zmíněném bodě na hydrostatické ose.

Deviatorickými řezy jsou šestiúhelníky, na rozdíl od Trescovy podmínky však nejsou pravidelné, ale vykazují symetrii podle tří os, viz obr. 2.32b. Pokud posouváme deviatorickou rovinu podél hydrostatické osy do oblasti vysokého hydrostatického tlaku, šestiúhelník představující deviatorický řez se zvětšuje, ale zachovává svůj tvar. Při posunu do oblasti hydrostatického tahu se tento šestiúhelník zmenšuje a po překročení hodnoty  $\sigma_m = c_0 / \tan \phi$  zcela zmizí.

V meridiánové rovině se plasticky přípustná oblast jeví jako klín (obr. 2.32c), který ale není symetrický vzhledem k hydrostatické ose. To znamená, že tahový meridián má jiný sklon vůči hydrostatické ose než tlakový meridián, což souvisí s rozdílnými pevnostmi v tahu a tlaku.

□

Jak již víme, pro nulový úhel vnitřního tření  $\phi$  přejde Mohrova-Coulombova podmínka plasticity v Trescovu. Zajímavý je také opačný extrém, kdy položíme  $\phi = 90^\circ$ . Potom je  $\sin \phi = 1$  a  $\cos \phi = 0$ , takže funkce (2.174) se zredukuje na  $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{\max}(\boldsymbol{\sigma})$ . Podmínka plastické přípustnosti  $f \leq 0$  pak znamená, že maximální hlavní napětí nesmí být kladné, jinými slovy v žádném směru nesmí vzniknout tahové napětí. Taková podmínka odpovídá materiálu, který není vůbec schopen přenášet tah, ale přenesení libovolné tlakové napětí. Plasticky přípustnou oblastí ve Westergaardově prostoru je ten jeho oktant, ve kterém jsou všechna hlavní napětí nekladná.

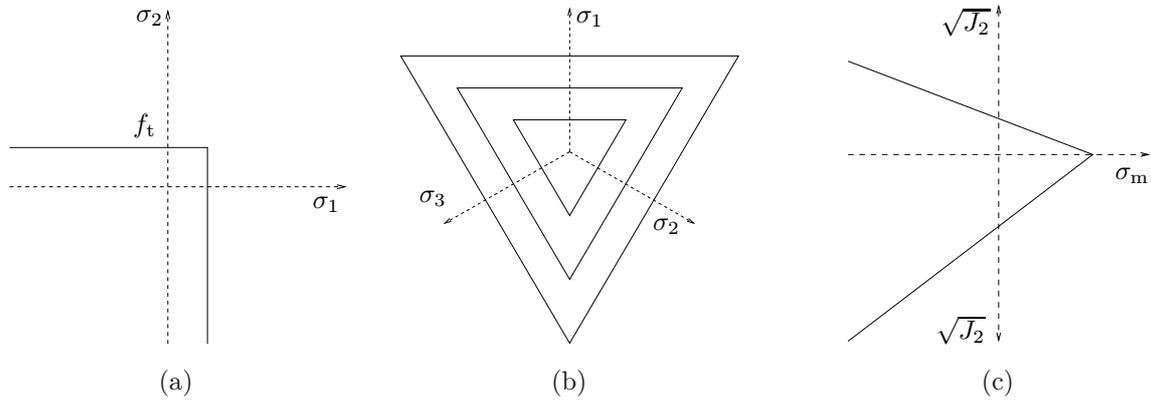
Přechod k materiálu s úhlem vnitřního tření  $\phi = 90^\circ$  jsme provedli při pevně zvolené soudržnosti  $c_0$ , takže výsledná pevnost v tahu  $f_t = 2c_0 \cos \phi / (1 + \sin \phi)$  vymizela. Mohli bychom ale také během tohoto limitního přechodu udržovat konstantní pevnost v tahu, a tím dospět k poněkud modifikované podmínce, která připouští i dostatečně malá tahová napětí. Původní Mohrova-Coulombovu funkci plasticity (2.174) nejprve vynásobíme kladnou veličinou  $2/(1 + \sin \phi)$  a výsledek přepíšeme jako

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{\max}(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_{\min}(\boldsymbol{\sigma}) - f_t \quad (2.179)$$

Místo parametrů  $\phi$  a  $c_0$  tedy pracujeme s parametry  $\phi$  a  $f_t$ . Pro  $\phi = 90^\circ$  koeficient u  $\sigma_{\min}$  zmizí a funkce plasticity se zredukuje na

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{\max}(\boldsymbol{\sigma}) - f_t \quad (2.180)$$

Příslušná podmínka plastické přípustnosti vyžaduje, aby normálové napětí v žádném směru nepřekročilo danou mezní hodnotu  $f_t$ , která představuje tahovou pevnost materiálu, viz obr. 2.31b. Podmínka založená na mezní hodnotě maximálního hlavního napětí se nazývá *Rankinova* a často se používá při popisu tahového porušování betonu a podobných materiálů. Pro rovinnou napjatost je plasticky přípustná oblast podle této podmínky zachycena na obr. 2.33a. Ve Westergaardově prostoru má přípustná oblast tvar trojbokého jehlanu, jehož stěny jsou rovnoběžné s rovinami hlavních napětí. Deviatorickým řezem je trojúhelník zachycený na obr. 2.33b. Meridiány jsou podobné, jako pro Mohrova-Coulombovu plochu, jen je rozdíl mezi sklonem tahového a tlakového meridiánu ještě výraznější, viz obr. 2.33c. Pevnosti pro různé typy namáhání jsou pro Rankinovu podmínku uvedeny v předposledním sloupci tab. 2.10. Nekonečná hodnota pevnosti v tlaku znamená, že při tlakovém namáhání



Obrázek 2.33: Řezy Rankinovou plochou plasticity: (a) řez odpovídající rovinné napjatosti, (b) deviatorické řezy pro různé úrovně středního napětí, (c) tahový a tlakový meridián.

podle Rankinovy podmínky nikdy nezačne plastické přetváření a chování materiálu zůstává pro neomezeně velká napětí pružné.

Ukázali jsme, že Mohrovo-Coulombovu podmínku plasticity lze chápat jako zobecněnou variantu Trescovy podmínky, která bere v úvahu vliv vnitřního tření. Podobně lze zobecnit také Misesovu podmínku, která je založena na kritické hodnotě druhého deviatorického invariantu  $J_2$ . Tento invariant závisí pouze na deviatorické části napětí a má stejnou hodnotu za jednoosého tahu jako za jednoosého tlaku (při stejné velikosti působícího napětí, jen s rozdílným znaménkem). Při zobecnění zahrneme do funkce plasticity i vliv hydrostatické části napětí, která je reprezentovaná např. středním napětím  $\sigma_m$ . Mohrova-Coulombova podmínka je založena na kritické hodnotě součtu smykového napětí a jistého násobku normálového napětí na potenciální kluzné rovině. Odmocnina invariantu  $J_2$  vyjadřuje velikost deviatorické části napětí, která souvisí se smykem, a střední napětí  $\sigma_m$  je vlastně průměrná hodnota normálového napětí ve všech možných směrech. Proto v analogii k Mohrově-Coulombově podmínce zapíšeme zobecněnou verzi Misesovy podmínky pomocí funkce plasticity

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 3\alpha_\phi \sigma_m(\boldsymbol{\sigma}) + \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \tau_0 \quad (2.181)$$

kde  $\alpha_\phi$  a  $\tau_0$  jsou konstanty charakterizující vlastnosti materiálu. Označení  $\tau_0$  napovídá, že tato konstanta hraje roli meze kluzu ve smyku. Skutečně, pro namáhání čistým smykem je střední napětí  $\sigma_m$  nulové a funkce (2.181) se redukuje na Misesovu funkci plasticity (2.163), přičemž  $J_2$  je druhou mocninou působícího smykového napětí  $\tau$  a konstanta  $\tau_0$  představuje mezní hodnotu tohoto napětí. Konstanta  $\alpha_\phi$  je tzv. *koeficient vnitřního tření*, který ovlivňuje relativní význam středního napětí v podmínce plasticity a hraje tedy podobnou roli jako tangens úhlu vnitřního tření v Mohrově-Coulombově podmínce. Tento koeficient je v (2.181) ještě vynásoben trojkou z čistě formálních důvodů.<sup>13</sup> Pro podmínku plasticity založenou na funkci (2.181) se v literatuře vžil název *Druckerova-Pragerova*, přestože ji již mnohem dříve než tyto autoři navrhl v ještě obecnější podobě Burzynski.

### Příklad 2.22: Druckerova-Pragerova podmínka pro rovinnou napjatost

Při rovinné napjatosti, kdy  $\sigma_3 = 0$ , lze Druckerovu-Pragerovu funkci plasticity (2.181) s využitím vzorců (2.157) a (B.15) pro výpočet invariantů  $J_2$  a  $\sigma_m$  přepsat jako

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = 3\alpha_\phi \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2) + \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2]} - \tau_0 = \alpha_\phi(\sigma_1 + \sigma_2) + \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} - \tau_0 \quad (2.182)$$

Z podmínky plasticity  $f(\sigma_1, \sigma_2) = 0$  po úpravě získáme rovnici

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 3[\tau_0 - \alpha_\phi(\sigma_1 + \sigma_2)]^2 \quad (2.183)$$

kteřá má kvadratický tvar a v rovině hlavních napětí jí odpovídá elipsa se středem posunutým do oblasti záporných napětí, viz obr. 2.34a.

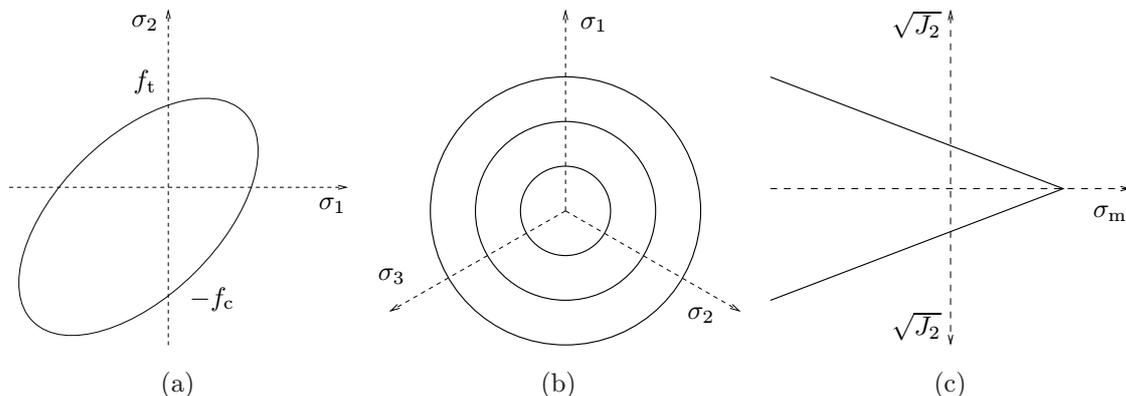
Výpočet pevností odpovídajících základním typům namáhání by bylo možno založit na rovnici (2.183), ale pohodlnější je pracovat s rovnicí

$$3\alpha_\phi \sigma_m + \sqrt{J_2} = \tau_0 \quad (2.184)$$

V případě čistého smyku do této rovnice dosadíme  $\sigma_m = 0$  a  $J_2 = f_s^2$  a vypočteme hodnotu pevnosti  $f_s = \tau_0$ . V případě jednoosého tlaku dosadíme  $\sigma_m = -f_c/3$  a  $J_2 = f_c^2/3$  a vypočteme

$$f_c = \frac{\sqrt{3} \tau_0}{1 - \sqrt{3} \alpha_\phi} \quad (2.185)$$

<sup>13</sup>V literatuře se funkce plasticity (2.181) obvykle zapisuje pomocí tzv. prvního invariantu napětí  $I_1$ , který je součtem hlavních napětí, tedy trojnásobkem středního napětí  $\sigma_m$ . Naší snahou bylo, aby koeficient vnitřního tření  $\alpha_\phi$  měl stejný význam, jako když je funkce plasticity zapsána ve tvaru  $f(\boldsymbol{\sigma}) = \alpha_\phi I_1(\boldsymbol{\sigma}) + \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \tau_0$ .



Obrázek 2.34: Řezy Druckerovou-Pragerovou plochou plasticity: (a) řez odpovídající rovinné napjatosti, (b) deviatorické řezy pro různé úrovně středního napětí, (c) meridiány.

Výpočet pro jednoosý tah je obdobný, jen se místo záporného znaménka objeví kladné. Konečně v případě dvojosého tlaku dosadíme  $\sigma_m = -2f_b/3$  a  $J_2 = f_b^2/3$  a vypočteme

$$f_b = \frac{\sqrt{3}\tau_0}{1 - 2\sqrt{3}\alpha_\phi} \quad (2.186)$$

Odvozené hodnoty pevností jsou uvedeny v posledním sloupci tab. 2.10. Z dosud probraných podmínek je Druckerova-Pragerova jediná, která vede k rozdílným pevnostem v jednoosém a dvojosém tlaku.

□

### Příklad 2.23: Druckerova-Pragerova plocha plasticity ve Westergaardově prostoru

Deviatorický řez Druckerovou-Pragerovou plochou plasticity je popsán rovnicí

$$\sqrt{J_2} = \tau_0 - 3\alpha_\phi\sigma_m \quad (2.187)$$

kde  $\sigma_m$  je střední napětí, které je pro pevně zvolenou deviatorickou rovinu konstantní. Jak již víme, odmocnina invariantu  $J_2$  je úměrná vzdálenosti od hydrostatické osy. Deviatorickým řezem je tedy podobně jako pro Misesovu podmínku kružnice, ale její poloměr tentokrát závisí na středním napětí, viz obr. 2.34b. Pro střední napětí  $\sigma_m = \tau_0/(3\alpha_\phi)$  tato kružnice degeneruje v bod a pro větší hodnoty středního napětí deviatorická rovina plochu plasticity vůbec neprotíná. V prostoru hlavních napětí je Druckerovou-Pragerovou plochou plasticity kužel osově symetrický podél hydrostatické osy. Meridiány této plochy jsou polopřímky na obr. 2.34c.

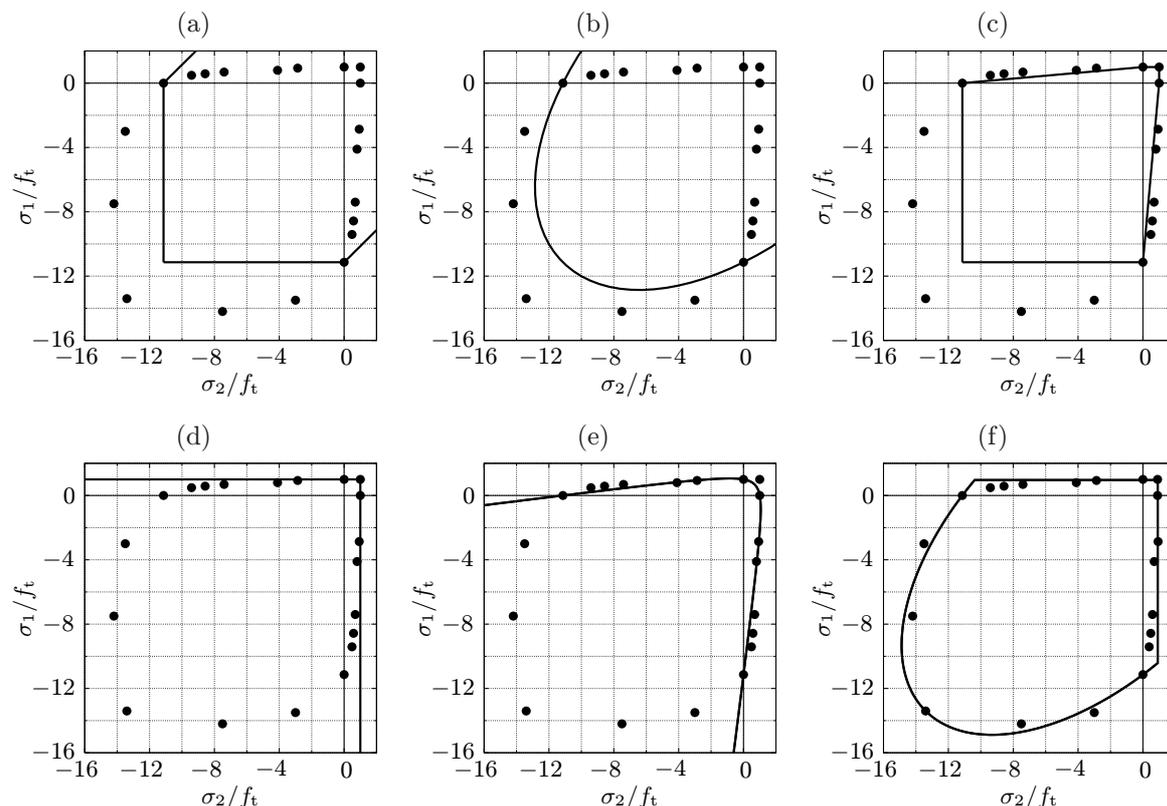
□

Na závěr stručně porovnáme podmínky plasticity, se kterými jsme se v článcích 2.3.2 a 2.3.3 seznámili. Trescova a Misesova podmínka nečiní rozdílu mezi chováním v tahu a tlaku a jsou vhodné pouze pro materiály bez vnitřního tření, jako jsou kovy. Mohrova-Coulombova a Druckerova-Pragerova podmínka umožňují popsat rozdíl mezi tlakovou a tahovou pevností a jsou v zásadě použitelné pro materiály s vnitřním třením, jako jsou zeminy, horniny nebo beton. Přitom pro většinu těchto geomateriálů má realističtější tvar plocha plasticity odpovídající Mohrově-Coulombově podmínce, což platí zejména v případě nesoudržných materiálů, jako je písek a šterk. Z numerického hlediska však mají výhody podmínky, které vedou k hladkým plochám plasticity, tedy Misesova a Druckerova-Pragerova. Volba nejjvhodnější podmínky plasticity tedy není jednoduchá a mnohdy závisí i na typu porušení, který se snažíme postihnout. Chceme-li vyvinout model použitelný pro zcela libovolnou kombinaci napětí, je často nutné kombinovat více jednoduchých podmínek plasticity, nebo vyvinout složitější podmínku s větším počtem parametrů.

### Příklad 2.24: Obálka pevnosti pro rovinnou napjatost betonu

Cílem tohoto příkladu je posoudit využitelnost dosud představených funkcí plasticity při popisu chování nevzdušeného betonu za rovinné napjatosti. Porovnání založíme na obálce pevnosti za dvojosého namáhání při různé kombinaci hlavních napětí, sestavené na základě experimentálních výsledků, které získali Kupfer a Gerstle (1973). Na obr. 2.35 jsou naměřené hodnoty vyneseny jako jednotlivé body v rovině s bezrozměrnými souřadnicemi  $(\sigma_1/f_t, \sigma_2/f_t)$ , všechny hodnoty pevností tedy budeme vztahovat k tahové pevnosti  $f_t$ . Ve vlastních výpočtech budeme pro určení parametrů jednotlivých modelů potřebovat pevnost v jednoosém tlaku  $f_c$ , která má v tomto případě hodnotu  $f_c \doteq 11,1f_t$ , případně i pevnost v dvojosém tlaku  $f_b \doteq 13,4f_t$ .

Začneme Trescovou podmínkou. Ta předpokládá stejné chování v tahu a tlaku, což je zjevně v rozporu s experimentálními daty na obr. 2.35. Musíme se tedy rozhodnout, kterou část obálky pevnosti chceme postihnout nejvýstižněji. Vzhledem ke tvaru Trescovy plochy plasticity pro rovinnou napjatost, viz obr. 2.27a, se pokusíme alespoň zhruba popsat chování v tlakové oblasti. Parametr  $\tau_0$  určíme ze známé hodnoty pevnosti v jednoosém tlaku a příslušného vztahu v tabulce 2.10 na straně 92 jako  $\tau_0 = f_c/2 = 5,05f_t$  a vyneseme odpovídající



Obrázek 2.35: Aproximace obálky pevnosti betonu za rovinné napjatosti (a) Trescovou podmínkou, (b) Misesovou podmínkou, (c) Mohrovou-Coulombovou podmínkou, (d) Rankinovou podmínkou, (e) Druckerovou-Pragerovou podmínkou, (f) kombinací Rankinovy a Druckerovy-Pragerovy podmínky.

Trescův šestiúhelník do obr. 2.35a. Z porovnání s experimentálními daty plyne, že kvalita aproximace není příliš uspokojivá ani v oblasti dvojosého tlaku. Model totiž nedokáže postihnout zvýšení pevnosti v tlaku při přidání tlakového napětí v příčném směru. K drobnému vylepšení popisu tohoto jevu můžeme dospět použitím Misesovy podmínky plasticity s parametrem  $\tau_0 = f_c/\sqrt{3} \doteq 6,41 f_t$ , viz obr. 2.35b. Pro tahové namáhání nebo kombinaci tahu a tlaku pak model opět nevyhovuje.

Pro postžení rozdílného chování v tahu a tlaku se pokusíme modelovat odezvu materiálu Mohrovou-Coulombovou podmínkou plasticity. Ta již obsahuje dva parametry, soudržnost  $c_0$  a úhel vnitřního tření  $\phi$ , které určíme z pevností v jednoosém tlaku a tahu. S využitím vztahů z tab. 2.10 dostáváme po několika jednoduchých úpravách hodnoty parametrů

$$\phi = \arcsin\left(\frac{f_c - f_t}{f_c + f_t}\right) \doteq 56,6^\circ, \quad c_0 = f_c \frac{1 - \sin \phi}{2 \cos \phi} \doteq 1,67 f_t \quad (2.188)$$

Odpovídající šestiúhelníková plocha plasticity je vynesena na obr. 2.35c. Mohrova-Columbova podmínka popisuje velmi dobře dvojosý tah a kombinaci tahu a tlaku; pro dvojosý tlak ovšem opět nevystihuje experimentálně pozorované zvýšení pevnosti. Při použití jednodušší Rankinovy podmínky sice vůbec nelze popsat porušení v jednoosém i dvojosém tlaku, ale chování v jednoosém nebo dvojosém tahu, případně v tahu kombinovaném s přiměřeně malým tlakem v příčném směru, zůstává zachyceno dostatečně věrohodným způsobem, viz obr. 2.35d.

Jako poslední možnost vyzkoušíme Druckerovu-Pragerovu podmínku plasticity. Ta opět závisí na dvou parametrech, které určíme z jednoosých pevností  $f_c$  a  $f_t$ . Po několika úpravách vztahů z tab. 2.35 získáváme odhady

$$\alpha_\phi = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{f_c - f_t}{f_c + f_t} \doteq 0,48, \quad \tau_0 = f_c \frac{\sqrt{3} - 3\alpha_\phi}{3} \doteq 1,06 f_t \quad (2.189)$$

pro které je obálka pevnosti vynesena na obr. 2.35e.<sup>14</sup> Výsledná obálka pevnosti výborně aproximuje experimentální data v oblasti tahu kombinovaného s tlakem, pro dvojosý tlak ale podmínka selhává. To je dáno výběrem pevností, pomocí kterých jsme kalibrovali parametry modelu.

<sup>14</sup>Pozorné čtenáře jistě neušlo, že pro danou volbu parametrů vypadá průnik plochy plasticity s rovinou  $(\sigma_1, \sigma_2)$  spíš jako hyperbola než jako elipsa, o které jsme mluvili v příkladu 2.22. To je způsobeno neobvykle vysokou hodnotou koeficientu vnitřního tření  $\alpha_\phi$ . Pro obvyklé hodnoty kolem 0,1 je průnikem Druckerova-Pragerova kužele s rovinou hlavních napětí  $(\sigma_1, \sigma_2)$  skutečně elipsa, ale pro vysoké hodnoty můžeme získat i jinou kuželosečku, tedy typicky hyperbolu (pro  $\alpha_\phi > \sqrt{3}/6$ ), nebo výjimečně parabolu (pro  $\alpha_\phi = \sqrt{3}/6$ ).

Pokud chceme lépe popsat tlakovou oblast, můžeme parametry určit tak, aby byla přesně reprodukována pevnost v jednoosém i dvojosém tlaku. To vede ke zcela jiným hodnotám parametrů

$$\alpha_\phi = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{f_b - f_c}{2f_b + f_c} \doteq 0,0833, \quad \tau_0 = f_c \frac{\sqrt{3} - 3\alpha_\phi}{3} \doteq 5,50 f_t \quad (2.190)$$

Na základě předchozích zkušeností ale můžeme očekávat, že zvýšená přesnost popisu v tlaku povede ke snížení přesnosti pro tahové namáhání. Pokročilejší modely mohou kombinovat dvě nebo více funkcí plasticity a výsledná plasticky přípustná oblast je pak průnikem oblastí odpovídajících jednotlivým dílčím podmínkám. Vhodné je např. kombinovat Druckerovu-Pragerovu podmínku s Rankinovou podmínkou. Výsledná obálka pevnosti, zobrazená na obr. 2.35f, prokazuje výstižnost tohoto modelu. Jistou nevýhodou je ale komplikovanější tvar celého modelu, např. nutnost zobecnit zákon plastického přetváření. Byly také navrženy modely pracující s jedinou funkcí plasticity, která má ale složitější tvar s vyšším počtem parametrů.

□

### 2.3.4 Zákony plastického přetváření

V úvodním přehledu základních rovnic teorie plasticity jsme již vysvětlili, že zákonem plastického přetváření obecně rozumíme rovnici tvaru

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.191)$$

s doplňující podmínkou  $\dot{\lambda} \geq 0$ . Sloupcová matice  $\mathbf{g}$  má šest složek, které jsou funkcemi okamžitého stavu napětí a jejich hodnoty udávají, jaký je vzájemný poměr jednotlivých složek přírůstku plastické deformace. Například pokud je pro určitý stav napětí  $\mathbf{g} = \{1; 2; -1; 0; 0; 0\}^T$ , znamená to, že pro rychlosti normálových složek plastické deformace platí  $\dot{\epsilon}_{py} = 2\dot{\epsilon}_{px}$  a  $\dot{\epsilon}_{pz} = -\dot{\epsilon}_{px}$  a rychlosti smykových složek jsou nulové. Zmínili jsme se také o tom, že na základě principu maxima plastické disipace lze konkrétní tvar funkce  $\mathbf{g}$  odvodit z funkce plasticity  $f$ . Tuto souvislost nyní podrobně rozebereme.

Začneme připomenutím znění principu maxima plastické disipace, který byl formulován v článku 2.2.2: **Plastická disipace, tj. výkon skutečného napětí na skutečné rychlosti plastické deformace, je největší za všech (myšlených) výkonů, které by libovolné plasticky přípustné napětí podávalo na skutečné rychlosti plastické deformace.** Toto tvrzení jsme odvodili pro jednoosou napjatost na základě jednoduchých úvah o vztahu mezi skutečným napětím za plastického přetváření v tahu nebo v tlaku a libovolným jiným plasticky přípustným napětím. V případě jednoosé napjatosti uvedené tvrzení musí nutně platit, a proto je můžeme skutečně považovat za „princip“. Jeho rozšíření na obecnou napjatost má ovšem spíše charakter spekulativního předpokladu, jehož platnost má celou řadu zajímavých a užitečných důsledků, ale v zásadě není zaručena. Místo o principu bychom tedy měli hovořit spíše o postulátu. Brzy uvidíme, že pro určité materiály tento postulát nevede k realistickým výsledkům a není rozumné trvat na jeho platnosti.

Prozatím však *postulát maxima plastické disipace* přijmeme a matematicky jej zapíšeme ve tvaru

$$\max_{\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathcal{S}_{ep}} \boldsymbol{\sigma}^{*T} \dot{\epsilon}_p = \boldsymbol{\sigma}^{*T} \dot{\epsilon}_p = \mathcal{D}(\dot{\epsilon}_p) \quad (2.192)$$

kteří se od (2.90) liší tím, že napětí a deformace jsou popsány sloupcovými maticemi (a tedy označeny tučnými symboly) a výkon napětí na rychlosti deformace je dán skalárním součinem příslušných sloupcových matic, tedy předpisem

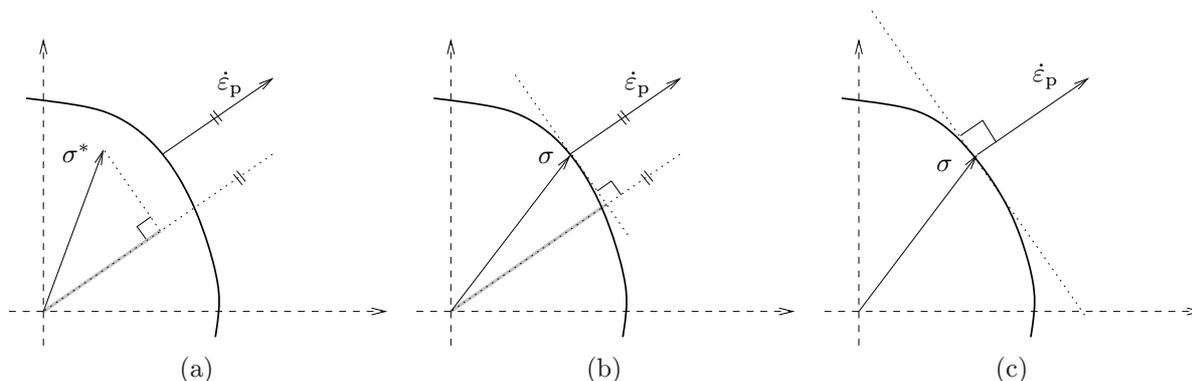
$$\boldsymbol{\sigma}^{*T} \dot{\epsilon}_p = \sigma_x \dot{\epsilon}_{px} + \sigma_y \dot{\epsilon}_{py} + \sigma_z \dot{\epsilon}_{pz} + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{pxy} + \tau_{xz} \dot{\gamma}_{pxz} + \tau_{yz} \dot{\gamma}_{pyz} \quad (2.193)$$

Připomeňme, že  $\boldsymbol{\sigma}^*$  je libovolný plasticky přípustný stav napětí,  $\dot{\epsilon}_p$  je skutečná rychlost plastické deformace a  $\boldsymbol{\sigma}$  je skutečné napětí, za kterého k plastickému přetváření dochází. Symbol  $\mathcal{S}_{ep}$  označuje plasticky přípustnou oblast v prostoru napětí, tj. množinu všech stavů napětí, pro které má funkce plasticity nekladnou hodnotu. Matematicky řečeno,

$$\mathcal{S}_{ep} = \{\boldsymbol{\sigma}^* \mid f(\boldsymbol{\sigma}^*) \leq 0\} \quad (2.194)$$

Konečně  $\mathcal{D}$  označuje disipaci (na jednotku objemu), kterou lze jednoznačně určit z rychlosti plastické deformace, ale její konkrétní vyjádření závisí na vlastnostech materiálu.

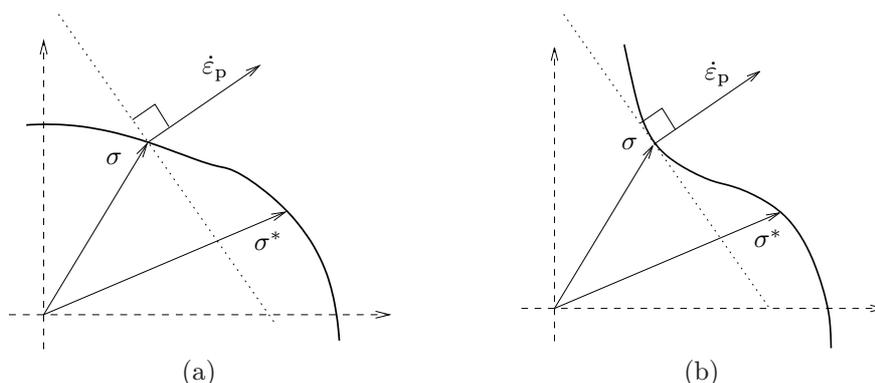
Postulát maxima plastické disipace má velmi názornou geometrickou interpretaci v prostoru napětí, do kterého zároveň ve vhodně upraveném měřítku zakresluje plastické deformace, resp. jejich rychlosti. Pro jednoduchost použijeme zobrazení ve dvojrozměrném prostoru, ale ve skutečnosti se při obecné napjatosti jedná o prostor šestirozměrný. Plasticky přípustná oblast odpovídá určité části tohoto prostoru, jejíž tvar závisí na zvolené funkci plasticity a rozměry závisejí na hodnotách parametrů, které se v této funkci vyskytují. Plasticky přípustné napětí budeme podle potřeby interpretovat jako bod této oblasti, nebo jako vektor spojující počátek s tímto bodem. Rychlost deformace  $\dot{\epsilon}_p$  budeme zobrazovat jako vektor udávající jistý orientovaný směr. Výkon  $\boldsymbol{\sigma}^{*T} \dot{\epsilon}_p$  je skalárním součinem vektorů  $\boldsymbol{\sigma}^*$  a  $\dot{\epsilon}_p$ , který se vypočítá jako součin délky těchto vektorů vynásobený kosinem úhlu, který svírají. Velikost vektoru  $\dot{\epsilon}_p$  je pevně daná, zatímco součin velikosti  $\boldsymbol{\sigma}^*$  a kosinu úhlu mezi  $\boldsymbol{\sigma}^*$  a  $\dot{\epsilon}_p$  odpovídá velikosti průmětu vektoru  $\boldsymbol{\sigma}^*$  na polopřímku vedenou z počátku v orientovaném směru určeném vektorem  $\dot{\epsilon}_p$ , viz obr. 2.36a.



Obrázek 2.36: Grafická interpretace (a) výkonu napětí na rychlosti plastické deformace, (b) plasticky přípustného napětí maximalizujícího výkon na dané rychlosti plastické deformace, (c) normality plastického přetváření.

Podle postulátu maxima plastické disipace určíme skutečné napětí  $\sigma$  jako ten z vektorů  $\sigma^*$  v plasticky přípustné oblasti, který má největší průmět do směru  $\dot{\epsilon}_p$ . Pokud všechny body plasticky přípustné oblasti promítneme kolmo na přímku určenou počátkem a vektorem  $\dot{\epsilon}_p$ , získáme interval, jehož jeden krajní bod<sup>15</sup> je průmětem bodu odpovídajícího skutečnému napětí  $\sigma$ . To je znázorněno na obr. 2.36b. Zároveň je z obr. 2.36c vidět, že vektor  $\dot{\epsilon}_p$  má stejný směr a orientaci jako vnější normála k plasticky přípustné oblasti v bodě odpovídajícím skutečnému napětí  $\sigma$ . Tuto skutečnost později zapíšeme matematicky a získáme tak tzv. sdružený zákon plastického přetváření. Předtím se však ještě krátce zmíníme o dalším významném důsledku postulátu maxima plastické disipace, kterým je konvexita plasticky přípustné oblasti. Pokud by totiž plasticky přípustná oblast nebyla konvexní, body na nekonvexní části její hranice by se při promítání do žádného směru neocitly na hranici intervalu, na který se celá plastická oblast zobrazí, a tudíž by pro žádnou nenulovou rychlost plastické deformace nemohly splňovat postulát maxima plastické disipace. Ukázali jsme tedy, že z postulátu maxima plastické disipace vyplývají dva důležité důsledky:

1. **Normalita:** Pro plastické stavy napětí odpovídající bodům na hladké části plochy plasticity je orientovaný směr přírůstku plastické deformace dán vnější normálou k ploše plasticity.
2. **Konvexita:** Plasticky přípustná oblast je konvexní.



Obrázek 2.37: Narušení postulátu maxima plastické disipace (a) při odchylce od normality, (b) při nekonvexní plasticky přípustné oblasti.

Obr. 2.37a ukazuje, že v případě odchylky přírůstku plastické deformace od normály k ploše plasticity lze najít plasticky přípustné napětí  $\sigma^*$ , pro které je  $\sigma^{*T} \dot{\epsilon}_p > \sigma^T \dot{\epsilon}_p$ , je tedy narušena platnost postulátu maxima plastické disipace. Obr. 2.37b pak ukazuje, že i při zachování normality vede nekonvexní tvar plasticky přípustné oblasti k narušení platnosti postulátu maxima plastické disipace. Normalita a konvexita jsou tedy nutné podmínky platnosti tohoto postulátu. Dá se dokonce ukázat, že jsou to zároveň i podmínky postačující, takže jsou s postulátem ekvivalentní. Postulát maxima plastické disipace tedy můžeme nahradit předpokladem konvexity a normality.

Předpoklad konvexity se týká tvaru plasticky přípustné oblasti, který je jednoznačně určen funkcí plasticity. Tento předpoklad tedy omezuje možné tvary této funkce. Pro izotropní materiál stačí ověřit konvexitu plasticky přípustné oblasti ve Westergaardově prostoru hlavních napětí. Vzpomeneme-li si na plasticky přípustné

<sup>15</sup>Je to samozřejmě ten krajní bod, který leží od počátku na „kladné straně“ určené orientací vektoru  $\dot{\epsilon}_p$ . Opačný krajní bod, ležící na „záporné straně“, je průmětem napětí odpovídající rychlosti plastické deformace  $-\dot{\epsilon}_p$ .

oblasti odpovídající jednotlivým probraným podmínkám plasticity (Tresca: šestiboký hranol, Mises: válec, Mohr-Coulomb: šestiboký jehlan, Rankine: trojboký jehlan, Drucker-Prager: rotační kužel), zjistíme, že se vesměs jedná o konvexní tělesa. Proto všechny zmíněné podmínky plasticity splňují předpoklad konvexity.

Předpoklad normality se týká vztahu mezi směrem přírůstku plastické deformace a plochou plasticity. Z geometrie je známo, že pokud je jistá plocha v prostoru implicitně popsána rovnicí  $f(x, y, z) = 0$ , je směr normály k této ploše v jejím bodě  $(x_0, y_0, z_0)$  určen gradientem funkce  $f$  vyhodnoceným v tomto bodě, tedy vektorem, jehož složkami jsou parciální derivace  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$ ,  $\partial f/\partial z$  vyhodnocené v bodě  $(x_0, y_0, z_0)$ . Totéž platí i pokud prostorové souřadnice  $x, y, z$  nahradíme složkami napětí a pracujeme v prostoru napětí. Dospíváme tedy k závěru, že podle předpokladu normality musí být rychlost plastické deformace jistým násobkem gradientu funkce plasticity vyhodnoceného v bodě odpovídajícím skutečnému napětí, za kterého k plastickému přetváření dochází. Jinými slovy, musí platit

$$\dot{\epsilon}_{px} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})}{\partial \sigma_x} \quad (2.195)$$

$$\dot{\epsilon}_{py} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})}{\partial \sigma_y} \quad (2.196)$$

$$\dot{\epsilon}_{pz} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})}{\partial \sigma_z} \quad (2.197)$$

$$\dot{\gamma}_{pxy} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})}{\partial \tau_{xy}} \quad (2.198)$$

$$\dot{\gamma}_{pxz} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})}{\partial \tau_{xz}} \quad (2.199)$$

$$\dot{\gamma}_{pyz} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})}{\partial \tau_{yz}} \quad (2.200)$$

kde  $\dot{\lambda}$  je libovolný nezáporný násobitel. Omezení znaménka  $\dot{\lambda}$  vyplývá z toho, že vektor rychlosti plastické deformace musí být souhlasně orientován s vnější normálou k plasticky přípustné oblasti; tento požadavek je součástí předpokladu normality. Gradient totiž udává orientovaný směr, ve kterém funkce  $f$  nejrychleji vzrůstá, takže je orientován směrem do oblasti s kladnými hodnotami funkce plasticity, neboli ven z plasticky přípustné oblasti.

Ze struktury rovnic (2.195)–(2.200) je zřejmé, že představují speciální tvar zákona plastického přetváření. Porovnáním s (2.191) zjistíme, že složky funkce  $\mathbf{g}$  jsou rovny parciálním derivacím funkce plasticity podle jednotlivých složek napětí, což znamená, že funkce  $\mathbf{g}$  je gradientem funkce plasticity. V kompaktním maticovém zápisu můžeme (2.195)–(2.200) přepsat jako

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.201)$$

Tento vztah nazýváme *sduženým zákonem plastického přetváření*, přičemž přívlastek „sdužený“ poukazuje na skutečnost, že jde o zákon sdužený s podmínkou plasticity. Ukazuje se tedy, jak užitečným nástrojem je postulát maxima plastické disipace. Jakmile jej přijmeme, stačí pro daný materiál najít vhodnou funkci plasticity a zákon plastického přetváření lze z této funkce jednoznačně odvodit, aniž bychom byli nuceni provádět měření přírůstků plastické deformace za různých stavů napětí. To se ovšem může stát i nevýhodou popsaného postupu, pokud se směr skutečných přírůstků plastické deformace od směru normály k ploše plasticity liší. Taková situace skutečně pro jistou skupinu materiálů nastává a svědčí o tom, že postulát maxima plastické disipace není univerzálně platným principem. Podrobnější vysvětlení možných odchylek od normality poskytneme zanedlouho, nejprve si však ukážeme, jak pracovat s modely normalitu zachovávajícími, pro které platí sdužený zákon plastického přetváření.

### Příklad 2.25: Zákon plastického přetváření sdužený s Misesovou podmínkou plasticity

Pro Misesovu podmínku má funkce plasticity tvar (2.163) a při odvození sduženého zákona plastického přetváření (2.201) je třeba derivovat funkci plasticity  $f$  podle jednotlivých složek napětí. Při výpočtu se omezíme na reprezentativní ukázkou výpočtu derivace podle jednoho normálového napětí, např.  $\sigma_x$ , a jednoho smykového napětí, např.  $\tau_{xy}$ , protože ostatní derivace získáme snadno cyklickou záměnou indexů. Nejprve odvodíme derivace invariantu  $J_2$ , který se ze složek napětí vypočte podle vzorce (2.156). Příslušné derivace jsou

$$\frac{\partial J_2(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{6}[2(\sigma_x - \sigma_y) + 2(\sigma_x - \sigma_z)] = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) = s_x \quad (2.202)$$

$$\frac{\partial J_2(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \tau_{xy}} = 2\tau_{xy} \quad (2.203)$$

Přitom při poslední úpravě ve (2.202) jsme využili vztahu (B.38), díky kterému se výsledek výrazně zjednodušil.

Podle pravidla pro derivaci složené funkce teď můžeme vypočítat

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial}{\partial \sigma_x} \left( \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \tau_0 \right) = \frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \frac{\partial J_2(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_x} = \frac{s_x}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \quad (2.204)$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\partial}{\partial \tau_{xy}} \left( \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \tau_0 \right) = \frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \frac{\partial J_2(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \quad (2.205)$$

Zákon plastického přetváření se uplatní pouze, pokud je materiál v plastickém stavu, tedy pokud je splněna podmínka plasticity  $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \tau_0 = 0$ . Proto můžeme výsledek zjednodušit tím, že za  $\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}$  dosadíme  $\tau_0$ . Zákon plastického tečení sdružený s Misesovou podmínkou má tedy (pro model bez zpevnění) tvar

$$\dot{\epsilon}_{px} = \frac{\dot{\lambda} s_x}{2\tau_0}, \quad \dot{\epsilon}_{py} = \frac{\dot{\lambda} s_y}{2\tau_0}, \quad \dot{\epsilon}_{pz} = \frac{\dot{\lambda} s_z}{2\tau_0}, \quad \dot{\gamma}_{pxy} = \frac{\dot{\lambda} \tau_{xy}}{\tau_0}, \quad \dot{\gamma}_{p{xz}} = \frac{\dot{\lambda} \tau_{xz}}{\tau_0}, \quad \dot{\gamma}_{pyz} = \frac{\dot{\lambda} \tau_{yz}}{\tau_0}, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.206)$$

Samotná hodnota rychlosti plastického násobitele  $\dot{\lambda}$  v této souvislosti nehraje roli, důležité jsou poměry mezi rychlostmi jednotlivých složek plastické deformace. Můžeme proto zavést mírně upravený plastický násobitel  $\dot{\lambda}^* = \dot{\lambda}/2\tau_0$  a přepsat (2.206) jako

$$\dot{\epsilon}_{px} = \dot{\lambda}^* s_x, \quad \dot{\epsilon}_{py} = \dot{\lambda}^* s_y, \quad \dot{\epsilon}_{pz} = \dot{\lambda}^* s_z, \quad \dot{\gamma}_{pxy} = 2\dot{\lambda}^* \tau_{xy}, \quad \dot{\gamma}_{p{xz}} = 2\dot{\lambda}^* \tau_{xz}, \quad \dot{\gamma}_{pyz} = 2\dot{\lambda}^* \tau_{yz}, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.207)$$

V maticovém tvaru lze výsledek přepsat jako

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\lambda}^* \mathbf{P} \mathbf{s} \quad (2.208)$$

Všimněte si, že vzhledem k přítomnosti faktorů „2“ u smykových složek bylo třeba použít škálovací matici  $\mathbf{P}$ .

Z odvozených vztahů je vidět, že pro tzv. sdružený Misesův model (pružnoplastický model s Misesovou podmínkou plasticity a sdruženým zákonem plastického přetváření) jsou poměry mezi přírůstky plastických protažení určeny poměry mezi normálovými složkami deviatorického napětí. Hydrostatická část napětí nehraje žádnou roli, podobně jako neměla žádný vliv na podmínku plasticity. Je známo, že součet deviatorických normálových napětí je vždy nulový (viz (B.42)), takže také součet plastických protažení  $\epsilon_{px} + \epsilon_{py} + \epsilon_{pz} = \epsilon_{pV}$  zůstává v průběhu plastického přetváření nulový. To znamená, že pro sdružený Misesův model je plastická část objemové deformace nulová. Jinými slovy, plastická deformace má ryze deviatorický charakter a veškeré změny objemu jsou pružné. To je v souladu s idealizovanou představou plastického pokluzu, při kterém se nemění objem krystalu. I na makroskopické úrovni, kde mají kovy polykrystalický charakter, nasvědčují experimentální výsledky tomu, že plastické přetváření probíhá za konstantního objemu vzorku. Postulát maxima plastické disipace tedy vede k velmi rozumnému tvaru zákona plastického přetváření. V této souvislosti je zajímavé odvodit výraz pro hustotu plastické disipace

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = (\sigma_m \mathbf{i} + \mathbf{s})^T \dot{\lambda}^* \mathbf{P} \mathbf{s} = \frac{\dot{\lambda}}{2\tau_0} (\sigma_m \mathbf{i}^T \mathbf{P} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{P} \mathbf{s}) = \frac{\dot{\lambda}}{2\tau_0} 2J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\dot{\lambda}}{2\tau_0} 2\tau_0^2 = \dot{\lambda} \tau_0 \quad (2.209)$$

Při úpravách jsme využili mimo jiné toho, že  $\mathbf{i}^T \mathbf{P} = \mathbf{i}$  a  $\mathbf{i}^T \mathbf{s} = 0$ . Díky druhému z těchto vztahů zcela vypadne člen obsahující střední napětí  $\sigma_m$ , což souvisí s tím, že plastická deformace má ryze deviatorický charakter a hydrostatická část napětí na ní nekoná žádnou práci. Podle odvozeného vzorce (2.209) je výkon disipovaný v jednotce objemu součinem rychlosti plastického násobitele a meze kluzu ve smyku.

Pro přiblížení názorného významu odvozeného zákona (2.208) se zamyslíme nad charakterem plastického přetváření při základních typech namáhání.

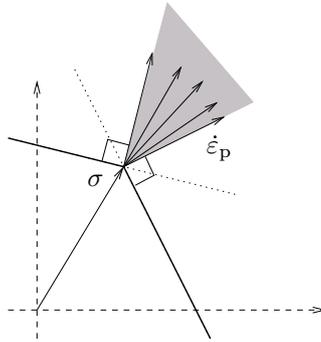
1. Pro jednoosý tah ve směru osy  $x$  je jedinou nenulovou složkou napětí  $\sigma_x$ , ale deviatorické napětí má tři nenulové složky  $s_x = \frac{2}{3}\sigma_x$  a  $s_y = s_z = -\frac{1}{3}\sigma_x$ . Podle (2.207) bude při plastickém přetváření podélné protažení  $\epsilon_{px}$  kladné a příčná protažení  $\epsilon_{py} = \epsilon_{pz}$  záporná, přičemž jejich poměr bude  $\epsilon_{px} : \epsilon_{py} = 2 : (-1)$ .
2. Pro jednoosý tlak bude situace obdobná, jen bude podélné protažení záporné a příčná kladná.
3. Pro čistý smyk je při vhodné volbě soustavy souřadnic jedinou nenulovou složkou deviatorického napětí  $\tau_{xy}$  a podle (2.207) vzniká pouze smyková plastická deformace  $\gamma_{pxy}$ .
4. Pro dvojosý tah nebo tlak se stejnými hodnotami napětí  $\sigma_x$  a  $\sigma_y$  jsou nenulovými složkami deviatorického napětí  $s_x = s_y = \frac{1}{3}\sigma_x$  a  $s_z = -\frac{2}{3}\sigma_x$ . Plastické deformace tedy budou v poměru  $\epsilon_{px} : \epsilon_{py} : \epsilon_{pz} = 1 : 1 : (-2)$ .

Je zřejmé, že ve všech uvedených případech plastická deformace nevede ke změně objemu.

□

Při formulaci předpokladu normality na str. 97 jsme se zmínili o tom, že jeho platnost je omezena na hladké části plochy plasticity, tj. na ty její body, ve kterých je jednoznačně definována tečná rovina a normála. V případě Misesovy podmínky je plocha plasticity hladká ve všech svých bodech (ve Westergaardově prostoru je to válcová plocha). Pro ostatní probrané podmínky však existují na ploše plasticity některé body, ve kterých se tato plocha „lomí“ a její tečná rovina není jednoznačně určena. Například pro Trescovu podmínku se jedná o body na šesti

přímkách rovnoběžných s hydrostatickou osou, které se v deviatorickém řezu jeví jako vrcholy šestiúhelníka. Jde o hrany šestibokého hranolu, který je Trescovou plochou plasticity. Podobně pro Mohrovo-Coulombovu (resp. Rankinovu) podmínku je plochou plasticity šestiboký (resp. trojboký) jehlan a tečná rovina není jednoznačně určena na jeho šesti (resp. třech) hranách. Druckerova-Pragerova plocha plasticity (tedy rotační kužel) je hladká všude s výjimkou vrcholu ležícího na hydrostatické ose. Otázka je, jak se pro stavy napětí odpovídající takovým singulárním bodům plochy plasticity určí směr přírůstku plastické deformace. Tento směr z postulátu maxima plastické disipace jednoznačně nevyplývá, nicméně je tímto postulátem omezen. Ve dvourozměrném prostoru napětí je to graficky znázorněno na obr. 2.38. Stále musí platit, že se celá plasticky přípustná oblast nachází po jedné straně přímkou vedené zkoumaným singulárním bodem kolmo na vektor rychlosti plastické deformace. Tato podmínka je splněna, pokud se vektor rychlosti plastické deformace nalézá v sektoru vyznačeném na obr. 2.38 šedou barvou.



Obrázek 2.38: Přípustné směry přírůstků plastické deformace v singulárním bodě plochy plasticity.

Předpoklad normality je zde třeba chápat v zobecněném smyslu. Existují matematické nástroje umožňující popsat zákon plastického přetváření ve tvaru velmi podobném (2.201), přičemž se pojem gradientu nahradí tzv. subgradientem. Tento formalizovaný popis ale překračuje rámec našeho textu a čtenář se s ním může podrobněji seznámit ve specializované literatuře (např. Maugin, 1992, nebo Jirásek a Bažant, 2002). Z uvedených informací je snad dostatečně zřejmé, v čem spočívají výhody modelů pracujících s hladkými (spojitě diferencovatelnými) funkcemi plasticity, pro které můžeme sdružený zákon plastického přetváření zapsat ve tvaru (2.201) při jakémkoli stavu napětí.

Nyní obrátíme pozornost k případům, kdy sdružený zákon nepopisuje dostatečně přesně skutečný vývoj plastických deformací. K tomu dochází zejména pro materiály s vnitřním třením. Podstatu problému lze nejlépe osvětlit konkrétním příkladem a jeho následným rozбором.

### Příklad 2.26: Zákon plastického přetváření sdružený s Druckerovou-Pragerovou podmínkou plasticity

Začneme podobně jako v příkladu (2.25) pomocným výpočtem derivací invariantů podle složek napětí. Pro invariant  $J_2$  jsme příslušné derivace již odvodili, viz (2.202)–(2.203). Druckerova-Pragerova funkce plasticity (2.181) závisí kromě  $J_2$  ještě na středním napětí  $\sigma_m$ , které je podle své definice (B.15) průměrem normálových napětí. Proto jsou derivace  $\sigma_m$  podle smykových složek nulové a derivace podle normálových složek jsou

$$\frac{\partial \sigma_m(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial \sigma_m(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial \sigma_m(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{3} \quad (2.210)$$

Teď už můžeme zderivovat Druckerovu-Pragerovu funkci plasticity:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial}{\partial \sigma_x} \left( 3\alpha_\phi \sigma_m(\boldsymbol{\sigma}) + \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \tau_0 \right) = 3\alpha_\phi \frac{\partial \sigma_m(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_x} + \frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \frac{\partial J_2(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_x} = \alpha_\phi + \frac{s_x}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \quad (2.211)$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\partial}{\partial \tau_{xy}} \left( 3\alpha_\phi \sigma_m(\boldsymbol{\sigma}) + \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \tau_0 \right) = 3\alpha_\phi \frac{\partial \sigma_m(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \tau_{xy}} + \frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \frac{\partial J_2(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \quad (2.212)$$

Na rozdíl od příkladu 2.25 už za  $\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}$  nelze dosadit  $\tau_0$ , protože podmínka plasticity je jiná. Zákon plastického tečení sdružený s Druckerovou-Pragerovou podmínkou má proto (pro model bez zpevnění) poněkud složitější tvar

$$\dot{\epsilon}_{px} = \dot{\lambda} \left( \alpha_\phi + \frac{s_x}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \right), \quad \dot{\epsilon}_{py} = \dot{\lambda} \left( \alpha_\phi + \frac{s_y}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \right), \quad \dot{\epsilon}_{pz} = \dot{\lambda} \left( \alpha_\phi + \frac{s_z}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \right) \quad (2.213)$$

$$\dot{\gamma}_{pxy} = \dot{\lambda} \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}}, \quad \dot{\gamma}_{pxz} = \dot{\lambda} \frac{\tau_{xz}}{\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}}, \quad \dot{\gamma}_{pyz} = \dot{\lambda} \frac{\tau_{yz}}{\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}}, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.214)$$

Rychlost objemové plastické deformace

$$\dot{\varepsilon}_{pV} = \dot{\varepsilon}_{px} + \dot{\varepsilon}_{py} + \dot{\varepsilon}_{pz} = \dot{\lambda} \left( 3\alpha_\phi + \frac{s_x + s_y + s_z}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \right) = 3\dot{\lambda}\alpha_\phi \quad (2.215)$$

už na rozdíl od zákona sdruženého s Misesovou podmínkou není nulová. Jelikož součinitel vnitřního tření  $\alpha_\phi$  je kladný, při plastickém přetváření se podle tohoto modelu objem zvětšuje.

Například při jednoosém tlaku je  $\sigma_x < 0$ ,  $\sigma_y = \sigma_z = 0$  a  $\sigma_m = \sigma_x/3 < 0$ , takže invariant  $J_2$  můžeme vyhodnotit podle (2.156) jako  $J_2 = \sigma_x^2/3$ . Podmínka plasticity nabývá konkrétního tvaru

$$3\alpha_\phi \frac{\sigma_x}{3} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{3}} = \tau_0 \quad (2.216)$$

a protože pro  $\sigma_x < 0$  je  $\sqrt{\sigma_x^2/3} = -\sigma_x/\sqrt{3}$ , bude plastického stavu dosaženo pro

$$\sigma_x = -\frac{\tau_0}{1/\sqrt{3} - \alpha_\phi} \quad (2.217)$$

Pro daný typ namáhání je

$$\frac{s_x}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} = \frac{\frac{2}{3}\sigma_x}{-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{s_y}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} = \frac{-\frac{1}{3}\sigma_x}{-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_x} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (2.218)$$

takže podle zákona plastického přetváření (2.213) dostaneme rychlosti normálových složek plastické deformace

$$\dot{\varepsilon}_{px} = \dot{\lambda} \left( \alpha_\phi - \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{py} = \dot{\varepsilon}_{pz} = \dot{\lambda} \left( \alpha_\phi + \frac{\sqrt{3}}{6} \right), \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.219)$$

a rychlosti smykových složek plastické deformace jsou samozřejmě nulové. Součinitel  $\alpha_\phi$  je obvykle o řád menší než 1, plastická deformace v podélném směru  $x$  je proto záporná, zatímco v příčných směrech  $y$  a  $z$  je kladná. Poměr absolutních hodnot příčné a podélné plastické deformace je

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{py}}{|\dot{\varepsilon}_{px}|} = \frac{\sqrt{3}/6 + \alpha_\phi}{\sqrt{3}/3 - \alpha_\phi} \quad (2.220)$$

Je vidět, že pro  $\alpha_\phi = 0$  dostáváme poměr 1:2 odpovídající zákonu sdruženému s Misesovou podmínkou, pro který nedocházelo k plastické změně objemu. Pro  $\alpha_\phi > 0$  bude příčná plastická deformace více než polovina podélné plastické deformace a objem se při plastickém přetváření bude zvětšovat.

□

Jak jsme ukázali v příkladu 2.25, při použití zákona sdruženého s Misesovou podmínkou má plastická deformace výhradně deviatorický charakter, tj. při plastickém přetváření nedochází ke změně objemu. Souvisí to též s předpokládaným mechanismem plastického přetváření pokluzem podél krystalografických rovin. Při takovém pokluzu se vzdálenost mezi sousedními vrstvami atomů nemění, takže objem krystalu zůstává zachován a mění se pouze jeho tvar. To je ovšem idealizovaná představa, ke které má blízko přetváření kovů. Naproti tomu u materiálů s vnitřním třením probíhá pokluz podél drsných, nerovných ploch, což má dva významné důsledky. Za prvé musí smykové napětí překonat nejen soudržnost materiálu, ale i tření, které je úměrné přítláčnému normálovému napětí působícímu kolmo na kluznou plochu. V modelu se to projeví závislostí funkce plasticity na středním napětí (pro Druckerovu-Pragerovu podmínku) nebo na průměru maximálního a minimálního hlavního napětí (pro Mohrovu-Coulombovu podmínku). Za druhé v důsledku drsnosti kluzných ploch dochází při pokluzu k oddalování částí, které se vůči sobě posouvají, takže při plastickém přetváření se objem zvětšuje. Tento jev označujeme za *plastickou dilataci* a ve skutečných materiálech s vnitřním třením jej lze skutečně pozorovat.

Až potud bylo vše v souladu s výsledky předcházejících dvou příkladů. Problém je v tom, že skutečná plastická dilatace naměřená pro reálné materiály je často podstatně menší, než by odpovídalo její předpovědi na základě sdruženého zákona plastického přetváření. Pokud se může zkoumaný objem materiálu (např. jistá oblast nosníku, ve které dochází k plastickému přetváření) volně rozpínat, vede nepřesnost při popisu plastické dilatace pouze k chybám v předpovědi některých složek deformace, což obvykle není až tak podstatné. Ovšem pokud je rozpínání zabráněno nebo je nějak omezeno (např. pružným materiálem po stranách plastické oblasti nebo výtuzí probíhající napříč plastickou oblastí), může nepřesný popis plastické dilatace vést k závažným chybám při výpočtu napětí, které se pak dále projeví při odhadu mezní únosnosti konstrukce a mohou jej znehodnotit. Proto je vhodné mít k dispozici i modely, pro které lze míru plastické dilatace ovlivnit volbou samostatného parametru, nezávislého na parametrech použitých v podmínce plasticity.

Obecně by bylo možné zákon plastického přetváření formulovat ve tvaru (2.191) a snažit se nalézt jednotlivé složky funkce  $\mathbf{g}$  na základě experimentálních výsledků. To by však bylo velmi komplikované a pracné. Vhodným kompromisem mezi sdruženým zákonem plastického přetváření (2.201) a zcela obecným zákonem (2.191) je

formulace definující  $\mathbf{g}$  jako gradient jisté skalární funkce  $g$ , ne nutně totožné s funkcí plasticity. Taková pomocná funkce  $g$  se nazývá *plastický potenciál* a příslušný *nesdružený zákon plastického přetváření* odvozený z plastického potenciálu má tvar

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.221)$$

Konkrétní tvar funkce  $g$  definující plastický potenciál může být podobný funkci plasticity, ale s pozměněnými hodnotami některých parametrů, které umožňují lepší popis skutečných plastických deformací. Navíc nehraje roli samotná hodnota funkce  $g$ , ale její gradient, takže lze vypustit případné konstantní členy, které na parciální derivace nemají žádný vliv. Ukážeme si jednoduchý příklad s plastickým potenciálem založeným na modifikaci Druckerovy-Pragerovy funkce plasticity.

### Příklad 2.27: Druckerův-Pragerův model s nesdruženým zákonem plastického přetváření

Pro model s Druckerovou-Pragerovou podmínkou plasticity závisí poměr tahové a tlakové pevnosti jen na součiniteli vnitřního tření  $\alpha_\phi$  (viz tab. 2.10), takže danému poměru  $f_t:f_c$  jednoznačně odpovídá jistá hodnota  $\alpha_\phi$ . Pokud použijeme sdružený zákon plastického přetváření, je tím určena i míra plastické dilatace. Abychom plastickou dilataci mohli ovlivnit nezávisle na poměru tahové a tlakové pevnosti, použijeme při formulaci nesdruženého zákona plastického přetváření plastický potenciál

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = 3\alpha_\psi \sigma_m(\boldsymbol{\sigma}) + \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} \quad (2.222)$$

ve kterém  $\alpha_\psi$  je *koeficient dilatace*. Od funkce plasticity (2.181) se plastický potenciál (2.222) liší tím, že součinitel vnitřního tření  $\alpha_\phi$  je nahrazen jiným součinitelem  $\alpha_\psi$ . Vypustili jsme také konstantu  $-\tau_0$ , která nemá žádný vliv na gradient  $\partial g/\partial \boldsymbol{\sigma}$ . Derivace plastického potenciálu (2.222) se vypočtou stejným postupem, jakým se v příkladu 2.26 vypočetly derivace funkce plasticity, takže stačí v zákonu plastického přetváření (2.213)–(2.214) nahradit parametr  $\alpha_\phi$  parametrem  $\alpha_\psi$ . Je zřejmé, že vztahy (2.214) pro rychlosti plastických smykových deformací se nijak nezmění a vztahy (2.213) pro rychlosti plastických normálových deformací budou mít pro nesdružený zákon tvar

$$\dot{\varepsilon}_{px} = \dot{\lambda} \left( \alpha_\psi + \frac{s_x}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{py} = \dot{\lambda} \left( \alpha_\psi + \frac{s_y}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{pz} = \dot{\lambda} \left( \alpha_\psi + \frac{s_z}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \right) \quad (2.223)$$

Rychlost objemové plastické deformace

$$\dot{\varepsilon}_p V = \dot{\varepsilon}_{px} + \dot{\varepsilon}_{py} + \dot{\varepsilon}_{pz} = \dot{\lambda} \left( 3\alpha_\psi + \frac{s_x + s_y + s_z}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \right) = 3\dot{\lambda}\alpha_\psi \quad (2.224)$$

tedy bude přímo závislá na součiniteli dilatace  $\alpha_\psi$ , a dokonce by volbou záporné hodnoty tohoto součinitele bylo možno popsat tzv. kontraktivní chování, při kterém plastické přetváření způsobuje zmenšení objemu. Pro poměr absolutních hodnot příčné a podélné plastické deformace bude platit

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{py}}{|\dot{\varepsilon}_{px}|} = \frac{\sqrt{3}/6 + \alpha_\psi}{\sqrt{3}/3 - \alpha_\psi} \quad (2.225)$$

V případě nesdruženého Druckerova-Pragerova modelu tedy můžeme pomocí součinitele vnitřního tření  $\alpha_\phi$  ovlivňovat poměr pevností při různých typech namáhání a nezávisle na tom pomocí součinitele dilatace  $\alpha_\psi$  ovlivňovat poměr mezi objemovou a deviatorickou částí plastické deformace.

□

### 2.3.5 Analýza pružnoplastického přetváření

Kompletní přehled základních rovnic pro ideálně pružnoplastický model byl podán v článku 2.3.1 a sestaven do tab. 2.8. V článcích 2.3.2–2.3.4 jsme ukázali řadu způsobů, jak konkrétně definovat funkci plasticity  $f$  a funkci  $\mathbf{g}$  objevující se v zákonu plastického přetváření. Nyní se budeme věnovat analýze základních rovnic a jejich použití při výpočtu vývoje napětí odpovídajícího danému vývoji deformace. Analýzu provedeme pro obecné funkce  $f$  a  $\mathbf{g}$  a teprve v příkladech přistoupíme k volbě jejich konkrétní podoby.

Základní úlohou bude podobně jako pro jednoosé modely výpočet přírůstku napětí odpovídajícího předepsanému přírůstku deformace. Okamžitý stav přitom považujeme za daný, jsou tedy známy okamžité hodnoty veškerých veličin (napětí, celkové deformace, plastické deformace, atd.), ale další přírůstek je předepsán pouze pro celkovou deformaci, zatímco odpovídající přírůstky napětí a plastické deformace je třeba určit ze základních rovnic. Pokud se omezíme na nekonečně malé přírůstky, můžeme místo nich zkoumat rychlosti (což jsou vlastně limity podílu malého přírůstku příslušné veličiny a malého časového intervalu, během něž ke změně došlo).

Nejprve si základní rovnice vhodně upravíme, abychom co nejvíce snížili počet vnitřních proměnných, které hrají jen pomocnou úlohu. Například na základě rozkladu deformace (2.142) můžeme pružnou deformaci zapsat jako rozdíl celkové a plastické, tedy položit  $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p$ , a tento výraz dosadit do zobecněného Hookeova zákona (2.143). Tím je pružná deformace ze základních rovnic zcela vyloučena. Dále přejdeme od hodnot napětí, celkové

a plastické deformace k jejich rychlostem (což je možné, protože matice pružné tuhosti se v čase nemění) a rychlost plastické deformace vyjádříme podle zákona plastického přetváření. Tím se dostaneme ke vztahu

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e = \mathbf{D}_e (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p) = \mathbf{D}_e [\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma})] \quad (2.226)$$

popisujícím závislost rychlosti napětí na rychlosti deformace a rychlosti plastického násobitele. Podmínku nezáporné rychlosti plastického násobitele (která je původně součástí zákona plastického přetváření) přepíšeme spolu s podmínkou plastické přípustnosti a podmínkou komplementarity do společné skupiny tzv. *podmínek zatěžování-odtěžování*

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad \dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.227)$$

Integrací rovnice (2.226) s uplatněním podmínek (2.227) jsme schopni pro daný vývoj celkové deformace určit odpovídající vývoj plastického násobitele a napětí. Jako vedlejší produkt získáme též popis vývoje plastické deformace. Užitečné je opět provést obecnou analýzu základních případů v podobném duchu jako v článku věnovaném jednoosým modelům. Jako obvykle rozlišujeme mezi pružným a plastickým stavem, přičemž v plastickém stavu může dojít k pružnému odtižení (P→E) nebo k plastickému přetváření (P).

Zda je okamžitý stav pružný nebo plastický poznáme snadno z hodnoty funkce plasticity  $f$ , která je v pružném stavu záporná a v plastickém nulová. Pokud je stav pružný, navazující přetvárný proces je také pružný až do okamžiku dosažení plastického stavu. Během pružného procesu zůstává plastická deformace konstantní a změna napětí je úměrná změně celkové deformace, tj. platí  $\dot{\lambda} = 0$ ,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \mathbf{0}$  a  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ . Nejzajímavější částí analýzy je rozlišení mezi pružným odtižením (P→E) a plastickým přetvářením (P) v případě, že výchozí stav je plastický. Stejně jako při podobné analýze jednoosých modelů v článku 2.1, i zde hraje důležitou roli výraz pro časovou derivaci funkce plasticity  $\dot{f}$  v závislosti na rychlosti deformace  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  a rychlosti plastického násobitele  $\dot{\lambda}$ . Jelikož funkce plasticity závisí na složkách napětí, které jsou samy funkcemi času, získáme derivaci  $f$  pomocí vzorce pro derivaci složené funkce více proměnných:

$$\frac{df(\boldsymbol{\sigma}(t))}{dt} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_x} \frac{d\sigma_x(t)}{dt} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_y} \frac{d\sigma_y(t)}{dt} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_z} \frac{d\sigma_z(t)}{dt} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \tau_{xy}} \frac{d\tau_{xy}(t)}{dt} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \tau_{xz}} \frac{d\tau_{xz}(t)}{dt} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \tau_{yz}} \frac{d\tau_{yz}(t)}{dt} \quad (2.228)$$

Přitom jsme pro úsporu místa místo obsírného vypisování argumentů funkce  $f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$  psali jen  $f(\boldsymbol{\sigma})$ . Celý vzorec (2.228) se ovšem dá přepsat v maticové podobě jako

$$\frac{df(\boldsymbol{\sigma}(t))}{dt} = \left( \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}(t)}{dt} \quad (2.229)$$

kde  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  je sloupcová matice obsahující parciální derivace  $f$  podle jednotlivých složek napětí, tedy vlastně gradient funkce plasticity  $f$ . Pro jednoduchost budeme gradient  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  označovat symbolem  $\mathbf{f}$ . Dalšího formálního zjednodušení dosáhneme vypuštěním argumentů všech funkcí a náhradou derivace podle času tečkou nad příslušným symbolem. Vztah (2.229) je pak zapsán velmi kompaktně jako

$$\dot{f} = \mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.230)$$

ale k jeho přesné interpretaci je třeba jisté dávky zkušenosti a obezřetnosti. Kompaktní maticový zápis silně zjednodušuje další odvození, neboť do (2.230) teď stačí dosadit za  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  podle (2.226):

$$\dot{f} = \mathbf{f}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}^T \mathbf{D}_e (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{g}) = \mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g} \quad (2.231)$$

Tím končí pomocné úvahy a můžeme se plně soustředit na zkoumání rozdílu mezi pružným odtěžováním a plastickým přetvářením. V prvním případě (P→E) je  $\dot{\lambda} = 0$  a tudíž  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \mathbf{0}$  a  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ , ale toto řešení je přípustné jen za předpokladu, že funkce plasticity neroste, tj. že její časová derivace je nekladná. Po dosažení  $\dot{\lambda} = 0$  do (2.231) můžeme podmínku  $\dot{f} \leq 0$  zapsat jako

$$\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq 0 \quad (2.232)$$

Naproti tomu v případě plastického přetváření (P) je rychlost plastického násobitele nenulová, zatímco funkce plasticity musí zůstávat nulová, takže její časová derivace je také nulová. S využitím vztahu (2.231) lze z podmínky konzistence  $\dot{f} = 0$  vypočítat rychlost plastického násobitele

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g}} \quad (2.233)$$

ale toto řešení je přípustné pouze, pokud výsledek není záporný. Pokud by byl nulový, nastává neutrální případ, a jen pro  $\dot{\lambda} > 0$  dochází skutečně k plastickému přetváření. Příklad (P) je tedy charakterizován podmínkou

$$\frac{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g}} > 0 \quad (2.234)$$

Tabulka 2.11: Klasifikace stavů a procesů pro ideálně pružnoplastický model.

případ	$f(\boldsymbol{\sigma})$	stav	$\dot{\lambda}$	proces	$\dot{f}$	$\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g}$	vztah mezi $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ a $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$
E	$< 0$	pružný	$= 0$	pružný	libovolné	libovolné	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$
P→E	$= 0$	plastický	$= 0$	pružný	$\leq 0$	$\leq 0$	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$
P	$= 0$	plastický	$> 0$	plastický	$= 0$	$> 0$	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$

Dosavadní výsledky rozboru lze shrnout tak, že pokud platí (2.232), nastává pružné odtěžování, a pokud platí (2.234), dochází k plastickému přetváření. Bylo by samozřejmě žádoucí, aby pro libovolnou danou rychlost deformace  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  nastal právě jeden z těchto případů. Pokud by totiž nastaly oba, nebylo by chování modelu základními rovnicemi určeno jednoznačně a není jasné, podle čeho by se materiál „rozhodl“, zda se bude plasticky přetvářet či ne. Pokud by nenastal ani jeden z uvedených případů, byla by situace ještě horší, protože by úloha neměla žádné řešení a přírůstek napětí by pro daný přírůstek deformace nebylo možno vypočítat. Porovnáním (2.232) a (2.234) zjistíme, že tyto případy se navzájem vylučují a přitom doplňují, pokud je jmenovatel zlomku ve (2.234) kladný, tj. pokud platí

$$\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g} > 0 \quad (2.235)$$

Tato podmínka představuje jisté kritérium „rozumnosti“ modelu a brzy ukážeme, že je splněna mimo jiné pro všechny modely se sdruženým zákonem plastického přetváření. Platí-li (2.235), lze kritérium plastického přetváření (2.234) přepsat ve tvaru doplňkovém k (2.232), tedy jako

$$\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \quad (2.236)$$

Výsledky rozboru jsou shrnuty v tab. 2.11. Je poučné se zamyslet nad její souvislostí s podobnou tabulkou 2.3, sestavenou pro jednoosé modely. V případě jednoosé napjatosti nahradíme sloupcové matice  $\boldsymbol{\sigma}$  a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  složkami  $\sigma$  a  $\varepsilon$ , matici pružné tuhosti  $\mathbf{D}_e$  modulem pružnosti  $E$  a sloupcové matice  $\mathbf{f}$  i  $\mathbf{g}$  výrazem  $\text{sgn } \sigma$ . Tabulka 2.11 pak přejde v tabulku 2.3. Zatím jsme ovšem nevysvětlili vztah uvedený v posledním řádku a posledním sloupci tabulky, který popisuje závislost rychlosti napětí na rychlosti deformace při plastickém přetváření. Pro jednoosý model bylo při plastickém přetváření napětí konstantní a jeho rychlost nulová. Ukážeme, že pro obecný trojosý model je situace zajímavější a napětí se v průběhu plastického přetváření může měnit, a to i pro materiál bez zpevnění (ideálně pružnoplastický).

### 2.3.6 Pružnoplastická tuhost

Jak již bylo řečeno, při pružném přetváření zůstává plastická deformace konstantní a vztah mezi přírůstkem napětí a deformace je dán zobecněným Hookeovým zákonem. Pro rychlosti napětí a deformace tedy platí  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , kde  $\mathbf{D}_e$  je matice pružné tuhosti. Podobný přírůstkový vztah, ale s jinou maticí, lze odvodit i pro plastické přetváření. Stačí do výrazu pro rychlost napětí (2.226) dosadit rychlost plastického násobitele vyjádřenou podle (2.233):<sup>16</sup>

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{g}) = \mathbf{D}_e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{g} \dot{\lambda}) = \mathbf{D}_e \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{g} \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g}} \right) = \left( \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \mathbf{g} \mathbf{f}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}_{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.237)$$

Ve výsledném vztahu mezi rychlostmi napětí a deformace se tedy objevuje *matice pružnoplastické tuhosti*

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \mathbf{g} \mathbf{f}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g}} \quad (2.238)$$

kteřá v průběhu plastického přetváření hraje roli tečné (okamžité) tuhosti. Jak jsme předem upozornili, tato matice není nulová, přestože náš model zatím neuvažuje zpevnění. Za obecných podmínek totiž při plastickém přetváření ideálně pružnoplastického materiálu nemusí být napětí konstantní, ale může se měnit, přitom ale musí zůstat na ploše plasticity. Pro jednoosý model se plocha plasticity zredukuje na dva izolované body (meze kluzu v tahu a v tlaku) a při plastickém přetváření musí napětí zůstat v jednom z těchto bodů, jeho rychlost je tedy nutně nulová. Skutečně, pokud za  $\mathbf{D}_e$  dosadíme  $E$  a za  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{g}$  dosadíme  $\text{sgn } \sigma$ , dostaneme na pravé straně (2.238) nulu.

<sup>16</sup>Při úpravách v (2.237) součin  $\dot{\lambda} \mathbf{g}$  nejprve přepisujeme v opačném pořadí jako  $\mathbf{g} \dot{\lambda}$ . To je přípustné, protože jde o součin skaláru (číslo)  $\dot{\lambda}$  se sloupcovou maticí  $\mathbf{g}$ , při kterém se číslem  $\dot{\lambda}$  násobí každá složka  $\mathbf{g}$  zvlášť a násobení dvou reálných čísel je samozřejmě komutativní. Naproti tomu násobení matic komutativní není, dokonce se může stát, že záměnou pořadí v součinu získáme zcela jiný objekt. Například  $\mathbf{f}^T \mathbf{g}$  je skalární součin sloupcových matic  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{g}$ , jehož výsledkem je jedno číslo, zatímco  $\mathbf{g} \mathbf{f}^T$  je tzv. dyadický součin, jehož výsledkem je čtvercová matice. Důvodem, proč v (2.237) nejprve přehazujeme pořadí činitelů  $\dot{\lambda}$  a  $\mathbf{g}$ , je snaha získat výraz, ve kterém rychlost deformace  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  zůstane zcela na konci, abychom ji pak mohli vytknout za závorku.

**Příklad 2.28: Matice pružnoplastické tuhosti pro Misesovu podmínku plasticity a sdružený zákon plastického přetváření**

V příkladu 2.25 jsme vypočetli parciální derivace invariantu  $J_2$  podle jednotlivých složek napětí; viz vztahy (2.202)–(2.203). V maticové podobě bychom výsledek mohli prezentovat jako<sup>17</sup>

$$\frac{\partial J_2(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{P}\mathbf{s} \quad (2.239)$$

kde  $\mathbf{P}$  je škálovací matice definovaná v (B.24) a  $\mathbf{s}$  je deviatorická část napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ . Uplatněním pravidel pro derivaci složené funkce snadno získáme gradient  $\mathbf{f}$  Misesovy funkce plasticity (2.163):

$$\mathbf{f} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \tau_0 \right) = \frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})}} \frac{\partial J_2(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{P}\mathbf{s}}{2\tau_0} \quad (2.240)$$

Při poslední úpravě jsme využili toho, že během plastického přetváření je obecně  $f = 0$ , z čehož v daném případě ideálně pružnoplastického modelu s Misesovou podmínkou plyne  $\sqrt{J_2} = \tau_0$ . Zároveň pro model se sdruženým zákonem plastického přetváření platí  $\mathbf{g} = \mathbf{f}$ .

Při odvození konkrétní podoby matice pružnoplastické tuhosti podle (2.238) potřebujeme nejprve vyhodnotit součiny  $\mathbf{D}_e \mathbf{f}$ ,  $\mathbf{D}_e \mathbf{g}$  a  $\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g}$ . Matice pružné tuhosti  $\mathbf{D}_e$  je pro izotropní materiál dána vztahem (B.57) z dodatku B, podle kterého je

$$\mathbf{D}_e = K \mathbf{i} \mathbf{i}^T + 2G \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_D \quad (2.241)$$

Přítom význam symbolů  $\mathbf{i}$  a  $\mathbf{I}_D$  je definován v dodatku B, viz (B.35) a (B.55). Pokud maticí  $\mathbf{D}_e$  násobíme sloupcovou maticí odpovídající ryze deviatorickému stavu, uplatní se pouze její druhá část. V našem případě je gradient  $\mathbf{f}$  skalárním násobkem deviatorické části napětí  $\mathbf{s}$ , má tedy ryze deviatorický charakter a můžeme psát

$$\mathbf{D}_e \mathbf{f} = \mathbf{D}_e \mathbf{g} = \mathbf{D}_e \frac{\mathbf{P}\mathbf{s}}{2\tau_0} = 2G \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_D \frac{\mathbf{P}\mathbf{s}}{2\tau_0} = \frac{G\mathbf{s}}{\tau_0} \quad (2.242)$$

protože  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_D \mathbf{P} = \mathbf{I}_D$  a  $\mathbf{I}_D \mathbf{s} = \mathbf{s}$ . Po dalším přenásobení zleva transpozicí sloupcové matice  $\mathbf{f}$  dostaneme

$$\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g} = \left( \frac{\mathbf{P}\mathbf{s}}{2\tau_0} \right)^T \frac{G\mathbf{s}}{\tau_0} = \frac{G}{2\tau_0^2} \mathbf{s}^T \mathbf{P}\mathbf{s} = \frac{G}{2\tau_0^2} 2J_2 = \frac{G}{2\tau_0^2} 2\tau_0^2 = G \quad (2.243)$$

Zde jsme využili symetrie matice  $\mathbf{P}$  (tedy vztahu  $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$ ), vztahy (2.154) pro invariant  $J_2$  a opět vztahu  $\sqrt{J_2} = \tau_0$ , platného pro uvažovaný model během plastického přetváření. Po dosazení (2.241)–(2.243) do (2.238) pak získáme pro matici pružnoplastické tuhosti sdruženého Misesova modelu vzorec

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \mathbf{g} \mathbf{f}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g}} = K \mathbf{i} \mathbf{i}^T + 2G \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_D - \frac{G\mathbf{s}(G\mathbf{s})^T}{G\tau_0^2} = K \mathbf{i} \mathbf{i}^T + 2G \mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_D - \frac{G}{\tau_0^2} \mathbf{s} \mathbf{s}^T \quad (2.244)$$

Například při plastickém přetváření za jednoosého tahu je  $\sigma_x = \sigma_0 = \sqrt{3}\tau_0$  a ostatní složky napětí jsou nulové, takže deviatorická část napětí je popsána sloupcovou maticí

$$\mathbf{s} = \frac{\sqrt{3}\tau_0}{3} \{2, -1, -1, 0, 0, 0\}^T \quad (2.245)$$

a po rozepsání (2.244) a jednoduchých úpravách nakonec dostaneme

$$\mathbf{D}_{ep} = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.246)$$

Přestože jde o jednoosou napjatost a ideálně pružnoplastický materiál, matice tečné tuhosti už není nulová, protože používáme trojosý model. Odpovídající vztahy mezi rychlostmi napětí a deformace (2.237) bychom mohli po složkách přepsat jako

$$\dot{\sigma}_x = K(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z) \quad (2.247)$$

$$\dot{\sigma}_y = K(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z) + G(\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z) \quad (2.248)$$

$$\dot{\sigma}_z = K(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z) + G(\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_y) \quad (2.249)$$

$$\dot{\tau}_{xy} = G\dot{\gamma}_{xy} \quad (2.250)$$

$$\dot{\tau}_{xz} = G\dot{\gamma}_{xz} \quad (2.251)$$

$$\dot{\tau}_{yz} = G\dot{\gamma}_{yz} \quad (2.252)$$

<sup>17</sup>K tomuto výsledku bychom mohli také dospět přímo, a to diferenciací vztahu (2.154), tedy kvadratické formy  $J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{P}\mathbf{s}$ .

Pokud je v průběhu plastického přetváření zachována jednoosá napjatost, musí být  $\dot{\sigma}_y = \dot{\sigma}_z = 0$  a ze vztahů (2.248)–(2.249) pak plyne  $\dot{\epsilon}_y = \dot{\epsilon}_z$  a  $\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = 0$ , takže podle (2.247) je také  $\dot{\sigma}_x = 0$ . V jednoosém modelu je předpoklad  $\sigma_y = \sigma_z = 0$  přímo zabudován, což nutně vede v režimu plastického přetváření ke vztahu  $\dot{\sigma}_x = 0$  a tedy k nulové tečné tuhosti. Trojosý model ale postihuje i případy, kdy je sice plastického stavu dosaženo za jednoosého tahu, ale v jeho průběhu se charakter napjatosti mění. Vidíme tedy, že podle (2.247) se může napětí  $\sigma_x$  měnit i během plastického přetváření, ovšem musí to být doprovázeno změnou aspoň jedné další normálové složky napětí. Při změně napětí se pochopitelně změní i matice tečné tuhosti.

Čtenář může snadno ověřit, že v případě namáhání smykem s jedinou nenulovou složkou napětí  $\tau_{xy}$  začne plastické přetváření při dosažení hodnoty  $\tau_{xy} = \tau_0$  a matice  $\mathbf{D}_{ep}$  se od matice pružné tuhosti bude lišit pouze tím, že tuhostní koeficient  $G$  na čtvrté pozici na hlavní diagonále bude nahrazen nulou. Znamená to, že rychlost  $\dot{\tau}_{xy}$  je pak nutně nulová, ale pro ostatní složky napětí zůstává nadále v platnosti zobecněný Hookeův zákon.

□

Matice pružnoplastické tuhosti (2.246) odvozená v předcházejícím příkladu je symetrická. To není náhoda, ale obecná vlastnost všech pružnoplastických modelů pracujících se sdruženým zákonem plastického přetváření. Pro takové modely je totiž  $\mathbf{g} = \mathbf{f}$  a čítatel ve zlomku na pravé straně (2.238) pak představuje symetrickou matici, jak lze snadno ověřit jeho transpozicí. Matice pružné tuhosti  $\mathbf{D}_e$  je samozřejmě vždy symetrická a symetrie není narušena ani dělením matice  $\mathbf{D}_e \mathbf{g} \mathbf{f}^T \mathbf{D}_e$  skalárem  $\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{f}$ . Naproti tomu pro modely pracující s nesdruženým zákonem plastického přetváření je matice pružnoplastické tuhosti obecně nesymetrická, což je třeba vzít v úvahu při použití numerických metod.

Vraťme se však ještě na okamžik ke jmenovateli zlomku v (2.238), tedy k výrazu  $\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g}$ . Pouze při kladné hodnotě tohoto výrazu je zaručena jednoznačnost řešení pro libovolný předepsaný vývoj deformace, jak jsme konstatovali při obecné analýze a zapsali podmínkou (2.235). Pro modely se sdruženým zákonem je podmínka  $\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{f} > 0$  splněna pro libovolné nenulové  $\mathbf{f}$ , protože matice  $\mathbf{D}_e$  je pozitivně definitní. Matematicky to lze ověřit např. rozložením  $\mathbf{f}$  na objemovou a deviatorickou část a využitím rozkladu  $\mathbf{D}_e$  podle (2.241). Fyzikálním důvodem pro pozitivní definitnost matice pružné tuhosti je skutečnost, že výraz  $\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}$  odpovídá dvojnásobku energie uložené v pružné deformaci  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a je proto pro nenulové  $\boldsymbol{\varepsilon}$  vždy kladný. Pro nesdružené zákony plastického přetváření není kladnost výrazu  $\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g}$  automaticky zaručena a je třeba ji pro konkrétní model ověřit. Při výrazných odchylkách od normality by mohlo dojít k porušení podmínky (2.235) a tím ke ztrátě jednoznačnosti odezvy modelu.

### 2.3.7 Zpevnění

Na závěr celé kapitoly o teorii plasticity ještě naznačíme, jak do obecných modelů pro trojosou napjatost zahrnout vliv zpevnění. V případě jednoosé napjatosti rozumíme zpevněním postupnou změnu okamžité meze kluzu v průběhu plastického přetváření. V článcích 2.1.5 a 2.1.6 jsme se seznámili se dvěma základními typy zpevnění — kinematickým a izotropním. Pro jednoosý model je plasticky přípustnou oblastí interval (od meze kluzu v tlaku do meze kluzu v tahu), který se při kinematickém zpevnění posouvá, ale jeho velikost zůstává zachována, zatímco při izotropním zpevnění se zvětšuje, ale jeho střed zůstává v počátku. Tuto představu lze snadno zobecnit pro plasticky přípustnou oblast ve vícerozměrném prostoru napětí, odpovídající víceosé napjatosti. Při kinematickém zpevnění se celá plasticky přípustná oblast přesouvá jako tuhé těleso, přičemž její tvar a rozměry zůstávají beze změny. Při izotropním zpevnění se plastická oblast rozpíná, přičemž její tvar se nemění, ale všechny rozměry se proporcionálně zvětšují.

Od této názorné geometrické představy je již jen krůček k odpovídajícímu matematickému popisu. Navíc se můžeme inspirovat tvary funkce plasticity při kinematickém a izotropním zpevnění pro jednoosé modely. Pro kinematické zpevnění hrál důležitou roli pojem zpětného napětí, které představovalo napětí v myšlené pružině připojené paralelně k plastickému členu, viz obr. 2.11a. Podmínka plasticity pro ideálně pružnoplastický materiál se použila v původní podobě, jen se celkové napětí nahradilo rozdílem mezi celkovým a zpětným napětím. Podobně můžeme postupovat i pro víceosou napjatost. Zpětné napětí bude mít pochopitelně více složek a popíšeme je sloupcovou maticí  $\boldsymbol{\sigma}_b$ . Do funkce plasticity pak místo  $\boldsymbol{\sigma}$  dosadíme  $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_b$ . Aby později vynikl rozdíl mezi kinematickým a izotropním zpevněním, přepíšeme nejprve funkci plasticity pro model bez zpevnění do obecného tvaru

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_0 \quad (2.253)$$

kde  $\tilde{\sigma}$  je jisté *ekvivalentní napětí* a  $\sigma_0$  je parametr modelu představující mez kluzu v jednoosém tahu. Kupříkladu pro Misesovu podmínku klademe  $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})}$  a pro Trescovu podmínku  $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{\max}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_{\min}(\boldsymbol{\sigma})$ . Z čistě matematického hlediska jsou samozřejmě  $f$  a  $\tilde{\sigma}$  jen dvě velmi podobné funkce lišící se o konstantu. Náhorně lze říci, že  $\tilde{\sigma}$  vyjadřuje úroveň namáhání materiálu a  $\sigma_0$  vyjadřuje odpor materiálu, který je třeba překonat, aby došlo k plastickému přetváření.

V případě *kinematického zpevnění* dosadíme za napětí, které se snaží uvést do pohybu plastický mechanismus, rozdíl  $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_b$  a funkci plasticity zapíšeme jako

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_b) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_b) - \sigma_0 \quad (2.254)$$

Plasticky přípustná oblast, tj. množina všech bodů  $\boldsymbol{\sigma}$  v prostoru napětí, pro které je  $f \leq 0$ , má pak pro různé hodnoty  $\boldsymbol{\sigma}_b$  stejný tvar a velikost, ale je v prostoru napětí různě posunutá.

Naproti tomu v případě *izotropního zpevnění* vypočteme „hnací sílu“ plastického mechanismu z celého napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ , ale vliv předcházejících plastických procesů zohledníme zvýšením „odporu“ materiálu, vyjádřeného parametrem  $\sigma_0$ . Tato veličina tedy již nebude konstantou, ale funkcí, závislou na jisté veličině  $\kappa$  popisující kumulovaný účinek předcházejícího plastického přetváření (pro jednoosý model bylo  $\kappa$  definováno jako součet absolutních hodnot všech změn plastické deformace). Funkci plasticity proto zapíšeme jako

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y(\kappa) \quad (2.255)$$

kde  $\sigma_Y$  je funkce popisující závislost okamžité meze kluzu na kumulované plastické deformaci  $\kappa$ .

Při pohledu na předchozí dvě rovnice důvtipného čtenáře jistě napadne, že zobecněný model zpevnění, kombinující účinky kinematického a izotropního zpevnění a zahrnující (2.254) a (2.255) jako zvláštní případy, může být založen na funkci plasticity ve tvaru

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_b, \kappa) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_b) - \sigma_Y(\kappa) \quad (2.256)$$

Pro takový model se plasticity přípustná oblast zároveň posouvá i mění svou velikost. Existují ještě obecnější modely, podle kterých tato oblast mění i svůj tvar, ale těmi se zde zabývat nebudeme.

V upravených podmínkách plasticity (2.254), resp. (2.255), se objevují veličiny  $\boldsymbol{\sigma}_b$ , resp.  $\kappa$ , na kterých závisí okamžitá poloha plasticity přípustné oblasti, resp. její velikost. Tyto veličiny se v průběhu plastického přetváření mění, podobně jako třeba plastická deformace, a jejich okamžitá hodnota charakterizuje změny, které ve struktuře materiálu proběhly. Jde tedy o vnitřní proměnné modelu. Jejich vývoj v závislosti na přetváření materiálu musí být popsán vhodnými rovnicemi, které odrážejí naši představu o příslušném mechanismu zpevnění. Pro jednoosé modely bylo zpětné napětí vztaženo přímo k hodnotě plastické deformace podle (2.44), ale vývoj kumulované plastické deformace byl popsán rovnicí (2.57), která vztahuje rychlost této veličiny k rychlosti plastické deformace. Podobně lze postupovat i pro víceosou napjatost.

Nejjednodušší vztah pro zpětné napětí má tvar

$$\boldsymbol{\sigma}_b = H_K^* \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (2.257)$$

kde  $H_K^*$  je materiálová konstanta hrající podobnou roli jako plastický modul  $H$  v rovnici (2.44). Použití inverzní škálovací matice  $\mathbf{P}^{-1}$  definované vztahem (B.26) v dodatku B je nutné pro zabezpečení nezávislosti na konkrétní volbě souřadnic; tato matice se objevuje např. také ve vztahu (B.46) mezi deviatorickými částmi napětí a pružné deformace. Rovnice (2.257) představuje *Melanovo-Pragerovo pravidlo kinematického zpevnění*, které dobře funguje v kombinaci s Misesovou podmínkou plasticity, ale např. v kombinaci s Trescovou podmínkou má určité nedostatky. Jeho vylepšenou, ale komplikovanější verzi navrhl Ziegler. Podrobné vysvětlení může čtenář najít např. v odstavci 20.1.2 monografie Jirásek a Bažant (2002).

Pro izotropní zpevnění je třeba specifikovat význam skalární proměnné  $\kappa$ , která by měla být mírou rozsahu všech plastických deformačních procesů, jež v materiálu doposud proběhly. Pro jednoosý model jsme položili rychlost  $\dot{\kappa}$  rovnu absolutní hodnotě rychlosti plastické deformace. V obecném případě má plastická deformace více složek a absolutní hodnotu je třeba nahradit vhodnou normou, představující velikost vektoru  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  v prostoru deformací. Pokud by šlo o vektor v geometrickém smyslu, např. o polohový vektor  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}^T$ , byla by přirozenou volbou obvyklá euklidovská norma  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , která vyjadřuje vzdálenost koncového bodu tohoto vektoru od počátku. Takto vypočtená vzdálenost nezávisí na konkrétní volbě orientace souřadnicových os, takže je invariantem. Podrobný matematický rozbor ukazuje, že abychom stejnou vlastnost (invarianci vůči pootočení souřadnicových os) zaručili i pro deformaci, musíme vzorec pro výpočet normy poněkud upravit a druhé mocniny smykových složek deformace vydělit dvěma.<sup>18</sup> Vhodnou definicí normy deformace tedy je

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xz}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{yz}^2} \quad (2.258)$$

což lze maticově přepsat jako

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.259)$$

Přírůstek kumulované plastické deformace  $\kappa$  tedy můžeme definovat jako normu přírůstku plastické deformace. V rychlostním tvaru to zapíšeme jako

$$\dot{\kappa} = \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\|_\varepsilon = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^T \mathbf{P}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} \quad (2.260)$$

Závislost okamžité meze kluzu na kumulované plastické deformaci může být obecně i nelineární, takže zákon izotropního zpevnění zapíšeme jako

$$\sigma_Y(\kappa) = \sigma_0 + h(\kappa) \quad (2.261)$$

kde  $h$  je funkce mající pro  $\kappa = 0$  nulovou hodnotu a popisující postupný nárůst odporu materiálu proti plastickému přetváření, případně jeho pokles v případě tzv. plastického změkčení. Diferenciací zákona izotropního zpevnění podle času dostaneme jeho rychlostní tvar

$$\dot{\sigma}_Y(\kappa) = H_I^*(\kappa) \dot{\kappa} \quad (2.262)$$

<sup>18</sup>Důvodem je to, že z matematického hlediska nemá deformace charakter klasického vektoru, ale tzv. tenzoru druhého řádu, takže je třeba místo vektorové normy použít normu tenzorovou.

kde  $H_I^* = dh/d\kappa$  je derivace funkce zpevnění  $h$ , která souvisí s okamžitým (tečným) modulem zpevnění. V nej-jednodušším případě lineárního zpevnění je  $H_I^*$  konstanta a (2.261) přejde na

$$\sigma_Y(\kappa) = \sigma_0 + H_I^* \kappa \quad (2.263)$$

I pro modely se zpevněním je možné odvodit kritéria rozlišující mezi plastickým přetvářením (P) a pružným odtěžováním z plastického stavu (P→E) v závislosti na předepsané rychlosti plastické deformace, a také vzorce pro matici pružnoplastické tuhosti. Postup je zcela analogický jako pro ideálně pružnoplastický model, jen je třeba při vyjádření časové derivace funkce plasticity vzít v úvahu také příspěvek změn vnitřních proměnných  $\sigma_b$  nebo  $\kappa$ . Odvození zde proto nebudeme podrobně předvádět a uvedeme jen hlavní výsledky. V zájmu obecnosti uvažujeme model s nesdruženým zákonem plastického přetváření a s kombinací kinematičkého a izotropního zpevnění. Základní rovnice tohoto modelu jsou shrnuty v tab. 2.12.

Tabulka 2.12: Matematický popis pružnoplastického modelu s kinematičkým a izotropním zpevněním.

rozklad deformace	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p$
Hookeův zákon	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e$
definice funkce plasticity	$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_b, \kappa) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_b) - \sigma_Y(\kappa)$
podmínka plastické přípustnosti	$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_b, \kappa) \leq 0$
zákon plastického přetváření	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_b, \kappa), \quad \dot{\lambda} \geq 0$
podmínka komplementarity	$\dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_b, \kappa) = 0$
pravidlo kinematičkého zpevnění	$\boldsymbol{\sigma}_b = H_K^* \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_p$
definice kumulované plastické deformace	$\dot{\kappa} = \ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\ _\varepsilon$
pravidlo izotropního zpevnění	$\sigma_Y = \sigma_0 + h(\kappa)$

Pro materiál v plastickém stavu dochází k plastickému přetváření, pokud rychlost deformace splňuje podmínku

$$\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \quad (2.264)$$

Rychlost plastického násobitele

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g} + H_K^* \mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{g} + H_I^* \|\mathbf{g}\|_\varepsilon} \quad (2.265)$$

se pak vypočte obvyklým postupem z podmínky konzistence  $\dot{f} = 0$ . Po eliminaci  $\dot{\lambda}$  ze vztahu  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{g})$  získáme vztah mezi rychlostmi napětí a deformace ve tvaru  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  s maticí pružnoplastické tuhosti

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \mathbf{g} \mathbf{f}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g} + H_K^* \mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{g} + H_I^* \|\mathbf{g}\|_\varepsilon} \quad (2.266)$$

Předpokládáme přitom, že jmenovatel zlomku ve (2.265) je kladný, jinak by nastaly problémy s existencí a jednoznačností řešení. Z uvedených obecných vzorců dostáváme jako speciální případy pro  $\mathbf{g} = \mathbf{f}$  model se sdruženým zákonem plastického přetváření, pro  $H_K^* = 0$  model s čistě izotropním zpevněním a pro  $H_I^* = 0$  model s čistě kinematičkým zpevněním.

### Příklad 2.29: Misesův model se zpevněním

Abychom naplnili obecně formulované rovnice konkrétním obsahem, předvedeme jejich specifickou podobu pro model s Misesovou podmínkou plasticity, sdruženým zákonem plastického přetváření a kombinací lineárního kinematičkého a lineárního izotropního zpevnění. Řada kroků a jejich zdůvodnění je přitom podobná jako v příkladu 2.28, a proto si dovolíme poněkud rychlejší postup.

Při použití Misesovy podmínky definujeme ekvivalentní napětí vztahem

$$\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})} \quad (2.267)$$

a při kombinovaném kinematičském a izotropním zpevnění má odpovídající funkce plasticity tvar

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_b, \kappa) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_b) - \sigma_Y(\kappa) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_b)} - \sigma_0 - H_I^* \kappa \quad (2.268)$$

Sloupcovou maticí jejich parciálních derivací podle složek napětí vyjádříme jako

$$\mathbf{f} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_b)}} \cdot 3 \cdot \frac{\partial J_2(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_b)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\mathbf{P}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)}{2\sigma_Y} \quad (2.269)$$

kde  $\mathbf{s}_b$  je deviatorická část zpětného napětí  $\boldsymbol{\sigma}_b$  (pro tento model lze ukázat, že je rovna přímo  $\boldsymbol{\sigma}_b$ ). V případě sduženého zákona plastického přetváření je pochopitelně  $\mathbf{g} = \mathbf{f}$ . Tím máme připraveny potřebné podklady pro výpočet matice tečné tuhosti  $\mathbf{D}_{ep}$  podle (2.266). Jelikož  $\mathbf{f}$  má ryze deviatorický charakter, vypočte se součinn  $\mathbf{D}_e \mathbf{f}$  jednoduše jako  $2G\mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}$ , takže po dosazení podle (2.269) dostaneme

$$\mathbf{D}_e \mathbf{f} = \mathbf{D}_e \mathbf{g} = 2G\mathbf{P}^{-1} \frac{3\mathbf{P}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)}{2\sigma_Y} = \frac{3G(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)}{\sigma_Y} \quad (2.270)$$

a po přenásobení zleva transpozicí sloupcové matice  $\mathbf{f}$  získáme

$$\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g} = \left( \frac{3\mathbf{P}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)}{2\sigma_Y} \right)^T \frac{3G(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)}{\sigma_Y} = \frac{9G}{2\sigma_Y^2} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)^T \mathbf{P}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b) = \frac{9G}{2\sigma_Y^2} \cdot 2J_2(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b) = \frac{9G}{2\sigma_Y^2} \cdot \frac{2\sigma_Y^2}{3} = 3G \quad (2.271)$$

Vyhodnotíme také výraz

$$\mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{g} = \frac{3(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)^T \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} 3\mathbf{P}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)}{2\sigma_Y} = \frac{9}{4\sigma_Y^2} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)^T \mathbf{P}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b) = \frac{9}{4\sigma_Y^2} 2J_2(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b) = \frac{9}{4\sigma_Y^2} \frac{2\sigma_Y^2}{3} = \frac{3}{2} \quad (2.272)$$

a vzhledem k tomu, že  $\mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{g}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{g}$ , můžeme z něj snadno vypočítat normu

$$\|\mathbf{g}\|_\varepsilon = \sqrt{\mathbf{g}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{g}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (2.273)$$

Teď už není problém podle vzorce (2.266) vyhodnotit matici pružnoplastické tuhosti

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \mathbf{g} \mathbf{f}^T \mathbf{D}_e}{\mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \mathbf{g} + H_K^* \mathbf{f}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{g} + H_I^* \|\mathbf{g}\|_\varepsilon} = \mathbf{D}_e - \frac{\frac{3G(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)}{\sigma_Y} \frac{3G(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)^T}{\sigma_Y}}{3G + \frac{3}{2}H_K^* + \sqrt{\frac{3}{2}}H_I^*} = \mathbf{D}_e - \frac{9G^2}{\sigma_Y^2} \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)^T}{3G + \frac{3}{2}H_K^* + \sqrt{\frac{3}{2}}H_I^*} \quad (2.274)$$

Matici pružné tuhosti  $\mathbf{D}_e$  bychom samozřejmě mohli rozepsat podle (2.241).

Všimněme si, že v případě ideálně pružnoplastického chování stačí položit  $H_K^* = 0$ ,  $H_I^* = 0$ ,  $\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$  a  $\sigma_Y = \sigma_0$  a (2.274) se zjednoduší na

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{9G^2}{\sigma_0^2} \frac{\mathbf{s} \mathbf{s}^T}{3G} = \mathbf{D}_e - \frac{3G}{\sigma_0^2} \mathbf{s} \mathbf{s}^T \quad (2.275)$$

Výsledek přesně odpovídá vzorci (2.244) odvozenému v příkladu 2.28, neboť pro Misesovu podmínku je  $\sigma_0 = \sqrt{3}\tau_0$ . V příkladu 2.28 jsme pracovali s Misesovou podmínkou ve tvaru  $\sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma})} = \tau_0$ , zatímco v tomto příkladu by se v případě bez zpevnění zredukovala na  $\sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})} = \sigma_0$ . Obě podoby této podmínky jsou ekvivalentní, ale gradienty  $\mathbf{f}$  příslušných funkcí plasticity se liší. Ve vzorci pro matici pružnoplastické tuhosti se ovšem násobitelem  $\sqrt{3}$  nakonec vykrátí a výsledek je v obou příkladech stejný (po redukci na model bez zpevnění).

Na závěr ještě popíšeme fyzikální význam parametrů  $H_K^*$  a  $H_I^*$ , objevujících se v pravidlech kinematického a izotropního zpevnění. Jejich souvislost s klasickým modulem zpevnění  $H$  pro jednoosý model lze odhalit na základě analýzy plastického přetváření za jednoosého tahu, ale popsaného obecným trojosým modelem. Postup je sice přímočarý, ale poměrně zdoluhavý. Pro úsporu místa proto vynecháme podrobnosti a uvedeme jen konečný výsledek. Ukáže se, že za zmíněných podmínek je vztah mezi rychlostmi normálového napětí ve směru zatížení a odpovídající plastické deformace popsán rovnicí

$$\dot{\sigma}_x = \left( \frac{3}{2}H_K^* + \sqrt{\frac{3}{2}}H_I^* \right) \dot{\varepsilon}_{px} \quad (2.276)$$

To znamená, že plastický modul jakožto podíl přírůstků napětí a plastické deformace ve směru zatížení je dán vztahem

$$H = \frac{3}{2}H_K^* + \sqrt{\frac{3}{2}}H_I^* \quad (2.277)$$

Pokud je tedy plastický modul  $H$  zkoumaného materiálu určen na základě jednoosé tahové zkoušky, položíme pro model s výhradně kinematickým zpevněním  $H_K^* = 2H/3$  a pro model s výhradně izotropním zpevněním  $H_I^* = H\sqrt{2/3}$ . Pokud chceme použít model s kombinovaným zpevněním, není volba parametrů  $H_K^*$  a  $H_I^*$  jednoznačná, musí však být splněna podmínka (2.277). Je ovšem třeba mít na paměti, že uvedený výraz pro plastický modul platí pouze pro model s Misesovou podmínkou. Při použití jiné podmínky plasticity může mít komplikovanější tvar a zahrnovat i některé další parametry uvažovaného modelu.

□



# Kapitola 3

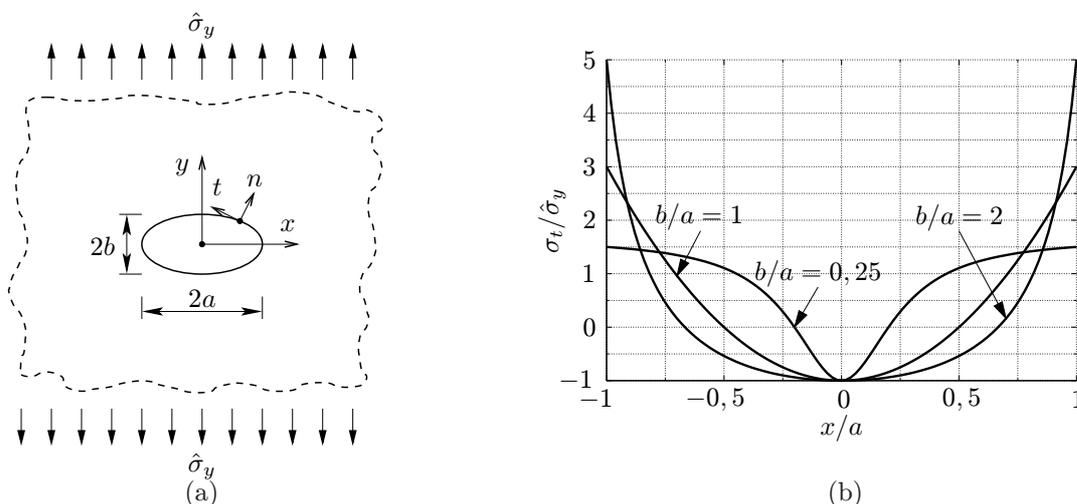
## Lomová mechanika

Dosud probrané modely, založené na teorii viskoelastivity a plasticity, vycházely z představy, že deformující se těleso zůstává spojitě a chování materiálu v průběhu přetvárných procesů stačí popsat jako vztah mezi napětím a deformací. Při popisu tělesa jakožto kontinua (spojitého prostředí) si představujeme, že těleso je původně složené z nekonečně malých elementárních krychliček, které se v průběhu zatěžování deformují, mění svůj tvar i velikost, ale sousední krychličky spolu zůstávají neustále spojeny a podél společných stěn na sebe navzájem působí. Ve skutečnosti však většina materiálů již na počátku zkoumaného zatěžovacího procesu obsahuje drobné defekty vzniklé během výroby (např. betonu nebo kovů) či během formování v přírodních podmínkách (např. zemin a hornin). Při zatěžování se tyto původně mikroskopické defekty pod vlivem rostoucího napětí mohou začít zvětšovat, případně i navzájem spojovat, a jejich růst postupně vede až k porušení materiálu a zhroucení celé konstrukce. Příkladem takových defektů jsou trhliny nebo dutiny. Pokud materiál obsahuje velké množství malých defektů, poměrně rovnoměrně rozptýlených, je vhodným nástrojem k jejich popisu teorie poškození, které se budeme věnovat v příští kapitole. Teorie poškození pracuje stále s představou spojitě deformovaného tělesa a vliv rozevření jednotlivých trhlinek nebo zvětšení dutinek nahrazuje odpovídající nepružnou deformací. Při zkoumání větších trhlin, jejichž rozměry jsou už řádově srovnatelné s rozměry konstrukce, je vhodné připustit, že pole posunutí nemusí být nutně všude spojitě. Popisem trhlin jakožto nespojitostí se zabývá lomová mechanika, které je věnována tato kapitola.

### 3.1 Analýza okolí kořene trhliny

#### 3.1.1 Faktor intenzity napětí

Defekty typu dutin a trhlin významně ovlivňují rozložení napětí ve svém blízkém okolí, přičemž jejich vliv na pole napětí s rostoucí vzdáleností slábne. Obecně (byť poněkud zjednodušeně) se dá říci, že v okolí defektu napětí vzrůstá, aby se tak vykompenzoval úbytek napětí, které by bylo přenášeno v místě samotného defektu, pokud by zde materiál zůstal spojitý. Pro ilustraci si nejprve ukážeme, jak se koncentruje napětí v okolí eliptické dutiny. Pro jednoduchost uvažujeme plochý panel za rovinné napjatosti, oslabený eliptickým otvorem procházejícím přes celou jeho tloušťku. Jde tedy o rovinnou úlohu, kterou budeme popisovat v rovině  $xy$ , přičemž počátek souřadnic je zvolen ve středu otvoru a osy  $x$  a  $y$  jsou osami symetrie tohoto otvoru, viz obr. 3.1a. Rozměry



Obrázek 3.1: Rovinný panel s eliptickým otvorem: (a) volba souřadnicových os a působící zatížení, (b) rozložení normálového napětí  $\sigma_t$  na okraji otvoru v závislosti na souřadnici  $x$ .

panelu v rovině analýzy jsou mnohem větší než rozměry otvoru  $2a$  a  $2b$  a na okrajích panelu působí vnější síly, které by v panelu neoslabeném otvorem vyvodily jednoosou napjatost s jedinou nenulovou složkou napětí  $\hat{\sigma}_y$  rovnoměrně rozdělenou po celém panelu. Analytické řešení této úlohy poprvé odvodil Inglis (1913) s využitím teorie funkcí komplexní proměnné. Kompletní popis výsledného pole napětí je ale velmi komplikovaný, proto se pro účely dalšího výkladu omezíme na analýzu normálového napětí  $\sigma_t$  působícího na plošky kolmé k okraji otvoru (tedy rovnoběžné s lokální osou  $t$  zavedenou na obr. 3.1a). Rozložení tohoto napětí v závislosti na souřadnici  $x$  (která se na okraji otvoru mění v mezích od  $-a$  do  $a$ ) je popsáno funkcí

$$\sigma_t(x) = \frac{x^2(a+b)^2 - a^4}{a^4 - x^2(a^2 - b^2)} \hat{\sigma}_y \quad (3.1)$$

a je pro názornost vyneseno v grafu na obr. 3.1b pro tři různé poměry  $b : a$ . Maximální hodnoty je ve všech případech dosaženo pro  $x = \pm a$ , tedy ve dvou průsečících elipsy s osou  $x$ , v nichž navíc  $\sigma_t$  odpovídá složce napětí  $\sigma_y$ . Obecně dokonce platí, že tato hodnota představuje největší napětí  $\sigma_y$  v celém panelu:

$$\max_{x,y} \sigma_y(x,y) = \sigma_y(\pm a, 0) = \sigma_t(\pm a) = \left(1 + \frac{2a}{b}\right) \hat{\sigma}_y \quad (3.2)$$

Například pro kruhový otvor, pro který  $a = b$ , je toto maximální napětí třikrát větší než vzdálené napětí  $\hat{\sigma}_y$  působící daleko od otvoru. Koeficient  $1 + 2a/b$  se v této souvislosti označuje za *faktor koncentrace napětí*. Zajímavé je, že jeho hodnota nezávisí na velikosti otvoru, ale jen na jeho tvaru, konkrétně v případě eliptického otvoru na poměru  $a/b$  mezi hlavní a vedlejší poloosou elipsy. Kruhové otvory různých velikostí tedy napětí koncentrují s faktorem 3, zatímco u protáhlých eliptických otvorů koncentrace napětí vzrůstá.<sup>1</sup> Jestliže rozměr delší osy elipsy  $2a$  pevně zvolíme a rozměr kratší osy  $2b$  zmenšujeme k nule, koncentrace napětí roste nade všechny meze. Limitní případ  $2b = 0$  odpovídá trhlině, tedy z matematického hlediska úsečce o délce  $2a$ , podél které je pole posunutí nespojitě. Dva krajní body této úsečky se nazývají *kořeny trhliny*. V blízkém okolí kořenů je napětí silně koncentrované a jeho hodnota není shora nijak omezena, může tedy nabývat libovolně velkých hodnot. To je samozřejmě pouze teoretické řešení, sestavené na základě předpokladu lineární pružnosti materiálu. Žádný materiál se ve skutečnosti nemůže chovat lineárně pružně při neomezeně velkých hodnotách napětí, nicméně idealizované řešení podle teorie pružnosti i tak poskytuje cennou informaci a na jeho základě se dokonce dají odvodit kritéria pro šíření trhliny, která za jistých podmínek velmi dobře fungují.

Řešením základních rovnic teorie pružnosti s příslušnými okrajovými podmínkami, mj. předepisujícími nulové hodnoty napětí  $\sigma_y$  a  $\tau_{xy}$  uvnitř trhliny, lze získat popis polí posunutí, deformace a napětí pro některé jednoduché případy, např. pro trhlinu o délce  $2a$  v panelu o mnohem větších rozměrech, který pro účely matematického řešení považujeme za nekonečný. Při namáhání vzdáleným jednoosým napětím  $\hat{\sigma}_y$  ve směru kolmém na trhlinu (obr. 3.2a) je rozložení normálového napětí  $\sigma_y$  podél osy  $x$  popsáno funkcí

$$\sigma_y(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| < a \\ \frac{\hat{\sigma}_y |x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} & \text{pro } |x| > a \end{cases} \quad (3.3)$$

a při namáhání dvěma osamělými silami  $F$  působícími uprostřed trhliny kolmo na ni a snažícími se ji rozevřít (obr. 3.2b) je rozložení napětí popsáno funkcí

$$\sigma_y(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| < a \\ \frac{Fa}{\pi t |x| \sqrt{x^2 - a^2}} & \text{pro } |x| > a \end{cases} \quad (3.4)$$

kde  $t$  je tloušťka panelu ve směru kolmém na rovinu analýzy. Průběhy napětí  $\sigma_y$  podél osy  $x$  jsou pro oba případy vyneseny na obr. 3.2. Je zřejmé, že ve větších vzdálenostech od trhliny se tyto průběhy podstatně liší, protože v prvním případě se hodnota napětí blíží  $\hat{\sigma}_y$  a ve druhém nule. Naopak pokud se blížíme ke kořeni trhliny, napětí v obou případech roste nade všechny meze.

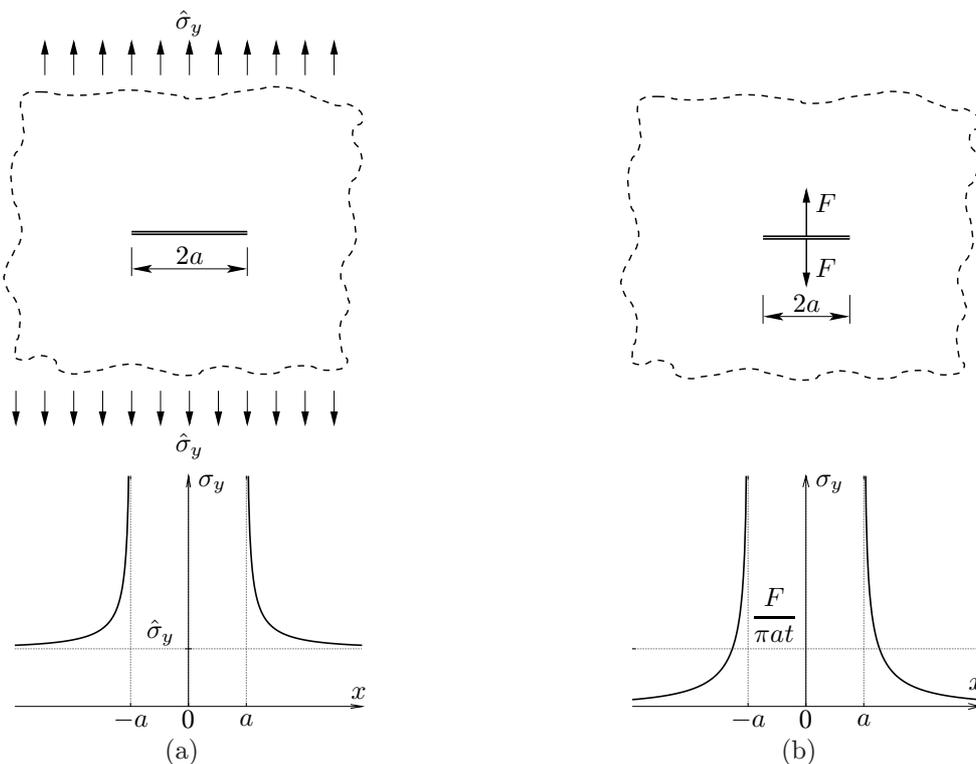
Prozkoumáme nyní, jaký je asymptotický charakter pole napětí v těsné blízkosti pravého kořene, tedy bodu o souřadnicích  $(a, 0)$ . Za tím účelem vyjádříme souřadnici  $x$  jako  $x = a + r$ , kde  $a$  je konstanta (poloviční délka trhliny) a  $r$  je nová proměnná, odpovídající vzdálenosti od kořene. Po dosazení do (3.3) dostaneme pro  $r > 0$

$$\sigma_y(r) = \frac{\hat{\sigma}_y (a+r)}{\sqrt{(a+r)^2 - a^2}} = \hat{\sigma}_y \frac{a+r}{\sqrt{2ar+r^2}} \quad (3.5)$$

V těsné blízkosti kořene je  $r \ll a$  a můžeme zanedbat v čitateli  $r$  oproti  $a$  a ve jmenovateli  $r^2$  oproti  $2ar$ . Získáme tak přibližné vyjádření

$$\sigma_y(r) \approx \hat{\sigma}_y \frac{a}{\sqrt{2ar}} = \hat{\sigma}_y \sqrt{\frac{a}{2r}} \quad (3.6)$$

<sup>1</sup>Hovoříme pochopitelně o normálovém napětí kolmém na delší osu elipsy.



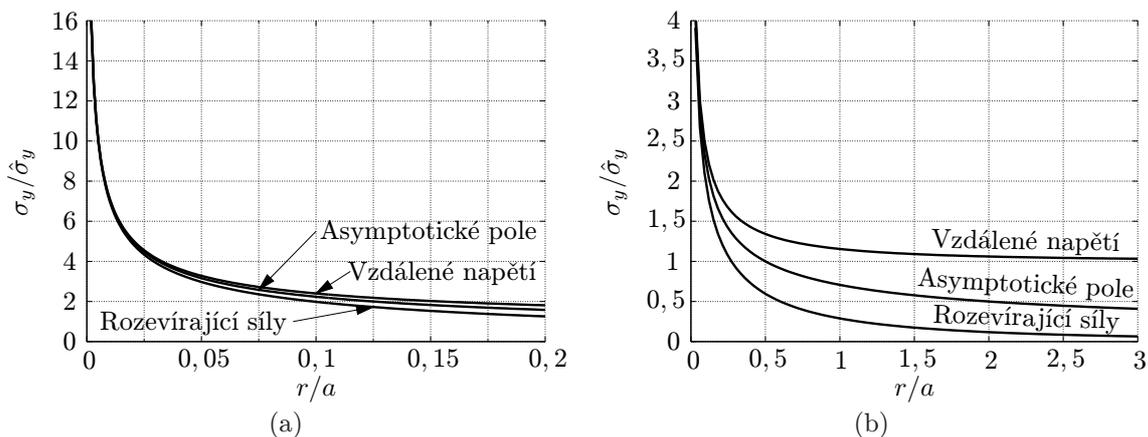
Obrázek 3.2: Trhlina v rovinném panelu zatíženém (a) vzdáleným napětím, (b) rozevíracími silami. Ve spodní části obrázku je vyznačeno rozdělení normálového napětí podél přímky, ve které trhlina leží.

kteří ukazuje, že pokud se blížíme ke kořeni trhliny, napětí roste nepřímě úměrně odmocnině vzdálenosti od kořene. Podobné úvahy provedeme i pro druhý případ, tedy trhlinu rozevíranou dvěma opačně orientovanými osamělými silami  $F$ . Po dosazení do (3.4) a zanedbání malých členů dostaneme pro  $0 < r \ll a$

$$\sigma_y(r) = \frac{Fa}{\pi t(a+r)\sqrt{(a+r)^2 - a^2}} \approx \frac{F}{\pi t\sqrt{2ar}} \quad (3.7)$$

Opět tedy platí, že napětí je nepřímě úměrné odmocnině vzdálenosti od kořene. Porovnáním (3.6) a (3.7) pak zjistíme, že pokud mezi vzdáleným napětím  $\hat{\sigma}_y$  zatěžujícím panel v prvním případě a silou  $F$  rozevírací trhlinu ve druhém případě platí vztah  $F = \pi a t \hat{\sigma}_y$ , je v obou případech napětí v těsné blízkosti kořene rozloženo prakticky stejně. Jak je vidět z obr. 3.3, teprve ve vzdálenosti větší než asi  $a/10$  začne být rozdíl mezi oběma průběhy napětí patrný.

Ukazuje se, že podobnost mezi rozložením napětí blízko kořene trhliny ve dvou uvedených zatěžovacích případech není náhodná, protože při libovolném způsobu zatížení se napětí poblíž kořene mění nepřímě úměrně odmocnině vzdálenosti od kořene. K popisu tzv. *asymptotického pole napětí*, ke kterému se všechna skutečná pole v blízkosti kořene rychle blíží, tedy stačí znát konstantu úměrnosti mezi  $\sigma_y$  a  $1/\sqrt{r}$ . Tato konstanta vynásobená



Obrázek 3.3: Porovnání skutečného rozložení normálového napětí s příslušným asymptotickým polem (a) v těsné blízkosti trhliny, (b) ve větším rozsahu.

$\sqrt{2\pi}$  se značí<sup>2</sup>  $K_I$  a nazývá se *faktor intenzity napětí*, anglicky „stress intensity factor“, ve zkratce SIF. Důvod pro zahrnutí násobitele  $\sqrt{2\pi}$  se ozřejmí později, až v článku 3.2.5 prozkoumáme souvislost mezi dvěma různými kritérii pro šíření trhliny. Podle právě zavedené definice faktoru intenzity napětí je asymptotické pole napětí na ose  $x$  popsáno vztahem

$$\sigma_y(r) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3.8)$$

Aby tento vztah dával smysl i rozměrově, musí být jednotkou faktoru intenzity napětí součin jednotky napětí a odmocniny z jednotky délky. Faktor intenzity napětí se tedy udává v jednotkách  $\text{Pa} \cdot \sqrt{\text{m}} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{1/2} = \text{N} \cdot \text{m}^{-3/2}$ , případně v jejich násobcích. Je sice poněkud nezvyklé, že exponentem u metru zde není celé číslo, nicméně je to tak matematicky v pořádku.

Porovnáním (3.8) s (3.6) a (3.7) získáme výrazy pro faktory intenzity napětí ve výše zmíněných zatěžovacích případech. Pro zatížení trhliny o délce  $2a$  vzdáleným napětím  $\hat{\sigma}_y$  se faktor intenzity napětí spočítá jako

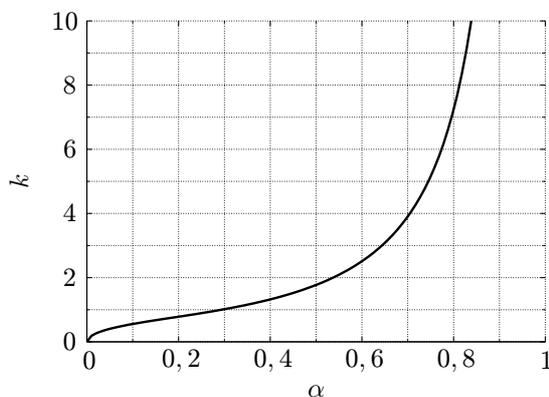
$$K_I = \hat{\sigma}_y \sqrt{\pi a} \quad (3.9)$$

a pro trhlínu o délce  $2a$  rozevíránou dvěma silami  $F$  působícími uprostřed je

$$K_I = \frac{F}{t\sqrt{\pi a}} \quad (3.10)$$

Jak je vidět, faktor intenzity napětí závisí kromě působícího zatížení také na velikosti trhliny. Tento faktor tedy umožňuje porovnat, jak „intenzivně“ je kořen trhliny namáhán, pro případy trhlín o různých velikostech v tělesech různým způsobem zatížených. Na základě analytických i numerických výpočtů byly vypracovány tabulky se vzorci umožňujícími alespoň přibližné určení faktorů intenzity napětí pro nejrůznější případy. Několik takových vzorců je uvedeno v tab. 3.1. Všimněte si, že pokud je trhlína uvnitř tělesa a má tedy dva kořeny, je zvykem její délku značit  $2a$ , zatímco pokud trhlína dosahuje k povrchu a má tedy jen jeden kořen, označuje se její délka jako  $a$ .

Ve všech případech je faktor intenzity napětí přímo úměrný zatěžující síle nebo momentu. Některé vzorce pro přehlednost pracují s pomocnou funkcí  $k$  bezrozměrné délky trhliny  $\alpha = a/h$ , kde  $h$  je jistý charakteristický rozměr zkoumaného tělesa (např. výška nosníku). Konkrétní vyjádření pomocné funkce  $k$  závisí na tvaru tělesa a způsobu zatížení a je buď dáno poměrně složitým analytickým předpisem (který zpravidla představuje aproximaci výsledků získaných pro vybrané délky trhliny přibližnými numerickými metodami), nebo jsou hodnoty  $k$  pro některé délky trhliny tabelovány.



Obrázek 3.4: Graf funkce  $k(\alpha)$  dané vztahem (3.18).

Například pro tříbodový ohyb nosníku s vrubem se faktor intenzity napětí vypočte podle vzorce (3.17) s využitím pomocné funkce (3.18). Tento postup dává chybu menší než 0,5% pro všechny délky trhliny  $a$  od 0 až do  $h$ . Graf funkce  $k$  vyneseny na obr. 3.4 ukazuje, jak při daném zatížení a rozměrech vzorku závisí faktor intenzity napětí na délce trhliny. Pro nulovou trhlínu je pochopitelně  $K_I = 0$ , pro velmi krátké trhlíny  $K_I$  narůstá úměrně  $\sqrt{a}$ , tedy na počátku se svislou tečnou, a pro trhlíny procházející přes téměř celý průřez roste nade všechny meze. Uvedený vzorec (3.18) platí pro poměr rozpětí a výšky nosníku  $L : h = 4$ , pro jiné poměry je třeba funkci  $k$  mírně upravit, ale její základní vlastnosti zůstávají podobné.

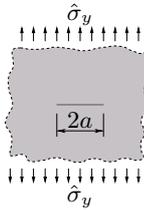
### Příklad 3.1: Výpočet faktoru intenzity napětí

V tomto příkladu zjistíme, zda je více namáhána trhlína o délce  $a_1 = 0,1$  m v nosníku o rozpětí  $L = 4$  m, výšce  $h_1 = 1$  m a šířce  $t_1 = 0,4$  m zatíženém tříbodovým ohybem silou  $F = 90$  kN (geometrie 6 v tab. 3.1), nebo v ohýbaném nosníku o výšce  $h_2 = 1$  m a tloušťce  $t_2 = 0,4$  m oslabeném trhlínou o délce  $a_2 = 0,4$  m zatíženém ohybovým momentem  $M = 40$  kNm (geometrie 5 v tab. 3.1). Napjatost v okolí kořene trhliny nelze

<sup>2</sup>Symbolem „I“ je myšlena římská číslice jedna, takže čteme „ká jedna“, nikoli „ká i“.

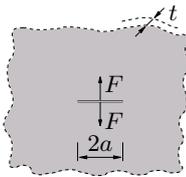
Tabulka 3.1: Faktory intenzity napětí.

1. Trhlina v nekonečném panelu zatížená vzdáleným napětím



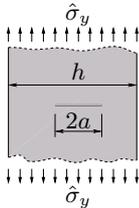
$$K_I = \sigma_y \sqrt{\pi a} \quad (3.11)$$

2. Trhlina v nekonečném panelu rozevíraná dvěma silami



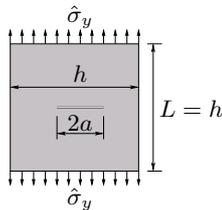
$$K_I = \frac{F}{t\sqrt{\pi a}} \quad (3.12)$$

3. Trhlina v nekonečném pásu zatížená vzdáleným napětím



$$K_I = \sigma_y \sqrt{\frac{\pi a}{\cos(\pi a/h)}} \quad (3.13)$$

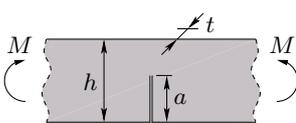
4. Symetricky umístěná trhlina v panelu rovnoměrně zatíženém na okraji



$$K_I = \sigma_y \sqrt{\pi a} k\left(\frac{a}{h}\right) \quad (3.14)$$

$\alpha$	0,1	0,2	0,25
$k(\alpha)$	1,37	2,11	2,83

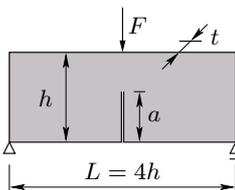
5. Trhlina v pásu namáhaném ohybovým momentem



$$K_I = \frac{6M}{th^{3/2}} k\left(\frac{a}{h}\right) \quad (3.15)$$

$$k(\alpha) = \frac{1,989 - \alpha(1-\alpha)[0,448 - 0,458(1-\alpha) + 1,226(1-\alpha)^2]}{(1+2\alpha)(1-\alpha)^{3/2}} \sqrt{\alpha} \quad (3.16)$$

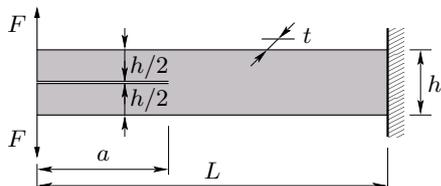
6. Nosník s vrubem namáhaný tříbodovým obyem



$$K_I = \frac{3FL}{2th^{3/2}} k\left(\frac{a}{h}\right) \quad (3.17)$$

$$k(\alpha) = \frac{1,9 + \alpha[0,089 - 0,603(1-\alpha) + 0,441(1-\alpha)^2 - 1,223(1-\alpha)^3]}{(1+2\alpha)(1-\alpha)^{3/2}} \sqrt{\alpha} \quad (3.18)$$

7. Dvojitá konzola rozevíraná dvěma silami



$$K_I = \frac{4\sqrt{6}Fa}{th^{3/2}} \quad (3.19)$$

charakterizovat např. jeho maximální hodnotou, protože ta je vždy nekonečná. Porovnání je však možné založit na hodnotách faktoru intenzity napětí.

V prvním případě je relativní délka trhliny

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{h_1} = \frac{0,1 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 0,1 \quad (3.20)$$

což podle (3.18) odpovídá hodnotě pomocné funkce

$$k_1(0,1) = \frac{1,9 + 0,1 [0,089 - 0,603(1 - 0,1) + 0,441(1 - 0,1)^2 - 1,223(1 - 0,1)^3]}{(1 + 2 \cdot 0,1)(1 - 0,1)^{3/2}} \sqrt{0,1} \doteq 0,556 \quad (3.21)$$

Faktor intenzity napětí pro první případ je podle vzorce (3.17) roven

$$K_{I,1} \doteq \frac{3FL}{2t_1 h_1^{3/2}} k_1(\alpha_1) \doteq \frac{3 \cdot 90 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m}}{2 \cdot 0,4 \text{ m} \cdot (1 \text{ m})^{3/2}} \cdot 0,556 = 750,6 \text{ kNm}^{-3/2} \quad (3.22)$$

Výpočet pro druhý případ je zcela obdobný, jenom poněkud přímočařejší. Z tab. 3.1 určíme pro geometrii 5 a relativní délku trhliny  $\alpha_2 = a_2/h_2 = 0,4$  hodnotu pomocné funkce  $k_2(\alpha_2) \doteq 1,257$ . Faktor intenzity napětí pro druhý případ se pak vypočte podle (3.15) jako

$$K_{I,2} \doteq \frac{6M}{t_2 h_2^2} \sqrt{\pi a_2} k_2(\alpha_2) \doteq \frac{6 \cdot 40 \text{ kNm}}{0,4 \text{ m} \cdot (1 \text{ m})^2} \sqrt{\pi \cdot 0,4 \text{ m}} \cdot 1,257 \doteq 845,5 \text{ kNm}^{-3/2} \quad (3.23)$$

Jelikož  $K_{I,2} > K_{I,1}$ , napětí v bezprostředním okolí trhliny je v druhém případě větší než v prvním.

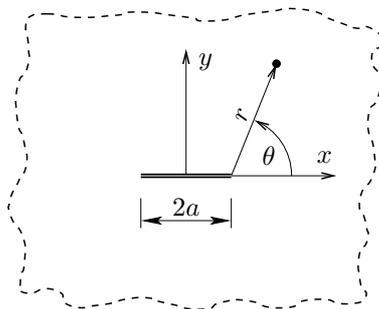
Tento výsledek znamená, že např. ve vzdálenosti  $r = 0,1$  mm od kořene trhliny můžeme v prvním případě očekávat napětí přibližně  $750,6 \text{ kNm}^{-3/2} / \sqrt{2\pi \cdot 10^{-4} \text{ m}} = 29,9 \text{ MPa}$ , zatímco ve druhém to bude přibližně  $845,5 \text{ kNm}^{-3/2} / \sqrt{2\pi \cdot 10^{-4} \text{ m}} = 33,7 \text{ MPa}$ . Poměr těchto napětí ve stejné vzdálenosti od kořene je dán poměrem faktorů intenzity napětí. Ve vzdálenosti  $r = 0,01$  mm od kořene, tedy desetkrát menší, budou obě napětí  $\sqrt{10}$ -krát větší, ale jejich poměr zůstane stejný. To vše ovšem platí pouze za předpokladu, že materiál se při těchto úrovních napětí stále chová jako lineárně pružný.

□

### 3.1.2 Napjatost v okolí kořene trhliny

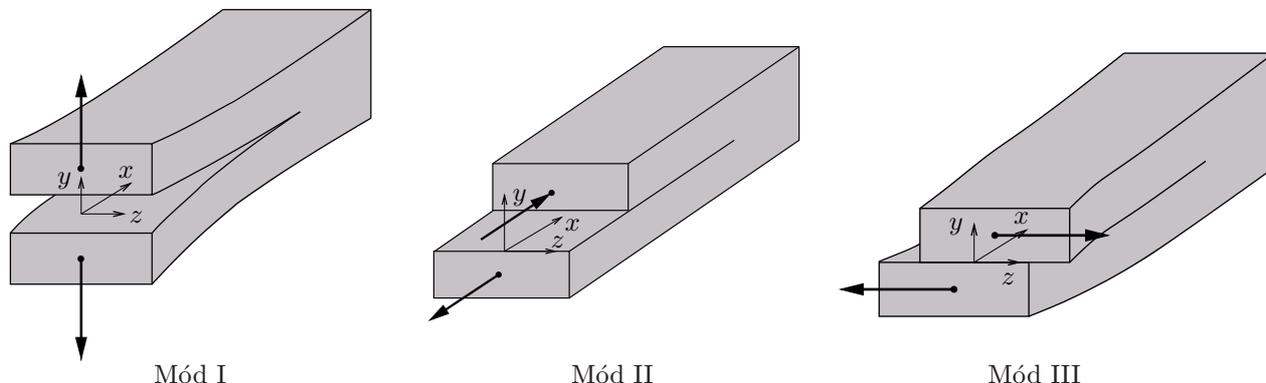
Zatím jsme hovořili pouze o rozložení napětí  $\sigma_y$  na ose  $x$  procházející trhlinou. Ukázali jsme, že pokud se po této ose blížíme ke kořeni trhliny, napětí roste nepřímo úměrně odmocnině vzdálenosti od kořene. Jelikož přitom napětí roste nade všechny meze, mluvíme o kořeni trhliny jako o singulárním bodu v poli napětí a říkáme, že složka napětí  $\sigma_y$  zde má singularitu typu  $r^{-1/2}$ . Kompletní analytické řešení ukazuje, že napětí je úměrné  $r^{-1/2}$  při přibližování ke kořeni nejen podél osy  $x$ , ale i podél jakékoliv jiné přímky procházející tímto kořenem. Navíc to platí nejen pro složku napětí  $\sigma_y$ , ale i pro ostatní složky napětí v rovině  $xy$ , tedy pro normálové napětí  $\sigma_x$  a smykové napětí  $\tau_{xy}$ . V konkrétním bodě blízkém kořeni hodnota napětí samozřejmě závisí nejen na vzdálenosti od kořene, ale i na směru, ve kterém se zkoumaný bod od kořene nachází. Proto je výhodné pole napětí v okolí kořene trhliny popisovat pomocí polárních souřadnic  $(r, \theta)$  vztahených k tomuto kořeni. Souřadnici  $r$  je přitom nám již dobře známá vzdálenost od kořene, zatímco polární úhel  $\theta$  je měřen jako odchylka mezi spojnicí kořene s uvažovaným bodem od již zavedené osy  $x$ , která odpovídá směru trhliny. Definice polárního úhlu  $\theta$  je graficky znázorněna na obr. 3.5. Pro body ležící na ose  $x$  mimo trhlinu je  $\theta = 0^\circ$ , pro body „nad“ osou  $x$  (tj. s kladnou souřadnicí  $y$ ) je  $\theta > 0^\circ$  a pro body „pod“ osou  $x$  je  $\theta < 0^\circ$ . Pokud se polární úhel  $\theta$  blíží zdola své maximální hodnotě  $180^\circ$ , blíží se odpovídající bod hornímu okraji trhliny, a pokud se  $\theta$  blíží shora své minimální hodnotě  $-180^\circ$ , blíží se odpovídající bod spodnímu okraji trhliny (předpokládáme přitom  $r < 2a$ ).

V příkladech na obr. 3.2 i dalších v tab. 3.1 ležela trhlina na ose symetrie zkoumaného tělesa a také zatížení bylo vůči této ose symetrické, takže se snažilo trhlinu rozevřít. Takovému způsobu namáhání trhliny se v lomové



Obrázek 3.5: Zavedení polárních souřadnic vztahených ke kořeni trhliny.

mechanice říká *mód I*. V případě antisymetrického zatížení (stále ovšem působícího v rovině  $xy$ ) má trhlina tendenci se usmyknout a takový způsob jejího namáhání označujeme za *mód II*. Existuje ještě *mód III*, při kterém zatížení působí mimo rovinu  $xy$  a trhlina je namáhána stříhem. Základní lomové módy jsou názorně zachyceny na obr. 3.6, spolu se svými anglickými názvy.



Obrázek 3.6: Základní lomové módy: opening – sliding – tearing.

Za rovinné napjatosti nebo rovinné deformace dochází obecně ke kombinaci módů I a II, ale mód III není vybuzen. V obecné prostorové úloze by bylo třeba uvažovat kombinaci všech tří módů. Ke každému módu patří příslušný faktor intenzity napětí, označený  $K_I$ ,  $K_{II}$  nebo  $K_{III}$ . Hodnoty těchto faktorů jednoznačně určují asymptotickou část pole napětí, tj. tu část, která dominuje v okolí kořene. V případě rovinné napjatosti nebo rovinné deformace lze jednotlivé složky asymptotického pole napětí v blízkosti kořene vypočítat podle následujících vzorců:

$$\sigma_x(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.24)$$

$$\sigma_y(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3.25)$$

$$\tau_{xy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.26)$$

Při rovinné napjatosti jsou ostatní složky napětí nulové. Při rovinné deformaci se normálové napětí kolmé na rovinu analýzy vypočte z podmínky nulové normálové deformace  $\varepsilon_z = (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)/E = 0$ , platí tedy  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$  a po dosazení ze (3.24)–(3.25) dostaneme

$$\sigma_z(r, \theta) = \frac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{2\nu K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.27)$$

Pokud dochází k namáhání v módu III, mají v okolí kořene singulární charakter složky napětí

$$\tau_{xz}(r, \theta) = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.28)$$

$$\tau_{yz}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.29)$$

### Příklad 3.2: Napětí na přímce kolmé na směr trhliny

Použití vzorců (3.24)–(3.26) ukážeme na jednoduchém příkladu, jehož cílem je určit rozložení jednotlivých složek napětí podél přímky kolmé na směr trhliny a procházející ve vzdálenosti  $d = 1$  mm od jejího kořene. Trhlina ve stavu rovinného napětí orientovaná rovnoběžně s osou  $x$  je namáhána kombinací módů I a II, přičemž odpovídající faktory intenzity napětí jsou  $K_I = 800 \text{ kNm}^{-3/2}$  a  $K_{II} = 200 \text{ kNm}^{-3/2}$ .

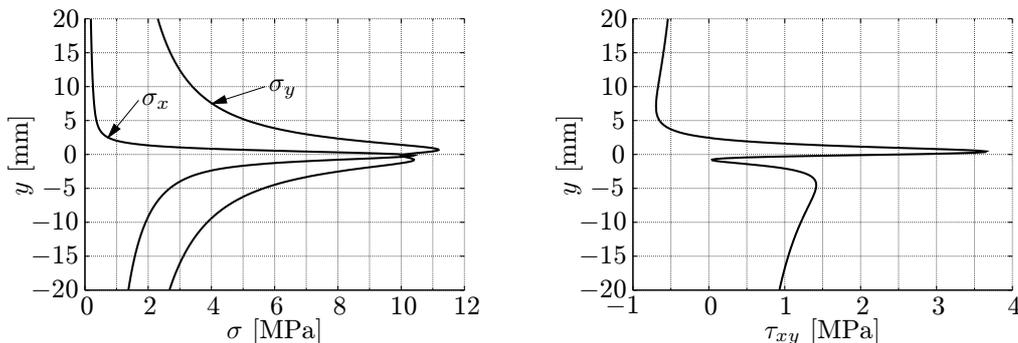
Jelikož uvažujeme rovinnou napjatost, veličiny  $K_I$  a  $K_{II}$  jednoznačně charakterizují rozložení napětí v okolí kořene trhliny v závislosti na úhlu  $\theta$  a vzdálenosti od kořene trhliny  $r$ . Z obr. 3.5 plynou vztahy pro transformaci mezi kartézskými a polárními souřadnicemi

$$x = a + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (3.30)$$

jejichž inverzí dostaneme

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad \theta = \text{sgn } y \cdot \arccos \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \quad (3.31)$$

příčměž poslední vztah neplatí pro body ležící přímo v trhlíně (tj. vylučujeme body o souřadnicích  $x \leq a$  a  $y = 0$ ). Dosazením (3.31) do (3.24)–(3.26) získáme vyjádření asymptotických polí napětí v závislosti na kartézských souřadnicích  $(x, y)$ . Položíme-li nyní  $x = a + d$  a  $y$  ponecháme libovolné, dostaneme funkce popisující průběh jednotlivých složek napětí na zmíněné přímce. Jejich grafy jsou vyneseny na obr. 3.7. Ve větší vzdálenosti od trhliny se ovšem skutečné hodnoty napětí mohou od hodnot odpovídajících asymptotickému poli lišit.



Obrázek 3.7: Rozložení složek napětí podél přímky  $x = a + d$ .

Jak je z obrázku zřejmé, k největšímu namáhání materiálu dochází před čelem trhliny pro  $y$  blízké nule. Hodnoty normálových napětí  $\sigma_x$  a  $\sigma_y$  jsou zde srovnatelné, zatímco smykové napětí  $\tau_{xy}$  je menší. Přestože intuitivně bychom snad mohli očekávat, že  $\sigma_x$  bude výrazně menší než  $\sigma_y$ , maximální hodnoty obou normálových napětí jsou si velmi blízké. Při bližším prozkoumání vztahů (3.24) a (3.25) zjistíme, že na ose  $x$  (tj. pro  $\theta = 0$ ) mají normálová napětí  $\sigma_x$  a  $\sigma_y$  přesně stejné hodnoty. V čistém módu I je zde navíc smykové napětí  $\tau_{xy}$  nulové, takže materiál před čelem trhliny je namáhán dvojosým tahem.

□

### 3.1.3 Deformace a posuny v okolí kořene trhliny

Je třeba mít na paměti, že vzorce (3.24)–(3.29) popisují pouze tu část pole napětí, která dominuje v těsném okolí kořene trhliny. Pokud nás zajímají hodnoty některých složek deformace v okolí kořene, můžeme je snadno vypočítat ze složek napětí daných vzorcí (3.24)–(3.29) dosazením do inverzního Hookeova zákona (B.5)–(B.10). Při tomto výpočtu se jednotlivé složky napětí pouze násobí poddajnostními konstantami a výsledky se sčítají, takže výsledné pole deformace má stejný typ singularity  $r^{-1/2}$  jako pole napětí, tj. jednotlivé složky deformace v blízkosti kořene narůstají nade všechny meze nepřímo úměrně vzdálenosti od kořene. Lze dokonce získat i informaci o poli posunutí, které už ale nemá singulární charakter. Zhruba řečeno, posuny se získají integrací deformací, a jestliže se deformace mění úměrně  $r^{-1/2}$ , získáme po integraci funkce úměrné  $r^{1/2}$ , které už pro  $r$  blízké se nule nerostou nade všechny meze, ale naopak klesají k nule. To samozřejmě neznamená, že posun kořene trhliny je vždy nulový. Při integraci se totiž objeví integrační konstanty, které je třeba určit z vhodných okrajových podmínek. Kinematické okrajové podmínky předepisují hodnoty posunů na podepřených částech hranice vyšetřovaného tělesa, což bývá zpravidla poměrně daleko od trhliny. Proto nemůžeme skutečné hodnoty posunů určit jen na základě znalosti deformací v těsném okolí kořene trhliny. Nicméně místo celkových posunů se můžeme zajímat o rozdíly mezi posunem libovolného bodu a posunem kořene trhliny. V takovém případě posun kořene předepíšeme nulovou hodnotou a z této podmínky určíme potřebné integrační konstanty. Pro posuny<sup>3</sup> ve směru os  $x$  a  $y$  obecného bodu o polárních souřadnicích  $r$  a  $\theta$  tak získáme následující vzorce:

$$u(r, \theta) = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.32)$$

$$v(r, \theta) = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (-2\kappa + 3) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (3.33)$$

Pro umožnění jednotného zápisu, platného pro rovinnou napjatost i rovinnou deformaci, je zde použita tzv. Kolosovova konstanta

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{pro rovinnou napjatost} \\ 3 - 4\nu & \text{pro rovinnou deformaci} \end{cases} \quad (3.34)$$

kteřá závisí na Poissonovu součiniteli  $\nu$ .

Pro  $\theta = 180^\circ$  dostaneme z (3.32)–(3.33) posuny na horním okraji trhliny a pro  $\theta = -180^\circ$  posuny na jejím spodním okraji. Jejich rozdíl odpovídá nespojitosti v poli posunutí způsobené přítomností trhliny. Rozdíl posunů ve směru kolmém na trhlínu, tedy

$$[[v]](r) = v(r, 180^\circ) - v(r, -180^\circ) = \frac{(1 + \kappa)K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (3.35)$$

<sup>3</sup>Přesně řečeno jde o relativní posuny vzhledem ke kořeni trhliny.

popisuje *rozevření trhliny*, a rozdíl posunů ve směru rovnoběžném s trhlinou, tedy

$$[[u]](r) = u(r, 180^\circ) - u(r, -180^\circ) = \frac{(1 + \kappa)K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (3.36)$$

popisuje smykový pokluz v trhlině. Dvojitě hranaté závorky přitom označují skok (čili nespojitost) veličiny, kterou uzavírají. Jak se dalo čekat, v čistém módu I dochází pouze k rozevření trhliny  $[[v]]$ , zatímco smykový pokluz  $[[u]]$  zůstává nulový, a naopak v čistém módu II dochází pouze ke smykovému pokluzu, ale trhlina se neotvírá. Těchto výsledků využijeme později při zkoumání souvislosti mezi faktory intenzity napětí a energií pružné deformace uvolněnou při šíření trhliny.

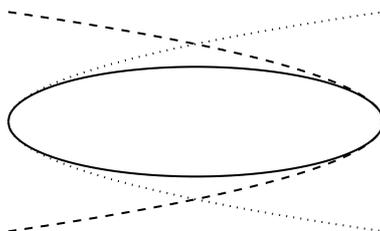
Je vhodné znovu připomenout, že vztahy (3.32)–(3.33) a (3.35)–(3.36) popisují pouze asymptotickou část pole posunutí, která odpovídá asymptotické části polí deformace a napětí. Skutečné pole posunutí se liší jednak tím, že posun kořene trhliny obecně není nulový, a jednak přítomností dalších členů, které nabývají na významu ve větší vzdálenosti od trhliny a závisejí na konkrétním tvaru a velikosti tělesa a způsobu jeho zatížení a podepření. Například pro trhlinu o délce  $2a$  v mnohem větším (teoreticky nekonečném) panelu zatíženém vzdáleným napětím  $\hat{\sigma}_y$  ve směru kolmém na trhlinu je přesný průběh rozevření za předpokladu rovinné napjatosti popsán funkcí

$$[[v]](x) = \frac{4\hat{\sigma}_y}{E} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3.37)$$

Souřadnice  $x$  je měřena ve směru trhliny od jejího středu a mění se tedy v rozmezí od  $-a$  do  $a$ , přičemž extrémní hodnoty odpovídají kořenům trhliny. Grafem funkce (3.37) je elipsa, takže trhlina rozvíraná vzdáleným napětím má eliptický tvar, viz obr. 3.8. V okolí kořenů trhliny lze po vhodném dosazení vztah (3.35) použít jako aproximaci skutečného rozevření. Odpovídající faktor intenzity napětí  $K_I = \hat{\sigma}_y \sqrt{\pi a}$  je dán vztahem (3.9),  $\kappa$  je podle (3.34) pro rovinnou napjatost rovno  $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ , takže  $1 + \kappa = 4/(1 + \nu)$ , a v okolí pravého kořene dosadíme  $r = a - x$ , zatímco v okolí levého kořene  $r = x - a$ . Tak dostaneme například v okolí pravého kořene aproximaci

$$[[v]](x) = \frac{(1 + \kappa)K_I}{G} \sqrt{\frac{a - x}{2\pi}} = \frac{4\hat{\sigma}_y \sqrt{\pi a}}{(1 + \nu)G} \sqrt{\frac{a - x}{2\pi}} = \frac{4\hat{\sigma}_y}{E} \sqrt{2a(a - x)} \quad (3.38)$$

Odpovídající křivkou aproximující rozevření trhliny v okolí jejího pravého kořene je parabola vynesena na obr. 3.8 čárkovaně. Je zřejmé, že v těsné blízkosti kořene, pro který byla sestrojena, se velmi těsně přimyká k elipse odpovídající přesnému řešení, ale ve větší vzdálenosti se od ní liší a například v blízkosti levého kořene, tj. pro  $x$  blízké k  $-a$ , je již zcela nepoužitelná. Zde se dá naopak použít aproximace sestrojena pro levý kořen dosazením  $r = x - a$ , graficky znázorněná na obr. 3.8 tečkovanou čarou.



Obrázek 3.8: Skutečné rozevření trhliny namáhané vzdáleným napětím (elipsa vynesena plnou čarou) a jeho aproximace v okolí kořenů (paraboly vynesené čárkovaně a tečkovaně).

### 3.1.4 Nelineární procesní zóna

Ve všech dosavadních úvahách jsme v duchu tzv. *lineární lomové mechaniky* předpokládali, že materiál je lineárně pružný a může přenést libovolné napětí. Navíc byly uvedené vzorce pro pole napětí v okolí trhliny odvozeny za předpokladu malých deformací. Takové předpoklady samozřejmě nikdy nemohou být splněny v úplně všech bodech zkoumaného tělesa, protože v blízkosti kořene trhliny vypočtené deformace i napětí vzrůstají nade všechny meze. Kolem kořene proto vždy vznikne určitá oblast, zvaná *nelineární procesní zóna* (anglicky „nonlinear process zone“, ve zkratce NPZ), ve které napětí překračuje mez úměrnosti  $f_u$  pro daný materiál.<sup>4</sup> To však neznamená, že řešení sestrojené v rámci lineární lomové mechaniky nemá žádný praktický význam. Pokud je nelineární procesní zóna dostatečně malá, je napjatost v jejím okolí dostatečně přesně popsána asymptotickým polem sestrojeným podle lineární lomové mechaniky a podmínky pro šíření trhliny lze formulovat pomocí faktorů intenzity napětí, jak ukážeme v následujícím článku. Je proto užitečné odvodit alespoň přibližný odhad pro velikost oblasti, ve které se skutečné chování materiálu odchyluje od lineárně pružného, takže skutečné napětí se podstatně liší od asymptotického pole (3.24)–(3.29).

<sup>4</sup>Připomeňme, že mezi úměrnosti rozumíme takovou úroveň napětí, do které skutečný pracovní diagram daného materiálu zůstává lineární.

Nejjednodušší odhad velikosti procesní zóny při namáhání v čistém módu I je založen na prostém porovnání normálového napětí  $\sigma_y$  na ose  $x$  s mezí úměrnosti  $f_u$ . Z podmínky  $\sigma_y(r_u, 0) = f_u$  s využitím (3.25) snadno vypočteme vzdálenost od kořene

$$r_u = \frac{1}{2\pi} \frac{K_I^2}{f_u^2} \quad (3.39)$$

ve které je dosaženo napětí  $f_u$ . Tento výsledek nám dává představu o řádové velikosti procesní zóny. Lze však očekávat, že její skutečná velikost bude větší, protože kdybychom pro dané zatížení vypočetli rozložení napětí podle lineární lomové mechaniky a poté je zkorigovali tam, kde překračuje mez úměrnosti  $f_u$ , dojde ke snížení napětí a tím při nezměněném zatížení k narušení podmínek rovnováhy. Abychom vyrovnali úbytek napětí v procesní zóně, musíme zvýšit napětí v její blízkosti, ale tím dojde v těsném sousedství procesní zóny k překročení napětí  $f_u$  a tedy ke zvětšení této zóny. Pro ideálně pružnoplastické chování materiálu sestrojil vylepšený odhad založený na takovém přerozdělení Irwin. Jeho výsledek

$$r_0 = \frac{1}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_0^2} \quad (3.40)$$

je dvojnásobkem jednoduchého odhadu (3.39), přičemž místo meze úměrnosti  $f_u$  se zde objevuje mez kluzu v tahu  $\sigma_0$ .

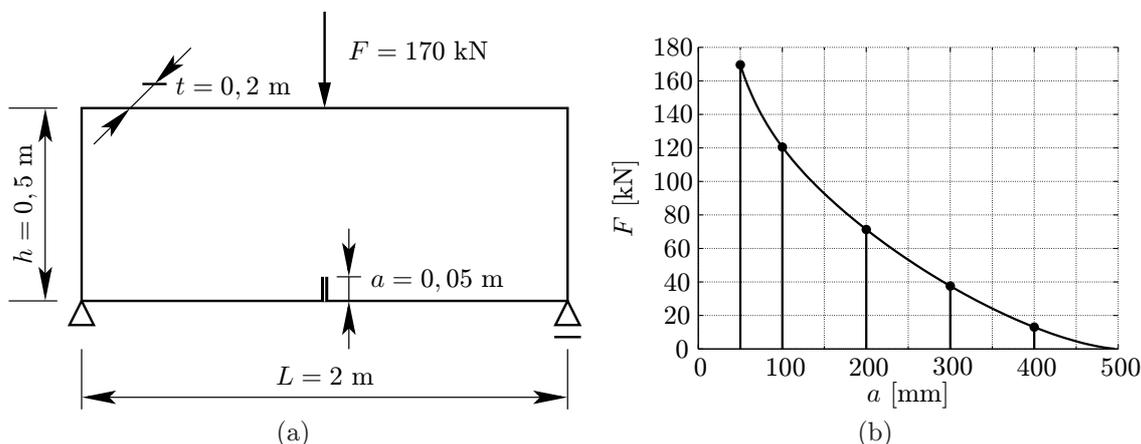
Obecně lze říci, že výpočty podle lineární lomové mechaniky jsou oprávněné, pokud je velikost procesní zóny výrazně menší než délka trhliny. Při nesplnění této podmínky se zavádějí různé korekce, např. se při výpočtu faktoru intenzity napětí pracuje s délkou trhliny zvětšenou o polovinu velikosti procesní zóny. Procesní zóna musí být také výrazně menší než rozměry zkoumaného tělesa a než tzv. ligament, neboli neporušená oblast mezi kořenem trhliny a hranicí tělesa.

## 3.2 Kritéria pro šíření trhliny

V prvním článku této kapitoly jsme ukázali, jak popsat pole napětí v okolí kořene trhliny. Z praktického hlediska nás však nejvíce zajímá, zda při daném zatížení trhlina poroste, případně pro jaký jeho násobek by růst začala. Samotná existence trhlín totiž pouze zvyšuje poddajnost materiálu, resp. celé konstrukce, ale růst trhlín může vést k vyčerpání únosnosti a ke zhroutilí konstrukce. Proto je důležité vypracovat kritéria, pomocí kterých lze určit, zda se trhlina vůbec začne šířit, a pokud ano, v jakém směru bude její šíření probíhat. Taková kritéria nemohou být založena na maximální hodnotě napětí, protože ta je (pro řešení podle lineární lomové mechaniky) u kořene trhliny vždy nekonečná, nezávisle na velikosti působícího zatížení.

### 3.2.1 Šíření v módu I — lokální Irwinovo kritérium

Vhodnou veličinou charakterizující úroveň namáhání trhliny je faktor intenzity napětí. Pro jednoduchost se zatím omezíme na namáhání v čistém módu I a na odpovídající faktor  $K_I$ . Pokud jsou pro dvě různé trhliny v různě zatížených tělesech ze stejného materiálu hodnoty faktoru  $K_I$  stejné, je v obou případech stejné i rozložení napětí kolem kořene trhliny a dá se očekávat, že pokud se šíří jedna z těchto trhlín, šíří se i druhá a naopak. Je proto přirozené založit kritérium pro šíření trhliny v módu I na kritické hodnotě faktoru intenzity napětí  $K_I$ . Kritickou hodnotu faktoru  $K_I$  určenou pro daný materiál na základě experimentů nazýváme *lomovou houževnatostí* materiálu a značíme  $K_c$ . Jednotka lomové houževnatosti je stejná jako pro faktor intenzity napětí, tedy  $\text{Nm}^{-3/2}$ .



Obrázek 3.9: Nosník s vrubem namáhaný tříbodovým ohybem: (a) geometrie a zatížení, (b) závislost mezi silou  $F$  a délkou trhliny  $a$ .

**Příklad 3.3: Stanovení lomové houževnatosti**

Pro nosník s vrubem o rozměrech podle obr. 3.9a, zatížený třibodovým ohybem, bylo experimentálně zjištěno, že trhlina se z vrubu začne šířit při zatížení silou  $F = 170$  kN. Naším úkolem je zjistit lomovou houževnatost materiálu. Vrub považujeme za uměle vytvořenou počáteční trhlinu, takže zkoumáme nosník s trhlinou o počáteční délce  $a = 0,05$  m, pro který je faktor intenzity napětí dán vzorcem (3.17) z tab. 3.1 na straně 115. Poměr mezi délkou trhliny a výškou nosníku je  $\alpha = a/h = 0,1$ , hodnota součinitele  $k(\alpha) \doteq 0,556$  určeného podle (3.18) je proto stejná jako v příkladu 3.1. Po dosazení do (3.17) zjistíme, že šíření trhliny začalo v okamžiku, kdy faktor intenzity napětí dosáhl velikosti

$$K_I \doteq \frac{3FL}{2th^{3/2}} k(\alpha) \doteq \frac{3 \cdot 170 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m}}{2 \cdot 0,2 \text{ m} \cdot (0,5 \text{ m})^{3/2}} \cdot 0,556 \doteq 4 \text{ MNm}^{-3/2} \quad (3.41)$$

Tato hodnota představuje lomovou houževnatost materiálu  $K_c$ .

□

Při formálním matematickém popisu šíření trhliny v módu I můžeme postupovat podobně jako při popisu plastického přetváření. Roli napětí přitom hraje faktor intenzity napětí, roli meze kluzu hraje lomová houževnatost a roli plastické deformace hraje délka trhliny. V závislosti na okamžité hodnotě faktoru intenzity napětí můžeme rozlišit tři případy: Pro  $K_I < K_c$  se trhlina nešíří, její délka  $a$  tedy zůstává konstantní a časová derivace  $\dot{a} = da/dt$ , neboli rychlost šíření, je nulová. Pro  $K_I = K_c$  se trhlina může šířit, tj. její délka se může zvětšovat nebo zůstávat stejná, takže platí  $\dot{a} \geq 0$ . Konečně pro  $K_I > K_c$  by koncentrace napětí v okolí kořene trhliny přesáhla kritickou úroveň a tento případ budeme považovat za nepřipustný. Souhrnně tedy můžeme psát

$$K_I < K_c \implies \dot{a} = 0 \quad (3.42)$$

$$K_I = K_c \implies \dot{a} \geq 0 \quad (3.43)$$

$$K_I > K_c \implies \text{nepřipustné} \quad (3.44)$$

Je zřejmé, že tato pravidla mají stejnou strukturu jako (2.2)–(2.4). Podobně jako v teorii plasticity bychom mohli zavést funkci  $f(K_I) = K_I - K_c$  a uvedená pravidla přepsat ve tvaru

$$f(K_I) \leq 0, \quad \dot{a} \geq 0, \quad \dot{a}f(K_I) = 0 \quad (3.45)$$

který přesně odpovídá podmínkám zatěžování-odtěžování (2.13). Tyto podmínky využijeme při analýze celého zatěžovacího procesu k určení závislosti mezi délkou trhliny a silou přenášenou vzorkem.

**Příklad 3.4: Šíření trhliny při třibodovém ohybu**

Použití lokálního kritéria pro šíření trhliny budeme demonstrovat na nosníku s rozměry stejnými jako na obr. 3.9a s tím rozdílem, že délka trhliny  $a$  se nyní může v průběhu zatěžování měnit. Materiál je charakterizován lomovou houževnatostí  $K_c = 4 \text{ MNm}^{-3/2}$ .

V první fázi zatěžování je hodnota faktoru intenzity napětí  $K_I$  menší než mezní hodnota  $K_c$ . Z podmínky (3.45)<sub>3</sub> tedy vyplývá, že rychlost šíření trhliny  $\dot{a}$  je nulová a délka trhliny zůstává rovna počáteční hodnotě  $a_0 = 40$  mm. Na obr. 3.9b tomuto procesu odpovídá první (levá) svislá úsečka. Po dosažení kritické hodnoty faktoru intenzity napětí se trhlina začne šířit ( $\dot{a} > 0$ ), přičemž v důsledku podmínky (3.45)<sub>3</sub> musí být během jejího růstu neustále splněna rovnost  $K_I = K_c$ . Faktor intenzity napětí  $K_I$  závisí na zatěžující síle a na délce trhliny podle vztahu 6 z tab. 3.1, takže při šíření trhliny je

$$\frac{3FL}{2th^{3/2}} k\left(\frac{a}{h}\right) = K_c \quad (3.46)$$

Jednoduchou úpravou získáme hledaný vztah mezi silou a délkou trhliny

$$F = \frac{2th^{3/2}K_c}{3Lk(a/h)} \quad (3.47)$$

kterému odpovídá nelineární sestupná větev na obr. 3.9b. Další svislé úsečky znázorňují odtěžovací větve, na kterých je opět  $\dot{a} = 0$  a  $K_I < K_c$ . Zároveň tyto úsečky odpovídají počátečním větvím při různých délkách počátečního vrubu ( $a_0 = 100$  mm, 200 mm, 300 mm). Jak je vidět, pro delší počáteční trhliny je maximální síla potřebná k šíření trhliny menší.

□

V příkladu jsme popsali vývoj síly přenášené vzorkem v závislosti na délce trhliny a viděli jsme, že při třibodovém ohybu je pro delší vruby únosnost nosníku menší. Abychom mohli sestavit pracovní diagram jako závislost mezi silou a posunem jejího působení, potřebujeme vypracovat metodu pro určení tuhosti nebo poddajnosti vzorku pro danou délku trhliny. K takové metodě dospějeme na základě energetických úvah, které také poskytnou alternativní pohled na kritérium pro šíření trhliny.

### 3.2.2 Šíření v módu I — globální (energetické) Griffithovo kritérium

Ohlášené alternativní kritérium je založené na bilanci přeměny energií v průběhu zatěžování lineárně pružného tělesa s trhlinou. Dokud se trhlina nešíří, veškerá práce vykonaná vnějšími silami se transformuje na potenciální energii pružné deformace. Při šíření trhliny se spotřebuje určité množství energie na provedení nevratných změn v materiálu, které se na makroskopické úrovni projeví jako oddělení původně spojených částí tělesa a zvětšení celkové plochy trhliny. Trhlina se může šířit pouze, pokud je k dispozici dostatečné množství energie potřebné pro roztržení materiálu, tj. pro překonání jeho soudržnosti.

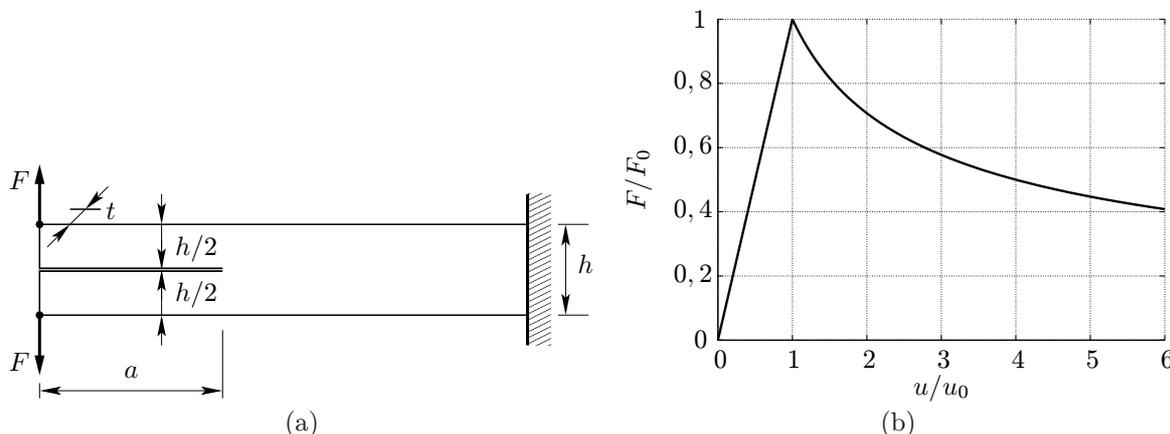
Pro jednoduchost si představme, že na zkoumané těleso působí (kromě reakcí, které nekonají práci) jediná síla  $F$ , a posun jejího působíště ve směru jejího působení označme  $u$ . V tělese je jediná trhlina, jejíž délka je charakterizovaná veličinou  $a$ . Těleso má charakter plochého panelu o tloušťce  $t$  a je ve stavu rovinné napjatosti. Pro pevně danou délku trhliny je za předpokladu malých deformací a lineárně pružného chování materiálu vztah mezi silou  $F$  a posunem jejího působíště  $u$  lineární. Příslušná konstanta úměrnosti  $K$  hraje roli tuhosti konstrukce a její převrácená hodnota  $C = 1/K$  je poddajnost konstrukce. Při statickém zatěžování (bez doprovodných dynamických účinků, tj. bez rozkmitání konstrukce) síla i posun postupně narůstají z původně nulových hodnot a pro vyvození posunu  $u$  je třeba vykonat práci  $Fu/2 = Ku^2/2 = u^2/2C$ , která se ztransformuje na potenciální energii pružné deformace. Poddajnost  $C$  je ale konstantou jen při pevně dané délce trhliny a pro různé dlouhé trhliny má různé hodnoty. Proto ji můžeme považovat za funkci délky trhliny  $a$ . Potenciální energii  $W_e$  uloženou v pružné deformaci tělesa tedy zapíšeme jako funkci posunu  $u$  a délky trhliny  $a$ :

$$W_e(u, a) = \frac{u^2}{2C(a)} \quad (3.48)$$

Konkrétní závislost poddajnosti  $C$  na délce trhliny  $a$  je obecně třeba určit přibližným numerickým výpočtem založeným např. na metodě konečných prvků, ale v některých jednoduchých případech pro ni lze odvodit i analytické vyjádření, např. na základě teorie pružných prutů. Aby tyto úvahy nebyly příliš abstraktní a čtenář je mohl lépe sledovat, ukážeme si příklad, ve kterém se teorie prutů dá použít.

#### Příklad 3.5: Dvojitá konzola — výpočet poddajnosti vzorku

Budeme se zabývat tzv. *dvojitou konzolou* (anglicky „double cantilever“), což je prut na jednom konci vetknutý a na druhém podélně rozříznutý uprostřed výšky průřezu až do vzdálenosti  $a$  od koncového průřezu, viz obr. 3.10a. Prut má obdélníkový průřez o šířce  $t$  a výšce  $h$ , který je v rozříznuté části rozdělen na dva obdélníky o šířce  $t$  a výšce  $h/2$ . Na volném rozříznutém konci necháme působit dvě stejně velké, opačně orientované síly  $F$ , které se snaží naříznutý prut podélně rozštípnout.



Obrázek 3.10: Dvojitá konzola — štípací test: (a) geometrie a zatížení, (b) pracovní diagram.

Elementárními postupy známými ze stavební mechaniky lze zjistit, že síla  $F$  působící na volném konci pružné konzoly o vyložení  $L$  způsobí průhyb  $w = FL^3/3EI$ , kde  $EI$  je ohybová tuhost průřezu, určená jako součin modulu pružnosti materiálu  $E$  a momentu setrvačnosti průřezu  $I$ . Konstanta úměrnosti  $C = L^3/3EI$  je poddajností konzoly při daném způsobu zatížení a potenciální energii pružné deformace konzoly vychýlené na volném konci o  $w$  vyjádříme jako  $W_e = w^2/2C = 3EIw^2/2L^3$ .

V našem příkladu se ovšem zajímáme o zkušební těleso na obr. 3.10a a potenciální energii jeho pružné deformace chceme vyjádřit v závislosti na délce trhliny  $a$  a na vzájemném posunu  $u$  dvou částí rozříznutého koncového průřezu, vynuceném dvěma opačně orientovanými silami o velikosti  $F$ . Části tělesa oddělené podélným řezem se chovají jako dvě ohýbající se konzoly, vetknuté do zbytku tělesa. Jde tedy o konzoly charakterizované vyložení  $L = a$  a momentem setrvačnosti průřezu  $I = t(h/2)^3/12 = th^3/96$ , kterým je na volném konci vnucen příčný posun  $w = u/2$ . Potenciální energii pružné deformace celého tělesa spočítáme jako

$$W_e(u, a) = 2 \times \frac{3E(th^3/96)(u/2)^2}{2a^3} = \frac{Eth^3 u^2}{128 a^3} = \frac{u^2}{2C(a)} \quad (3.49)$$

kde

$$C(a) = \frac{64a^3}{Eth^3} \quad (3.50)$$

je poddajnost tohoto tělesa při daném typu zatížení. Přitom  $Eth^3$  chápeme jako konstantu charakterizující materiál a geometrii tělesa, zatímco  $u$  a  $a$  jsou proměnné charakterizující jeho okamžitý stav.

Při nekonečně malé výchylce z rovnovážného stavu o  $du$  vykoná síla  $F$  práci  $F du$ . Pokud se trhlina nešíří, vykonaná práce musí být rovna přírůstku potenciální energie pružné deformace  $dW_e = (\partial W_e / \partial u) du$ . Síla  $F$  je tedy rovna parciální derivaci potenciální energie pružné deformace  $W_e$  podle posunu  $u$ . Tento vztah lze ověřit v obecné podobě, kdy derivujeme (3.48) a dostaneme

$$F = \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{u^2}{2C(a)} \right) = \frac{u}{C(a)} \quad (3.51)$$

Pro konkrétní příklad dvojité konzoly pak za  $C(a)$  dosadíme podle (3.50), nebo můžeme derivovat konkrétní výraz pro  $W_e$  v (3.49):

$$F = \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{Eth^3 u^2}{128 a^3} \right) = \frac{Eth^3 u}{64a^3} = \frac{u}{C(a)} \quad (3.52)$$

□

V příkladu jsme ukázali pro konkrétní typ tělesa s trhlinou, jak vyjádřit potenciální energii pružné deformace v závislosti na posunu působivé zatěžující síly a délce trhliny. Zároveň jsme ověřili, že při neměnné délce trhliny se práce vykonaná vnější silou rovná přírůstku potenciální energie pružné deformace. Nyní energetickou bilanci rozšíříme na obecný případ, kdy trhlina pod vlivem působícího zatížení roste. Na překonání soudržnosti materiálu (tedy na jeho roztržení) je třeba vynaložit určitou práci, která samozřejmě závisí na typu materiálu, ale také na ploše nově vytvořené části trhliny. Nejjednodušší model je založen na předpokladu, že práce spotřebovaná na jednotku plochy nové části trhliny je materiálovou vlastností, které se říká *lomová energie* a značí se  $G_f$ . Jelikož se jedná o práci na jednotku plochy, její jednotkou je  $\text{J/m}^2 = \text{Nm/m}^2 = \text{N/m}$ .

Sestavme nyní energetickou bilanci pro případ, kdy se těleso deformuje a zároveň se v něm šíří trhlina. Základem je úvaha, že při statickém procesu, kdy kinetická energie zůstává nulová, se práce vykonaná vnější silou musí rovnat součtu práce spotřebované na růst trhliny a přírůstku potenciální energie pružné deformace. Práce vnější síly  $F$  na infinitezimálním posunu  $du$  je rovna  $F du$ . Jestliže  $da$  je přírůstek délky trhliny a čelo trhliny probíhá přes celou tloušťku tělesa  $t$ , je obsah nově vzniklé plochy trhliny  $dA = t da$  a spotřebovaná práce je  $G_f dA = G_f t da$ . Celkovou změnu potenciální energie pružné deformace  $W_e$  při změně posunu o  $du$  a délky trhliny o  $da$  pak vyjádříme totálním diferenciálem

$$dW_e = \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial u} du + \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} da \quad (3.53)$$

Můžeme tedy sestavit energetickou bilanční rovnici

$$F du = G_f t da + \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial u} du + \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} da \quad (3.54)$$

Tato rovnice musí být splněna pro libovolnou změnu posunu  $du$ , takže nutně musí platit

$$F = \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial u} \quad (3.55)$$

Tím jsme jen znovu ověřili již známý vztah mezi působící silou a parciální derivací potenciální energie pružné deformace podle posunu, na kterém tato síla koná práci. Členy  $F du$  a  $[\partial W_e(u, a) / \partial u] du$  se tedy navzájem zruší a rovnice (3.54) přejde na

$$0 = G_f t da + \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} da \quad (3.56)$$

což lze také zapsat jako

$$\left( G_f t + \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} \right) da = 0 \quad (3.57)$$

Při interpretaci této rovnice je třeba jisté obezřetnosti. Na rozdíl od změny posunu  $du$ , která je skutečně zcela libovolná, podléhá změna délky trhliny  $da$  jistým omezením. Jednak nemůže být nikdy záporná, protože již existující trhlina nemůže srůst,<sup>5</sup> jednak k samovolnému rozšíření trhliny může docházet pouze za jisté podmínky, popsané právě rovnicí (3.57). Z této rovnice totiž plyne, že pokud  $da \neq 0$ , pak musí platit

$$G_f t + \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} = 0 \quad (3.58)$$

<sup>5</sup>Hovoříme zde o materiálech s nevratným poškozením. V živých tkáních může samozřejmě dojít k obnově soudržnosti podél trhliny v důsledku biologických procesů hojení, stejně jako v některých neživých materiálech se soudržnost může obnovit v důsledku jistých chemických procesů, např. pokračující hydratace cementu. Příslušná energetická bilance je pak složitější.

Rovnice (3.58) tedy popisuje okolnosti, za kterých se trhlina může šířit. Na rozdíl od (3.55) ji však nelze chápat jako rovnici splněnou ve všech rovnovázných stavech. Pokud splněna není, znamená to podle (3.57), že musí být  $da = 0$ , takže délka trhliny se nemůže měnit.

Rovnice (3.58) představuje kritérium pro šíření trhliny odvozené na základě energetických úvah. Pro lepší pochopení fyzikálního významu jednotlivých členů ji přepíšeme jako

$$-\frac{1}{t} \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} = G_f \quad (3.59)$$

Na pravé straně je materiálová konstanta  $G_f$ , vyjadřující v jistém smyslu odpor materiálu proti šíření trhliny. Tento odpor odpovídá energii, která se při šíření trhliny spotřebuje (na jednotku plochy). Výraz na levé straně by tedy měl odpovídat energii, která je pro šíření trhliny k dispozici (opět na jednotku plochy). Skutečně, podle (3.53) odpovídá výraz  $(\partial W_e / \partial a) da$  změně potenciální energie pružné deformace, ke které dojde při rozšíření trhliny o  $da$  za konstantní hodnoty posunu  $u$ . Pokud se posun  $u$  nemění a trhlina roste, deformace se zpravidla zmenšují a deformační energie klesá. To znamená, že část energie uložené v pružné deformaci se uvolňuje a je k dispozici pro vykonání práce potřebné pro šíření trhliny. Přidáním záporného znaménka tedy ze záporné hodnoty změny deformační energie získáme kladnou hodnotu uvolněné deformační energie a po vydělení nově vzniklou plochou trhliny  $dA = t da$  dostaneme veličinu

$$\mathcal{G}(u, a) = -\frac{1}{t} \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} \quad (3.60)$$

kteřá představuje *uvolňovanou energii pružné deformace*<sup>6</sup> vztaženou na jednotku plochy nově vzniklé trhliny. Jinými slovy, jestliže se trhlina rozšíří o plochu  $dA$ , uvolní se snížením pružných deformací energie  $\mathcal{G}(u, a) dA$  a zároveň se na překonání soudržnosti materiálu spotřebuje energie  $G_f dA$ . Pokud je uvolňovaná energie menší než spotřebovaná, trhlina se nemůže šířit. Pokud jsou si tyto energie rovny, trhlina se může šířit statickým způsobem. Pokud by byla uvolňovaná energie větší než spotřebovaná, přeměnila by se přebytečná energie na kinetickou a došlo by k dynamickému šíření, které není předmětem našeho zkoumání. Provedené úvahy můžeme shrnout do následujících pravidel:

$$\mathcal{G} < G_f \implies da = 0 \quad (3.61)$$

$$\mathcal{G} = G_f \implies da \geq 0 \quad (3.62)$$

$$\mathcal{G} > G_f \implies \text{nepřípustné} \quad (3.63)$$

Formálně se opět jedná o pravidla ve tvaru (2.2)–(2.4), resp. (3.42)–(3.44). Po zavedení funkce

$$f(\mathcal{G}) = \mathcal{G} - G_f \quad (3.64)$$

bychom je mohli přepsat ve známém tvaru zatěžovacích-odtěžovacích podmínek

$$f(\mathcal{G}) \leq 0, \quad da \geq 0, \quad da f(\mathcal{G}) = 0 \quad (3.65)$$

Podmínka komplementarity  $da f(\mathcal{G}) = 0$  je vlastně jen jinak přepsaná rovnice (3.57).

### Příklad 3.6: Dvojitá konzola — sestrojení pracovního diagramu

Z příkladu 3.5 již máme k dispozici výraz (3.49) pro potenciální energii pružné deformace  $W_e$  v závislosti na posunu  $u$  a délce trhliny  $a$ . Jeho diferenciací podle  $a$  a dosazením do (3.60) získáme výraz pro uvolňovanou energii

$$\mathcal{G}(u, a) = -\frac{1}{t} \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} = -\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{Eth^3 u^2}{128 a^3} \right) = \frac{3Eth^3 u^2}{128 a^4} \quad (3.66)$$

V počáteční fázi testu se síla  $F$  postupně zvětšuje z výchozí nulové hodnoty a úměrně tomu narůstá i posun  $u$ , přičemž poddajnost  $C(a_0)$  je určena počáteční délkou trhliny  $a_0$ . Dokud je  $\mathcal{G}(u, a_0) < G_f$ , délka trhliny se nemění a pracovní diagram je lineární. Trhlina se začne šířit v okamžiku, kdy  $\mathcal{G}(u, a_0)$  vypočtené podle (3.66) nabude kritické hodnoty  $G_f$ . Z podmínky  $\mathcal{G}(u_0, a_0) = G_f$  s využitím vzorce (3.66) odvodíme posun

$$u_0 = \sqrt{\frac{128G_f}{3Eth^3}} a_0^2 \quad (3.67)$$

při kterém se trhlina začne šířit. Odpovídající síla

$$F_0 = \frac{u_0}{C(a_0)} = \frac{Eth^3}{64a_0^3} u_0 = \frac{Eth^3}{64a_0^3} \sqrt{\frac{128G_f}{3Eth^3}} a_0^2 = \frac{th}{8a_0} \sqrt{\frac{2EG_f h}{3}} \quad (3.68)$$

<sup>6</sup> Anglický termín pro  $\mathcal{G}$  je „elastic energy release rate“, tedy doslova „rychlost uvolňování pružné energie“. Rychlostí se však zde nerozumí derivace podle času, ale podle plochy nově vzniklé trhliny. Aby nedošlo k nedorozumění, vyhýbáme se v této souvislosti termínu rychlost a mluvíme pouze o uvolňované energii, občas s dovětkem „na jednotku plochy“.

se vypočte podle (3.52).

V další fázi testu se trhlina šíří a poddajnost tělesa vzrůstá, takže vztah mezi silou a posunem již není lineární. Při statickém šíření musí být neustále splněna podmínka  $\mathcal{G}(u, a) = G_f$ , ze které můžeme vypočítat posun

$$u = \sqrt{\frac{128G_f}{3Eh^3}a^2} \quad (3.69)$$

v závislosti na daných konstantách a na proměnné délce trhliny  $a$ . S využitím vztahu (3.52) pak dostaneme odpovídající sílu

$$F = \frac{Eth^3}{64a^3}u = \frac{th}{8}\sqrt{\frac{2EG_f h}{3}}\frac{1}{a} \quad (3.70)$$

Vztahy (3.69)–(3.70) představují parametrický popis pracovního diagramu, tj. grafu závislosti mezi silou a posunem, přičemž roli parametru zde hraje okamžitá délka trhliny  $a$ , měnící se od počáteční hodnoty  $a_0$  až do maximální možné hodnoty, závislé na celkové délce tělesa. Pracovní diagram můžeme sestrojít tak, že pro sérii zvolených hodnot  $a$  větších než  $a_0$  spočítáme podle (3.69)–(3.70) odpovídající dvojice  $(u, F)$  a vyneseme je do grafu. V našem jednoduchém příkladu však lze parametr  $a$  analyticky vyloučit a zapsat  $F$  přímo jako funkci  $u$ . Inverzí (3.69) nejprve určíme závislost délky trhliny na posunu:

$$a = \sqrt[4]{\frac{3Eh^3}{128G_f}}\sqrt{u} \quad (3.71)$$

Po dosazení do (3.70) pak získáme explicitní popis pracovního diagramu ve tvaru

$$F = \frac{th}{8}\sqrt{\frac{2EG_f h}{3}}\sqrt[4]{\frac{128G_f}{3Eh^3}}\frac{1}{\sqrt{u}} = t\sqrt[4]{\frac{Eh^3G_f^3}{216}}\frac{1}{\sqrt{u}} \quad (3.72)$$

Tento popis je ovšem platný pouze ve fázi šíření trhliny. Celkově se tedy pracovní diagram skládá z lineární části, která je popsána vztahem  $F = u/C(a_0)$  a postihuje počáteční fázi testu s konstantní délkou trhliny, a z nelineární části, která je popsána vztahem (3.72) a postihuje následnou fázi testu s šířící se trhlinou. Obě části na sebe navazují v bodě  $(u, F) = (u_0, F_0)$ , který odpovídá stavu na počátku šíření. Z obr. 3.10b je patrné, že tento bod je zároveň vrcholem pracovního diagramu, tj. síla  $F_0$  je maximální silou, kterou může těleso přenést. Jakmile se trhlina začne šířit, síla  $F$  klesá za rostoucího posunu  $u$ .

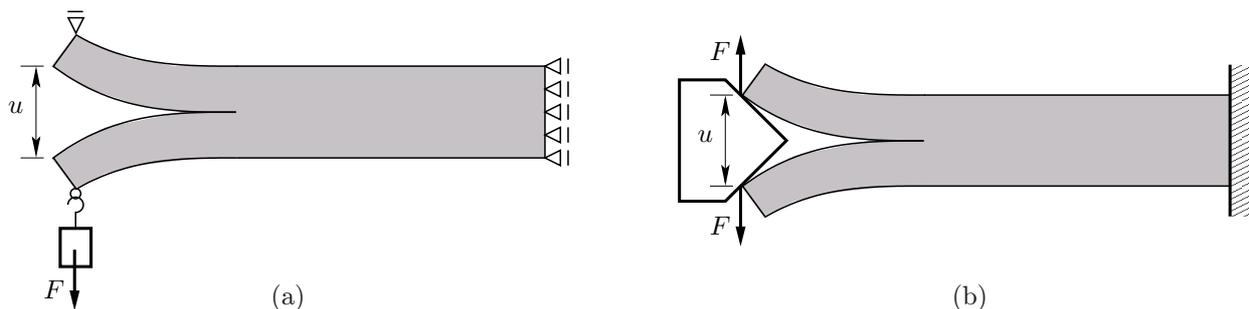
□

### 3.2.3 Řízení testu silou nebo posunem

V příkladu 3.6 jsme sestrojili tzv. rovnovážný pracovní diagram, jehož všechny body odpovídají stavům statické rovnováhy. Zda těchto stavů může být při skutečném testu dosaženo, závisí na způsobu zatěžování, konkrétně na tom, která veličina je přímo řízena (tj. předepsána) a která je od ní odvozena.

Základními případy jsou *řízení silou*, kdy předepisujeme sílu  $F$ , zatímco posun  $u$  měříme jako posun jejího působíště, a *řízení posunem*, kdy naopak předepisujeme rozevření konce dvojité konzoly  $u$  a sílu  $F$  měříme jako příslušnou reakci. Řízení silou si můžeme představit třeba tak, že horní část rozříznutého konce zavěsíme na pevnou podporu a na dolní část pověsíme závaží, jehož tíhu postupně zvyšujeme (obr. 3.11a). Ve vetknutí na opačném konci přitom uvolníme svislý posun, aby se dvojitá konzola mohla skutečně deformovat symetricky v souladu s původním uspořádáním na obr. 3.10a. Řízení posunem si pak můžeme představit jako vrážení tuhého klínu, který při daném zaražení vynutí určitý vzájemný posun oddělených částí na rozvíraném konci (obr. 3.11b). Síly  $F$  jsou pak kontaktními silami mezi klínem a vzorkem.

Při řízení silou je předepsáno postupné zvyšování síly  $F$  a v okamžiku dosažení její maximální hodnoty  $F_0$  dochází k náhlému rozštípnutí vzorku, které probíhá dynamickým způsobem, v jeho průběhu tedy nejsou splněny statické podmínky rovnováhy. Rovnice (3.54) vyjadřuje energetickou bilanci při statickém šíření a síla  $F$  na její



Obrázek 3.11: Štípací test dvojité konzoly (a) řízený silou, (b) řízený posunem.

levé straně je silou, která je zapotřebí ke statickému šíření trhliny. Jestliže je skutečně působící síla větší, koná větší práci, než je zapotřebí, a přebytečná práce se mění na kinetickou energii. Při takovém provedení testu tedy není možné proměřit sestupnou část rovnovážného pracovního diagramu. Statického šíření trhliny je však možno dosáhnout při řízení posunem, protože ten se (pro daný typ testu) monotónně zvětšuje nejen v počáteční fázi s konstantní délkou trhliny, ale i v průběhu šíření trhliny. Jestliže tedy do vzorku zvolna vtlačujeme klín, trhlina postupně roste v závislosti na rozevření  $u$  vyvolaném klínem, ale tento proces při dostatečně pomalém vtlačování probíhá staticky. Kontaktní síla  $F$  mezi klínem a vzorkem přitom postupně klesá.

Postup použitý při sestavení rovnovážného pracovního diagramu pro štípací test dvojité konzoly lze zobecnit. Základem řešení je znalost konkrétního vyjádření potenciální energie pružné deformace  $W_e$  jako funkce délky trhliny  $a$  a posunu  $u$  působitě zatěžující síly  $F$ . Pomocí parciálních derivací této funkce pak zapíšeme vztahy

$$F(u, a) = \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial u} \quad (3.73)$$

$$\mathcal{G}(u, a) = -\frac{1}{t} \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} \quad (3.74)$$

z nichž první popisuje závislost síly na posunu a délce trhliny a druhý definuje uvolňovanou energii pružné deformace, která se objevuje v podmínkách (3.65). Další analýza je velmi podobná postupům použitým při rozboru chování různých pružnoplastických modelů v kapitole 2. Jestliže pro okamžitý stav platí  $\mathcal{G}(u, a) < G_f$ , trhlina se nemůže šířit a mezi silou a posunem platí vztah (3.73) s neměnnou délkou trhliny  $a$ . Jestliže je však  $\mathcal{G}(u, a) = G_f$ , trhlina se může šířit, ale může také dojít k pružnému odtěžování beze změny délky trhliny. Který případ nastane, to závisí na předepsané změně veličiny řízené v daném testu, tedy síly  $F$  nebo posunu  $u$ .

Pro lineárně pružné těleso s trhlinou je potenciální energie pružné deformace kvadratickou funkcí posunu  $u$  a předpis pro její výpočet má již zmíněný tvar

$$W_e(u, a) = \frac{u^2}{2C(a)} \quad (3.75)$$

kde  $C(a)$  je poddajnost tělesa při daném typu zatěžování. Vztahy (3.73)–(3.74) lze tedy konkretizovat jako

$$F(u, a) = \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial u} = \frac{u}{C(a)} \quad (3.76)$$

$$\mathcal{G}(u, a) = -\frac{1}{t} \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} = \frac{u^2}{2tC^2(a)} \frac{dC(a)}{da} \quad (3.77)$$

Diferenciací těchto vztahů můžeme najít vyjádření pro přírůstky  $F$  a  $\mathcal{G}$  v závislosti na přírůstcích  $u$  a  $a$ . Pro zjednodušení zápisu budeme vynechávat argument  $a$  u poddajnosti  $C$  a její derivace podle  $a$  budeme značit čárkami, tj. např.  $C'' = d^2C(a)/da^2$ . Navíc místo infinitezimálních přírůstků  $da$ ,  $du$  apod. budeme psát rychlosti  $\dot{a}$ ,  $\dot{u}$  atd., což jsou vlastně přírůstky jednotlivých veličin vydělené přírůstkem času  $dt$ . Diferenciací (3.76)–(3.77) dostaneme

$$\dot{F} = \frac{1}{C} \dot{u} - \frac{uC'}{C^2} \dot{a} \quad (3.78)$$

$$\dot{\mathcal{G}} = \frac{uC'}{tC^2} \dot{u} + \frac{u^2(CC'' - 2C'^2)}{2tC^3} \dot{a} \quad (3.79)$$

Další zpracování těchto rovnic závisí na způsobu řízení zkoumaného zatěžovacího programu.

Při **řízení silou** je předepsáno  $\dot{F}$ . Proto z první rovnice vyjádříme  $\dot{u}$  v závislosti na  $\dot{F}$  a  $\dot{a}$  a dosadíme do druhé. Dostaneme tak

$$\dot{u} = C\dot{F} + \frac{uC'}{C} \dot{a} \quad (3.80)$$

$$\dot{\mathcal{G}} = \frac{uC'}{tC} \dot{F} + \frac{u^2C''}{2tC^2} \dot{a} \quad (3.81)$$

Při pružném odtěžování za konstantní délky trhliny je  $\dot{a} = 0$  a řešení je přípustné, pokud se hodnota  $\mathcal{G}$  nezvětšuje, tj. pokud  $\dot{\mathcal{G}} = (uC'/tC)\dot{F}$  je nekladné. Jelikož veličiny  $u$ ,  $t$ ,  $C$  i  $C'$  jsou kladné,<sup>7</sup> je tato podmínka splněna pro  $\dot{F} \leq 0$ , tedy při snižování zatěžující síly. To se samozřejmě dalo očekávat.

Při růstu trhliny zůstává  $\mathcal{G}(u, a)$  rovno lomové energii  $G_f$ , takže jeho časová derivace  $\dot{\mathcal{G}}$  musí být nulová. To je obdoba podmínky konzistence  $\dot{f} = 0$ , používané při analýze plastických modelů. S využitím (3.81) vypočteme z podmínky  $\dot{\mathcal{G}} = 0$  rychlost šíření trhliny jako

$$\dot{a} = -\frac{2CC'}{uC''} \dot{F} \quad (3.82)$$

<sup>7</sup>Veličina  $C' = dC/da$  je kladná, protože s rostoucí délkou trhliny se poddajnost tělesa nutně zvyšuje. Že je kladná poddajnost  $C$ , posun  $u$  a tloušťka tělesa  $t$  je snad zřejmé.

Toto řešení je ale přípustné pouze, pokud je  $\dot{a} \geq 0$ . Aby k tomu došlo v případě  $\dot{F} \geq 0$ , tedy v případě doplňkovém k předcházejícímu případu pružného odtěžování, musí být  $C'' < 0$ .

Dospěli jsme tedy k závěru, že řízení silou je možné jedině v případě, že druhá derivace poddajnosti podle délky trhliny je záporná. Jedině tak je totiž zajištěna jednoznačnost chování testovaného tělesa při zvýšení i při snížení působící síly. Pokud by bylo  $C'' > 0$ , měla by úloha při snížení síly dvě různá řešení (odpovídající jednak pružnému odtěžování s konstantní trhlinou, jednak růstu trhliny) a při zvýšení síly by řešení neexistovalo. Intuitivně je zřejmé, že to odpovídá situaci, kdy již bylo dosaženo vrcholu pracovního diagramu a při statickém šíření trhliny síla klesá. Tuto úvahu lze potvrdit odvozením vztahu mezi přírůstkem síly a posunu při šíření trhliny. Dosazením (3.82) do (3.80) dostaneme

$$\dot{u} = C\dot{F} - \frac{uC'}{C} \frac{2CC'}{uC''} \dot{F} = \left( C - \frac{2C'^2}{C''} \right) \dot{F} \quad (3.83)$$

a po inverzi

$$\dot{F} = \frac{C''}{CC'' - 2C'^2} \dot{u} = K_t \dot{u} \quad (3.84)$$

kde

$$K_t = \frac{C''}{CC'' - 2C'^2} \quad (3.85)$$

je okamžitá (tečná) tuhost tělesa při šíření trhliny, udávající poměr mezi přírůstkem síly a přírůstkem posunu jejího působíště. Hodnoty  $C$  i  $C'$  jsou vždy kladné. Pro  $C'' < 0$  je tečná tuhost  $K_t$  kladná a odpovídající bod leží ve vzestupné části pracovního diagramu. Pro  $C'' = 0$  je  $K_t = 0$ , což odpovídá vrcholu pracovního diagramu. Pro  $C'' > 0$ , ale přitom dostatečně malé, je tuhost  $K_t$  záporná a odpovídající bod je na sestupné části pracovního diagramu. Tím je názorně vysvětleno, proč v tomto případě nelze použít řízení posunem. Jak interpretovat skutečnost, že pro  $C'' > 2C'^2/C$  je tuhost  $K_t$  opět kladná, si vysvětlíme později.

Věnujme se nyní analýze přírůstkového řešení v případě **řízení posunem**. Rychlost  $\dot{u}$  v tomto případě považujeme za danou veličinu. Při pružném odtěžování za konstantní délky trhliny je  $\dot{a} = 0$  a toto řešení je přípustné, pokud  $\dot{G} = (uC'/tC^2)\dot{u}$  určené podle (3.79) je nekladné. Vzhledem k tomu, že  $uC'/tC^2$  je vždy kladná veličina, nastává pružné odtěžování v případě  $\dot{u} \leq 0$ , tj. při zmenšení vynuceného posunu. To je opět velmi přirozený a očekávatelný výsledek.

Při růstu trhliny je  $\dot{G} = 0$  a s využitím (3.79) vyjádříme rychlost šíření trhliny jako

$$\dot{a} = \frac{2CC'}{u(2C'^2 - CC'')} \dot{u} \quad (3.86)$$

Řešení je přípustné, pokud  $\dot{a} \geq 0$ . Aby tento případ nastal právě tehdy, když  $\dot{u} \geq 0$ , a byl tedy doplňkový k případu pružného odtěžování, musí být zlomek násobící  $\dot{u}$  v (3.86) kladný. Tato podmínka je splněna, pokud  $2C'^2 - CC'' > 0$ , tedy pokud

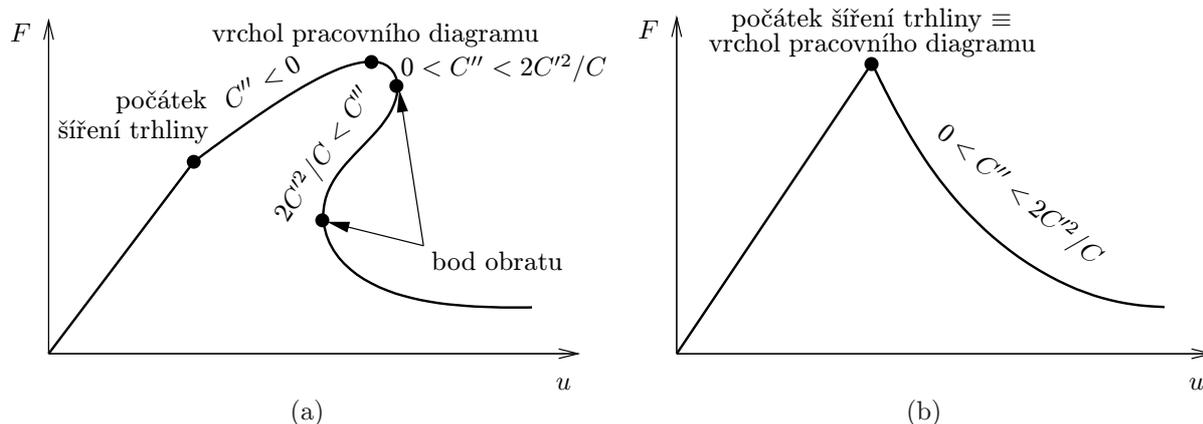
$$C'' < 2C'^2/C \quad (3.87)$$

Dospěli jsme tedy k závěru, že řízení posunem je možné, pokud druhá derivace poddajnosti podle délky trhliny nepřekročí určitou kladnou mezní hodnotu, závislou na poddajnosti a její první derivaci. Tato podmínka je zcela jistě splněna, pokud je  $C''$  záporné, tj. ve všech případech, kdy lze použít řízení silou. V předchozím rozboru jsme ukázali, že stavy, pro které  $C'' < 0$ , odpovídají bodům na vzestupné části pracovního diagramu, kde je tečná tuhost  $K_t$  určená podle (3.85) kladná.<sup>8</sup> Řízení posunem lze ale použít i pro kladné hodnoty  $C''$  splňující podmínku (3.87). Pro  $C''$  mezi nulou a  $2C'^2/C$  je tečná tuhost vypočtená podle (3.85) záporná a odpovídající body jsou v sestupné části pracovního diagramu, tedy za jeho vrcholem. V této oblasti při šíření trhliny síla klesá, ale posun se zvětšuje. Řízení posunem tedy lze použít, řízení silou však ne. Pokud je ovšem  $C''$  větší než  $2C'^2/C$ , zlomek násobící  $\dot{u}$  v (3.86) nabude záporné hodnoty, což znamená, že při šíření trhliny by klesala nejen síla, ale i posun. Odpovídající tečná tuhost vypočtená podle (3.85) je pak kladná, protože udává poměr dvou záporných přírůstků (síly a posunu). V pracovním diagramu se pak nacházíme za bodem obratu, ve kterém má tento diagram svislou tečnu, viz obr. 3.12a. Bod obratu odpovídá kritické situaci, kdy  $C'' = 2C'^2/C$ , rychlost  $\dot{u}$  vypočtená z podmínky  $\dot{G} = 0$  s využitím (3.79) je nulová i při nenulové rychlosti šíření trhliny  $\dot{a}$ , a tečná tuhost  $K_t$  vypočtená podle (3.85) je nekonečná.

Může se samozřejmě stát, že hned na počátku šíření trhliny je  $C'' > 2C'^2/C$  a bod obratu splývá s vrcholem pracovního diagramu a zároveň s bodem odpovídajícím počátku šíření. S takovou situací se setkáme v příkladu 3.8, viz obr. 3.14b. Pak ovšem nepomůže ani řízení posunem a proměření sestupné větve je možné pouze pomocí rafinovaných experimentálních postupů, které jsou založeny např. na řízení rozevřením trhliny.

Pro řadu těles s trhlinou se bod obratu na pracovním diagramu neobjeví a v celé sestupné větvi se posun monotónně zvětšuje (obr. 3.12b), takže test lze provést za řízení posunem prakticky až do úplného rozlomení zkoumaného tělesa. Pokud ale pracovní diagram má bod obratu, dojde při řízení posunem po dosažení tohoto bodu k náhlému rozšíření trhliny dynamickým způsobem, stejně jako při řízení silou po dosažení vrcholu pracovního diagramu.

<sup>8</sup>Vzorec (3.85) byl sice odvozen v pasáži věnované řízení silou, ale platí obecně, tedy i při řízení posunem.



Obrázek 3.12: Rovnovážný pracovní diagram (a) s bodem obratu, (b) bez bodu obratu.

### 3.2.4 Ekvivalence mezi lokálním a globálním přístupem

Seznámili jsme se se dvěma alternativními přístupy k určení podmínek, za kterých lze očekávat šíření trhliny. První přístup, navržený Irwinem, zkoumá rozložení napětí v těsném okolí kořene trhliny a má tedy lokální charakter. Odpovídající kritérium je založeno na kritické hodnotě faktoru intenzity napětí. Druhý (ale historicky starší) přístup, navržený Griffithem, sestavuje bilanci energie pro celé vyšetřované těleso a má tedy globální charakter. Odpovídající kritérium je založeno na kritické hodnotě energie pružné deformace uvolňované při šíření trhliny. Vzhledem k tomu, že obě kritéria jsou odvozena z velmi přirozených předpokladů pomocí logických úvah, bylo by obtížné rozhodnout, které z nich lépe popisuje fyzikální realitu. Naštěstí se ukazuje, že obě kritéria jsou v zásadě ekvivalentní, takže vedou ke stejným výsledkům a můžeme si po libosti vybrat, které z nich nám připadá pro daný účel pohodlnější a snáze použitelné.

Porovnání lokálního a globálního přístupu provedeme pro namáhání v čistém módu I. Klíčovou otázkou je vztah mezi faktorem intenzity napětí  $K_I$  a veličinou  $\mathcal{G}$  popisující uvolňování energie pružné deformace při šíření trhliny. Na první pohled není zřejmé, jak by mohla souviset lokální koncentrace napětí v těsném okolí kořene trhliny s energií pružné deformace celého tělesa. K odhalení této souvislosti nám pomůže důvtipný trik.

Při výpočtu parciální derivace potenciální energie pružné deformace  $W_e$  podle délky trhliny  $a$  se k posunu  $u$  působitě zatěžující síly chováme jako ke konstantě. Porovnáváme tedy dva stavy, ve kterých je tělesu vnucen stejný posun  $u$ , ale v jednom stavu je v tělese trhlina o délce  $a$  a ve druhém stavu trhlina delší o  $\Delta a$ . Úkolem je vypočítat rozdíl mezi energiemi pružné deformace v obou stavech. Představíme si tedy výchozí stav A s trhlinou o délce  $a$ , ve kterém má potenciální energie pružné deformace jistou hodnotu  $W_e^A = W_e(u, a)$ . Samotná hodnota  $W_e^A$  nás momentálně nezajímá, ale rádi bychom určili její změnu při přechodu do stavu B se stejnou hodnotou posunu  $u$ , ale trhlinou o délce  $a + \Delta a$ . Snažíme se tedy vypočítat rozdíl  $\Delta W_e = W_e^B - W_e^A = W_e(u, a + \Delta a) - W_e(u, a)$ . Přechod ze stavu A do stavu B si myšleně rozdělíme na dva kroky.<sup>9</sup>

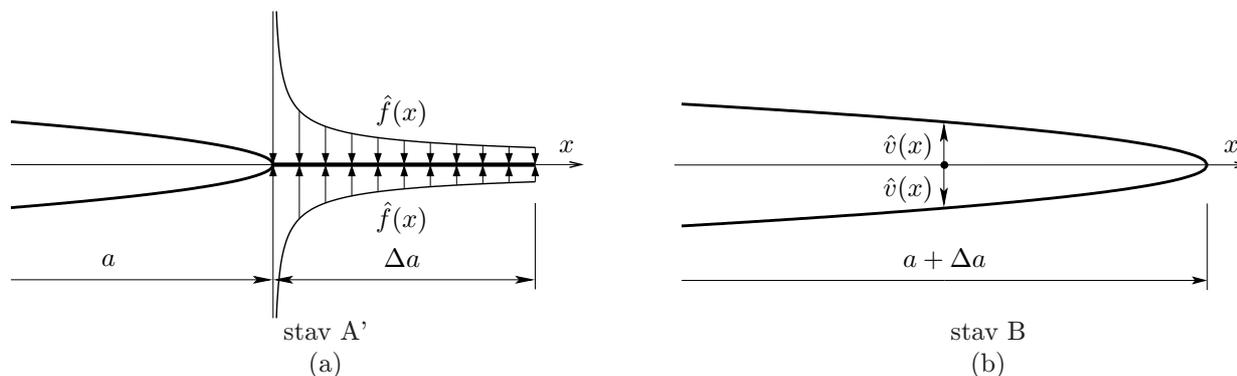
V prvním kroku (obr. 3.13a) si představíme, že trhlina se prodlouží o  $\Delta a$ , ale posuny, deformace ani napětí se nezmění. Abychom zabezpečili rovnováhu v takto modifikovaném stavu A', musíme na nově vytvořeném segmentu trhliny, tedy na obdélníku o rozměrech  $\Delta a \times t$ , nechat působit pomocné povrchové<sup>10</sup> vnější síly, jejichž rozložení bude přesně odpovídat napětí, které zde působilo ve stavu A. Jelikož pro každý bod tělesa je deformace ve stavu A naprosto stejná jako ve stavu A', je i potenciální energie pružné deformace v obou stavech stejná.

Druhým krokem je myšlený odtěžovací proces, který vede k přechodu ze stavu A' do stavu B. Tento proces spočívá v postupném odstraňování uměle přidaných pomocných povrchových sil z nového segmentu trhliny až do jejich úplného vymizení (obr. 3.13b). Během odtěžovacího procesu se trhlina postupně rozevírá, takže působitě zmíněných povrchových sil se posouvá proti směru jejich působení a tyto síly konají jistou zápornou práci. V tělese dochází k přerozdělení napětí a deformace, ovšem při zachování rovnováhy a pevně daného vynuceného posunu  $u$ . Na konci odtěžovacího procesu má trhlina délku  $a + \Delta a$  a nepůsobí v ní žádné fiktivní pomocné síly, těleso je tedy ve stavu B. Celková práce vykonaná pomocnými silami v průběhu odtěžovacího procesu je proto rovna hledané změně potenciální energie pružné deformace  $\Delta W_e$ .

Teď už stačí slovně popsany postup zapsat matematicky a vyhodnotit práci pomocných sil. Zavedeme soustavu souřadnic  $(x, y)$  tak, že trhlina leží na části osy  $x$  a její kořen je ve stavu A v bodě o souřadnicích  $(a, 0)$ , zatímco ve stavech A' a B je posunut do bodu  $(a + \Delta a, 0)$ , viz obr. 3.13. Nový segment trhliny je tedy obdélník o délce  $\Delta a$  a šířce  $t$ , která odpovídá tloušťce tělesa. Pracujeme ale za předpokladu rovinné napjatosti a ve směru osy  $z$  kolmé na rovinu analýzy jsou všechny veličiny konstantní. Proto můžeme intenzitu pomocných povrchových sil popsat funkcí  $\hat{f}$  souřadnice  $x$  měnící se od  $a$  do  $a + \Delta a$  (obr. 3.13a), a podobně finální posun působitě těchto sil popsat funkcí  $\hat{v}$  souřadnice  $x$  (obr. 3.13b). V módu I pomocné povrchové síly nahrazují napětí  $\sigma_y$ , které v trhlině

<sup>9</sup>Oba „kroky“ přechodu ze stavu A do stavu B při skutečném šíření trhliny probíhají naráz, ale jejich myšlené oddělení nám usnadní provedení energetické bilance, protože v prvním kroku energii pouze utrácíme na šíření trhliny a ve druhém ji pouze čerpáme z uvolněné energie pružné deformace.

<sup>10</sup>Mluvíme o povrchových silách, protože trhlinu můžeme považovat za speciální část povrchu tělesa.



Obrázek 3.13: Přechod mezi dvěma stavy rovnováhy A a B při prodloužení trhliny: (a) pomocný stav A' po prvním kroku (prodloužení trhliny a zavedení fiktivních povrchových sil zabraňujících jejím rozevření), (b) stav B po druhém kroku (odstranění fiktivních sil doprovázené rozevřením trhliny).

o délce  $a$  původně působilo. Složky napětí  $\tau_{yx}$  a  $\tau_{yz}$  jsou na ose  $x$  nulové. Pomocné síly jsou proto kolmé na nový segment trhliny, přičemž na jeho horním okraji působí směrem dolů a na jeho spodním okraji působí nahoru, aby tak zabraňovaly rozevření trhliny. Jejich intenzitu

$$\hat{f}(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x-a)}} \quad (3.88)$$

určíme ze vzorce (3.25), kam za  $r$  dosazujeme  $x-a$ , za  $\theta$  dosazujeme  $0$  a faktor intenzity napětí  $K_{II}$  klademe roven nule. Dále zjistíme, jak budou vypadat celkové posuny působišť pomocných sil. Po úplném odstranění těchto sil budou body s původní polohou na ose  $x$  přemístěny ve směru osy  $y$  o vzdálenosti odpovídající posunům  $v$  v blízkosti kořene trhliny o délce  $a + \Delta a$ . Tyto posuny tedy určíme ze vzorce (3.33). Pro body na horním okraji rozvírajícího se segmentu dosazujeme  $\theta = 180^\circ$  a vzdálenost od kořene je nyní  $r = a + \Delta a - x$ . Navíc uvážíme, že pro rovinnou napjatost je  $\kappa + 1 = 4/(1 + \nu)$ , takže  $(\kappa + 1)/G = 8/E$ . Posuny na horním okraji se tedy vyjádří jako

$$\hat{v}(x) = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{a + \Delta a - x}{2\pi}} [(2\kappa + 1) - (-1)] = \frac{4K_I}{E} \sqrt{\frac{a + \Delta a - x}{2\pi}} \quad (3.89)$$

Posuny na spodním okraji trhliny mají stejnou velikost, ale opačné znaménko. Při výpočtu vykonané práce je třeba vzít v úvahu, že síly se při odtěžování postupně mění od výchozí hodnoty  $\hat{f}(x)$  do nulové, zatímco posuny narůstají od nulové hodnoty do  $\hat{v}(x)$ . Práce by se vypočítala integrací přes celý odtěžovací proces, ale v případě lineární závislosti mezi silami a posuny je výsledek roven součinu celkového posunu a průměrné síly, tj. polovině součinu finálního posunu a výchozí síly. Navíc jsou síly vztaženy na jednotku plochy trhliny a po délce trhliny se mění jako funkce  $x$ , zatímco po tloušťce tělesa jsou konstantní. Je také třeba vzít v úvahu, že  $\hat{v}(x)$  odpovídá posunu bodů na horním okraji trhliny, ale pomocné síly působí i na spodní okraj, který se posouvá o stejnou vzdálenost, ale opačným směrem. Na obou okrajích je směr působících sil opačný než směr posunů, takže vykonaná práce je záporná. S uvážením všech těchto skutečností se výsledná změna potenciální energie pružné deformace při přechodu ze stavu A do stavu B vypočítá jako

$$\begin{aligned} \Delta W_e &= -2 \cdot \frac{1}{2} t \int_a^{a+\Delta a} \hat{f}(x) \hat{v}(x) dx = -t \int_a^{a+\Delta a} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x-a)}} \frac{4K_I}{E} \sqrt{\frac{a + \Delta a - x}{2\pi}} dx = \\ &= -\frac{2tK_I^2}{\pi E} \int_a^{a+\Delta a} \sqrt{\frac{a + \Delta a - x}{x-a}} dx \end{aligned} \quad (3.90)$$

Poslední integrál lze substitucí  $x = a + \Delta a \sin^2 \alpha$  převést na

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\Delta a} \sqrt{\frac{a + \Delta a - x}{x-a}} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{a + \Delta a - a - \Delta a \sin^2 \alpha}{a + \Delta a \sin^2 \alpha - a}} \Delta a 2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \\ &= 2\Delta a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = 2\Delta a \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \\ &= 2\Delta a \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha = 2\Delta a \frac{\pi}{4} = \frac{\pi \Delta a}{2} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Po dosazení zpět do (3.90) dostaneme

$$\Delta W_e = -\frac{2tK_I^2}{\pi E} \frac{\pi \Delta a}{2} = -\frac{tK_I^2 \Delta a}{E} \quad (3.92)$$

a odtud už můžeme vyjádřit<sup>11</sup>

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{t} \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} = -\frac{1}{t} \frac{\Delta W_e}{\Delta a} = \frac{K_I^2}{E} \quad (3.93)$$

Po poměrně složitých výpočtech jsme nakonec získali velmi elegantní a jednoduchý vztah mezi faktorem intenzity napětí  $K_I$  a uvolňovanou energií pružné deformace na jednotku plochy trhliny  $\mathcal{G}$ , ve kterém se jako další veličina objevuje už jen modul pružnosti materiálu  $E$ . Nepřítomnost jakýchkoli konstant typu  $\pi$  je dána tím, že jsme při zavedení faktoru intenzity napětí definovali  $K_I$  jako konstantu úměrnosti mezi  $\sigma_y$  a  $1/\sqrt{2\pi r}$  a ne jako konstantu úměrnosti mezi  $\sigma_y$  a  $1/\sqrt{r}$ , což by se původně mohlo zdát přirozenější.

Vztah (3.93) ukazuje, že při popisu šíření trhliny v módu I je Irwinovo lokální kritérium založené na kritické hodnotě  $K_c$  faktoru  $K_I$  ekvivalentní s Griffithovým globálním kritériem založeným na kritické hodnotě  $G_f$  uvolňované energie  $\mathcal{G}$ , pokud se příslušné kritické hodnoty zvolí tak, aby mezi nimi platil obdobný vztah, tedy

$$G_f = \frac{K_c^2}{E} \quad (3.94)$$

nebo jinak zapsáno

$$K_c = \sqrt{EG_f} \quad (3.95)$$

Odpor materiálu proti šíření trhlin tedy stačí charakterizovat buď pomocí lomové energie  $G_f$ , nebo pomocí lomové houževnatosti  $K_c$ , a druhou veličinu pak lze dopočítat podle (3.95) nebo (3.94). K těmto vztahům jsme dospěli za předpokladu rovinné napjatosti. Pro rovinnou deformaci je třeba pouze drobně upravit elastickou konstantu, protože v tomto případě je  $1 + \kappa = 4(1 - \nu)$  a modul pružnosti  $E$  v (3.89) se nahradí modifikovanou hodnotou

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (3.96)$$

která se od  $E$  pro  $\nu \approx 0,2$  liší jen o 4 procenta.

V literatuře se často uvádí zobecněná forma vzorce (3.93), zahrnující i příspěvky módů II a III. Odvození je velmi podobné jako pro mód I, jen se přidá práce povrchových sil nahrazujících smyková napětí  $\tau_{yx}$  a  $\tau_{yz}$  na posunech  $u$  a  $w$  v rovině trhliny. Je ovšem třeba si uvědomit, že výsledný vzorec

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{t} \frac{\partial W_e(u, a)}{\partial a} = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2G} \quad (3.97)$$

sice popisuje uvolňování energie pružné deformace při smíšeném módu namáhání, ale stále za předpokladu, že se trhlina šíří v pokračování svého původního směru. To ovšem obecně není pravda, takže (3.97) poskytuje jen hrubou představu o tom, jak jednotlivé módy přispívají k uvolňování energie při šíření trhliny. Určením skutečného směru šíření při smíšeném módu namáhání se budeme podrobněji zabývat v článku 3.2.6.

### 3.2.5 Vztah mezi poddajností a faktorem intenzity napětí

Vraťme se ještě k namáhání v čistém módu I. Vztah (3.93) mezi uvolňovanou energií pružné deformace  $\mathcal{G}$  a faktorem intenzity napětí  $K_I$  se hodí nejen k převodům mezi lomovou energií  $G_f$  a lomovou houževnatostí  $K_c$ , ale s jeho pomocí lze také nalézt souvislost mezi funkcemi  $C(a)$  a  $K_I(a)$  popisujícími poddajnost tělesa a faktor intenzity napětí v závislosti na délce trhliny. Víme totiž, že uvolňovaná energie  $\mathcal{G}$  souvisí s poddajností  $C$  podle vzorce (3.77). Uvážíme-li, že podíl  $u/C$  odpovídá podle (3.76) působící síle  $F$ , můžeme (3.77) přepsat jako

$$\mathcal{G} = \frac{u^2 C'}{2tC^2} = \frac{F^2 C'}{2t} \quad (3.98)$$

Po dosazení do (3.93) dostaneme vztah mezi faktorem intenzity napětí  $K_I$  a derivací poddajnosti podle délky trhliny  $C' = dC(a)/da$ . Takový vztah lze využít dvěma způsoby. Pokud je odvozena nebo změřena funkce  $C(a)$  popisující závislost poddajnosti tělesa na délce trhliny, lze snadno určit odpovídající funkci pro faktor intenzity napětí

$$K_I(a) = F \sqrt{\frac{EC'(a)}{2t}} \quad (3.99)$$

Naopak pokud je např. z tabulek znám vzorec aproximující faktor intenzity napětí pro různé délky trhliny, můžeme z něj odvodit funkci popisující závislost poddajnosti na délce trhliny, kterou pak využijeme při sestavení pracovního diagramu. Zde je ovšem postup poněkud komplikovanější, protože ze vztahů (3.93) a (3.98) plyne vyjádření nikoli přímo pro poddajnost  $C$ , ale pro její derivaci

$$\frac{dC(a)}{da} = \frac{2t}{F^2} \mathcal{G}(a) = \frac{2t}{E} \frac{K_I^2(a)}{F^2} \quad (3.100)$$

<sup>11</sup>Parciální derivace  $W_e$  podle  $a$  je definována jako limita podílu  $\Delta W_e/\Delta a$  pro  $\Delta a$  blízkí se nule. V našem výpočtu se zdá, že tento podíl je konstantní, takže limitní přechod není zapotřebí. Ve skutečnosti by při důsledném rozboru bylo třeba vzít v úvahu, že faktor  $K_I$  je v (3.88) vyhodnocen pro délku trhliny  $a$  a v (3.89) pro  $a + \Delta a$ , takže místo  $K_I^2$  bychom v (3.92) měli psát  $K_I(a)K_I(a + \Delta a)$  a teprve po limitním přechodu dostaneme  $K_I(a)^2$ . Navíc by se pro konečné  $\Delta a$  skutečné rozložení napětí a skutečné rozevření trhliny lišilo od asymptotických polí, ale v limitě tento rozdíl zmizí.

Abychom určili samotnou funkci  $C(a)$ , musíme rovnici (3.100) integrovat. Integraci provedeme v mezích od nulové délky trhliny, které odpovídá jistá poddajnost  $C(0)$  tělesa bez trhliny, do obecné délky trhliny  $a$ , pro kterou chceme poddajnost určit. Integrační proměnnou přitom označíme  $\bar{a}$ , aby se nespletla s horní mezí  $a$ . Výsledný vzorec má tvar

$$C(a) = C(0) + \frac{2t}{E} \int_0^a \frac{K_I^2(\bar{a})}{F^2} d\bar{a} \quad (3.101)$$

Přitom jsme schválně ponechali jmenovatel  $F^2$  uvnitř integrálu, protože faktor intenzity napětí  $K_I$  je (při zatížení osamělou silou) vždy úměrný působící síle  $F$ , takže ve zlomku  $K_I^2/F^2$  se síla vykrátí. Konkrétní využití právě provedených úvah je předvedeno v následujících dvou příkladech.

### Příklad 3.7: Faktor intenzity napětí pro dvojitou konzolu

Pro dvojitou konzolu jsme na základě teorie prutů odvodili analytický výraz (3.50) pro poddajnost v závislosti na délce trhliny, jehož derivací je funkce

$$C'(a) = \frac{dC(a)}{da} = \frac{d}{da} \left( \frac{64a^3}{Eth^3} \right) = \frac{192a^2}{Eth^3} \quad (3.102)$$

Díky vztahu (3.99) odtud snadno získáme vzorec pro faktor intenzity napětí

$$K_I(a) = F \sqrt{\frac{EC'(a)}{2t}} = F \sqrt{\frac{E \cdot 192a^2}{2tEth^3}} = \frac{4\sqrt{6}Fa}{th^{3/2}} \quad (3.103)$$

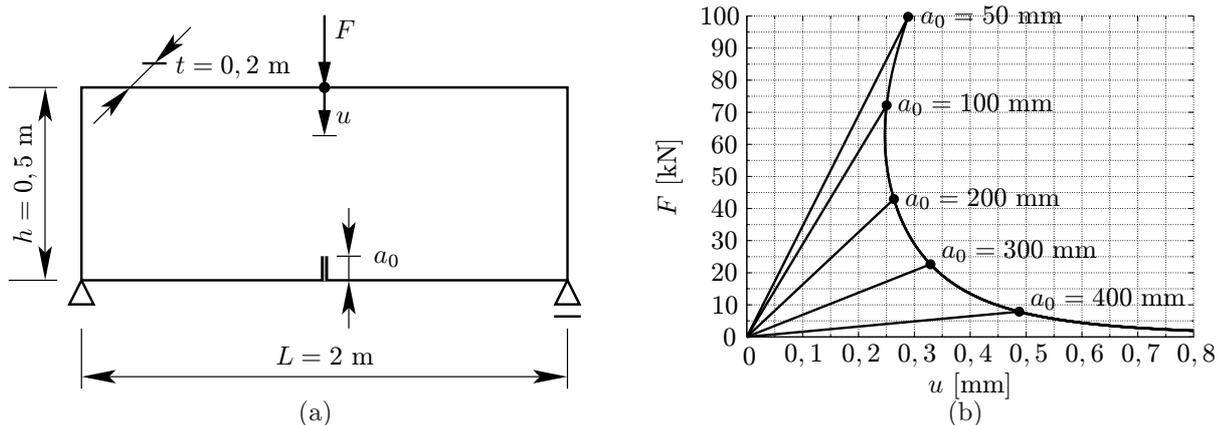
Je pozoruhodné, že v daném případě je faktor intenzity napětí přímo úměrný délce trhliny, zatímco v jiných analytických vzorcích typu (3.9) nebo (3.10) se objevovala odmocnina této délky. Důvodem je skutečnost, že pro dvojitou konzolu hraje délka trhliny zároveň roli ramene, na kterém síla  $F$  vyvozuje moment. Pro napětí v okolí kořene trhliny je vlastně rozhodující hodnota momentu  $M = Fa$ . Při šíření trhliny zůstává tento moment konstantní, takže síla  $F$  klesá nepřímo úměrně rostoucí délce trhliny  $a$ . Zároveň je poddajnost pružné konzoly úměrná třetí mocnině jejího vyložení, tedy v našem případě délky trhliny, a proto se posun působíště síly jakožto součin síly a poddajnosti zvětšuje úměrně druhé mocnině délky trhliny. Konečným důsledkem je tedy nepřímá úměrnost mezi silou a odmocninou posunu. Díky těmto úvahám teď lépe chápeme tvar vzorců (3.69)–(3.72), odvozených v příkladu 3.6.

□

### Příklad 3.8: Pracovní diagram pro tříbodový ohyb nosníku s vrubem

V tomto příkladu ukážeme, že ze vzorce pro závislost faktoru intenzity napětí na délce trhliny můžeme odvodit nejen hodnotu síly, pro kterou se začne trhlina šířit, ale také celý pracovní diagram (samozřejmě pokud celý přetvárný proces probíhá podle předpokladů lineární lomové mechaniky). Budeme zkoumat prostý nosník o rozpětí  $L$  a obdélníkovém průřezu o šířce  $t$  a výšce  $h$ , s počáteční trhlinou (vrubem) umístěnou uprostřed rozpětí při spodním okraji až do výšky  $a_0$ , viz obr. 3.14a. Nosník je uprostřed rozpětí na horním okraji zatížen osamělou silou  $F$ . Známe také vlastnosti materiálu, konkrétně modul pružnosti  $E$  a lomovou energii  $G_f$ . Naším úkolem je sestavit pracovní diagram popisující závislost mezi silou  $F$  a posunem jejího působíště  $u$  až do úplného porušení nosníku.

Na základě známé závislosti faktoru intenzity napětí  $K_I$  na délce trhliny  $a$ , popsané vzorci (3.17)–(3.18) v tab. 3.1 nyní můžeme odvodit funkci popisující poddajnost vzorku, tedy poměr mezi průhybem a silou, opět v závislosti na délce trhliny. Stačí dosadit do vzorce (3.101). Kromě funkce  $K_I(a)$  potřebujeme ještě hodnotu poddajnosti pro nulovou délku trhliny, tedy veličinu  $C(0)$ . V daném případě jde o poddajnost prostého nosníku



Obrázek 3.14: Tříbodový ohyb nosníku s vrubem: (a) geometrie a zatížení, (b) pracovní diagram.

bez vrubu, kterou určíme elementárními postupy teorie pružných prutů. Osamělá síla  $F$  působící uprostřed prostého nosníku o rozpětí  $L$  vyvolá průhyb  $w = FL^3/48EI$ , kde  $I = th^3/12$  je moment setrvačnosti průřezu. Poddažnost nosníku bez vrubu je tedy

$$C(0) = \frac{L^3}{48EI} = \frac{L^3}{4Eth^3} \quad (3.104)$$

Podle (3.101) se poddažnost odpovídající délce trhliny (nebo vrubu)  $a$  spočte jako

$$C(a) = C(0) + \frac{2t}{E} \int_0^a \frac{K_I^2(\bar{a})}{F^2} d\bar{a} = \frac{L^3}{4Eth^3} + \frac{2t}{E} \int_0^a \frac{9L^2}{4t^2h^3} k^2\left(\frac{\bar{a}}{h}\right) d\bar{a} = \frac{L^3}{4Eth^3} + \frac{9L^2}{2Eth^2} \int_0^{a/h} k^2(\alpha) d\alpha \quad (3.105)$$

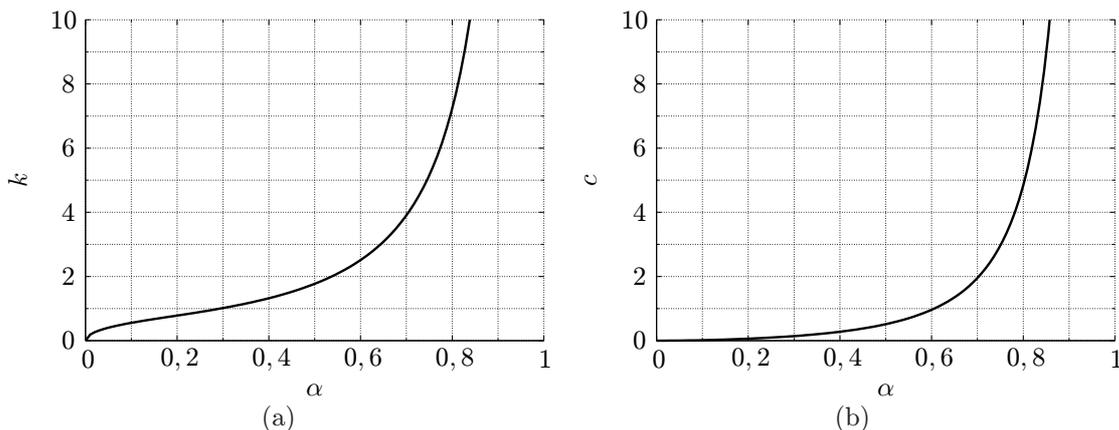
Analytický výpočet integrálu funkce  $k^2$  by byl pochopitelně velmi pracný, ale integraci můžeme provést s libovolnou přesností numericky. Označíme tedy

$$c(\alpha) = \int_0^\alpha k^2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \quad (3.106)$$

a vzorec pro poddažnost přepíšeme jako

$$C(a) = \frac{L^3}{4Eth^3} + \frac{9L^2}{2Eth^2} c\left(\frac{a}{h}\right) \quad (3.107)$$

Graf funkce  $k$ , který se již objevil na obr. 3.4, je připomenut na obr. 3.15a a odpovídající graf funkce  $c$  je vynesena na obr. 3.15b. Pro  $a/h$  blížíci se jedné roste  $c$  nade všechny meze, což odpovídá skutečnosti, že pro trhliny procházející přes téměř celý průřez se poddažnost neomezeně zvětšuje.



Obrázek 3.15: (a) Graf funkce  $k$  dané vztahem (3.18), (b) graf funkce  $c$  dané vztahem (3.106).

Jakmile máme určenu funkci popisující poddažnost v závislosti na délce trhliny, lze pracovní diagram sestavit podobným postupem, jaký jsme už použili pro dvojitou konzolu v příkladu 3.6 (kde byla tato funkce dána velmi jednoduchým analytickým výrazem). Základem jsou vztahy (3.76) a (3.77). Dokud se trhlina o počáteční délce  $a_0$  nešíří, je poddažnost  $C(a_0)$  konstantní a vztah mezi silou a průhybem je podle (3.76) lineární. To platí, dokud je hodnota  $\mathcal{G}(u, a_0)$  vypočtená podle (3.77) menší než lomová energie. V průběhu šíření trhliny musí být  $\mathcal{G}(u, a) = G_f$  a s využitím (3.77) dostáváme rovnici, ze které je možno vyjádřit průhyb v závislosti na okamžité délce trhliny jako

$$u(a) = \sqrt{\frac{2tG_f}{C'(a)}} C(a) \quad (3.108)$$

Odpovídající síla  $F$  se pak podle (3.76) vypočte jako

$$F(a) = \frac{u(a)}{C(a)} = \sqrt{\frac{2tG_f}{C'(a)}} \quad (3.109)$$

Tyto dvě rovnice poskytují parametrický popis pracovního diagramu. Vzhledem ke složitosti funkcí  $C$  a  $C'$  však v tomto případě nelze (na rozdíl od příkladu 3.6) délku trhliny  $a$  vyloučit a zapsat přímý vztah mezi silou  $F$  a posunem  $u$ . Nicméně i na základě parametrického popisu příslušnou křivku snadno sestojíme. Po dosazení  $a = a_0$  do (3.108)–(3.109) získáme průhyb  $u_0$  a sílu  $F_0$  v okamžiku, kdy se trhlina začne šířit z počátečního vrubu o délce  $a_0$ . Jak již bylo řečeno, až do tohoto okamžiku je pracovní diagram lineární. Dále můžeme pro vhodně zvolenou sérii hodnot délky trhliny  $a$  měnících se od  $a_0$  do  $h$  vypočítat podle (3.108) a (3.109) odpovídající hodnoty průhybu  $u$  a síly  $F$  a vynést je jako body do grafu. Spojením těchto bodů plynulou křivkou pak dostaneme nelineární část pracovního diagramu.

Pro konkrétní hodnoty  $E = 30 \text{ GPa}$  a  $G_f = 200 \text{ N/m}$  je výsledek na obr. 3.14b. Jak je vidět, maximální síly je i zde dosaženo na počátku šíření trhliny. To je v souladu se skutečností, že druhá derivace poddajnosti  $C''(a_0)$  vyhodnocená pro počáteční délku trhliny je v našem případě kladná. Jak je vidět z obr. 3.4b, je celá křivka konvexní a druhá derivace funkce  $c$  podle  $\alpha$  je tudíž kladná pro všechny hodnoty bezrozměrné délky trhliny  $\alpha$  mezi 0 a 1. Ze vztahu (3.107) vyplývá, že druhá derivace  $C(a)$  podle  $a$  je jistým kladným násobkem druhé derivace  $c$  podle  $\alpha$ , takže je i  $C''(a) > 0$  pro všechna  $a$  mezi 0 a  $h$ . Proto bude v případě tříbodového ohybu s vrubem síla přenášená vzorkem od počátku šíření trhliny vždy klesat, bez ohledu na rozměry vzorku, počáteční délku vrubu nebo materiálové konstanty. Tento závěr samozřejmě platí za předpokladů, ze kterých byl odvozen, tj. při chování odpovídajícím lineární lomové mechanice.

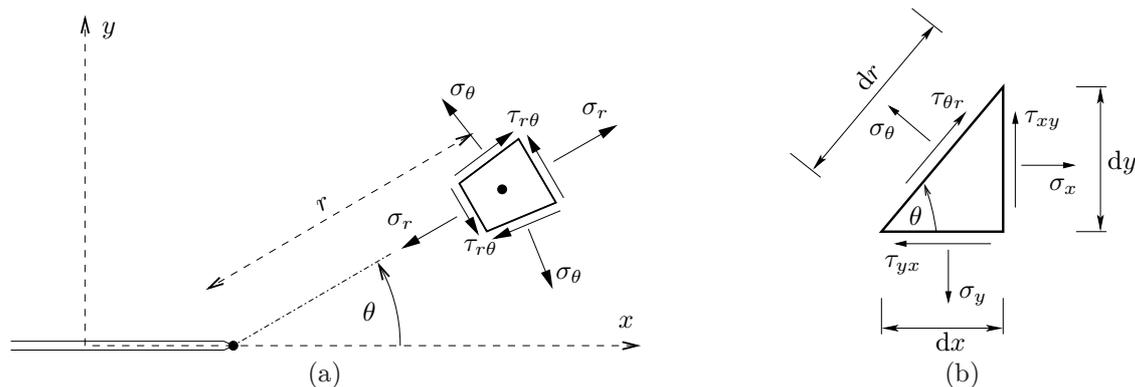
Poznamenejme ještě, že pro dané rozměry nosníku a vlastnosti materiálu je vrchol pracovního diagramu na obr. 3.14b zároveň bodem obratu, takže při řízení posunem by po překročení hodnoty  $u = 0,29 \text{ mm}$  délka trhliny vzrostla skokem a zároveň by poklesla odpovídající síla  $F$  (měřená jako reakce). Šíření trhliny by v této fázi probíhalo dynamicky a uvolnilo by se určité množství energie, což by mohlo vést i ke ztrátě kontroly nad celým testem. Pozvolného statického šíření trhliny by bylo možno dosáhnout při řízení testu rozevřením trhliny, což je ovšem náročnější a vyžaduje lepší experimentální zařízení. Místo toho bychom také mohli modifikovat geometrické parametry, nejlépe prodloužit počáteční vrub, abychom upravili pracovní diagram a odstranili z něj bod obratu. Z obr. 3.14b je patrné, že na sestupné větvi by se posun monotónně zvyšoval např. při délce vrubu  $a_0 = 200 \text{ mm}$ .

□

### 3.2.6 Šíření ve smíšeném módu

Při popisu šíření trhliny ve smíšeném módu je třeba se zabývat nejen otázkou, za jakých podmínek začne trhlina růst, ale také, v jakém směru bude její šíření probíhat. Směr šíření ostatně není zcela jistý ani pro čistý mód I. Na první pohled se sice zdá, že vzhledem k symetrii celé úlohy se trhlina nutně musí šířit v pokračování svého původního směru, tedy při našem standardním označení ve směru osy  $x$ . Nicméně v kapitole 2 jsme se setkali s tím, že pro materiál popsany Trescovou podmínkou plasticity dochází za jednoosého tahu k pokluzu podél rovin ukloněných vůči rovině symetrie o  $45^\circ$ , zatímco pro materiál popsany Rankinovou podmínkou očekáváme při stejném namáhání tahové porušení podél roviny symetrie kolmé na směr namáhání. Proto si lze představit i to, že pro některé typy materiálu s dominantním mechanismem pokluzu by se trhlina namáhaná v módu I šířila např. ve dvou symetricky položených šikmých směrech. K tomu sice ve vysoce duktilních (tažných) materiálech teoreticky může dojít, ale při aplikaci lineární lomové mechaniky na křehké a kvazikřehké materiály lze očekávat, že dominantním mechanismem porušení bude při namáhání trhliny v módu I roztržení a trhlina se bude šířit v pokračování svého původního směru.

Otázkou zůstává, v jakém směru se trhlina šíří při nenulové hodnotě faktoru  $K_{II}$ . Přestože se jedná o jednu z klíčových otázek lomové mechaniky, v současné době na ni není zcela jednoznačná a obecně přijímaná odpověď. V literatuře byla navržena řada kritérií, z nichž některá mají velmi solidní teoretický základ a jiná působí spíše jako empirické odhady. Cílem tohoto textu není podat jejich kompletní přehled a porovnání. Proto se seznámíme jen s kritériem, které se v poslední době zdá být nejpoužívanější a srovnávací výpočty ukazují, že v řadě případů vede k velmi dobré shodě s experimentálními výsledky. Jde o kritérium založené na maximální hodnotě tzv. obvodového napětí (anglicky „circumferential stress“ nebo „hoop stress“), což je normálové napětí na plošce pocházející daným bodem ve směru jeho spojnice s kořenem trhliny. Graficky je tato složka napětí znázorněna na obr. 3.16a, a protože působí ve směru, ve kterém narůstá souřadnice  $\theta$ , značíme ji  $\sigma_\theta$ . Samozřejmě není možné hledat vůbec největší hodnotu tohoto napětí v okolí kořene trhliny, protože s klesající vzdáleností od kořene  $\sigma_\theta$  stejně jako ostatní složky napětí roste nade všechny meze. Při určování směru šíření proto hledáme bod s maximální hodnotou  $\sigma_\theta$  mezi všemi body, ležícími ve stejné vzdálenosti od kořene trhliny. Pracujeme tedy



Obrázek 3.16: (a) Názorný význam obvodového napětí  $\sigma_\theta$ , (b) infinitezimální trojúhelník použitý při odvození vzorce pro transformaci napětí.

s body na kružnici o daném poloměru  $r$  se středem v kořeni trhliny. Přitom konkrétní volba  $r$  není důležitá, protože asymptotické pole  $\sigma_\theta$  lze zapsat jako součin jisté funkce úhlu  $\theta$  a funkce  $1/\sqrt{2\pi r}$ , jak bude ukázáno ve vzorci (3.112). Pro jakékoli pevně zvolené  $r$  tedy  $\sigma_\theta(r, \theta)$  nabývá maximální hodnoty pro stejné  $\theta = \theta_c$ , které pak určuje předpokládaný směr šíření trhliny.

Abychom mohli *kritérium maximálního obvodového napětí* zapsat pomocí faktorů intenzity napětí  $K_I$  a  $K_{II}$ , musíme nejprve vyjádřit obvodové napětí  $\sigma_\theta$  v závislosti na polárních souřadnicích  $(r, \theta)$  podobně, jako byly obvyklé složky napětí  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  a  $\tau_{xy}$  vyjádřeny v rovnicích (3.24)–(3.26). Při transformaci složek napětí lze použít vzorce, které by měl čtenář znát z předmětu „Pružnost a pevnost“, ale pro osvěžení jeho paměti zde předvedeme celé odvození. Základem jsou podmínky rovnováhy nekonečně malého pravoúhlého trojúhelníku podle obr. 3.16b, jehož odvěsny o délkách  $dx = dr \cos \theta$  a  $dy = dr \sin \theta$  jsou rovnoběžné s osami  $x$  a  $y$  a přepona o délce  $dr$  má směr spojnice zkoumaného bodu s kořenem trhliny. Na přeponu působí normálové napětí  $\sigma_\theta$  a smykové napětí  $\tau_{\theta r}$ , které zde uvádíme pouze pro úplnost, protože naším cílem je vypočítat  $\sigma_\theta$ . Na odvěsny pak působí obvyklé složky napětí  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  a  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Hledané napětí  $\sigma_\theta$  můžeme určit z podmínky rovnováhy trojúhelníka ve směru kolmém na přeponu. Přesněji řečeno, jde o podmínku rovnováhy trojbokého hranolu, který má ve směru  $z$  kolmém na rovinu analýzy rozměr  $t$  a zmíněný trojúhelník je jeho průmětem do roviny  $xy$ . Je třeba si uvědomit, že v podmínce rovnováhy sčítáme nikoli samotná napětí, ale elementární síly, které jsou výslednicemi napětí na jednotlivých stěnách hranolu a jejich velikost je součinem napětí a plochy, na kterou působí. Po promítnutí všech elementárních sil do směru kolmého na přeponu získáme podmínku

$$\sigma_\theta t dr + \tau_{yx} t dx \sin \theta - \sigma_y t dx \cos \theta + \tau_{xy} t dy \cos \theta - \sigma_x t dy \sin \theta = 0 \quad (3.110)$$

ze které po dosazení  $dx = dr \cos \theta$ ,  $dy = dr \sin \theta$  a  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  a vykrácení součinem  $t dr$  plyne transformační vztah

$$\sigma_\theta = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (3.111)$$

Sem pak dosadíme složky napětí vyjádřené podle (3.24)–(3.26). Výsledný výraz se dá upravit do tvaru

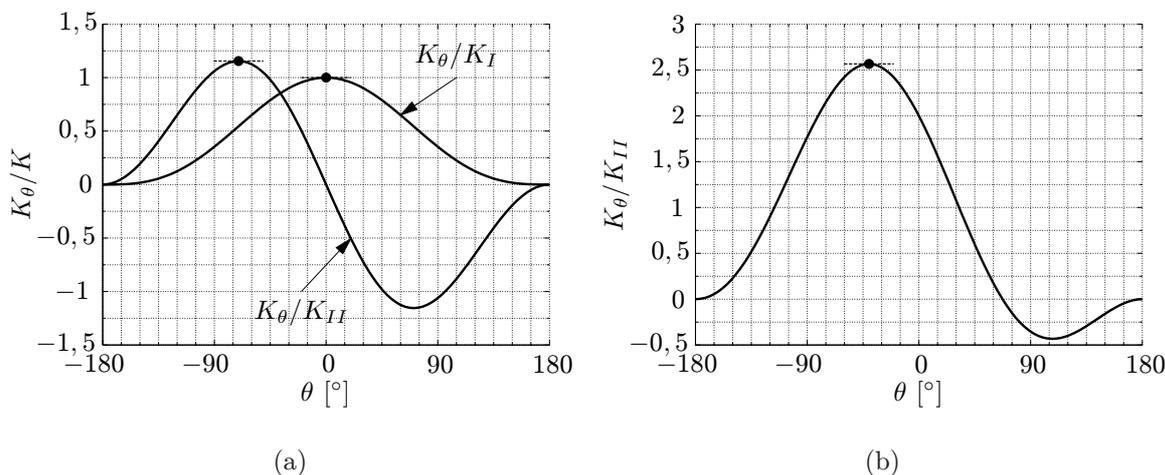
$$\sigma_\theta(r, \theta) = \frac{K_\theta(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3.112)$$

kde

$$K_\theta(\theta) = K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.113)$$

Pro módy I a II je průběh obvodového napětí v závislosti na polárním úhlu  $\theta$  vyneseno na obr. 3.17a. V módu I je maxima dosaženo pro  $\theta_c = 0$ , což podle kritéria maxima obvodového napětí znamená, že trhlina by se skutečně šířila v prodloužení svého původního směru. Pro mód II s  $K_I = 0$  a  $K_{II} > 0$  je maxima dosaženo pro  $\theta_c \approx -70^\circ$  a trhlina by se od původního směru odchýlila o tento úhel. Záporné znaménko souvisí s tím, že kladná hodnota faktoru  $K_{II}$  odpovídá kladnému smykovému napětí na ose  $x$  a z názoru je jasné, že trhlina pak bude mít tendenci šířit se šikmo „doprava“, tj. do oblasti se zápornými hodnotami souřadnice  $y$ , kterým odpovídají záporné polární úhly  $\theta$ . Na obr. 3.17b je vyneseno průběh obvodového napětí pro smíšený mód s poměrem  $K_I : K_{II} = 2 : 1$ . V tomto případě se trhlina od původního směru odchýlí asi o  $40^\circ$ . Obecně se úhel  $\theta_c$ , pod kterým se trhlina šíří, najde jako argument maximalizující hodnotu funkce  $K_\theta$ . Derivace této funkce je

$$K'_\theta(\theta) = \frac{dK_\theta(\theta)}{d\theta} = -\frac{3}{2}K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left( 2 - 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.114)$$



Obrázek 3.17: Průběh obvodového napětí  $\sigma_\theta$  v závislosti na polárním úhlu  $\theta$  pro (a) čisté módy I nebo II, (b) smíšený mód s poměrem  $K_I : K_{II} = 2 : 1$ .

a z podmínek  $K'_\theta(\theta_c) = 0$  a  $K''_\theta(\theta_c) < 0$  (postačujících podmínek pro maximum funkce  $K_\theta$  v bodě  $\theta_c$ ) dostaneme po jistých úpravách řešení

$$\theta_c = 2 \arctan \left( \frac{K_I}{4K_{II}} - \operatorname{sgn}(K_{II}) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{K_I^2}{16K_{II}^2}} \right) \quad (3.115)$$

Lze ukázat, že pro kritický směr  $\theta_c$ , určený pro daný poměr  $K_I : K_{II}$  dosazením do (3.115), je napětí  $\sigma_\theta(r, \theta_c)$  nejen maximálním obvodovým napětím na kružnici o poloměru  $r$ , ale zároveň je v odpovídajícím bodě o souřadnicích  $(r, \theta_c)$  největším hlavním napětím.<sup>12</sup>

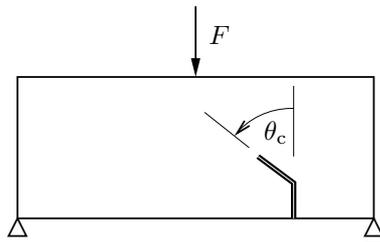
Jestliže se směr šíření trhliny určuje jako směr, ve kterém je na kružnici o pevně zvoleném malém poloměru  $r$  dosaženo maximálního obvodového napětí, zdá se rozumné založit na hodnotě tohoto napětí také kritérium stanovující, zda se trhlina bude skutečně šířit. Závislost obvodového napětí  $\sigma_\theta$  na vzdálenosti  $r$  od kořene trhliny má opět singularitu typu  $r^{-1/2}$ , stejně jako všechny ostatní složky napětí, a intenzitu této singularity v kritickém směru  $\theta_c$  určuje právě hodnota funkce  $K_\theta(\theta_c)$ , která proto hraje velmi podobnou roli jako faktor intenzity napětí. Pro čistý mód I je skutečně  $\theta_c = 0$  a  $K_\theta(\theta_c) = K_\theta(0) = K_I$ . Tím je motivováno obecné kritérium pro šíření trhliny ve smíšeném módu popsané podmínkou

$$K_\theta(\theta_c) = K_c \quad (3.116)$$

Tuto podmínku je přitom třeba chápat tak, že úhel  $\theta_c$  je funkcí faktorů  $K_I$  a  $K_{II}$  danou předpisem (3.115) a také funkční předpis pro vyhodnocení funkce  $K_\theta$  podle (3.113) závisí na těchto faktorech, takže po dosazení vznikne na levé straně (3.116) výraz závislý na  $K_I$  a  $K_{II}$ . Explicitní tvar tohoto výrazu je však dosti složitý, takže se spokojíme s jeho právě uvedenou nepřímou definicí.

### Příklad 3.9: Použití kritéria maximálního obvodového napětí

Pro nosník s excentricky umístěným vrubem (obr. 3.18) bylo lineárně pružným výpočtem zjištěno, že faktory intenzity napětí závisí na zatěžující síle  $F$  podle vztahů  $K_I = 7 \text{ m}^{-3/2} \times F$ ,  $K_{II} = -3 \text{ m}^{-3/2} \times F$ . Youngův modul pružnosti materiálu je  $E = 30 \text{ GPa}$  a lomová energie  $G_f = 100 \text{ N/m}$ . Naším úkolem je určit, při jaké hodnotě zatížení  $F$  se z vrubu začne šířit trhlina a v jakém směru.



Obrázek 3.18: Nosník s excentricky umístěným vrubem.

Směr šíření trhliny přímo vyplývá ze vztahu (3.115):

$$\theta_c = 2 \arctan \left( \frac{7F}{4 \cdot (-3F)} - \operatorname{sgn}(-3F) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{49F^2}{16 \cdot 9F^2}} \right) = 2 \arctan \left( \frac{1}{3} \right) \doteq 36,87^\circ \quad (3.117)$$

Odpovídající faktor intenzity napětí

$$K_\theta(\theta_c) \doteq (7 \text{ m}^{-3/2}) \cdot F \cdot 0,949^3 - 3 \cdot (-3 \text{ m}^{-3/2}) \cdot F \cdot 0,949^2 \cdot 0,316 \doteq (8,54 \text{ m}^{-3/2}) \cdot F \quad (3.118)$$

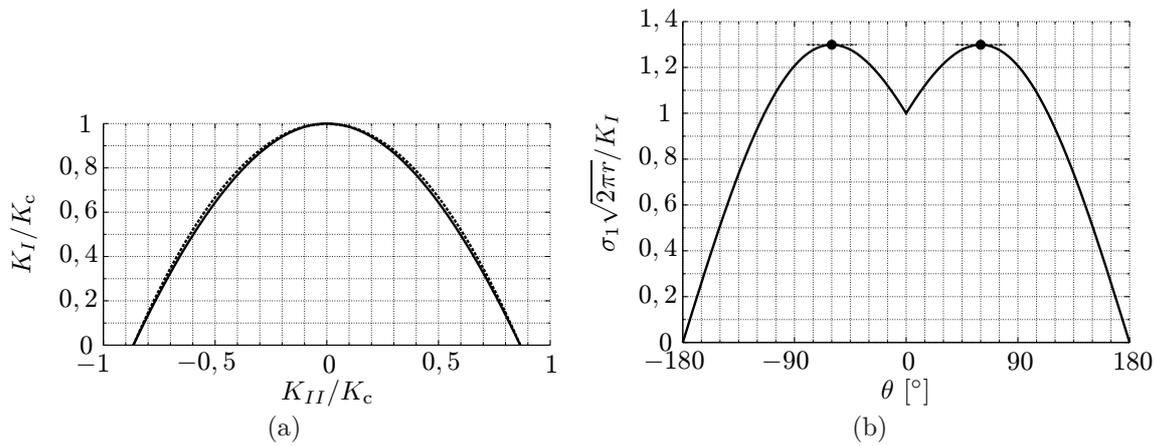
získáme z rovnice (3.113). Konečně velikost síly v okamžiku šíření trhliny  $F_c$  určíme z požadavku rovnosti faktoru  $K_\theta$  a lomové houževnatosti  $K_c = \sqrt{EG_f}$  podle (3.116). To vede ke kritické síle

$$F_c = \frac{\sqrt{EG_f}}{8,54 \text{ m}^{-3/2}} = \frac{\sqrt{30 \cdot 10^9 \cdot 100 \text{ Nm}^{-3/2}}}{8,54 \text{ m}^{-3/2}} \doteq 203 \text{ kN} \quad (3.119)$$

□

Podle kritéria maximálního obvodového napětí je pro čistý mód II kritický úhel  $\theta_c = -2 \arctan(\sqrt{2}/2) \approx -70^\circ$  a odpovídající hodnota funkce  $K_\theta(\theta_c) = (2/\sqrt{3})K_{II} \approx 1,155K_{II}$ . Z podmínky (3.116) tedy plyne, že v čistém módu II by se trhlina měla začít šířit při dosažení faktoru intenzity napětí  $K_{II} = (\sqrt{3}/2)K_c \approx 0,866K_c$ . Podle uvedeného kritéria je proto lomová houževnatost pro smykový mód o něco menší než pro tahový mód. Na obr.

<sup>12</sup>Proto se kritériu maxima obvodového napětí někdy říká kritérium maximálního hlavního napětí, anglicky „maximum principal stress criterion“. To je ale poněkud matoucí, protože kdybychom ve všech bodech ve stejné vzdálenosti  $r$  od kořene určili hodnoty hlavních napětí a pak našli jejich maximum, dospěli bychom k jinému výsledku. Nejde tedy v pravém slova smyslu o maximální hlavní napětí, ale o maximální obvodové napětí, které je v bodě, kde je maxima dosaženo, zároveň hlavním napětím.



Obrázek 3.19: (a) Kritické kombinace faktorů intenzity napětí  $K_I$  a  $K_{II}$  podle kritéria (3.116) a jejich aproximace ve tvaru (3.120), (b) rozložení maximálního hlavního napětí v blízkosti kořene trhliny v závislosti na polárním úhlu  $\theta$  při namáhání v čistém módu I.

3.19a jsou v rovině faktorů intenzity napětí ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ) znázorněny kritické kombinace těchto faktorů vedoucí podle kritéria maximálního obvodového napětí k šíření trhliny. Zároveň je naznačena čárkovaně aproximace „přesné“, ale složité podmínky (3.116) jednoduchou analytickou podmínkou

$$\frac{K_I}{K_c} + \frac{4}{3} \frac{K_{II}^2}{K_c^2} = 1 \quad (3.120)$$

Chyba této aproximace je skutečně nepatrná. Za zmínku ještě stojí, že znaménko faktoru  $K_{II}$  nemá vliv na to, zda k šíření trhliny dojde, rozhodující je jen jeho absolutní hodnota. Znaménko  $K_{II}$  odpovídá znaménku smykového napětí na ose  $x$  (tj. v prodlouženém směru trhliny) a určuje, na kterou stranu se trhlina při svém dalším růstu od této osy odchýlí. Na druhou stranu znaménko faktoru  $K_I$  odpovídá znaménku normálového napětí na ose  $x$  a klasické vzorce typu (3.24)–(3.26) mají smysl pouze pro nezáporné  $K_I$ . Pro  $K_I < 0$  by totiž bylo rozevření trhliny vypočtené podle (3.35) záporné, což odpovídá vzájemnému pronikání materiálu po obou stranách trhliny. Protože k takovému pronikání ve skutečnosti nemůže dojít, nemá celé řešení fyzikální smysl a ani vzorce pro rozdělení napětí nejsou použitelné. Pokud dosazením do vzorce pro  $K_I$  získáme záporný výsledek, znamená to, že pro daný způsob zatížení by se trhlina zavřela a její obě strany by byly ve vzájemném kontaktu. V trhlíně pak vzniká tlakové napětí, které zabraňuje vzájemnému pronikání materiálu po obou stranách, a v důsledku tření může být případně přenášeno i smykové napětí. Úlohy tohoto typu patří mezi tzv. kontaktní problémy a jejich řešení je složitější než pro klasickou otevřenou trhlinu, protože za některých okolností mohou posuny zůstat zcela spojitě a rozložení napětí i deformace je stejné, jako kdyby trhlina neexistovala, ale za jiných okolností může v zavřené trhlíně docházet ke smykovému pokluzu buď po celé její délce, nebo jen částečně.

Pro zajímavost je na obr. 3.19b vykresleno rozložení maximálního hlavního napětí v blízkosti kořene trhliny při namáhání v módu I. Připomeňme, že při rovinné napjatosti se hlavní napětí vypočítají podle vzorce (B.20), takže maximální hlavní napětí v rovině analýzy je

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.121)$$

V okolí kořene trhliny je asymptotická část pole napětí odpovídající módu I popsána vztahy (3.24)–(3.26). Po jejich dosazení do (3.121) a úpravách dostaneme pro maximální hlavní napětí v okolí kořene vzorec

$$\sigma_{\max}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \right) \quad (3.122)$$

Je pozoruhodné, že maxima vzhledem k polárnímu úhlu  $\theta$  není dosaženo na ose symetrie, tj. pro  $\theta = 0^\circ$ , ale ve dvou symetricky sdružených směrech odchylovajících se od této osy o  $\pm 60^\circ$ . Nelze proto očekávat, že kritérium založené na maximálním hlavním napětí v pevně dané vzdálenosti od kořene trhliny by mohlo vést k rozumné predikci směru šíření trhliny.

## Kapitola 4

# Poškození a jeho lokalizace

Na rozdíl od slov pružnost, plasticita nebo lom, které jsou v běžném životě používány ve zhruba stejném smyslu jako v mechanice, je význam slova *poškození* velmi široký. Například hanlivý nápis nastříkaný sprejem na fasádě nového domu je zcela jistě možné chápat jako jistý druh poškození. V tomto textu však pojem poškození používáme ve specifickém a mnohem užším smyslu, totiž jako snížení vnitřní integrity materiálu způsobené vznikem, šířením a vzájemným spojováním malých trhlin, dutin a podobných defektů.

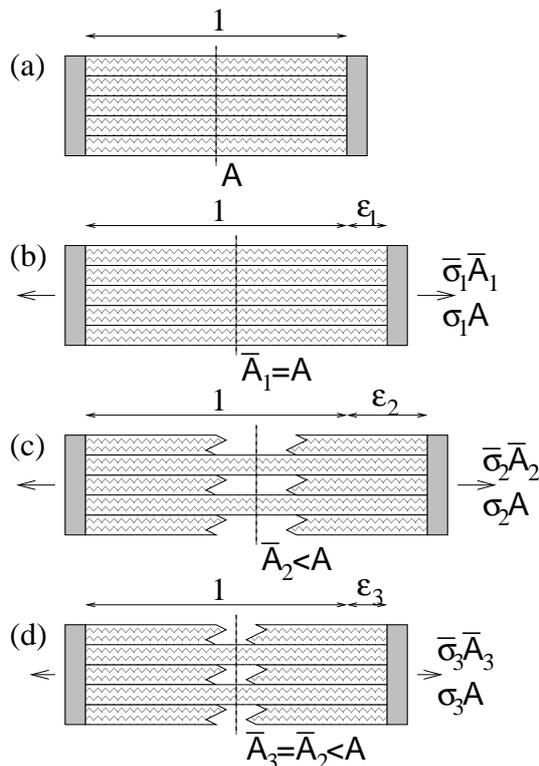
Přestože přítomnost defektů narušuje spojitost pole posunutí, při jejich popisu v rámci mechaniky poškození pracujeme stále s představou kontinua, tedy spojitého prostředí, ve kterém lze obvyklým způsobem definovat složky napětí a deformace a zapsat pro ně základní rovnice v klasickém tvaru. Ve skutečnosti se však jedná o hodnoty zprůměrované přes jistý reprezentativní objem materiálu, čímž se rozumí objem dostatečně velký ve srovnání s rozměry defektů, ale zároveň dostatečně malý ve srovnání s rozměry konstrukce. Vliv rozevření trhlin nebo zvětšení dutin se převádí na ekvivalentní nepružnou deformaci, takže se někdy hovoří o rozetřených trhlínách (anglicky „smeared cracks“). Místo detailního popisu jednotlivých trhlin se používá zjednodušený popis jejich vlivu na tuhost a pevnost reprezentativního objemu materiálu. Už z těchto základních úvah plyne, že modely poškození se hodí spíše k popisu počátečních fází deformačního procesu, kdy jsou defekty obvykle velmi malé (hovoříme např. o mikrotrhlínách nebo mikroductinách) a poměrně rovnoměrně rozptýlené v mikrostruktuře materiálu. Pokud deformace překročí určitou kritickou úroveň (která samozřejmě závisí na vlastnostech materiálu a typu jeho namáhání), další růst defektů se koncentruje jen do některých z nich, zatímco ostatní se přestanou rozvíjet. Obecně o tomto jevu hovoříme jako o *lokalizaci nepružného přetváření*, podle konkrétního mechanismu přetváření může jít o lokalizaci praskání trhlin, lokalizaci plastického pokluzu, apod. V případě trhlin lokalizace vede k přechodu od rozptýleného mikropraskání k tzv. magistrální trhlíně, která se může významně podílet na mechanismu zhroutení celé konstrukce.

Při velkém počtu drobných trhlínek rozptýlených v mikrostruktuře materiálu je model založený na představě spojitého prostředí adekvátní, protože by bylo velmi obtížné a pracné popisovat každou trhlínku zvlášť. Naproti tomu v situaci, kdy je další porušování materiálu soustředěno do jedné nebo několika velkých trhlin, by bylo přirozené použít popis založený na lomové mechanice. Při zkoumání celého zatěžovacího procesu od počátečních fází s rozptýleným mikropraskáním přes postupnou lokalizaci až po závěrečné totální porušení je ale výhodné pracovat s jediným modelem v průběhu celého výpočtu. Proto se modely poškození často používají i pro popis velkých trhlin, a to s sebou přináší určitá úskalí. Objektivní matematický popis lokalizované nepružné deformace v rámci teorie kontinua vyžaduje speciální úpravy modelu, bez nichž by výsledky numerických simulací byly nespolehlivé a v řadě případů zcela bezcenné. V této kapitole se proto kromě samotných modelů poškození budeme věnovat také způsobu jejich správného použití při popisu lokalizované deformace.

### 4.1 Jednoosý model poškození

Teorie poškození pracuje s jistými vnitřními proměnnými, které charakterizují velikost, hustotu a orientaci defektů v materiálu. Základní myšlenku vysvětlíme nejprve pomocí jednoduchého modelu pro jednoosou napjatost. Materiál si zjednodušeně představíme jako svazek vláken rovnoběžných se směrem namáhání (obr. 4.1a). Zpočátku se všechna vlákna chovají pružně a působící síla se roznáší na celkovou plochu všech vláken  $A$  (obr. 4.1b). Při dalším protahování vlákna postupně praskají (obr. 4.1c). Každé jednotlivé vlákno je dokonale křehké, což znamená, že jakmile je dosaženo kritické úrovně deformace, napětí ve vláknu naráz zmizí. Protože je ale tato kritická úroveň různá pro různá vlákna, efektivní plocha  $\bar{A}$  (tj. průřezová plocha těch vláken, která zatím nepraskla) se plynule snižuje z výchozí hodnoty  $\bar{A} = A$  až do  $\bar{A} = 0$ . Musíme rozlišovat mezi *nominálním napětím*  $\sigma$ , definovaným jako síla vztažená na jednotku výchozí průřezové plochy, a *efektivním napětím*  $\bar{\sigma}$ , definovaným jako síla vztažená na jednotku efektivní (dosud nepopraskané) plochy. Nominální napětí se objevuje v podmínkách rovnováhy na makroskopické úrovni, zatímco efektivní napětí je „skutečné“ napětí působící v mikrostruktuře materiálu.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>V reálném materiálu (tedy nikoli idealizovaném svazku vláken) by samozřejmě skutečné napětí mezi jednotlivými defekty silně oscillovalo, ale ve zjednodušeném modelu pracujeme s jedinou charakteristickou hodnotou efektivního napětí.



Obrázek 4.1: Jednoduchý model poškození — svazek pružných vláken praskajících při různém protažení.

Sílu přenášenou materiálem lze vyjádřit jako součin nominálního napětí a nominální plochy, nebo také jako součin efektivního napětí a efektivní plochy. Ze vztahu  $\sigma A = \bar{\sigma} \bar{A}$  dostaneme

$$\sigma = \frac{\bar{A}}{A} \bar{\sigma} = \beta \bar{\sigma} \quad (4.1)$$

kde poměr  $\beta = \bar{A}/A$  mezi efektivní a nominální plochou je skalární veličina charakterizující *integritu* materiálu. V mechanice poškození se častěji používá tzv. *parametr poškození*,<sup>2</sup> definovaný jako

$$\omega = 1 - \beta = 1 - \frac{\bar{A}}{A} = \frac{A - \bar{A}}{A} = \frac{A_d}{A} \quad (4.2)$$

kde  $A_d = A - \bar{A}$  je poškozená (prasklá) část původní plochy. Pro nepoškozený materiál je  $\bar{A} = A$ , tj.  $A_d = 0$  a  $\omega = 0$ . V důsledku šíření a spojování mikrodefektů parametr poškození roste a v pokročilých fázích deformačního procesu se blíží k mezní hodnotě  $\omega = 1$ , která odpovídá úplně poškozenému materiálu s nulovou efektivní plochou.

V nejjednodušší verzi modelu se předpokládá, že každé vlákno je až do svého prasknutí lineárně pružné.<sup>3</sup> V takovém případě se efektivní napětí  $\bar{\sigma}$  vypočte podle Hookeova zákona

$$\bar{\sigma} = E \varepsilon \quad (4.3)$$

Spojením (4.1)–(4.3) získáme výraz pro nominální napětí

$$\sigma = (1 - \omega) E \varepsilon \quad (4.4)$$

Vývoj poškození lze charakterizovat tzv. *zákonem poškození*, prozatím chápaným jako závislost parametru poškození na deformaci, který popíšeme vztahem

$$\omega = g(\varepsilon) \quad (4.5)$$

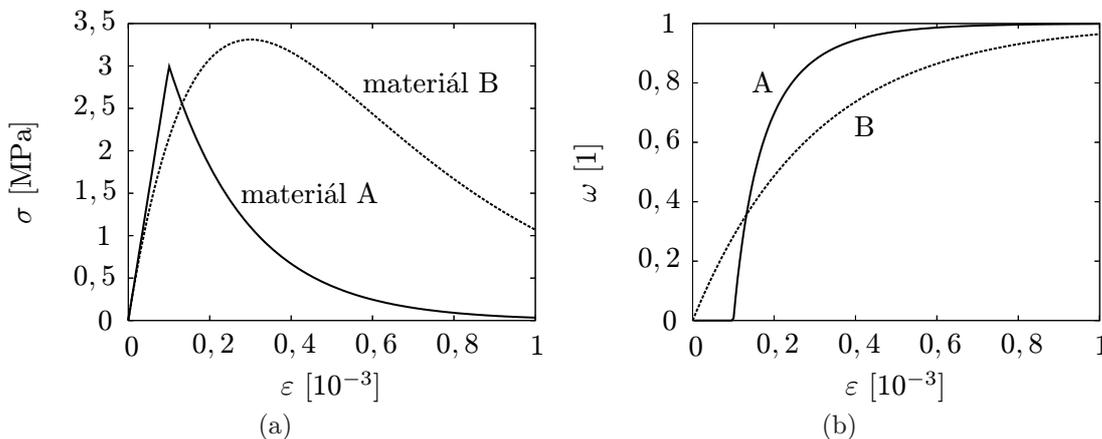
Funkce  $g$  souvisí s tvarem pracovního diagramu a může být přímo odvozena z jednoosé tahové zkoušky.

#### Příklad 4.1: Identifikace zákona poškození z jednoosé tahové zkoušky

Představme si, že pro dva materiály, označené symbolicky A a B, byly při jednoosé tahové zkoušce experimentálně určeny pracovní diagramy na obr. 4.2a. Naším úkolem je navrhnout pro tyto materiály vhodné tvary zákona poškození.

<sup>2</sup>Přestože v souladu s běžnou terminologií mluvíme o „parametru“ poškození, jde o proměnnou veličinu, nikoli o konstantní parametr.

<sup>3</sup>Obecně by bylo možno pro jednotlivá vlákna použít jakýkoli jiný konstitutivní vztah, např. viskoelastický nebo pružnoplastický. K tomu se ještě vrátíme v článku 4.2.3.



Obrázek 4.2: (a) Pracovní diagramy a (b) závislost poškození na deformaci pro dva různé materiály.

Pro materiál A je pracovní diagram až po svůj vrchol téměř lineární a pak dochází nejprve k prudkému a později k pozvolnějšimu poklesu napětí za vzrůstající deformace. Takový diagram můžeme ve vzestupné části aproximovat přímkou a v sestupné části exponenciální křivkou (se záporným koeficientem). Vztah mezi napětím a deformací zapíšeme jako

$$\sigma = s(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon & \text{pro } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ f_t \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_f}\right) & \text{pro } \varepsilon_0 \leq \varepsilon \end{cases} \quad (4.6)$$

kde  $\varepsilon_0$  je deformace při dosažení maximálního napětí  $f_t = E\varepsilon_0$  a  $\varepsilon_f$  je parametr ovlivňující sklon sestupné větve pracovního diagramu. Aby byl takový pracovní diagram přesně reprodukován modelem poškození popsaným rovnicemi (4.4)–(4.5), musí pro každou hodnotu deformace  $\varepsilon$  platit

$$[1 - g(\varepsilon)]E\varepsilon = s(\varepsilon) \quad (4.7)$$

Tím je tedy dán vztah mezi funkcí  $s$ , popisující závislost napětí na deformaci, a funkcí  $g$ , popisující závislost poškození na deformaci (v obou případech v průběhu monotónního zatěžování). Funkci  $g$  tedy lze obecně vyjádřit jako

$$g(\varepsilon) = 1 - \frac{s(\varepsilon)}{E\varepsilon} \quad (4.8)$$

a po dosazení  $s(\varepsilon)$  podle (4.6) dostaneme

$$g(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_f}\right) & \text{pro } \varepsilon_0 \leq \varepsilon \end{cases} \quad (4.9)$$

Rozvoj poškození tedy začíná teprve po dosažení deformace  $\varepsilon_0$ , která odpovídá vrcholu pracovního diagramu. Až do tohoto okamžiku je  $\omega = 0$ . Pro  $\varepsilon > \varepsilon_0$  poškození roste a asymptoticky se blíží mezní hodnotě  $\omega = 1$ . Graf funkce  $g$ , tedy graf závislosti poškození na deformaci, je vynesena na obr. 4.2b pro konkrétní hodnoty  $\varepsilon_0 = 10^{-4}$  a  $\varepsilon_f = 2 \cdot 10^{-4}$ .

Pro materiál B dochází k odchylce pracovního diagramu od lineárního chování velmi záhy, takže můžeme očekávat, že rozvoj poškození začíná už od počátku zatěžování. Pracovní diagram je možné aproximovat například funkcí

$$\sigma = s(\varepsilon) = E\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \quad (4.10)$$

Snadno lze ověřit, že její derivace

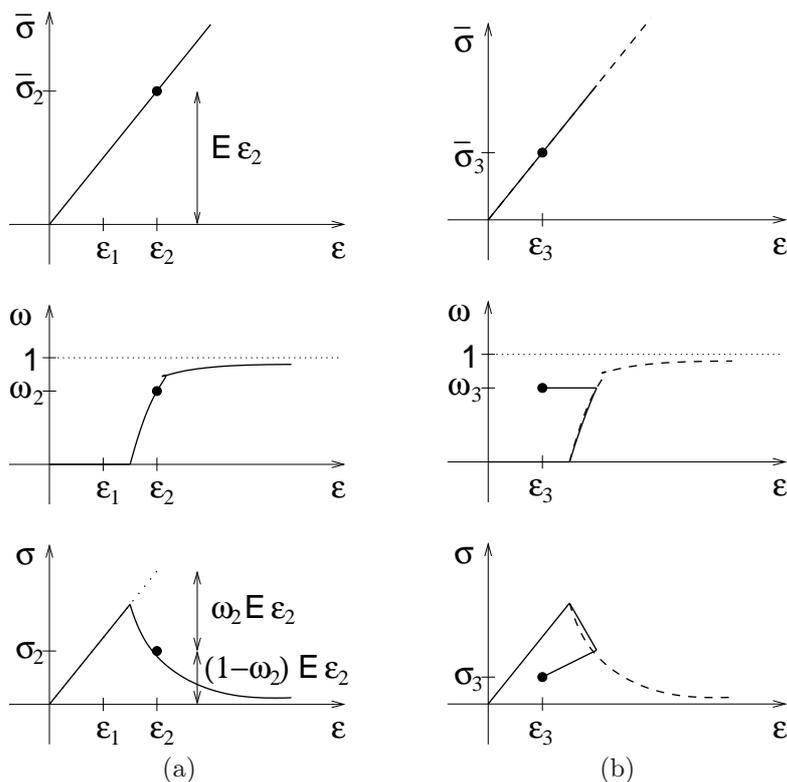
$$\frac{ds(\varepsilon)}{d\varepsilon} = E \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + E\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \left(-\frac{1}{\varepsilon_0}\right) = E \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \quad (4.11)$$

nabývá pro  $\varepsilon = 0$  hodnoty  $E$  a pro  $\varepsilon = \varepsilon_0$  hodnoty nula. Parametr  $E$  má tedy skutečně význam modulu pružnosti a parametr  $\varepsilon_0$  představuje deformaci odpovídající vrcholu pracovního diagramu. Dosazením (4.10) do (4.8) získáme funkci popisující závislost poškození na deformaci,

$$g(\varepsilon) = 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \quad (4.12)$$

Její graf je vynesena na obr. 4.2b pro konkrétní hodnotu  $\varepsilon_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ .

□



Obrázek 4.3: Vývoj efektivního napětí  $\bar{\sigma}$ , parametru poškození  $\omega$  a nominálního napětí  $\sigma$  při (a) monotónním zatěžování, (b) nemonotónním zatěžování.

Vývoj efektivního napětí, parametru poškození a nominálního napětí v materiálu, který zůstává lineárně pružný až po dosažení vrcholu pracovního diagramu, je znázorněn na obr. 4.3a. Popis vývoje poškození ve tvaru (4.5) je ale platný jen pro monotónní zatěžování, při kterém se deformace vzorku  $\epsilon$  neustále zvětšuje. Pokud je materiál nejprve zatížen až po dosažení jisté deformace  $\epsilon_2$ , které odpovídá poškození  $\omega_2 = g(\epsilon_2)$ , a pak deformace začne klesat (obr. 4.1d), poškozená plocha se již nemění a materiál se chová jako lineárně pružný materiál s redukováným modulem pružnosti  $E_2 = (1 - \omega_2)E$ . Během odtěžování se tedy parametr poškození nemění a jeho okamžitá hodnota nezávisí přímo na okamžité hodnotě deformace  $\epsilon$ , ale na její největší hodnotě dosažené při předcházejícím zatěžování. Proto zavedeme vnitřní proměnnou  $\kappa$ , představující nejvyšší úroveň deformace dosaženou v materiálu během jeho „životu“ až do současného okamžiku  $t$ . Matematicky to zapíšeme jako

$$\kappa(t) = \max_{t' \leq t} \epsilon(t') \quad (4.13)$$

kde  $t$  označuje čas, ve kterém  $\kappa$  vyhodnocujeme, a  $t'$  probíhá všechny předcházející časy. Pro zjednodušení zápisu ale nebudeme v dalších rovnicích argument  $t$  u  $\kappa$  uvádět, stejně jako nepíšeme explicitně, že všechny veličiny závisí na prostorových souřadnicích. S využitím zavedené vnitřní proměnné  $\kappa$  zobecníme rovnici (4.5) na

$$\omega = g(\kappa) \quad (4.14)$$

Při monotónním zatěžování je neustále  $\kappa = \epsilon$ , takže (4.5) můžeme považovat za zvláštní případ (4.14). Při obecném zatěžování ale výpočet podle (4.13)–(4.14) zabezpečí, že se parametr poškození nemůže zmenšit. Vývoj efektivního napětí, parametru poškození a nominálního napětí během nemonotónního testu je zachycen na obr. 4.3b. Všimněte si, že při úplném odstranění působícího napětí by zmizela i deformace (díky pružnému chování dosud nepřetržených vláken). Model poškození ve své základní podobě tedy nepostihuje trvalé deformace. Přestože po odtížení zmizí napětí i deformace a vracíme se do počátku pracovního diagramu, stav materiálu je už jiný než na počátku zatěžování, protože parametr poškození není nulový a tuhost a pevnost při novém zatížení tahem se liší od původních hodnot. Vliv předchozího vývoje na stav materiálu je zaznamenán ve vnitřní proměnné  $\kappa$ , resp. v odpovídajícím parametru poškození  $\omega$ .

Základní rovnice jednoosého modelu poškození jsou v mírně upraveném tvaru sestaveny do tab. 4.1. Abychom lépe osvětlili podstatu modelu, přepsali jsme vztah mezi napětím a deformací (4.4) do tvaru

$$\sigma = E_s \epsilon \quad (4.15)$$

kde

$$E_s = (1 - \omega)E \quad (4.16)$$

je upravený modul pružnosti poškozeného materiálu. Říkáme mu *sečný modul*, protože odpovídá sklonu přímky spojující v pracovním diagramu daný bod  $(\epsilon, \sigma)$  s počátkem. Rovnice v tabulce také pracují s alternativní definicí

Tabulka 4.1: Matematický popis modelu poškození pro jednoosou napjatost.

Hookeův zákon v sečném tvaru	$\sigma = E_s \varepsilon$
sečný modul pružnosti	$E_s = (1 - \omega)E$
zákon poškození	$\omega = g(\kappa), \quad \dot{\kappa} \geq 0$
definice funkce poškození	$f(\varepsilon, \kappa) = \varepsilon - \kappa$
podmínka přípustnosti	$f(\varepsilon, \kappa) \leq 0$
podmínka komplementarity	$\dot{\kappa} f(\varepsilon, \kappa) = 0$

vnitřní proměnné  $\kappa$ . Místo jejího výpočtu z celé předchozí historie materiálu jsou stanovena pravidla pro vývoj její okamžité hodnoty. Hodnota proměnné  $\kappa$  nikdy nesmí být menší než deformace  $\varepsilon$ . Pokud je větší, znamená to, že materiál je odtížen oproti stavu největší deformace dosažené v minulosti a hodnota  $\kappa$  se v nejbližší budoucnosti měnit nebude. Pokud je  $\kappa = \varepsilon$ , jsme ve stavu, kdy může dojít k dalšímu poškozování materiálu, nebo k pružnému odtížení. Na základě analogie s funkcí plasticity proto zavádíme tzv. *funkci poškození*  $f(\varepsilon, \kappa) = \varepsilon - \kappa$ , s jejíž pomocí lze všechny zmíněné případy popsat podmínkami zatěžování-odtěžování ve známém tvaru

$$f(\varepsilon, \kappa) \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0, \quad \dot{\kappa} f(\varepsilon, \kappa) = 0 \quad (4.17)$$

První podmínka odpovídá nerovnosti  $\varepsilon \leq \kappa$  a vymezuje přípustné stavy deformace, kterých lze dosáhnout beze změny vnitřní proměnné  $\kappa$ . Druhá říká, že  $\kappa$  nemůže klesat, a můžeme ji chápat jako součást zákona poškození, podobně jako podmínka  $\lambda \geq 0$  byla v teorii plasticity považována za součást zákona plastického přetváření. Podle třetí podmínky pak  $\kappa$  může růst pouze, pokud jsou okamžité hodnoty  $\varepsilon$  a  $\kappa$  stejné, jde tedy o podmínku komplementarity.

## 4.2 Izotropní modely poškození pro víceosou napjatost

### 4.2.1 Základní rovnice

V obecném případě trojosé napjatosti pracujeme s šesti složkami napětí a šesti složkami deformace seskupenými do sloupcových matic  $\sigma$  a  $\varepsilon$ . Výstižný popis účinku defektů na tuhost a pevnost materiálu by také vyžadoval větší množství veličin, ale prozatím se omezíme na nejjednodušší model, který vystačí s jediným parametrem poškození  $\omega$ . Pro jednoosý model je tuhost nepoškozeného materiálu popsána Youngovým modulem pružnosti  $E$ , který se v důsledku poškození redukuje na sečný modul pružnosti  $E_s = (1 - \omega)E$ . V případě víceosé napjatosti je tuhost nepoškozeného materiálu popsána maticí pružné tuhosti  $\mathbf{D}_e$ . Nejjednodušší víceosý model poškození je založen na předpokladu, že všechny prvky této matice, tj. všechny tuhostní koeficienty, se v důsledku poškození redukuje stejným způsobem, úměrně faktoru integrity  $1 - \omega$ . Matice sečné tuhosti se tedy vypočte jako

$$\mathbf{D}_s = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \quad (4.18)$$

a vztah mezi napětím a deformací nabyde tvaru

$$\sigma = \mathbf{D}_s \varepsilon = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \varepsilon = (1 - \omega)\bar{\sigma} \quad (4.19)$$

kde

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D}_e \varepsilon \quad (4.20)$$

je efektivní napětí. Rovnice (4.18) je zobecněním (4.16) a (4.19) je zobecněním (4.15) a (4.4).

Podobně jako pro jednoosý model je i zde třeba formulovat rovnice, jimiž se řídí vývoj parametru poškození  $\omega$ . Opět můžeme předpokládat, že k růstu defektů dochází, pokud deformace materiálu překročí jistou mez, která odpovídá maximální úrovni deformace dosažené při předchozím zatěžování. Abychom mohli porovnávat různé deformační stavy charakterizované různými kombinacemi šesti složek deformace, je třeba zavést vhodnou srovnávací veličinu, která představuje ekvivalentní deformaci při jednoosé napjatosti. Jde o podobnou úvahu jako při konstrukci funkce plasticity, kdy jsme s mezí kluzu v jednoosém případě porovnávali jedinou nenulovou složku napětí a ve víceosém případě jistý výraz závislý na všech složkách napětí, např. odmocninu z invariantu  $J_2$ . Konkrétní volba tohoto výrazu pak měla přímou souvislost se tvarem plochy plasticity v prostoru napětí. Podobně pro model poškození zavedeme *ekvivalentní deformaci*  $\tilde{\varepsilon}$  závislou na složkách deformace  $\varepsilon$ , přičemž konkrétní volba funkce  $\tilde{\varepsilon}(\varepsilon)$  bude souviset s tzv. *plochou poškození* v prostoru deformací. Vnitřní proměnná  $\kappa$  pak bude představovat maximální hodnotu ekvivalentní deformace dosaženou v dosavadním průběhu deformačního procesu. Můžeme také zavést *funkci poškození*

$$f(\varepsilon, \kappa) = \tilde{\varepsilon}(\varepsilon) - \kappa \quad (4.21)$$

Tabulka 4.2: Matematický popis jednoduchého izotropního modelu poškození pro víceosou napjatost.

zobecněný Hookeův zákon v sečném tvaru	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}$
sečná matice tuhosti	$\mathbf{D}_s = (1 - \omega)\mathbf{D}_e$
zákon poškození	$\omega = g(\kappa), \quad \dot{\kappa} \geq 0$
definice funkce poškození	$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \kappa$
podmínka přípustnosti	$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) \leq 0$
podmínka komplementarity	$\dot{\kappa} f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) = 0$

podle jejíž hodnoty lze rozlišit mezi pružnými stavy, pro které  $f < 0$ , stavy na ploše poškození, pro které  $f = 0$ , a nepřípustnými stavy, pro které  $f > 0$ . V pružném stavu jsou defekty (např. mikrotrhliny) částečně odtížené a při malé změně stavu nehrozí jejich růst. Ve stavu na ploše poškození je alespoň na některých defektech dosaženo kritické situace, kdy mohou růst (např. faktor intenzity napětí u kořene některé trhliny nabývá kritické hodnoty). Kladná hodnota funkce  $f$  svědčí o nepřípustnosti stavu  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa)$ , kterou je třeba chápat tak, že deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}$  nemůže být dosaženo při úrovni poškození odpovídající dané hodnotě vnitřní proměnné  $\kappa$ . Přitom poškození  $\omega$  se vypočte z  $\kappa$  podle zákona poškození (4.14), ve kterém při vhodné definici ekvivalentní deformace můžeme ponechat funkci  $g$  určenou z jednoosé tahové zkoušky postupem předvedeným v příkladu 4.1.

Nejjednodušší víceosý model s jedním parametrem poškození  $\omega$  je tedy popsán rovnicemi shrnutými v tab. 4.2. Vzhledem k tomu, že matice sečné tuhosti je skalárním násobkem matice pružné tuhosti, chová se podle takového modelu i poškozený materiál jako izotropní. Proto hovoříme o *izotropním modelu poškození* (anglicky „isotropic damage model“). Ve srovnání s jednoosým modelem podle tab. 4.1 se formální tvar zatěžovacích-odtěžovacích podmínek nemění, jen je funkce poškození  $f$  závislá na více složkách deformace a její konkrétní tvar závisí na volbě výrazu pro ekvivalentní deformaci  $\tilde{\varepsilon}$ . Nejjednodušší volbou se zdá být norma deformace, pro kterou ale nemůžeme použít obvyklý výraz  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}$ , protože ten není invariantní při pootočení souřadnicových os, vůči nimž jednotlivé složky deformace vyjadřujeme. Proto použijeme deformační normu  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_\varepsilon$  definovanou podle vzorce (B.25) v dodatku B jako  $\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}}$ , a navíc ji vydělíme konstantou  $\sqrt{1 + 2\nu^2}$  z důvodů, které vyplynou z následujícího příkladu. Ekvivalentní deformaci tedy definujeme jako

$$\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_\varepsilon}{\sqrt{1 + 2\nu^2}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}}{1 + 2\nu^2}} \quad (4.22)$$

případně při použití tzv. energetické normy jako

$$\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}}{E}} \quad (4.23)$$

O energetické normě mluvíme proto, že výraz  $\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}$  je dvojnásobkem potenciální energie pružné deformace nepoškozeného materiálu podrobeného deformaci  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , viz vzorec (B.49) v dodatku B.

#### Příklad 4.2: Vyhodnocení ekvivalentní deformace při jednoosé napjatosti

V tomto příkladu vyhodnotíme výrazy (4.22) a (4.23) pro stav odpovídající jednoosé napjatosti, ale modelovaný ve třech rozměrech. Pokud ve směru osy  $x$  působí normálové napětí  $\sigma_x$  a všechny ostatní složky napětí jsou nulové, je podle inverzního tvaru Hookeova zákona pro nepoškozený materiál (B.5)–(B.7) normálová deformace ve směru působícího napětí  $\varepsilon_x = \sigma_x/E$  a normálové deformace v příčných směrech  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -(\nu/E)\sigma_x = -\nu\varepsilon_x$ . V případě poškozeného materiálu se modul pružnosti  $E$  nahradí sečným modulem  $E_s = (1 - \omega)E$ , ale platnost vztahu  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$  tím není dotčena. Smykové deformace jsou samozřejmě nulové. Prostá deformační norma má tedy při jednoosé napjatosti hodnotu

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)} = \sqrt{(1 + 2\nu^2)\varepsilon_x^2} = \sqrt{1 + 2\nu^2} |\varepsilon_x| \quad (4.24)$$

Pokud tedy použijeme upravenou normu podle (4.22), bude  $\tilde{\varepsilon} = |\varepsilon_x|$  a v případě tahového namáhání se bude ekvivalentní deformace přesně shodovat s relativním protažením  $\varepsilon_x$  ve směru působícího napětí  $\sigma_x$ . Ke stejnému závěru dojdeme i v případě upravené energetické normy podle (4.23). Obecně je totiž  $\mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}/(1 - \omega)$ , takže

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{1 - \omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{1 - \omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (4.25)$$

a v případě jednoosé napjatosti se tento výraz zredukuje na

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{1 - \omega} = \frac{E_s \varepsilon_x \varepsilon_x}{1 - \omega} = \frac{(1 - \omega) E \varepsilon_x^2}{1 - \omega} = E \varepsilon_x^2 \quad (4.26)$$

Po vydělení modulem pružnosti a odmocnění tedy i podle (4.23) dostaneme  $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{E\varepsilon_x^2/E} = |\varepsilon_x|$ .

□ V příkladu zároveň vyšlo najevo, že při jednoosém tlaku je ekvivalentní deformace rovna absolutní hodnotě složky deformace  $\varepsilon_x$ , tedy relativnímu stlačení uvažovanému bez znaménka. Protože při monotónním zatěžování je vnitřní proměnná  $\kappa$  neustále rovna ekvivalentní deformaci  $\tilde{\varepsilon}$  a poškození  $\omega$  se vyhodnocuje v závislosti na  $\kappa$ , byl by vývoj poškození v tlaku i tahu stejný a stejné by byly i pracovní diagramy, mimo jiné tedy i pevnosti. To znamená, že s výše uvedenými volbami výrazu pro ekvivalentní deformaci bychom dostali model se stejnou pevností v tahu i v tlaku. Modely poškození jsou však motivovány představou rostoucích defektů a je nasnadě, že např. trhliny se šíří, pokud je materiál ve směru kolmém na trhlinu protahován, zatímco pokud je stlačován, trhliny se zavřou a k jejich růstu nedochází. Proto lze očekávat, že růst poškození je hnán zejména protahováním materiálu, a tomu by měla být přizpůsobena i definice ekvivalentní deformace.

Co se rozumí protahováním a stlačováním (tedy kladnou a zápornou deformací) pro jednoosý model je jasné, ale pro obecný trojosý model je třeba objektivním způsobem definovat, jak z deformace popsané šesti složkami vybrat její kladnou část. Nebylo by například správné řídit se znaménky jednotlivých složek deformace, protože výsledek by pak závisel na konkrétní volbě soustavy souřadnic. K objektivní definici kladné části deformace dospějeme s využitím pojmu hlavních deformací. Hlavní deformace jsou totiž invarianty a navíc si je lze představit jako relativní protažení ve třech navzájem kolmých směrech, které na sebe zůstávají kolmé i po deformaci, takže odpovídající smyková zkosení jsou nulová. Pokud bychom pomocí hlavních deformací  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  a  $\varepsilon_3$  počítali deformační normu, dostali bychom

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\varepsilon} = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \quad (4.27)$$

Pokud chceme vyloučit příspěvky pocházející od záporných deformací, kterým odpovídá zkracování příslušných vláken a zavírání trhlin kolmých na tato vlákna, pak vezmeme v úvahu pouze tzv. kladné části hlavních deformací. *Kladnou částí*  $\langle x \rangle$  reálného čísla  $x$  rozumíme toto číslo samo, pokud je kladné, a nulu, pokud není. Jinými slovy, definujeme<sup>4</sup>

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Pokud z hlavních deformací ponecháme jen jejich kladnou část, získáme obecně jiný deformační stav, který budeme značit  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ . Jestliže jsou všechny hlavní deformace kladné, je  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}$ , a pokud jsou všechny záporné nebo nulové, je  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{0}$ . Kromě toho však existuje celá řada případů s některými hlavními deformacemi kladnými a jinými zápornými, pro které je  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  nenulové, ale různé od  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

V zájmu zdůraznění vlivu tahových deformací na šíření defektů můžeme místo norem celé deformace použít při definici ekvivalentní deformace jen normy kladné části deformace. Tato úvaha vede k modifikaci vztahů (4.22)–(4.23) a k definicím ekvivalentní deformace vzorcí

$$\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \|\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\|_{\varepsilon} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^T \mathbf{P}^{-1} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2} \quad (4.29)$$

nebo

$$\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sqrt{\frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^T \mathbf{D}_e \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{D_{e11}}} \quad (4.30)$$

Všimněte si, že v tzv. Mazarsově definici (4.29) se už na rozdíl od (4.22) nepoužívá faktor závislý na Poissonovu součiniteli  $\nu$ . Za jednoosého tahu je totiž kladná jen jedna hlavní deformace  $\varepsilon_1 = \varepsilon_x > 0$ , zatímco další dvě hlavní deformace, odpovídající příčnému směru, jsou  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_x < 0$ . Proto za jednoosého tahu dostaneme přímo  $\|\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\|_{\varepsilon} = \varepsilon_x$  a ekvivalentní deformace podle (4.29) bez dalších úprav odpovídá složce  $\varepsilon_x$ . Naproti tomu při výpočtu podle energetické normy dostaneme za jednoosého tahu  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^T \mathbf{D}_e \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = D_{e11}\varepsilon_x^2$ , kde

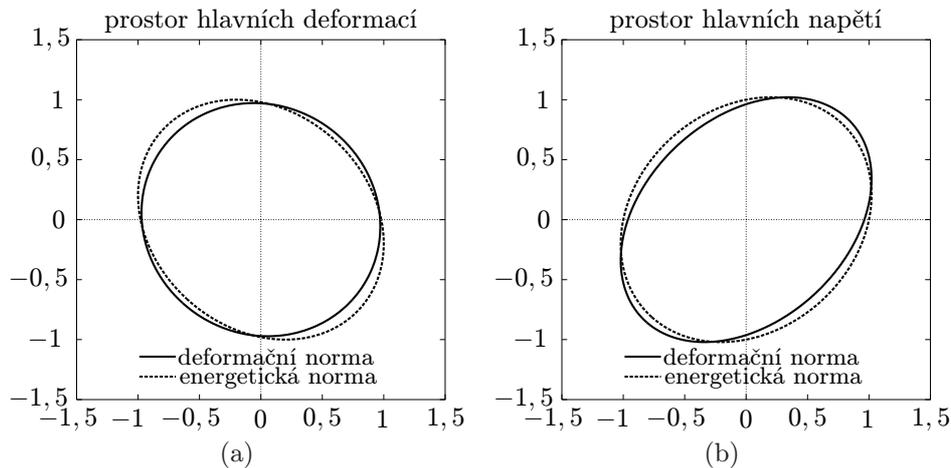
$$D_{e11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.31)$$

je tuhostní koeficient z prvního řádku a prvního sloupce matice pružné tuhosti, jímž je třeba ve (4.30) nahradit modul pružnosti  $E$  použitý v původním vzorcí (4.23).

#### Příklad 4.3: Pružná oblast a plocha poškození pro rovinnou napjatost

Pro lepší pochopení různých definic ekvivalentní deformace a jejich souvislosti s tvarem plochy poškození si graficky znázorníme pružné oblasti pro materiál ve stavu rovinné napjatosti. Pro pevně zvolenou hodnotu vnitřní proměnné  $\kappa$  je *pružnou oblastí* množina stavů splňujících podmínku  $f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) < 0$  a *plochou poškození* je hranice pružné oblasti, tedy množina stavů splňujících podmínku  $f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) = 0$ . Vzhledem ke specifickému tvaru (4.21) funkce poškození  $f$  jde vlastně o podmínky  $\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) < \kappa$ , resp.  $\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \kappa$ . Pokud byl již materiál vystaven deformacím až do maximální úrovně popsané veličinou  $\kappa$ , odpovídá pružná oblast stavům, kterými nyní může procházet, aniž by docházelo k jeho dalšímu poškození. Růst poškození  $\omega = g(\kappa)$  může začít, pokud se stav materiálu

<sup>4</sup>Ekvivalentní a stručnější definice jsou např.  $\langle x \rangle = \max(0, x)$  nebo  $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ .



Obrázek 4.4: Plochy poškození odpovídající konstantním úrovním ekvivalentní deformace definované podle (4.22) a (4.23), zobrazené (a) v rovině hlavních deformací, (b) v rovině hlavních napětí. Předpokládá se rovinná napjatost a Poissonův součinitel  $\nu = 0,2$ .

dostane na hranici pružné oblasti, tedy na plochu poškození. Přitom plocha poškození je původně definována v prostoru deformací, ale s využitím vztahu (4.20) ji lze ztransformovat také do prostoru efektivních napětí, kde její tvar můžeme lépe porovnávat s plochami plasticity odpovídajícími různým podmínkám plasticity z kapitoly 2.

Za rovinné napjatosti má jedna hlavní osa směr kolmý na rovinu analýzy a odpovídající hlavní napětí je nulové. Stav napětí můžeme popsat nenulovými hlavními napětími  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ , resp. jejich efektivními hodnotami  $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1/(1 - \omega)$  a  $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2/(1 - \omega)$ . Z nich pak lze v duchu obecných vztahů (B.5)–(B.7) vypočítat hlavní deformace jako

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_1 - \nu \bar{\sigma}_2) \quad (4.32)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (-\nu \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2) \quad (4.33)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (-\nu \bar{\sigma}_1 - \nu \bar{\sigma}_2) = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (4.34)$$

Hlavní deformace  $\varepsilon_3$  tedy není nulová, ale podle (4.34) ji lze jednoznačně určit z hlavních deformací v rovině analýzy. Proto si můžeme dovolit plochu poškození zobrazit v rovině  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  s tím, že každému bodu odpovídá také jednoznačně určená hodnota  $\varepsilon_3$ . Pro ekvivalentní deformaci definovanou podle (4.22) je plocha poškození popsána rovnicí  $\|\varepsilon\|_\varepsilon^2 = (1 + 2\nu^2)\kappa^2$ , neboli

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \frac{\nu^2}{(1 - \nu)^2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 = (1 + 2\nu^2)\kappa^2 \quad (4.35)$$

Na levé straně je kvadratický výraz v proměnných  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$  a snadno lze ukázat, že nabývá konstantní hodnoty na elipse se středem v počátku a osami půlicími úhly mezi osami  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$ . Pro  $\nu = 0,2$  je tato elipsa je vynesena na obr. 4.4a plnou čarou.<sup>5</sup> Dosadíme-li podle (4.32)–(4.33), získáme popis plochy poškození v rovině hlavních efektivních napětí  $\bar{\sigma}_1$  a  $\bar{\sigma}_2$ . Jde opět o elipsu podobně umístěnou, ale s jinými poměry os, viz obr. 4.4b. Symetrie vzhledem k počátku prostoru napětí svědčí o tom, že definice (4.22) nerozlišuje mezi tahem a tlakem. Při použití energetické normy (4.23) dostaneme velmi podobné elipsy, které jsou na obr. 4.4 vyneseny čárkovanou čarou. Rozdíl mezi prostou a energetickou normou se tedy v tomto případě nijak výrazně neprojeví.

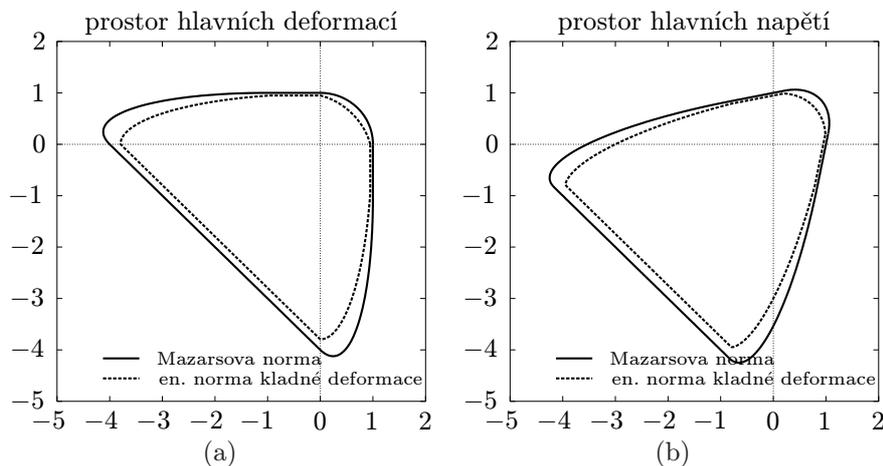
Pokud přejdeme k definicím založeným na kladné části deformace, je analytické odvození o něco složitější, protože je třeba zvlášť popsat části plochy poškození odpovídající různým kombinacím znamének hlavních deformací. Pro definici (4.29) má rovnice pro plochu poškození tvar

$$\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \frac{\nu^2}{(1 - \nu)^2} \langle -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rangle^2 = \kappa^2 \quad (4.36)$$

a s využitím symetrie při záměně  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$  stačí zkoumat čtyři základní případy: (i)  $\varepsilon_1 \geq 0$  a  $\varepsilon_2 \geq 0$ , (ii)  $\varepsilon_1 \geq 0$ ,  $\varepsilon_2 \leq 0$  a  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geq 0$ , (iii)  $\varepsilon_1 \geq 0$ ,  $\varepsilon_2 \leq 0$  a  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq 0$ , (iv)  $\varepsilon_1 \leq 0$  a  $\varepsilon_2 \leq 0$ . V případě (i) přechází rovnice (4.36) do velmi jednoduchého tvaru

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = \kappa^2 \quad (4.37)$$

<sup>5</sup>Na obrázcích 4.4–4.7 odpovídají hodnoty vynášené na jednotlivých osách normalizovaným hlavním deformacím  $\varepsilon_1/\kappa$  a  $\varepsilon_2/\kappa$  a normalizovaným hlavním efektivním napětím  $\bar{\sigma}_1/E\kappa$  a  $\bar{\sigma}_2/E\kappa$ .



Obrázek 4.5: Plochy poškození odpovídající konstantním úrovním ekvivalentní deformace definované podle (4.29) a (4.30), zobrazené (a) v rovině hlavních deformací, (b) v rovině hlavních napětí. Předpokládá se rovinná napjatost a Poissonův součinitel  $\nu = 0,2$ .

který popisuje v rovině hlavních deformací kružnici o poloměru  $\kappa$  se středem v počátku. Tato kružnice ale odpovídá ploše poškození jen v oblasti, kde je skutečně  $\varepsilon_1 \geq 0$  a  $\varepsilon_2 \geq 0$ , tedy v prvním kvadrantu. V případě (ii) přechází rovnice (4.36) do tvaru

$$\varepsilon_1^2 = \kappa^2 \quad (4.38)$$

takže plocha poškození je v příslušném sektoru částí přímky rovnoběžné s osou  $\varepsilon_2$  a vzdálené od ní o  $\kappa$ . Podobně zpracujeme i o něco složitější případy (iii) a (iv). Výsledná plocha poškození je vynesena plnou čarou v rovině hlavních deformací na obr. 4.5a a v rovině hlavních efektivních napětí na obr. 4.5b. Symetrie podle počátku je již narušena a průsečíky s osou  $\sigma_1$  mají různou vzdálenost od počátku, takže chování v tahu a v tlaku se liší. K dosti podobnému tvaru plochy poškození (na obr. 4.5 čárkovaně) vede i definice (4.30) založená na energetické normě kladné části deformace.

□

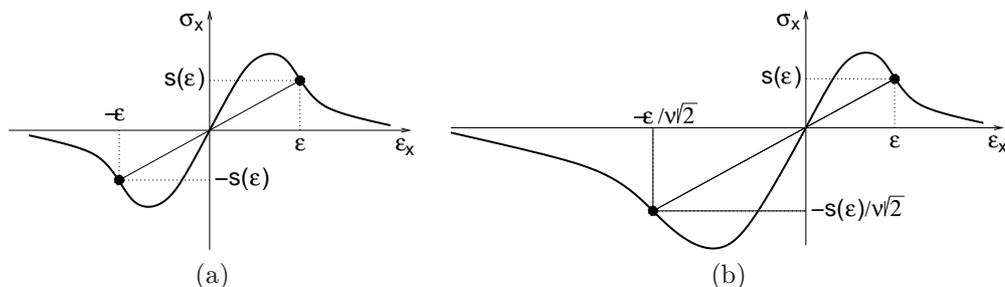
Zobrazené plochy poškození odpovídají zvolené konstantní hodnotě vnitřní proměnné  $\kappa$ . Při monotónním nárůstu deformací se mění i hodnota  $\kappa$  tak, aby se bod zobrazující okamžitý stav deformace  $\varepsilon$  vždy nacházel na ploše poškození. Pokud v prostoru deformací vyznačíme plochy poškození odpovídající různým hodnotám  $\kappa$ , je při monotónním zatěžování aktuální plochou vždy ta, na které leží příslušný bod zobrazující okamžitou deformaci. Při odtížení se však bod zobrazující deformaci přesune do pružné oblasti uvnitř aktuální plochy poškození a nedochází k růstu proměnné  $\kappa$ , takže plocha poškození se nadále nemění až do okamžiku, kdy se na ní bod zobrazující deformaci znovu ocitne. V průběhu deformačního procesu se tedy pružná oblast v prostoru deformací rozpíná nebo zůstává beze změny, přičemž k rozpínání dochází při zatěžování (doprovázeném případným růstem poškození). Velmi podobně se vyvíjí pružná oblast i v prostoru efektivních napětí. Nejvíc nás ovšem zajímá její vývoj v prostoru nominálních napětí, protože to jsou napětí, se kterými pracujeme na úrovni celého tělesa a která vstupují do podmínek rovnováhy vnitřních a vnějších sil. Nominální napětí je pro daný jednoduchý model rovno efektivnímu napětí přenásobenému faktorem  $1 - \omega$ . Transformace pružné oblasti z prostoru efektivních napětí do prostoru nominálních napětí tedy odpovídá podobnosti (homotetii) se středem v počátku prostoru napětí a koeficientem  $1 - \omega$ . Při zatěžování dochází k rozpínání pružné oblasti v prostoru efektivních napětí. Pokud však přitom poškození  $\omega$  roste dostatečně rychle, pružná oblast v prostoru nominálních napětí se může smršťovat v důsledku rychlého snižování faktoru  $1 - \omega$ . Rozpínání pružné oblasti v prostoru nominálních napětí odpovídá rostoucí části pracovního diagramu a její smršťování odpovídá klesající části pracovního diagramu, tedy změkčování materiálu. Na vrcholu pracovního diagramu má pružná oblast v prostoru nominálních napětí maximální rozsah a její hranice představuje tzv. *obálku pevnosti*. Stavů napětí vně této obálky nemůže být nikdy dosaženo. Průsečíky obálky pevnosti s osou  $\sigma_1$  odpovídají maximálním možným hodnotám napětí za jednoosého tahu a jednoosého tlaku, tedy tahové pevnosti  $f_t$  a tlakové pevnosti  $f_c$ .

#### Příklad 4.4: Pracovní diagramy v jednoosém tahu a jednoosém tlaku

Pro jednoduchý model s jedním parametrem poškození  $\omega$  ukážeme, jaký je vztah mezi pracovními diagramy v tahu a v tlaku. Při jednoosém namáhání napětím  $\sigma_x$  jsou normálové deformace  $\varepsilon_x$  a  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$  hlavními deformacemi. Všechny dosud uvedené vzorce pro ekvivalentní deformaci byly upraveny tak, aby při jednoosém tahu platilo  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_x$ . Při monotónním zatěžování je  $\kappa = \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_x$  a  $\omega = g(\varepsilon_x)$ . Vztah mezi složkami napětí  $\sigma_x$  a deformace  $\varepsilon_x$  je pak popsán rovnicí

$$\sigma_x = (1 - \omega)E\varepsilon_x = [1 - g(\varepsilon_x)]E\varepsilon_x \quad (4.39)$$

Pokud je pracovní diagram v jednoosém tahu popsán analyticky jako  $\sigma_x = s(\varepsilon_x)$ , funkce  $g$  popisující závislost



Obrázek 4.6: Vztah mezi pracovními diagramy v tahu a v tlaku pro jednoduchý izotropní model poškození s ekvivalentní deformací danou (a) vzorcem (4.22) nebo (4.23), (b) vzorcem (4.29).

poškození na deformaci se určí jako

$$g(\varepsilon_x) = 1 - \frac{s(\varepsilon_x)}{E\varepsilon_x} \quad (4.40)$$

Při jednoosém tlaku, kdy  $\varepsilon_x < 0$  a  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x > 0$ , dávají vzorce (4.22) a (4.23) ekvivalentní deformaci  $\tilde{\varepsilon} = |\varepsilon_x| = -\varepsilon_x$  a vztah mezi napětím a deformací je popsán rovnicí

$$\sigma_x = (1 - \omega)E\varepsilon_x = [1 - g(-\varepsilon_x)]E\varepsilon_x = -[1 - g(-\varepsilon_x)](-E\varepsilon_x) = -s(-\varepsilon_x) \quad (4.41)$$

Tento výsledek znamená, že jestliže při jednoosém tahu deformace  $\varepsilon_x$  vyvolá napětí  $\sigma_x = s(\varepsilon_x)$ , pak při jednoosém tlaku stejně velká deformace s opačným znaménkem vyvolá stejně velké napětí s opačným znaménkem. Jinými slovy, pracovní diagramy v jednoosém tahu a jednoosém tlaku jsou zcela stejné (až na záporná znaménka u tlakových veličin), viz obr. 4.6a.

Definujeme-li však ekvivalentní deformaci podle (4.29), je při jednoosém tlaku  $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{0^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{2\nu^2\varepsilon_x^2} = \nu\sqrt{2}|\varepsilon_x| = -\nu\sqrt{2}\varepsilon_x$  a dosazením do vzorce pro výpočet napětí dostaneme

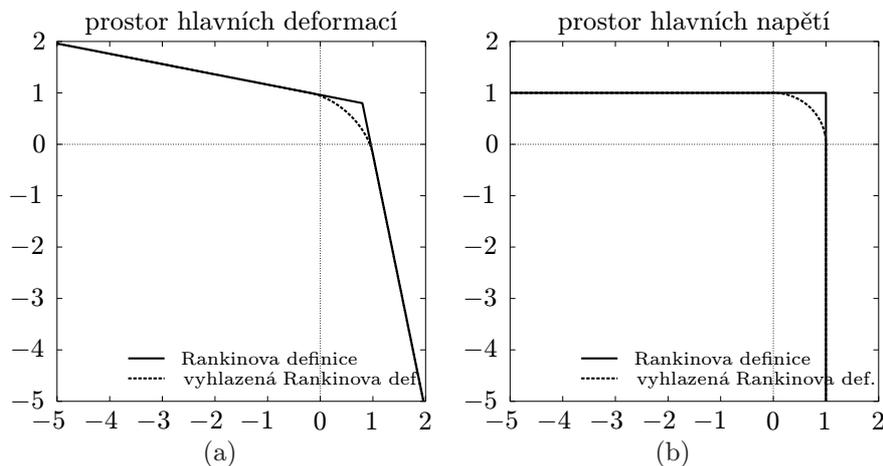
$$\sigma_x = (1 - \omega)E\varepsilon_x = [1 - g(-\nu\sqrt{2}\varepsilon_x)]E\varepsilon_x = -\frac{[1 - g(-\nu\sqrt{2}\varepsilon_x)]E(-\nu\sqrt{2}\varepsilon_x)}{\nu\sqrt{2}} = -\frac{s(-\nu\sqrt{2}\varepsilon_x)}{\nu\sqrt{2}} \quad (4.42)$$

V tomto případě je tedy v tlaku vztah mezi napětím vynásobeným  $\nu\sqrt{2}$  a deformací vynásobenou tímtež faktorem stejný, jako vztah mezi napětím a deformací v tahu. Jinými slovy, pracovní diagram v tlaku vznikne z pracovního diagramu v tahu pouhou změnou měřítka na obou osách, přičemž jeho tvar zůstává beze změny. Graficky je to znázorněno na obr. 4.6b. Ať už je konkrétní tvar pracovního diagramu jakýkoli, pevnosti v tahu a v tlaku budou vždy v poměru  $f_t:f_c = \nu\sqrt{2}$ . Pro ekvivalentní deformaci založenou na energetické normě kladné části deformace podle (4.30) lze odvodit velmi podobný výsledek, jen se poměr pevností změní na  $f_t:f_c = \nu\sqrt{2/(1-\nu)}$ .

□

Příklad ukázal, že pro uvažovaný typ jednoduchého modelu poškození s definicí ekvivalentní deformace založenou na normě kladné části deformace je poměr mezi pevnostmi v tahu a v tlaku závislý pouze na Poissonovu součiniteli. To je ovšem jednak nelogické, protože není žádná bezprostřední souvislost mezi příčnou kontrakcí a poměrem tahové a tlakové pevnosti, jednak nepříjemné, protože v obecném případě nebude možné přesně popsat příčnou kontrakci a zároveň i poměr pevností. Například pro beton je obvyklá hodnota Poissonova součinitele kolem 0,2 a poměr pevností  $f_t:f_c$  zpravidla mezi 1:8 a 1:12. Ovšem při volbě  $\nu = 0,2$  bychom dostali poměr pevností  $f_t:f_c = 0,2\sqrt{2} = 0,283 = 1:3,54$ , resp.  $f_t : f_c = 0,2\sqrt{2/(1-0,2)} = 0,316 = 1:3,16$ , tedy příliš nízký. Abychom dosáhli poměru  $f_t:f_c = 1:10$ , museli bychom zvolit  $\nu = 0,071$ , resp.  $\nu = 0,068$ , což jsou nereálné hodnoty.

Model poškození pro beton, který navrhl Mazars s využitím ekvivalentní deformace (4.29), odstraňuje závislost poměru  $f_t:f_c$  na Poissonovu součiniteli tím, že místo jednoho parametru poškození  $\omega$  používá dva,  $\omega_t$  a  $\omega_c$ , přičemž první z nich odpovídá tahovému namáhání a druhý tlakovému. Tyto parametry se počítají ze stejné vnitřní proměnné  $\kappa$ , ale podle dvou různých vzorců, je tedy  $\omega_t = g_t(\kappa)$  a  $\omega_c = g_c(\kappa)$ . Funkce  $g_t$  a  $g_c$  je možné nakalibrovat z pracovních diagramů v tahu a v tlaku nezávisle na sobě. Při výpočtu napětí se pak pro namáhání jednoosým tahem počítá s poškozením  $\omega_t$ , tedy podle vzorce  $\sigma = (1 - \omega_t)E\varepsilon$ , a při namáhání jednoosým tlakem se místo  $\omega_t$  použije  $\omega_c$ . To zní poměrně jednoduše, ale otázka je, jak postupovat při obecném namáhání. Mazars navrhl parametr  $\omega$  dosazovaný do vztahu  $\sigma = (1 - \omega)\mathbf{D}_e\varepsilon$  vypočítat jako vážený průměr mezi  $\omega_t$  a  $\omega_c$ , přičemž použité váhové koeficienty závisejí na typu napjatosti. Další podrobnosti o tomto modelu zde uvádět nebudeme, protože v každém případě není příliš realistické modelovat tlakové přetváření betonu ani jiných materiálů pomocí čistého modelu poškození. Pro všechny takové modely se totiž při odtěžování pracovní diagram vrací do počátku a nevznikají žádné trvalé deformace. To je ovšem v rozporu s experimentálními výsledky. Pro tahové namáhání jsou předpoklady teorie poškození bližší realitě, a proto je pro materiály jako beton vhodné kombinovat teorie poškození a plasticity tak, aby v tahu bylo dominantním mechanismem šíření trhlin a v tlaku plastický pokluk. Podrobnější informace o modelech kombinujících teorie plasticity a poškození lze najít v článku 4.2.3.



Obrázek 4.7: Plochy poškození odpovídající konstantním úrovním ekvivalentní deformace definované podle (4.44) a (4.45), zobrazené (a) v rovině hlavních deformací, (b) v rovině hlavních napětí. Předpokládá se rovinná napjatost.

Pro některé aplikace stačí uvažovat porušení materiálu tahem, případně smykem, protože tlaková napětí zůstávají poměrně malá ve srovnání s tlakovou pevností. V takových případech je pohodlné použít jednoduchý model poškození se vzorcem pro ekvivalentní deformaci sestaveným tak, aby příslušná obálka pevnosti dobře aproximovala skutečnou v oblasti převážně tahových napětí, zatímco o popis tlakového porušení se vůbec neustluje. Vhodný je například vzorec vedoucí k podobné obálce pevnosti, k jaké vede v případě plasticity Rankinovo kritérium maximálního hlavního napětí. Toho lze docílit tím, že za ekvivalentní deformaci  $\tilde{\varepsilon}$  prohlásíme největší z hlavních hodnot efektivního napětí vydělenou modulem pružnosti. Zdánlivě je rozpor v tom, že  $\tilde{\varepsilon}$  by mělo být odvozeno z deformace, nikoli z napětí. Nicméně efektivní napětí je jen deformace přenásobená maticí pružné tuhosti, takže podle navržené definice se ekvivalentní deformace dá skutečně jednoznačně vypočítat ze složek deformace, aniž bychom museli znát další stavové veličiny, jako je třeba poškození. Hlavní efektivní napětí  $\bar{\sigma}_1$  můžeme podle zobecněného Hookeova zákona (B.13)–(B.14) vyjádřit jako

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_3] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-2\nu)\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_V] = 2G\varepsilon_1 + \frac{E\nu\varepsilon_V}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.43)$$

kde  $\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  je objemová deformace a  $\varepsilon_1$  je hlavní deformace odpovídající stejnému hlavnímu směru jako  $\bar{\sigma}_1$ . Je tedy zřejmé, že největší hlavní napětí vznikne ve směru největší hlavní deformace, a ekvivalentní deformaci ve smyslu výše navržené definice můžeme zapsat jako

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{E} \max(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3) = \frac{1}{1+\nu} \varepsilon_{\max} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_V \quad (4.44)$$

kde  $\varepsilon_{\max} = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  je největší hlavní deformace. Pro jednoosý tah máme jako obvykle  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$ , a odtud  $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_V = (1-2\nu)\varepsilon_x$  a  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_x/(1+\nu) + \nu(1-2\nu)\varepsilon_x/(1+\nu)(1-2\nu) = \varepsilon_x$ . Definice (4.44) tedy splňuje podmínku, že pro jednoosý tah je ekvivalentní deformace rovna relativnímu protažení ve směru namáhání. Pro jednoosý tlak je  $\varepsilon_x < 0$ ,  $\varepsilon_{\max} = -\nu\varepsilon_x$  a  $\varepsilon_V = (1-2\nu)\varepsilon_x$ , takže podle (4.44) vyjde  $\tilde{\varepsilon} = 0$ . V jednoosém tlaku je tedy ekvivalentní deformace nulová a nedochází k růstu poškození. Pracovní diagram pro jednoosý tlak je proto lineárně pružný a tlaková pevnost je nekonečná, zcela v souladu s Rankinovým kritériem.

Místo původního Rankinova kritéria, které vede k ploše poškození s hranami v bodech, kde jsou dvě hlavní napětí stejná, lze použít také vyhlazené kritérium, založené na normě kladné části efektivního napětí, kterou vyhodnotíme podle vztahu (B.22) nebo (B.23). Odpovídající ekvivalentní deformaci můžeme definovat jako

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{E} \|\langle \bar{\sigma} \rangle\|_{\sigma} = \frac{1}{E} \sqrt{\langle \bar{\sigma} \rangle^T \mathbf{P} \langle \bar{\sigma} \rangle} = \frac{1}{E} \sqrt{\langle \bar{\sigma}_1 \rangle^2 + \langle \bar{\sigma}_2 \rangle^2 + \langle \bar{\sigma}_3 \rangle^2} \quad (4.45)$$

Hlavní hodnoty efektivního napětí lze vyjádřit v závislosti na hlavních deformacích podle (4.43) a obdobných rovnic pro  $\bar{\sigma}_2$  a  $\bar{\sigma}_3$  získaných cyklickou záměnou, ale vzhledem k přítomnosti závorek  $\langle \dots \rangle$  označujících kladné části už výsledný vzorec nelze nějak elegantně upravit, takže nemá cenu ho zde podrobně vypisovat. Znovu lze snadno ověřit, že pro jednoosý tah je  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_x$  a pro jednoosý tlak je  $\tilde{\varepsilon} = 0$ . Plochy poškození odpovídající původní Rankinově definici (4.44) a vyhlazené Rankinově definici (4.45) jsou v rovině hlavních deformací a v rovině hlavních efektivních napětí pro případ rovinné napjatosti vyneseny na obr. 4.7.

#### 4.2.2 Analýza rozvoje poškození a matice tečné tuhosti

I pro modely poškození je užitečné provést analýzu základních případů zatěžování a odtěžování v podobném duchu, jako jsme ji prováděli mnohokrát pro různé plasticitní modely. Obdobou plastického přetváření je zde růst poškození.

Pružný stav je charakterizován tím, že  $f(\varepsilon, \kappa) < 0$ , neboli  $\tilde{\varepsilon}(\varepsilon) < \kappa$ . Dokud je  $f < 0$ , přetvárný proces může být pouze pružný a poškození se nemění. Vztah mezi napětím a deformací (4.19) tedy můžeme diferencovat podle času s hodnotou poškození  $\omega$  považovanou za konstantu. Tím dospějeme k přírůstkovému vztahu

$$\dot{\sigma} = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \dot{\varepsilon} = \mathbf{D}_s \dot{\varepsilon} \quad (4.46)$$

který ukazuje, že roli okamžité tuhosti při pružném přetváření hraje matice sečné tuhosti  $\mathbf{D}_s = (1 - \omega)\mathbf{D}_e$ .

Pokud okamžitý stav splňuje podmínku  $f(\varepsilon, \kappa) = 0$ , neboli  $\tilde{\varepsilon}(\varepsilon) = \kappa$ , může dojít buď k růstu poškození, nebo k pružnému odtěžování za konstantního poškození. Při diferenciaci (4.19) proto musíme uvažovat i  $\omega$  jako proměnnou veličinu. Dostáváme tak

$$\dot{\sigma} = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \dot{\varepsilon} - \mathbf{D}_e \varepsilon \dot{\omega} \quad (4.47)$$

Naším cílem je z této rovnice vyloučit  $\dot{\omega}$ , abychom získali přímý vztah mezi rychlostmi napětí a deformace. Diferenciací zákona poškození (4.14) s využitím pravidla o derivaci složené funkce nejprve vyjádříme rychlost poškození v závislosti na rychlosti vnitřní proměnné  $\kappa$ :

$$\dot{\omega} = \frac{dg(\kappa(t))}{dt} = \frac{dg(\kappa)}{d\kappa} \frac{d\kappa(t)}{dt} = g' \dot{\kappa} \quad (4.48)$$

Pro zjednodušení zápisu jsme symbolem  $g' = dg/d\kappa$  označili derivaci funkce  $g$  popisující vývoj poškození. V případě růstu poškození zůstává funkce poškození  $f$  rovna nule, je tedy  $\dot{f} = \dot{\tilde{\varepsilon}} - \dot{\kappa} = 0$ , což znamená  $\dot{\kappa} = \dot{\tilde{\varepsilon}}$ . Ekvivalentní deformace  $\tilde{\varepsilon}$  je funkcí deformace  $\varepsilon$ , takže její časovou derivaci vyjádříme podle pravidla o derivaci složené funkce jako

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = \frac{d\tilde{\varepsilon}(\varepsilon(t))}{dt} = \left( \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \boldsymbol{\eta}^T \dot{\varepsilon} \quad (4.49)$$

kde

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \quad (4.50)$$

je sloupcová matice derivací ekvivalentní deformace podle jednotlivých složek deformace. Při růstu poškození je  $\dot{\kappa} = \dot{\tilde{\varepsilon}}$ , ale přitom nesmí být  $\dot{\kappa} \leq 0$ . K růstu tedy dochází pro takové přírůstky deformace, které splňují podmínku  $\boldsymbol{\eta}^T \dot{\varepsilon} > 0$ , a rychlost poškození je pak dána vztahem

$$\dot{\omega} = g' \dot{\kappa} = g' \dot{\tilde{\varepsilon}} = g' \boldsymbol{\eta}^T \dot{\varepsilon} \quad (4.51)$$

Po jeho dosazení do (4.47) získáme hledaný vztah mezi přírůstkou napětí a deformace:

$$\dot{\sigma} = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \dot{\varepsilon} - \mathbf{D}_e \varepsilon \dot{\omega} = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \dot{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} (g' \boldsymbol{\eta}^T \dot{\varepsilon}) = [(1 - \omega)\mathbf{D}_e - g' \bar{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\eta}^T] \dot{\varepsilon} = \mathbf{D}_{ed} \dot{\varepsilon} \quad (4.52)$$

Přitom jsme využili toho, že  $\mathbf{D}_e \varepsilon = \bar{\boldsymbol{\sigma}} =$  efektivní napětí, a zavedli jsme matici

$$\mathbf{D}_{ed} = (1 - \omega)\mathbf{D}_e - g' \bar{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\eta}^T = \mathbf{D}_s - g' \bar{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\eta}^T \quad (4.53)$$

která hraje roli matice tečné tuhosti poškozujícího se materiálu. Jak je vidět, tato matice se od matice sečné tuhosti  $\mathbf{D}_s$  liší o opravu, která vyjadřuje vliv rostoucího poškození a je dána dyadickým součinem sloupcových matic  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  a  $\boldsymbol{\eta}$  vynásobeným skalárem  $g'$ .

Zbývá dodat, že pokud je  $\boldsymbol{\eta}^T \dot{\varepsilon} \leq 0$ , dochází k pružnému odtěžování, při kterém je  $\dot{\omega} = 0$  a mezi přírůstkou napětí a deformace platí opět vztah (4.46).

Konkrétní vyjádření sloupcové matice  $\boldsymbol{\eta}$  závisí na zvolené definici ekvivalentní deformace. Pro definici (4.23) založenou na energetické normě vychází

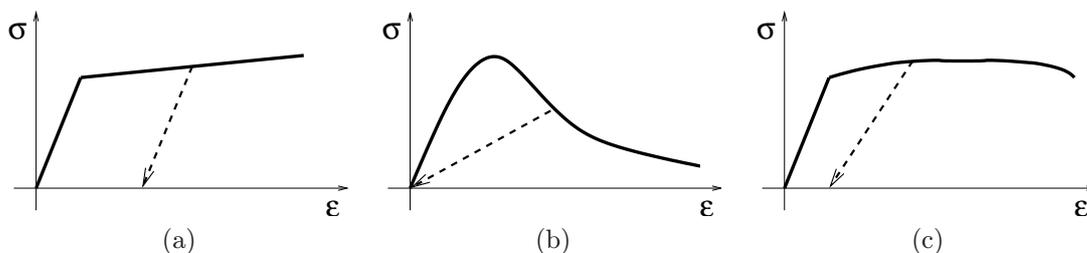
$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon^T \mathbf{D}_e \varepsilon}{E}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\varepsilon^T \mathbf{D}_e \varepsilon}{E}}} \frac{1}{E} 2\mathbf{D}_e \varepsilon = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{E \tilde{\varepsilon}} \quad (4.54)$$

a výsledná matice tečné tuhosti

$$\mathbf{D}_{ed} = (1 - \omega)\mathbf{D}_e - \frac{g'}{E \tilde{\varepsilon}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \quad (4.55)$$

je symetrická. Pro jiné definice ekvivalentní deformace je ale symetrie narušena.

Velkou výhodou popsaného modelu, stejně jako všech modelů poškození pracujících s definicí funkce poškození jako funkce deformace (nikoli jako funkce napětí) a se zákonem poškození v explicitním (nikoli přírůstkovém) tvaru, je snadné vyhodnocení vývoje napětí odpovídajícího danému vývoji deformace. Předpokládejme, že je dán okamžitý stav (tj. okamžité hodnoty napětí, deformace, poškození a vnitřní proměnné  $\kappa$ ) a dále je předepsán jistý přírůstek deformace. Snadno můžeme vyhodnotit celkovou deformaci na konci tohoto přírůstku a jí odpovídající ekvivalentní deformaci  $\tilde{\varepsilon}$  podle zvolené konkrétní definice. Pokud není překročena hodnota  $\kappa$  ze začátku přírůstku,  $\kappa$  ani  $\omega$  se nemění, v opačném případě pak položíme  $\kappa$  rovno vypočtenému  $\tilde{\varepsilon}$  a určíme odpovídající poškození  $\omega = g(\kappa)$ . Napětí na konci přírůstku se pak vypočítá z deformace a poškození podle základního vzorce  $\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \varepsilon$ .



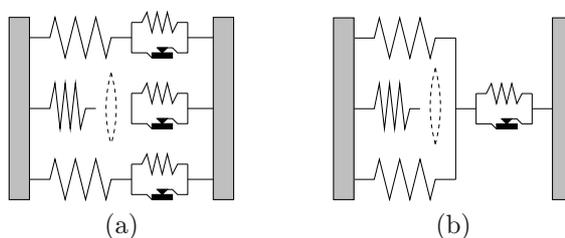
Obrázek 4.8: Typické pracovní diagramy pro (a) pružnoplastický materiál, (b) pružný materiál s poškozením, (c) pružnoplastický materiál s poškozením.

### 4.2.3 Kombinace modelů poškození a plasticity

V kapitole 2 jsme se zabývali pružnoplastickými modely, které jsou inspirovány představou pokluzu podél krystalografických rovin v kovech a soustředí se na popis trvalé (plastické) deformace vyvolané takovými procesy. Při odtěžování se materiál chová jako lineárně pružný se stejnou tuhostí jako ve výchozím stavu, viz obr. 4.8a.

Naproti tomu modely poškození jsou založeny na představě šířících se trhlin a dutin a popisují odpovídající redukcí tuhosti materiálu. Jestliže materiál mezi trhlinami zůstává pružný a trhliny se mohou bez odporu zavřít, pak se při odtěžování pracovní diagram vrací zpět do počátku, jak je naznačeno na obr. 4.8b. Ve skutečných materiálech obvykle dochází jak ke vzniku trvalých deformací, tak i ke snížení tuhosti, a odtěžovací větev pracovního diagramu je někde mezi oběma extrémami, viz obr. 4.8c. Tato skutečnost naznačuje, že optimální je oba typy modelů (tedy plasticitu a poškození) kombinovat.

Kombinace plasticity a poškození může být založena přinejmenším na dvou různých přístupech. První přístup využívá pojmu efektivního napětí, známého z mechaniky poškození. Tato veličina představuje napětí vznikající v dosud nepoškozeném materiálu mezi defekty. Místo předpokladu pružného chování nepoškozeného materiálu můžeme použít předpoklad pružnoplastického chování. Vztah mezi efektivním napětím a deformací je pak popsán rovnicemi teorie plasticity. Názorně lze tento přístup ilustrovat reologickým schématem na obr. 4.9a, ve kterém jsou paralelně zapojeny pružnoplastické jednotky, z nichž každá je sériovým spojením pružiny a plastického článku (s případným zpevněním). Tyto jednotky jsou v důsledku poškození postupně vyřazovány z činnosti. Jde vlastně o obdobu svazku postupně praskajících vláken z obr. 4.1, s tím rozdílem, že vlákna nyní nejsou pružná, ale pružnoplastická. Přitom poškození může být závislé na celkové deformaci, ale také třeba na její pružné nebo plastické části, podle toho, jak si představujeme konkrétní mechanismus poškození pro daný materiál.



Obrázek 4.9: Dvě reologická schémata kombinující pružnost, plasticitu a poškození.

Alternativní přístup spočívá v tom, že k pružnému modelu s poškozením přidáme trvalé deformace, v duchu reologického schématu na obr. 4.9b. Trvalé deformace mohou představovat nejen klasické plastické přetvoření v důsledku pokluzu, ale také nevratnou část deformace způsobené rozevíráním trhlin. Pokud jsou totiž okraje trhliny nerovné, při odtěžení se trhlinka nemůže dokonale zavřít tak, aby deformace úplně zmizela. Vývoj trvalých deformací bývá popsán pravidly, která jsou často formálně podobná zákonu plastického přetváření.

Ať už použijeme ten či onen přístup, výsledný vztah mezi napětím a deformací bude mít v případě modelu poškození s jediným parametrem  $\omega$  tvar

$$\sigma = (1 - \omega)D_e(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (4.56)$$

Tato rovnice v sobě zahrnuje jako zvláštní případy rovnici (2.143) platnou pro pružnoplastické modely a rovnici (4.19) platnou pro pružné modely s poškozením. Rozdíl mezi dvěma výše zmíněnými přístupy spočívá v interpretaci této rovnice a v tom, s jakým napětím se pracuje v podmínce plasticity. První přístup v duchu obr. 4.9a interpretuje (4.56) jako vztah

$$\sigma = (1 - \omega)\bar{\sigma} \quad (4.57)$$

mezi nominálním napětím  $\sigma$  a efektivním napětím

$$\bar{\sigma} = D_e(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (4.58)$$

Efektivní napětí je napětí působící na nepoškozený materiál mezi trhlinami, který se chová pružnoplasticky. Podmínka plasticity je tedy formulována pomocí efektivního napětí. Naproti tomu druhý přístup v duchu obr.

4.9b interpretuje (4.56) jako vztah

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_s(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (4.59)$$

mezi napětím  $\boldsymbol{\sigma}$  a pružnou deformací  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ , která je rozdílem celkové a plastické deformace. Přitom tuhost

$$\mathbf{D}_s = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \quad (4.60)$$

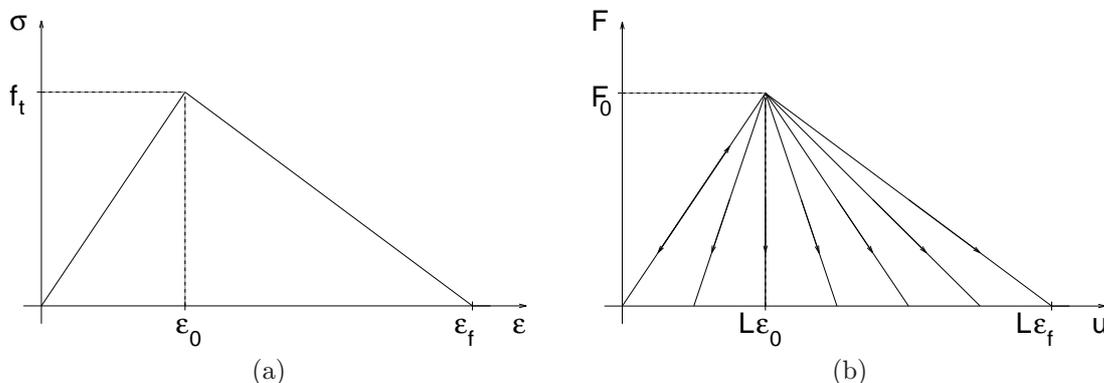
je redukována s ohledem na poškození. Při tomto přístupu se v podmínce plasticity logicky objeví nominální napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ .

## 4.3 Lokalizace poškození

### 4.3.1 Potíže s popisem změkčení

Řada přírodních i umělých materiálů vykazuje přinejmenším v pokročilých stádiích přetvárného procesu změkčení, což znamená, že při rostoucí deformaci klesá jimi přenášené napětí. Příčinou změkčení bývá rozvoj defektů v materiálu, provázený poklesem efektivní plochy schopné přenášet napětí. Postupné změkčování je charakteristické zejména pro kvazikřehké materiály, jako je beton. V *křehkých* materiálech často dojde k náhlému katastrofickému růstu trhlin, takže přenášené napětí vymizí prakticky okamžitě a místo o změkčení hovoříme o křehkém lomu. V *tažných* (duktilních) materiálech, jako je většina kovů, je naopak dominantním mechanismem nepružného přetváření plastický pokluz, v jehož průběhu zpravidla dochází k postupnému zvyšování meze kluzu, tedy ke zpevnění. Při velkých deformacích se však i v takových materiálech mohou vytvářet a šířit defekty, např. dutiny, které se postupně spojují a nakonec vedou k duktilnímu lomu. Takové chování lze popisovat pomocí pružnoplastických modelů se zpevněním, postupně přecházejícím do změkčení, nebo pomocí pružnoplastických modelů se zpevněním kombinovaných s modely poškození. Pro *kvazikřehké* materiály obvykle dochází při namáhání v tahu k náhlému přechodu od téměř lineárně pružného chování ke změkčování, v pozdějších fázích ale zbytkové přenášené napětí klesá pomalu a úplně vymizí až při poměrně značné deformaci. Takové chování se nejnázorněji popíše pomocí modelů poškození.

Pro modely se změkčením, ať již formulované v rámci teorie poškození nebo teorie plasticity s klesající mezí kluzu, je ovšem třeba velké opatrnosti. Změkčování materiálu je totiž často příčinou *lokalizace nepružných deformací* a pro nevhodně formulované modely dojde ke vzniku problémů, které mohou výsledky analytických výpočtů nebo numerických simulací zcela znehodnotit. Podstatu těchto problémů si nejprve názorně osvětlíme na jednoduchém příkladu a poté vysvětlíme jejich obecné důsledky a budeme se věnovat hledání nápravy.

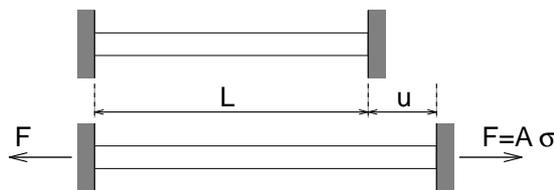


Obrázek 4.10: (a) Lokální pracovní diagram s lineárním změkčením, (b) vějíř možných sestupných větví globálního pracovního diagramu.

Pro ilustraci použijeme velmi jednoduchý materiálový model pro jednoosou napjatost. Předpokládáme, že materiál je lineárně pružný až po dosažení deformace  $\varepsilon_0$ . Při dalším zvětšování deformace dochází k lineárnímu změkčení podle obr. 4.10a a napětí přenášené materiálem zcela zmizí při dosažení deformace  $\varepsilon_f$ . Maximálního napětí  $f_t$ , které představuje tahovou pevnost materiálu, je tedy dosaženo na konci lineárně pružné části pracovního diagramu a platí  $f_t = E\varepsilon_0$ , kde  $E$  je modul pružnosti. Pro další úvahy o lokalizaci není podstatné, v rámci jaké konkrétní teorie je tento model formulován, tedy zda jde např. o pružnoplastický model s lineárním změkčením, o model izotropního poškození, nebo o model s rozetřenými trhlinami. Důležité je pouze, že pracovní diagram se skládá ze dvou lineárních částí, z nichž jedna (vzestupná) odpovídá pružnému chování a druhá (sestupná) změkčení.

#### Příklad 4.5: Tahová zkouška prutu ze změkčujícího materiálu — analytické řešení

Představme si prut o délce  $L$  a s konstantním průřezem o ploše  $A$ , zatížený jednoosým tahem, viz obr. 4.11. Zatěžování je řízeno posunem, protože řízení silou by po dosažení vrcholu pracovního diagramu nebylo možné. Levý konec prutu si představíme jako vetknutý, na pravém konci je uchyceno zatěžovací zařízení, které tomuto



Obrázek 4.11: Tažený prut.

konci vnucuje posun  $u$  a vzniká v něm reakce  $F$ . Normálové napětí  $\sigma = F/A$  je rovnoměrně rozloženo po průřezu a navíc, mají-li být splněny podmínky statické rovnováhy, i po délce prutu. Otázka je, jak je rozložena deformace a jaký je výsledný vztah mezi silou  $F$  a posunem  $u$ .

Až do dosažení vrcholu pracovního diagramu se všechny body prutu chovají lineárně pružně a deformace je úměrná napětí podle vzorce  $\varepsilon = \sigma/E$ , takže je také rozložena po délce prutu rovnoměrně. Posun  $u$  je roven celkovému protažení prutu, které se spočítá jako součin délky  $L$  a relativního protažení  $\varepsilon$ ; platí tedy  $u = L\varepsilon = L\sigma/E = LF/EA$ . Mezi silou  $F$  a posunem  $u$  je tudíž přímá úměrnost s konstantou  $EA/L$ , která představuje tuhost pružného prutu. Až potud je řešení velmi snadné a odpovídá elementárním poznatkům ze stavební mechaniky.

Situace se ale výrazně zkomplikuje po vyčerpání pevnosti materiálu. Při dosažení posunu  $u_0 = L\varepsilon_0$  je ve všech bodech prutu napětí  $\sigma = f_t$  a celková působící síla je  $F_0 = Af_t$ . Dál už může napětí pouze klesat a při zachování statické rovnováhy musí být stále rovnoměrně rozloženo po délce prutu. Přitom ale k poklesu napětí může docházet dvěma způsoby: buď pružným odtěžováním za klesající deformace, nebo změkčováním za rostoucí deformace. Nemáme k dispozici žádnou podmínku, podle níž bychom určili, které body prutu se budou odtěžovat a ve kterých bude docházet ke změkčováním. Existuje tedy celá řada (dokonce nekonečně mnoho) různých řešení a dochází ke ztrátě jednoznačnosti. Můžeme zkonstruovat mimo jiné taková řešení, pro která v jedné části prutu o délce  $L_u$  dochází k odtěžování („u“ je odvozeno z anglického termínu „unloading“) a ve zbylé části o délce  $L_s = L - L_u$  ke změkčováním („s“ podle „softening“). Pro každou hodnotu klesající síly  $F$  mezi  $F_0$  a nulou lze spočítat napětí  $\sigma = F/A$  a pak určit odpovídající deformaci  $\varepsilon_u$  v odtěžované části prutu a  $\varepsilon_s$  ve změkčující části. V odtěžované části stále platí rovnice lineární pružnosti, takže je  $\varepsilon_u = \sigma/E = F/EA$ . Na změkčující větvi pracovního diagramu je vztah mezi napětím a deformací také lineární a jednoduchým výpočtem dospějeme k závěru, že napětí  $\sigma$  vznikne při deformaci

$$\varepsilon_s = \varepsilon_0 \frac{\sigma}{f_t} + \varepsilon_f \frac{f_t - \sigma}{f_t} = \frac{f_t \varepsilon_f + \sigma(\varepsilon_0 - \varepsilon_f)}{f_t} \quad (4.61)$$

Celkové protažení prutu  $u$  je součtem protažení odtěžující části,  $L_u \varepsilon_u$ , a protažení změkčující části,  $L_s \varepsilon_s$ . Po dosažení dostaneme

$$u = L_u \varepsilon_u + L_s \varepsilon_s = L_u \frac{\sigma}{E} + L_s \frac{f_t \varepsilon_f + \sigma(\varepsilon_0 - \varepsilon_f)}{f_t} = L_s \varepsilon_f + \left[ \frac{L_u}{E} + \frac{L_s(\varepsilon_0 - \varepsilon_f)}{f_t} \right] \frac{F}{A} \quad (4.62)$$

Pro pevně zvolené  $L_u$  a  $L_s$  dostáváme lineární vztah mezi posunem  $u$  a silou  $F$ .

V okamžiku, kdy síla přenášená prutem klesne na nulu, je posun roven  $L_s \varepsilon_f$ . To je logické, protože nulové napětí vznikne při úplném odtižení pružné části na nulovou deformaci a při protažení změkčující části na deformaci  $\varepsilon_f$ . Pracovní diagram na globální úrovni celé konstrukce (znázorňující vztah mezi silou a posunem) má tedy také lineární sestupnou větev, podobně jako pracovní diagram na lokální úrovni (znázorňující vztah mezi napětím a deformací). Vodorovnou osu protne ve vzdálenosti  $L_s \varepsilon_f$  od počátku. Potíž je ovšem v tom, že pro pevně zvolené  $L_s$  jde pouze o jedno z mnoha možných řešení. Délka  $L_s$  změkčující části prutu může být v zásadě libovolná, samozřejmě však nemůže překročit délku prutu  $L$ . Pro  $L_s = L$  dostáváme jeden extrémní případ, ve kterém všechny body prutu změkčují a deformace zůstává rovnoměrně rozdělena. Globální pracovní diagram pak vznikne z lokálního pouhou změnou měřítka na osách — napětí  $\sigma$  se ztransformuje na sílu  $F = A\sigma$  a deformace  $\varepsilon$  na posun  $u = L\varepsilon$ . Pro všechny ostatní volby délky  $L_s$  je změkčující větev globálního pracovního diagramu strmější. Čím kratší  $L_s$  zvolíme, tím strmější tato větev bude. Při volbě  $L_s = L\varepsilon_0/\varepsilon_f$  bude změkčující větev svislá a pro menší hodnoty  $L_s$  bude mít kladný sklon, což znamená, že vrchol pracovního diagramu je zároveň bodem obratu a test není možné provést při řízení posunem (tedy celkovým protažením). Délka  $L_s$  sice nemůže být záporná, ale není zdola omezena žádnou kladnou konstantou, neboli může být libovolně malá. Sestupná větev globálního pracovního diagramu tedy může být kdekoli ve vějíři naznačeném na obr. 4.10b a omezeném z jedné strany případem  $L_s = L$ , který odpovídá změkčováním všech bodů prutu, a z druhé strany případem  $L_s = 0$ , který odpovídá odtěžování všech bodů prutu.

Při odtěžování skutečně **všech** bodů prutu zůstává materiál všude nepoškozen a nedochází k porušení konstrukce. Pro jakkoli malou nenulovou hodnotu  $L_s$  však dojde k úplnému poškození v malém segmentu prutu, to však stačí k totální ztrátě únosnosti celého prutu. Pro  $L_s$  blízké se nule se porušený segment blíží k jedinému průřezu, ale i prasknutí jednoho průřezu stačí k tomu, aby prut zcela ztratil schopnost přenášet tahové zatížení.

□

Ukázali jsme, že při jednoosé tahové zkoušce prutu z materiálu se změkčením je jednoznačně určena pouze vzestupná část globálního pracovního diagramu. Po dosažení maximální síly řešení ztrácí jednoznačnost a je možno zkonstruovat různá řešení, navzájem velmi odlišná. Otázkou je, jaké chování lze očekávat na reálném vzorku a jak mezi nekonečně mnoha řešeními příslušné matematické úlohy identifikovat to „pravé“. Změkčování materiálu je důsledkem rozvoje defektů (např. trhlin), které se sice mohou koncentrovat ve velmi krátkém segmentu prutu, ale ne doslova v jediném průřezu. Každý materiál, byť by se navenek při zkoumání na jisté úrovni rozlišení jevil jako dokonale homogenní, má určitou vnitřní strukturu a nemůže být neomezeně dělitelný na libovolně malé části, které by měly stále stejné vlastnosti jako původní materiál. V případě vysoce heterogenních materiálů jako je beton je to zcela jasné, ale i jiné, zdánlivě homogenní materiály vykazují na dostatečně jemné úrovni rozlišení určitou vnitřní strukturu. V této souvislosti hovoříme o *vnitřní charakteristické délce materiálu*, což je sice pojem ne zcela jednoznačně definovaný, ale v zásadě by měl odpovídat velikosti typických nehomogenit (jako jsou třeba zrna kameniva v případě betonu) a jejich vzájemné vzdálenosti. V důsledku heterogenity materiálu se nepružné procesy (jako třeba rozvoj mikrotrhlin) nemohou lokalizovat do jediného průřezu, tedy do oblasti o nulové tloušťce, ale dochází k jejich koncentraci v jisté procesní zóně, jejíž minimální šířka závisí právě na vnitřní charakteristické délce materiálu.

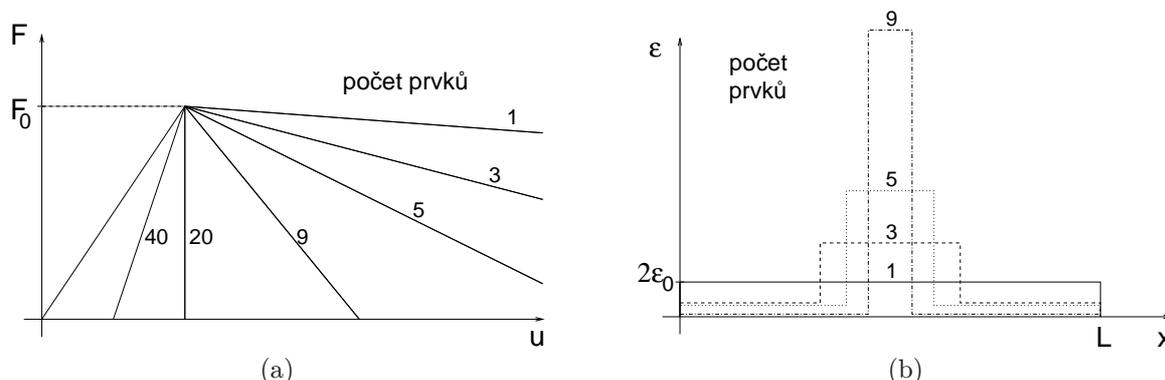
Zásadní problém nepružných modelů se změkčením, popsaných pomocí vztahů mezi napětím a deformací, je v tom, že neobsahují žádnou informaci o vnitřní charakteristické délce materiálu. Díky změkčení tyto modely vedou k řešením s nepružnými účinky lokalizovanými do určitých zón, totiž je však v tom, že šířka těchto zón není modelem nijak určena. Při analytickém řešení může být šířka zóny lokalizované deformace libovolně malá, případně přímo nulová. To jsme ukázali pro tažený prut v příkladu 4.5. V následujícím příkladu se podíváme na to, jaké řešení můžeme očekávat při aproximaci problému pomocí přibližných numerických metod.

#### **Příklad 4.6: Tahová zkouška prutu ze změkčujícího materiálu — numerické řešení**

Při numerickém řešení jednorozměrné úlohy metodou konečných prvků (MKP) rozdělíme celý prut na  $N$  intervalů, v terminologii MKP označovaných jako prvky, které se navzájem stýkají v  $N - 1$  průřezech, v terminologii MKP označovaných jako uzly. Další dva uzly odpovídají krajním průřezům celého prutu. Metoda je založena na aproximaci pole posunutí funkcemi, které jsou na celém prutu spojitě a v rámci každého prvku lineární. Každá taková funkce je jednoznačně určena hodnotami posunů v uzlech. Je-li na prvku posunutí aproximováno lineární funkcí souřadnice  $x$ , je odpovídající deformace v rámci prvku konstantní a vypočte se jako rozdíl posunů uzlů, ke kterým je tento prvek připojen, dělený délkou prvku. Rozložení deformace po délce prutu je tedy aproximováno po částech konstantní funkcí. Uplatněním materiálového modelu se z deformace v každém prutu vypočte odpovídající napětí, které bude tudíž také aproximováno po částech konstantní funkcí. Obecně se podmínky rovnováhy při výpočtu MKP splňují pouze v tzv. slabém smyslu, ale to pro naše účely není podstatné. Za daných předpokladů (jednorozměrná úloha, lineární aproximace posunutí na prvcích, konstantní průřez a zanedbání objemových sil) totiž budou podmínky rovnováhy sestavené v rámci přibližného výpočtu MKP ekvivalentní s podmínkou, že napětí ve všech prvcích má být stejné, což je vlastně klasická podmínka rovnováhy v silném smyslu.

Až po dosažení vrcholu pracovního diagramu je řešení jednoznačné, protože při lineárně pružném chování je deformace jednoznačně určena napětím, a proto z podmínky stejného napětí ve všech prvcích plyne, že i deformace ve všech prvcích jsou stejné. Numerické řešení tedy přesně odpovídá analytickému. V okamžiku dosažení vrcholu se jednoznačnost ztrácí, protože v každém prvku může začít buď pružné odtěžování, nebo změkčování. Celkem je tedy  $2^N$  možných řešení, z nichž jedno odpovídá odtěžování celého prutu, jedno odpovídá rovnoměrnému změkčování celého prutu, a ostatní odpovídají různým kombinacím odtěžování a změkčování v jednotlivých prvcích. Pružné odtěžování celého prutu z dalších úvah vyloučíme, protože nás zajímají jen taková řešení, při kterých nakonec dojde k porušení, tj. ke ztrátě schopnosti prutu přenášet zatížení. Z ostatních řešení můžeme při numerickém výpočtu získat v podstatě kterékoliv. Závisí to na konkrétním algoritmu, pomocí kterého se hledá řešení splňující podmínky rovnováhy. Celý zkoumaný zatěžovací proces je rozdělen na kroky a v rámci každého kroku se zvětší hodnota veličiny používané jako řídicí parametr, např. síly působící na pravý konec prutu nebo posunu tohoto konce. Řízení silou by ovšem ze známých důvodů selhalo po dosažení vrcholu pracovního diagramu, takže si prozatím představíme řízení posunem pravého konce. Pokud se na konci prvního nepružného kroku ocitnou v režimu změkčování všechny prvky najednou, může se stát, že i v dalších krocích pokračuje změkčování všech prvků a je zachováno rovnoměrné rozdělení deformace po délce prutu. Jestliže se však vlastnosti materiálu (např. pevnost) v jednotlivých prvcích mírně liší, při dostatečně malých krocích se z pružného režimu do režimu změkčení dostane nejprve jen jeden prvek, a sice ten nejslabší (s nejmenší pevností). V dalším kroku tento prvek změkčuje, napětí v něm tedy klesá a stejně tak musí klesat i napětí v ostatních prvcích, které ovšem zůstávají v pružném stavu a jejich deformace se zmenšuje. Dojde tedy k lokalizaci nepružného přetváření do jediného prvku. Při konkrétním výpočtu můžeme lokalizaci napomoci tím, že jeden vybraný prvek mírně oslabíme. Ale i pokud to neuděláme, často při numerickém řešení k lokalizaci dojde samovolně, vlivem malých zaokrouhlovacích chyb, které vedou k drobným odchylkám od idealizovaných předpokladů a mají podobný účinek jako mírně nerovnoměrné rozdělení pevnosti.

Při numerickém řešení tedy můžeme očekávat lokalizaci změkčování do jednoho prvku a odtěžování ostatních prvků. Výsledek je pak velmi podobný jako při analytickém řešení v příkladu 4.5, ovšem s tím rozdílem, že délka lokalizované zóny  $L_s$  není libovolná, ale odpovídá velikosti nejslabšího prvku. Při rovnoměrném dělení je



Obrázek 4.12: Vliv počtu konečných prvků na numerické výsledky: (a) globální pracovní diagram, (b) rozložení deformace po délce prutu.

tedy  $L_s = L/N$ , kde  $N$  je počet prvků. Sestupná větev globálního pracovního diagramu protne vodorovnou osu v bodě odpovídajícím posunu  $u = L_s \varepsilon_f = L \varepsilon_f / N$ . Problém je v tom, že  $L$  je charakteristika konstrukce (délka prutu),  $\varepsilon_f$  je charakteristika materiálu, ale  $N$  je parametr zvoleného numerického postupu (počet prvků), který nemá nic společného se zadáním řešené úlohy. Přesto numerické řešení na parametru  $N$  velmi silně závisí, jak ukazují pracovní diagramy na obr. 4.12a, sestrojené pro  $N = 1, 3, 5, 9, 20, 40$ . V této ukázce byl použit model s lineárním změkčením a s poměrem  $\varepsilon_f / \varepsilon_0 = 20$ . S rostoucím počtem prvků je sestupná větev globálního pracovního diagramu nejprve stále strmější, pro  $N = 20$  je vssvá a pro  $N = 40$  je vrchol zároveň bodem obratu. To znamená, že řízení posunem pravého konce by bylo možné jen pro  $N < 20$  a pro větší počty prvků by bylo třeba použít rafinovanějších postupů (např. řízení vzájemným posunem dvou uzlů, ke kterým je připojen nejslabší prvek).

Graf na obr. 4.12b ukazuje, jak vypadá rozložení deformace po délce prutu při výpočtech s různými počty prvků. Jednotlivé profily jsou nakresleny pro stav, kdy posun pravého konce dosáhne hodnoty  $u = 2L\varepsilon_0$ . Deformace je vždy lokalizována do jednoho prvku, takže šířka lokalizované zóny se při zvětšujícím počtu prvků zmenšuje a deformace v této zóně se zvětšuje.

Při obvyklých výpočtech MKP vede zvětšování počtu prvků ke zvyšování přesnosti výpočtu. Z grafů na obr. 4.12 je ale zřejmé, že v daném případě se při rostoucím  $N$  výsledky neblíží žádnému „rozumnému řešení“. Plocha pod globálním pracovním diagramem se s rostoucím  $N$  zmenšuje a pro  $N \rightarrow \infty$  se blíží k nule. Přitom tato plocha má význam celkové práce vykonané vnějšími silami v průběhu testu. Podle numerického výpočtu se práce potřebná k totálnímu porušení prutu blíží k nule, a to nezávisle na původním poměru  $\varepsilon_f / \varepsilon_0$  určujícím, jak duktilní nebo křehký je daný materiál. I pro velké hodnoty  $\varepsilon_f / \varepsilon_0$ , tedy pro vysoce duktilní materiál, bychom při dostatečně vysokém počtu prvků získali globální pracovní diagram odpovídající velice křehkému chování. To je samozřejmě z fyzikálního hlediska nepřijatelné.

□

V příkladech 4.5 a 4.6 jsme ukázali, že pro materiál se změkčením se při popisu jednoduché tahové zkoušky objeví následující nesrovnalosti:

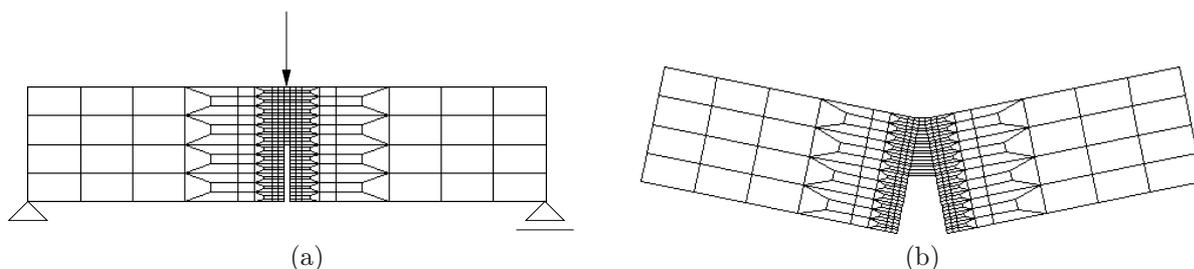
1. Deformace se lokalizuje do zóny, která může být libovolně malá.
2. Globální pracovní diagram vykazuje bod obratu, nezávisle na parametrech materiálového modelu a na rozměrech prutu.
3. Celková práce vykonaná vnějšími silami (tj. práce spotřebovaná na porušení konstrukce) je libovolně malá.
4. Při numerickém řešení metodou konečných prvků výsledky velmi silně závisí na počtu prvků a pro zvyšující se počet prvků nekonvergují k fyzikálně přijatelnému řešení.

Uvedené potíže souvisejí s tím, že z matematického hlediska má zkoumaný problém před dosažením vrcholu pracovního diagramu charakter okrajové úlohy s tzv. eliptickým operátorem, ale změkčování materiálu vede ke ztrátě eliptičnosti. Přitom pro úlohy s eliptickým operátorem je možno dokázat jednoznačnost řešení a jeho spojitou závislost na okrajových podmínkách, zatímco při ztrátě eliptičnosti vzniká tzv. špatně formulovaná úloha (anglicky „ill-posed problem“). Z numerického hlediska se to pak projeví patologickou závislostí řešení na počtu konečných prvků.

Potíže s popisem lokalizované deformace v důsledku změkčování materiálu jsme demonstrovali na velmi jednoduchém příkladu jednoosé tahové zkoušky, pro kterou bylo možno jejich příčiny poměrně názorně popsat a pochopit. Ukazuje se, že potíže stejného druhu se objeví i při řešení složitějších úloh pomocí dvou- a třírozměrných modelů.

#### Příklad 4.7: Simulace tříbodového ohybu nosníku s vrubem

Předvedeme ukázkou numerické simulace betonového nosníku s vrubem, prostě podepřeného a zatíženého silou

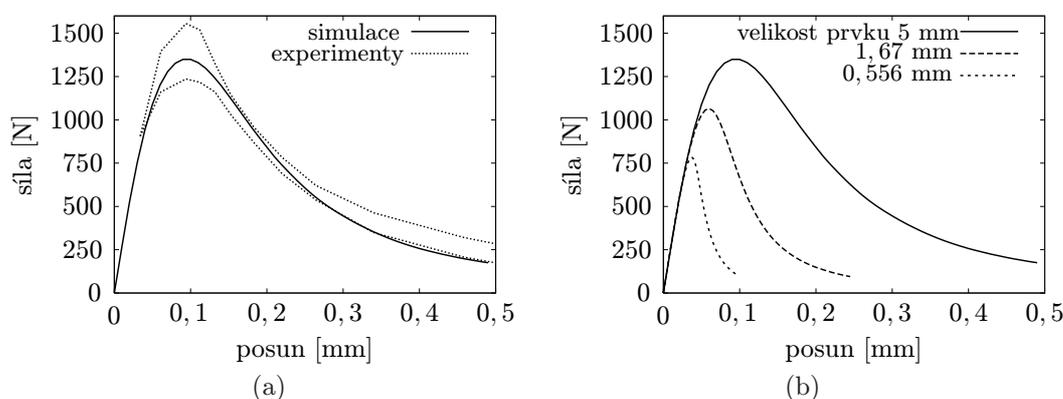


Obrázek 4.13: Nosník s vrubem namáhaný třibodovým ohybem: (a) síť konečných prvků s vyznačením podpor a zatížení, (b) deformovaná síť při úplném porušení vzorku (posuny záměrně přehnány).

uprostřed rozpětí. Nosník má čtvercový průřez o rozměrech  $100 \times 100$  mm a rozpětí 450 mm. Nejde tedy o prvek skutečné stavební konstrukce, ale o zkušební tělísko testované v laboratoři. Jeho simulace by teoreticky mohla sloužit k ověření zvoleného materiálového modelu a určení jeho parametrů. Vrub při spodním okraji uprostřed rozpětí má šířku 5 mm a zasahuje až do poloviny výšky průřezu. Rozměry zkušebního tělesa odpovídají skutečným testům, které provedli Kormeling a Reinhardt (1983).

Přibližný výpočet byl proveden metodou konečných prvků za předpokladu rovinné napjatosti, šlo tedy o rovinnou úlohu. Nosník byl rozdělen na čtyřúhelníkové prvky s uzly ve vrcholech a v rámci každého prvku bylo pole posunutí aproximováno jednoduchou funkcí. Není zde možno podrobně vysvětlovat metodu konečných prvků, ale pro čtenáře seznámené s jejími základy uvádíme, že šlo o izoparametrické čtyřúhelníkové prvky s bilineární aproximací a čtyřbodovou integrací. V první simulaci bylo použito nerovnoměrné dělení na obr. 4.13a, při kterém je střední část nosníku v okolí vrubu záměrně rozdělena na menší prvky než okolní oblast kolem podpor, ve které se neočekává rozvoj poškození. V jemně dělené oblasti měly prvky tvar čtverců o straně 5 mm. Představu o simulovaném mechanismu porušení dává obr. 4.13b, na kterém je vykreslena deformovaná síť na konci testu. Skutečné posuny jsou ale velmi malé, takže jsou při grafickém znázornění výsledků záměrně přehnány. Z obrázku je patrné, že se v závěrečných fázích testu deformace lokalizuje do jedné vrstvy prvků vedoucí od vrubu svisle vzhůru k působišti zatěžující síly.

Materiál byl popsán jednoduchým izotropním modelem poškození s Rankinovou definicí ekvivalentní deformace (4.44) a zákonem poškození ve tvaru (4.9), který odpovídá lineárně pružnému chování následovanému exponenciálním změkčováním. Pružné konstanty byly zvoleny jako  $E = 20$  GPa a  $\nu = 0.2$  a parametry v zákonu poškození jako  $\varepsilon_0 = 120 \cdot 10^{-6}$  a  $\varepsilon_f = 7 \cdot 10^{-3}$ , což odpovídá tahové pevnosti  $f_t = E\varepsilon_0 = 2,4$  MPa.



Obrázek 4.14: Globální pracovní diagram (závislost mezi silou a posunem) pro nosník s vrubem: (a) simulace na síti z obr. 4.13a v porovnání s experimentálními výsledky, (b) simulace na třech různých sítích konečných prvků.

Pro uvedenou volbu parametrů vedla první simulace na síti podle obr. 4.13a ke globálnímu pracovnímu diagramu vynesnému na obr. 4.14a plnou čarou. Tento výsledek je ve shodě s experimentálně zjištěnými pracovními diagramy, které se pohybovaly v oblasti ohraničené na obr. 4.14a tečkovanými čarami.<sup>6</sup>

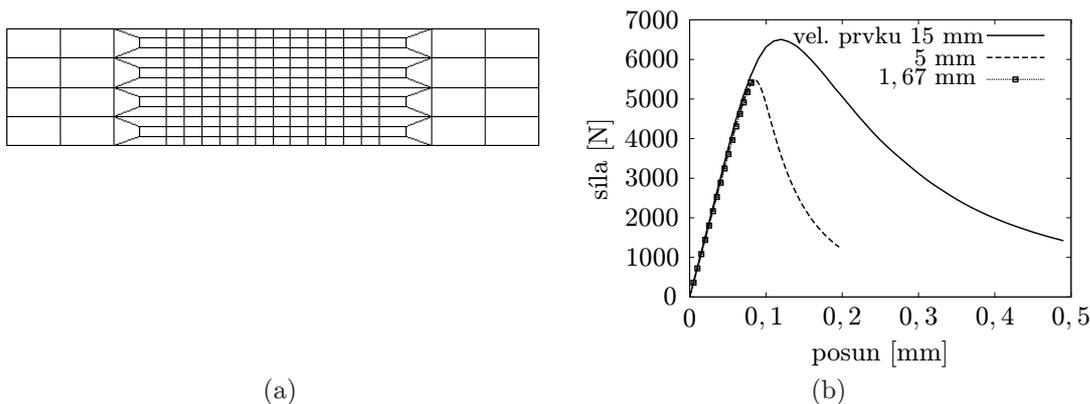
Zatím se zdá být vše v pořádku. Překvapení však nastane, pokud simulaci provedeme znovu na síti s jinou velikostí konečných prvků v oblasti kolem vrubu. Na obr. 4.14b jsou porovnány pracovní diagramy získané simulací na třech sítích s velikostí prvku 5 mm, 1,67 mm a 0,556 mm. Přitom parametry materiálového modelu zůstaly ve všech případech stejné. Z grafu je vidět, jak dramatický vliv má změna velikosti prvků na výsledky. Pro jemnější síť (s menšími prvky) ze zmenšuje maximální sílu, kterou je vzorek schopen přenést, i plocha pod pracovním diagramem, která odpovídá celkové práci vnějších sil spotřebované na porušení vzorku. Je zřejmé, že nejde o obvyklé chování, kdy se při zjemňování sítě zmenšuje chyba a numerické výsledky konvergují k přesnému řešení. V našem případě dochází k patologické závislosti numerického řešení na použité síti, konkrétně na velikosti

<sup>6</sup> Je třeba si uvědomit, že pro beton a jiné výrazně heterogenní materiály vedou testy opakované za stejných podmínek ke značnému rozptylu výsledků, takže je lepší výsledek simulace neporovnávat s výsledkem jediného testu.

prvků v oblasti lokalizovaného poškození.

□

Výsledky právě předvedeného příkladu by neměly být velkým překvapením pro čtenáře, který si dobře promyslel předcházející příklady s tahovou zkouškou. Stejně jako při jednoosém tahu se i při ohybu nosníku s vrubem ukázalo, že poškození se lokalizuje do oblasti, jejíž šířka odpovídá velikosti použitého konečného prvku. Při simulaci tahové zkoušky pomocí jednorozměrného modelu stačilo k porušení celého vzorku, aby se úplně poškodil jeden prvek. V případě ohybové zkoušky simulované ve dvou rozměrech je k rozlomení vzorku na dvě části zapotřebí poškodit vrstvu prvků probíhající přes celou výšku oslabeného průřezu, ale šířka této vrstvy opět odpovídá jedinému prvku. Důsledky jsou podobné, dokonce ještě horší, protože při tahové zkoušce byla aspoň maximální síla přenášena vzorkem pro všechny sítě stejná, zatímco při ohybové zkoušce je i tento výsledek silně závislý na síti a tudíž zcela nespolehlivý. Mohlo by se snad zdát, že k lokalizaci došlo jen v důsledku přítomnosti vrubu, který se na reálných konstrukcích obvykle vyskytovat nebude. Následující příklad ukazuje, že problémy nastanou i při simulaci nosníku bez vrubu.



Obrázek 4.15: Simulace tříbodového ohybu nosníku bez vrubu: (a) nejhrubší síť konečných prvků, (b) globální pracovní diagram (závislost mezi silou a posunem) simulovaný na třech různých sítích.

#### Příklad 4.8: Simulace tříbodového ohybu nosníku bez vrubu

Nosník o stejných rozměrech jako v předcházejícím příkladu, ale tentokrát s hladkým spodním povrchem bez vrubu, byl opět prostě podepřen a zatížen osamělou silou uprostřed rozpětí. Numerická simulace testu byla provedena pomocí stejného materiálového modelu se stejnými parametry jako v předcházejícím příkladu. Nejhrubší použitá síť konečných prvků je znázorněna na obr. 4.15a. Ve střední části nosníku mají obdélníkové prvky šířku 15 mm. Výsledný pracovní diagram je na obr. 4.15b vynesena plnou čarou. V tomto testu se poškození nejprve rozvíjí v oblasti při spodním okraji nosníku, která obsahuje větší množství prvků. V blízkosti vrcholu pracovního diagramu však náhle dochází k lokalizaci poškození do jedné vrstvy uprostřed rozpětí, která se šíří směrem vzhůru. Jak je vidět z obr. 4.15b, simulace na jemnější síti s prvky o velikosti 5 mm vede ke snížení maximální síly a prudšímu sklonu sestupné části globálního pracovního diagramu. Pokud se velikost prvků dále zmenší na 1,67 mm, dojde poblíž vrcholu pracovního diagramu ke ztrátě konvergence při iteraci rovnováhy. Je to dáno tím, že rovnovážný pracovní diagram by vykazoval bod obratu, ale při simulaci bylo použito řízení posunem, které za tímto bodem selhává.

□

Z předvedených příkladů je zřejmé, že numerická simulace porušování konstrukcí z materiálů se změkčením by při použití tradičních postupů vedla k velmi nespolehlivým a v podstatě nepoužitelným výsledkům. Budeme se proto zabývat otázkou, jak tyto potíže odstranit.

Prvotní příčinou patologické citlivosti numerických výsledků k volbě sítě konečných prvků je skutečnost, že šířka simulované procesní zóny (zóny lokalizované nepružné deformace) neodpovídá skutečné šířce této zóny, která závisí na vnitřní charakteristické délce materiálu. Při simulaci se totiž nepružné účinky (např. poškození) lokalizují do jedné vrstvy prvků, takže šířka simulované zóny je určena velikostí použitých prvků a při zjemňování sítě se blíží k nule. Plocha pod lokálním pracovním diagramem (grafem závislosti mezi napětím a deformací) odpovídá práci vynaložené na úplné porušení jednotkového objemu materiálu. Tuto veličinu označíme  $g_f$  a pro daný materiálový model pro ni můžeme odvodit konkrétní vyjádření v závislosti na typu zákona změkčení a jeho parametrech.

#### Příklad 4.9: Určení $g_f$ pro model poškození

Ukážeme, jak vyjádřit práci vynaloženou na úplné porušení jednotkového objemu materiálu pro jednoduchý model izotropního poškození. Při jednoosém tahu a monotónním zatěžování je vztah mezi napětím a deformací popsán rovnicí

$$\sigma = s(\varepsilon) = [1 - g(\varepsilon)]E\varepsilon \quad (4.63)$$

kde  $g$  je funkce objevující se v zákonu poškození (4.14). Plochu  $g_f$  pod lokálním pracovním diagramem vypočteme jako integrál

$$g_f = \int_0^\infty s(\varepsilon) d\varepsilon = E \int_0^\infty [1 - g(\varepsilon)] \varepsilon d\varepsilon \quad (4.64)$$

Například pro model s lineárním změkčováním podle obr. 4.10a je plocha pod lokálním pracovním diagramem

$$g_f = \frac{1}{2} f_t \varepsilon_f = \frac{1}{2} E \varepsilon_0 \varepsilon_f \quad (4.65)$$

Pro model s exponenciálním změkčováním je funkce  $g$  dána předpisem (4.9) a funkce  $s$  předpisem (4.6), takže integrál v (4.64) je možno vyhodnotit jako

$$\begin{aligned} g_f &= \int_0^{\varepsilon_0} E\varepsilon d\varepsilon + \int_{\varepsilon_0}^\infty E\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_f}\right) d\varepsilon = \left[\frac{1}{2} E\varepsilon^2\right]_0^{\varepsilon_0} + \left[-E\varepsilon_0 \varepsilon_f \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_f}\right)\right]_{\varepsilon_0}^\infty = \\ &= \frac{1}{2} E\varepsilon_0^2 + E\varepsilon_0 \varepsilon_f = E\varepsilon_0 \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 + \varepsilon_f\right) \end{aligned} \quad (4.66)$$

□

Plocha pod globálním pracovním diagramem odpovídá disipované energii, tedy celkové práci vynaložené na porušení tělesa. V případě vysoce lokalizovaného typu porušení probíhá převážná část disipace v lokalizované zóně porušení a disipovaná energie je tudíž zhruba rovna součinu  $g_f$  a objemu této zóny. Problém je v tom, že při zjemňování sítě se objem simulované zóny lokalizovaného porušení zmenšuje a blíží k nule, takže při konstantním  $g_f$  se k nule blíží i celková disipovaná energie. Tato úvaha vysvětluje, proč při zjemňování sítě simulované těleso vykazuje stále křehčí chování, a zároveň motivuje dva postupy, kterými je možno zjednat nápravu.

Abychom úvahy co nejvíce zjednodušili, budeme se zabývat tahovou zkouškou na prutu konstantního průřezu. Budeme také předpokládat, že nepružné účinky jsou plně lokalizovány, tj. materiál se chová jako lineárně pružný až po vrchol pracovního diagramu a změkčování je soustředěno do zóny lokalizovaného porušení, jejíž šířku označíme  $L_p$  a pro pevně zvolený typ porušení (jednoosým tahem) ji můžeme považovat za vlastnost materiálu. Celková energie  $W_f$  disipovaná při testu (rovná celkové práci vnějších sil, tedy ploše pod globálním pracovním diagramem) je úměrná obsahu průřezové plochy  $A$ . Podíl  $W_f/A$  tedy závisí pouze na materiálu a představuje energii potřebnou k „rozlomení“ prutu o jednotkové průřezové ploše, je tedy zobecněním pojmu lomové energie, se kterým jsme se setkali už v lomové mechanice. Tam byla lomová energie prací spotřebovanou na rozšíření trhliny o jednotkovou plochu. V případě kvazikřehkých materiálů s rozvinutou procesní zónou se energie nedisipuje v jediné ostré trhlíně, ale v řadě mikrotrhlin koncentrovaných v procesní zóně, přičemž významnou roli může hrát i tření při rozvírání křivolakých trhlin a další disipační mechanismy. Nicméně pojem lomové energie budeme i v tomto zobecněném smyslu používat a zachováme i její označení symbolem  $G_f$ . Platí tedy  $G_f = W_f/A$  a lomovou energii  $G_f$  považujeme za vlastnost materiálu. Výhodou je to, že ji lze snáze měřit než skutečnou šířku lokalizované zóny  $L_p$ .

Zatím jsme hovořili pouze o skutečném (byť poněkud idealizovaném) průběhu testu. Při numerickém řešení se porušení také lokalizuje do určité zóny, její šířka  $L_s$  však odpovídá velikosti použitých konečných prvků, a proto je obecně jiná než skutečná fyzikální šířka  $L_p$ . Podle simulace tedy dochází k disipaci v objemu  $AL_s$  a jestliže pro zvolený materiálový model se zvolenými parametry je plocha pod lokálním pracovním diagramem pro jednoosý tah  $g_f$ , je celková disipace simulovaná výpočtem rovna  $AL_s g_f$ . Aby byla rovna skutečně disipované energii  $W_f = AG_f$ , musí zřejmě platit

$$L_s g_f = G_f \quad (4.67)$$

Přítom lomová energie  $G_f$  na pravé straně je považována za materiálovou vlastnost, tedy za danou konstantu. Na levé straně veličina  $g_f$  souvisí se zvoleným materiálovým modelem a  $L_s$  je šířka simulované zóny lokalizace. Jestliže podmínka (4.67) není splněna, plocha pod simulovaným globálním pracovním diagramem je jiná než pod skutečným a není tedy možné, aby se oba diagramy aspoň zhruba shodovaly. Při výpočtu metodou konečných prvků je  $L_s$  rovno velikosti prvku, kterou označíme  $h$ . Při zjemňování sítě se  $h$  zmenšuje, ale  $g_f$  se nemění, takže podmínka (4.67) může být splněna víceméně náhodou pro jistou konkrétní velikost prvku  $h = G_f/g_f$ , ale obecně splněna není.

#### Příklad 4.10: Odhad lomové energie materiálu

Pro lepší pochopení popisovaných souvislostí ukážeme, jak poznatků využít při odhadu lomové energie betonu, který použili ve svých testech Kormeling a Reinhardt (viz příklad 4.7). Mohli bychom samozřejmě určit práci  $W_f$  jako plochu pod naměřeným globálním pracovním diagramem a pak ji vydělit plochou oslabeného průřezu  $A = 100 \text{ mm} \times 50 \text{ mm} = 5000 \text{ mm}^2$ . V příkladu 4.7 jsme viděli, že pro prvky o šířce  $h = 5 \text{ mm}$  byl simulovaný pracovní diagram v dobré shodě s experimenty, takže zřejmě byla splněna podmínka (4.67). Veličina  $g_f$  přitom představuje plochu pod lokálním pracovním diagramem pro použitý materiálový model, kterým byl model poškození s exponenciálním změkčováním. Pro tento typ modelu jsme v příkladu 4.9 ukázali, že  $g_f$  je dáno vztahem (4.66). Při simulaci byly použity parametry  $E = 20 \text{ GPa}$ ,  $\varepsilon_0 = 120 \cdot 10^{-6}$  a  $\varepsilon_f = 7 \cdot 10^{-3}$ , takže po dosazení

dostaneme

$$g_f = E\varepsilon_0 \left( \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \varepsilon_f \right) = 20 \cdot 10^9 \times 120 \cdot 10^{-6} \left( \frac{1}{2}120 \cdot 10^{-6} + 7 \cdot 10^{-3} \right) \text{Nm}^{-2} = 16,944 \text{kJ/m}^3 \quad (4.68)$$

$$G_f = L_s g_f = h g_f = 5 \cdot 10^{-3} \times 16,944 \cdot 10^3 \text{J/m}^2 = 84,72 \text{J/m}^2 \quad (4.69)$$

Lomová energie je tedy zhruba  $85 \text{J/m}^2$ , což je pro beton běžná hodnota.

□

Při simulaci porušení nosníku s vrubem v příkladu 4.7 byla zřejmě podmínka (4.67) splněna pro  $L_s = h = 5 \text{mm}$ , ale pro menší  $h$  simulace nereprodukovala správně skutečnou disipaci energie a výsledkem bylo příliš křehké chování s menší plochou pod globálním pracovním diagramem a dokonce i menší hodnotou maximální síly. Při hledání nápravy nás napadne, že jsou v zásadě dvě možnosti, jak splnění podmínky (4.67) zabezpečit.

1. Pokud je šířka simulované zóny lokalizace  $L_s$  rovna velikosti prvku  $h$  a ta má být v zásadě libovolná, musíme **upravit  $g_f$  v závislosti na  $h$  tak, aby jejich součin byl nezávislý na velikosti prvku a odpovídal lomové energii daného materiálu**. Pak ale musíme připustit, že vztah mezi napětím a deformací (který určuje hodnotu  $g_f$ ) je ovlivněn velikostí prvku, nejde tedy o čistý popis materiálu.
2. Pokud chceme použít popis materiálu nezávislý na velikosti prvku (tedy na zvolené numerické metodě), je  $g_f$  pevně dáno, ale pak musíme zabezpečit, aby **šířka simulované zóny lokalizace  $L_s$  nezávisela na použité síti a v ideálním případě odpovídala skutečné šířce procesní zóny  $L_p$** .

První přístup vede k materiálovým modelům s parametry změkčení upravenými v závislosti na velikosti prvku, druhý přístup k tzv. regularizovaným materiálovým modelům, kterým se zde věnovat nebudeme.

### 4.3.2 Úprava materiálových parametrů v závislosti na velikosti prvku

Postup založený na úpravě materiálových parametrů v závislosti na velikosti prvku si nejlépe vysvětlíme na příkladu tahové zkoušky pro model s lineárním změkčením.

#### Příklad 4.11: Úprava parametru $\varepsilon_f$ pro model poškození s lineárním změkčením

V příkladu 4.5 jsme ukázali, že při lokalizaci změkčování do jediného prvku je sestupná větev globálního pracovního diagramu přímá a protne vodorovnou osu v bodě, který odpovídá posunu  $u_f = L_s \varepsilon_f = h \varepsilon_f = L \varepsilon_f / N$ , kde  $L_s$  je šířka simulované lokalizované zóny,  $h$  je velikost prvku a  $N$  je celkový počet prvků (předpokládali jsme rovnoměrné dělení, tedy stejnou velikost všech prvků). Maximální síla je  $F_0 = A f_t = E A \varepsilon_0$  a plocha omezená pracovním diagramem má tvar trojúhelníka o základně  $u_f$  a výšce  $F_0$ . Abychom simulaci reprodukovali skutečně disipovanou energii  $W_f$ , musí platit  $F_0 u_f / 2 = W_f$ , neboli

$$\frac{1}{2} A f_t \times h \varepsilon_f = W_f \quad (4.70)$$

Tahovou pevnost  $f_t$  měnit v závislosti na velikosti prvku nemůžeme, protože bychom tím změnili i velikost maximální síly  $F_0 = A f_t$ . Jediným materiálovým parametrem, jehož velikost můžeme upravovat podle velikosti prvku, je tedy  $\varepsilon_f$ . Z podmínky (4.70) dostaneme

$$\varepsilon_f = \frac{2W_f}{A f_t h} = \frac{2G_f}{f_t h} \quad (4.71)$$

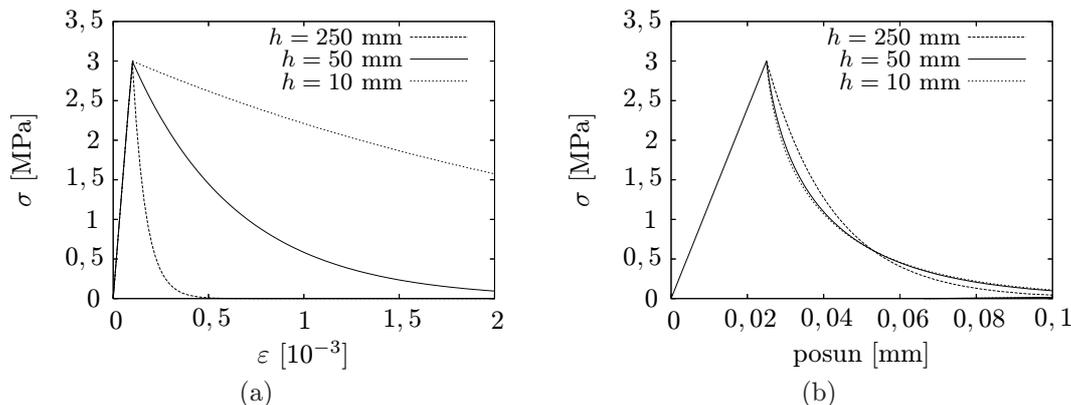
Pokud tedy připustíme, že  $\varepsilon_f$  není materiálová vlastnost, ale parametr nepřímo úměrný velikosti prvku  $h$ , zabezpečíme nezávislost simulované disipované energie na použité síti. V daném případě lineárního změkčení bude dokonce na síti nezávislý celý globální pracovní diagram, nejen plocha pod ním. Úprava parametru  $\varepsilon_f$  podle (4.71) znamená, že pro menší prvky použijeme materiálový model s pozvolnějším sklonem sestupné větve lokálního pracovního diagramu a naopak pro větší prvky model s příkřejším sklonem sestupné větve. Součin velikosti prvku  $h$  a plochy pod lokálním pracovním diagramem  $g_f = f_t \varepsilon_f / 2$  bude konstantní a bude roven lomové energii materiálu  $G_f$ , což přesně odpovídá obecné podmínce (4.67), pokud položíme  $L_s = h =$  velikost prvku. Vzorec (4.71) pro úpravu parametru  $\varepsilon_f$  jsme tedy mohli odvodit přímo ze (4.67).

□

Postup založený na jednoduché úpravě vhodného parametru lze použít i pro modely poškození s obecným nelineárním změkčením, ale ukazuje se, že zajistí pouze nezávislost celkové disipované energie na síti konečných prvků, ne však nezávislost tvaru sestupné části globálního pracovního diagramu.

#### Příklad 4.12: Úprava parametru $\varepsilon_f$ pro model poškození s exponenciálním změkčením

V příkladu 4.9 jsme pro model poškození s exponenciálním změkčením odvodili vzorec pro výpočet veličiny  $g_f$ , představující disipovanou energii na jednotku objemu. Hodnota  $g_f$  závisí na parametrech  $E$ ,  $\varepsilon_0$  a  $\varepsilon_f$  podle (4.66). Přitom modul pružnosti  $E$  měnit nemůžeme a parametr  $\varepsilon_0$ , který je roven podílu tahové pevnosti  $f_t$  a modulu



Obrázek 4.16: Model poškození s exponenciálním změkčením a úpravou parametru  $\varepsilon_f$  v závislosti na velikosti prvku podle (4.73): (a) lokální pracovní diagram pro různé velikosti prvku  $h$ , (b) globální pracovní diagram simulovaný na sítích s různými velikostmi prvků.

pružnosti  $E$ , také ne. Zbývá tedy možnost měnit parametr  $\varepsilon_f$ . Pro danou velikost prvku  $h$  a danou lomovou energii materiálu  $G_f$  určíme  $\varepsilon_f$  z podmínky (4.67), kterou lze v daném případě přepsat jako

$$hE\varepsilon_0 \left( \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \varepsilon_f \right) = G_f \quad (4.72)$$

odkud plyne

$$\varepsilon_f = \frac{G_f}{hE\varepsilon_0} - \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (4.73)$$

Pokud ale provedeme s využitím této úpravy parametru  $\varepsilon_f$  simulaci jednoosé tahové zkoušky na sítích s různými velikostmi prvků, zjistíme, že sestupná větev globálního pracovního diagramu není pro všechny sítě stejná, jako tomu bylo v případě lineárního změkčení. To je předvedeno na obr. 4.16 na příkladu simulace jednoosého tahu na vzorku o délce  $L = 250$  mm pro materiál s modulem pružnosti  $E = 30$  GPa, tahovou pevností  $f_t = 3$  MPa a lomovou energií  $G_f = 90$  J/m<sup>2</sup>. Uvažujeme tři různé velikosti prvku  $h = 250$  mm, 50 mm a 10 mm. Odpovídající hodnoty parametru  $\varepsilon_f$  podle (4.73) jsou  $0,07 \cdot 10^{-3}$ ,  $0,55 \cdot 10^{-3}$  a  $2,95 \cdot 10^{-3}$ , přičemž  $\varepsilon_0 = f_t/E = 0,1 \cdot 10^{-3}$ . Obr. 4.16a ukazuje, že pro velké prvky má změkčující část lokálního pracovního diagramu velmi příkrý sklon a pro malé prvky klesá pozvolněji. Provedeme-li simulace tahové zkoušky s jedním prvkem o velikosti 250 mm, pěti prvky o velikosti 50 mm nebo 25 prvky o velikosti 10 mm, dostaneme globální pracovní diagramy na obr. 4.16b. Plocha pod těmito diagramy je pro všechny sítě stejná, ale přesný tvar sestupné části pro nejhrubší „sít“ s jediným prvkem je poněkud jiný než pro síť s pěti prvky. Při dalším zjemňování se už výsledná křivka mění jen nepatrně.

□

Úprava podle (4.73) zabezpečuje pouze, že celková plocha pod globálním pracovním diagramem bude  $AG_f$ . Pro  $h$  blízké se k nule globální pracovní diagramy konvergují k rozumnému limitnímu tvaru, takže bychom tuto slabou závislost řešení na síti mohli akceptovat. Přesto je vhodné se nad tímto drobným nedostatkem zamyslet a pochopit jeho příčiny.

Klíčem k pochopení je rozklad deformace na pružnou a nepružnou část v podobném duchu jako v teorii plasticity. Tam jsme psali  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e$ , kde  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  byla pružná deformace a  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  plastická. V zásadě můžeme pro kterýkoli jiný model s lineárně pružným základem definovat pružnou deformaci jako deformaci vypočtenou z napětí podle invertovaného Hookeova zákona  $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{D}_e^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e \boldsymbol{\sigma}$  a rozdíl mezi celkovou a pružnou deformací označit za nepružnou deformaci. Pro model s poškozením nepružná deformace představuje příspěvek rozevření trhlin a označíme ji proto  $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ , kde index „c“ pochází z anglického termínu „cracking strain“. Podle definice tuto nepružnou část deformace můžeme vyjádřit jako

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C}_e \boldsymbol{\sigma} \quad (4.74)$$

a po dosazení výrazu pro napětí (4.19) dostaneme

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C}_e (1 - \omega) \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} - (1 - \omega) \boldsymbol{\varepsilon} = \omega \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.75)$$

Nepružná deformace je tedy pro tento typ modelu rovna celkové deformaci vynásobené parametrem poškození  $\omega$ . To nám mimo jiné poskytuje novou interpretaci parametru poškození jako poměru mezi nepružnou a celkovou deformací.

Pokud nyní provedeme rozklad deformace na pružnou a nepružnou část v případě jednoosé tahové zkoušky, nabídně se nový pohled na vliv velikosti konečných prvků. Předpokládáme opět, že nepružné účinky (poškození) jsou plně lokalizovány do jednoho prvku. Pružná část deformace se tedy projeví v celém prutu, zatímco nepružná část se objeví jenom v jediném prvkem. Jestliže určité úrovni napětí  $\sigma$  odpovídá pružná deformace  $\varepsilon_e = \sigma/E$  a

nepružná deformace  $\varepsilon_c$ , je celkové protažení prutu  $u = L\varepsilon_e + h\varepsilon_c$ , kde je jako obvykle  $L$  délka prutu a  $h$  velikost prvku. Aby protažení  $u$ , při kterém vznikne síla  $F = A\sigma$ , nezáviselo na síti, musí být lokální pracovní diagram pro různé velikosti prvků konstruován tak, aby pro každou pevně zvolenou úroveň napětí  $\sigma$  byl součin  $h\varepsilon_c$  nezávislý na velikosti prvku  $h$ . Jinými slovy, za základ můžeme vzít závislost mezi napětím  $\sigma$  a veličinou  $w_c = h\varepsilon_c$ . Jestliže  $\varepsilon_c$  je nepružná deformace vyjadřující vliv rozevření mikrotrhlin rovnoměrně rozetřený po lokalizované zóně o šířce  $h$ , pak  $w_c$  má názorný význam kumulativního účinku rozevření všech těchto mikrotrhlin soustředěného do jedné ekvivalentní trhliny. Takové trhlíně se říká *fiktivní trhlina*, protože nejde o skutečnou trhlinu ve smyslu lineární lomové mechaniky, ale o myšlenou trhlinu nahrazující zónu lokalizovaného poškození, nebo také *kohezivní trhlina*, protože na rozdíl od klasické trhliny přenáší nenulové napětí, vykazuje tedy jistou soudržnost (kohezi).

Při náhradě zóny lokalizovaného poškození myšlenou kohezivní trhlinou popíšeme postupné poškozování materiálu a ztrátu jeho soudržnosti takzvaným *zákonem koheze*, neboli vztahem mezi rozevřením trhliny  $w_c$  a kohezivním napětím přenášeným trhlinou  $\sigma$ . Obecně tento zákon zapíšeme jako

$$\sigma = f_w(w_c) \quad (4.76)$$

kde  $f_w$  je vhodná klesající funkce, jejíž hodnota se mění od  $f_t$  do nuly. Konkrétní podobu vztahu mezi napětím v kohezivní trhlíně a jejím rozevřením můžeme získat vhodným zpracováním výsledků jednoosé tahové zkoušky. Pro každou úroveň napětí můžeme na sestupné větvi odečíst celkové protažení  $u$  a potom od něj odečíst pružné protažení  $u_e = L\varepsilon_e = \sigma L/E$ . Rozdíl  $w_c = u - u_e$  představuje právě rozevření fiktivní trhliny odpovídající dané úrovni napětí  $\sigma$ .

Nejjednodušším příkladem zákona koheze je lineární závislost

$$\sigma = f_w(w_c) = \begin{cases} f_t \left(1 - \frac{w_c}{w_f}\right) & \text{pro } 0 \leq w_c \leq w_f \\ 0 & \text{pro } w_f \leq w_c \end{cases} \quad (4.77)$$

ve které  $w_f$  je parametr s rozměrem délky, představující tzv. kritické rozevření fiktivní trhliny, neboli rozevření, při kterém trhlina přestane přenášet napětí (a pak už jde skutečnou, nikoli fiktivní trhlinu). Plocha pod grafem zákona koheze odpovídá přímo lomové energii  $G_f$ . Pro lineární zákon koheze (4.77) je  $G_f = \frac{1}{2}f_t w_f$ . Pokud je tedy dána tahová pevnost  $f_t$  a lomová energie  $G_f$  jakožto vlastnosti materiálu, můžeme snadno vypočítat odpovídající kritické rozevření trhliny  $w_f = 2G_f/f_t$ .

Jestliže jako základní popis změkčování materiálu přijmeme zákon koheze, budou výsledky simulace tahové zkoušky s lokalizovanou zónou porušení naprosto stejné na všech sítích, protože v sestupné části výsledného globálního pracovního diagramu bude síle  $F$  odpovídat posun  $u = L\varepsilon_e + h\varepsilon_c = L\sigma/E + w_c$ , kde  $\sigma = F/A$  a  $w_c$  je rozevření fiktivní trhliny vypočtené pro dané napětí  $\sigma$  tak, aby platilo (4.76). Označíme-li symbolem  $f_w^{-1}$  funkci inverzní k funkci  $f_w$ , můžeme dále psát  $u = L\sigma/E + f_w^{-1}(\sigma) = LF/EA + f_w^{-1}(F/A)$ . V tomto vztahu mezi posunem  $u$  a silou  $F$  se vyskytují jen geometrické parametry  $L$  a  $A$  a materiálové konstanty, zahrnující modul pružnosti  $E$  a parametry zákona koheze (4.76), které určují funkci  $f_w^{-1}$ . Závislost na velikosti prvku  $h$  tedy zcela zmizí.

Existují výpočetní postupy pracující přímo s kohezivní trhlinou jakožto nespojitostí v poli posunutí, které představují nelineární rozšíření lomové mechaniky. Klasické aproximace metodou konečných prvků ale pracují se spojitými posuny a místo kohezivní trhliny je poškození soustředěno do vrstvy poškozujících se prvků o šířce  $h$ . Aby tyto dva postupy vedly ke stejným výsledkům (aspoň v nejjednodušším případě jednoosého tahu), musí být rozevření fiktivní trhliny  $w_c$  převedeno na odpovídající nepružnou deformaci  $\varepsilon_c = w_c/h$ . Tento přechod je přímočarý, pokud použijeme pružnoplastický model se změkčením, protože roli nepružné deformace  $\varepsilon_c$  pak hraje plastická deformace  $\varepsilon_p$  a po dosazení  $w_c = h\varepsilon_p$  a  $\sigma = \sigma_Y$  do (4.76) dostaneme v zásadě zákon plastického změkčení. Pokud ale dáváme přednost modelu poškození, hraje roli nepružné deformace  $\varepsilon_c$  součin parametru poškození a celkové deformace. Převod zákona koheze (4.76) na zákon poškození je pak poněkud obtížnější.

Rozevření trhliny  $w_c$  dělené délkou prvku  $h$  odpovídá nepružné deformaci  $\varepsilon_c = w\varepsilon$  a napětí při jednoosém tahu vyjádříme podle modelu poškození jako  $\sigma = (1 - \omega)E\varepsilon$ . Aby model poškození vedl při jednoosém tahu ke stejným výsledkům jako model s kohezivní trhlinou, musí být po dosazení  $w_c = h\varepsilon_c = h\omega\varepsilon$  splněna rovnice (4.76), musí tedy být

$$(1 - \omega)E\varepsilon = f_w(h\omega\varepsilon) \quad (4.78)$$

Pro daný tvar funkce  $f_w$  a danou deformaci  $\varepsilon$  můžeme řešením této rovnice vypočítat odpovídající poškození  $\omega$ . Výsledek přitom závisí mimo jiné na velikosti prvku  $h$ . Závislost  $\omega$  na  $\varepsilon$  při monotónním zatěžování jednoosým tahem pak odpovídá zákonu poškození  $\omega = g(\varepsilon)$ , který pro obecné případy zatěžování zapíšeme jako  $\omega = g(\kappa)$ .

#### Příklad 4.13: Zákon poškození odpovídající kohezivní trhlíně s lineárním změkčením

Pro kohezivní trhlinu s lineárním změkčením podle (4.77) je funkce  $f_w$  na pravé straně (4.78) lineární (aspoň po částech) a pro příslušný zákon poškození můžeme odvodit analytické vyjádření. Dosadíme-li za  $f_w$  výraz platný pro  $w_c \leq w_f$ , můžeme rovnici (4.78) přepsat jako

$$(1 - \omega)E\varepsilon = f_t \left(1 - \frac{h\omega\varepsilon}{w_f}\right) \quad (4.79)$$

Zavedeme-li parametr  $\varepsilon_0 = f_t/E$ , můžeme z této rovnice vypočítat poškození

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{w_f - h\varepsilon}{w_f - h\varepsilon_0} \quad (4.80)$$

Pro  $\varepsilon < \varepsilon_0$  bychom dostali zápornou hodnotu poškození, která nedává fyzikální smysl, a pro  $\varepsilon > w_f/h$  bychom dostali hodnotu poškození větší než 1. Pro  $\varepsilon = w_f/h$  dostáváme  $\omega = 1$ , tedy úplné poškození. Proto můžeme podíl  $w_f/h$  označit jako  $\varepsilon_f$  a výsledný zákon poškození můžeme upravit na tvar

$$\omega = g(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{h\varepsilon_f - h\varepsilon}{h\varepsilon_f - h\varepsilon_0} = 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_f - \varepsilon}{\varepsilon_f - \varepsilon_0} \quad (4.81)$$

Dochází tedy přesně k tomu, co jsme pro model poškození s lineárním změkčením odvodili na základě požadavku, aby disipovaná energie na jednotku objemu vynásobená velikostí prvku byla rovna lomové energii. Parametr  $\varepsilon_f$  je třeba měnit nepřímo úměrně velikosti prvku. Součin  $h\varepsilon_f$  je možno považovat za materiálovou konstantu a z provedených úvah vyplývá její fyzikální význam — jde o kritické rozevření fiktivní trhliny.

□

#### Příklad 4.14: Zákon poškození odpovídající kohezivní trhlíně s nelineárním změkčením

Pokud je zákon koheze (4.76) nelineární, není analytické odvození odpovídajícího zákona poškození obvykle možné. Jako příklad uvedeme kohezivní trhlínu s exponenciálním zákonem změkčení

$$\sigma = f_w(w_c) = f_t \exp\left(-\frac{w_c}{w_f}\right) \quad (4.82)$$

Parametr  $w_f$  má stále rozměr délky a určuje jistou charakteristickou hodnotu rozevření fiktivní trhliny, ale v případě exponenciálního zákona není při rozevření  $w_c = w_f$  kohezivní napětí nulové, nýbrž je rovno 1/e-násobku tahové pevnosti  $f_t$ . Po dosazení do (4.78) dostaneme pro výpočet poškození rovnici

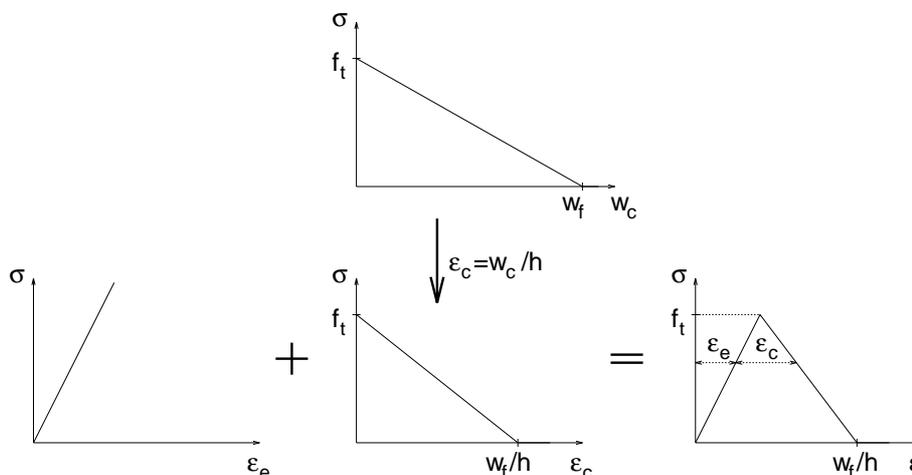
$$(1 - \omega)E\varepsilon = f_t \exp\left(-\frac{h\omega\varepsilon}{w_f}\right) \quad (4.83)$$

kteou můžeme s označením  $\varepsilon_0 = f_t/E$  přepsat jako

$$\omega + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{h\omega\varepsilon}{w_f}\right) = 1 \quad (4.84)$$

Analytické vyjádření  $\omega$  v závislosti na  $\varepsilon$  sice najít nelze, ale pro každé  $\varepsilon \geq \varepsilon_0$  můžeme odpovídající  $\omega$  vypočítat z rovnice (4.84) numericky, např. Newtonovou metodou tečen. Výsledek pochopitelně závisí také na velikosti prvku  $h$ . Tím je dán implicitní popis zákona poškození  $\omega = g(\varepsilon)$  s uvážením vlivu velikosti prvku. Pokud tímto způsobem postupujeme při numerické simulaci, bude výsledný globální pracovní diagram v jednoosém tahu zcela nezávislý na velikosti použitého prvku.

□

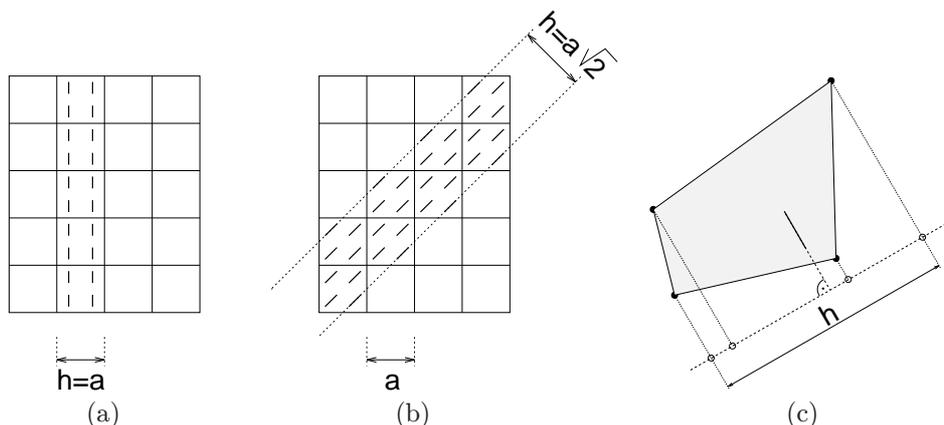


Obrázek 4.17: Odvození lokálního pracovního diagramu ze zákona koheze.

Princip postupu založeného na ekvivalenci mezi fiktivní trhlínou a vrstvou poškozujícího se materiálu o šířce  $h$  je ilustrován na obr. 4.17. Deformaci materiálu rozložíme na pružnou a nepružnou, přičemž pružná deformace  $\varepsilon_e$  je s napětím  $\sigma$  svázána Hookeovým zákonem a nepružná deformace  $\varepsilon_c$  s napětím souvisí prostřednictvím jistého

zákona změkčení, který je odvozen transformací zákona koheze popisujícího fiktivní trhlinu. Při transformaci mezi těmito zákony nahrazujeme rozevření fiktivní trhliny  $w_c$  součinem nepružné deformace  $\varepsilon_c$  a šířky vrstvy  $h$ , do které je nepružná deformace lokalizována. Ve výsledném lokálním pracovním diagramu je tedy vzestupná část dána Hookeovým zákonem a nezávisí na velikosti prvku, zatímco sestupná část na velikosti prvku závisí a pro malé prvky je méně strmá. Plocha pod lokálním pracovním diagramem  $g_f$  je nepřímo úměrná velikosti prvku  $h$  a její součin s velikostí prvku je roven lomové energii materiálu  $G_f$ .

Veškeré dosavadní úvahy jsme provedli za předpokladu, že až do okamžiku lokalizace se materiál chová lineárně pružně, jinými slovy, že lokalizace nastává okamžitě po dosažení mezního elastického stavu. To však obecně nemusí být pravda. V obecném případě by bylo třeba místo rozkladu deformace na pružnou a nepružnou použít rozklad na část „před lokalizací“ a část „po lokalizaci“. Přesné určení okamžiku lokalizace ale není snadné, protože se nemusí vždy shodovat s dosažením vrcholu pracovního diagramu.



Obrázek 4.18: (a) Zóna lokalizovaného poškození rovnoběžná se stranami prvků, (b) zóna lokalizovaného poškození v diagonálním směru, (c) odhad šířky této zóny pomocí průmětu prvku do směru kolmého na trhlinu.

Při výkladu základní myšlenky jsme se soustředili na jednoduchý případ jednoosého tahu modelovaného jednorozměrnými prvky, takže pojem „velikost prvku“ měl jednoznačný význam. V praktických výpočtech je samozřejmě třeba pracovat s dvou- nebo i třírozměrnými prvky. Šířka  $h$  simulované zóny lokalizace pak obecně závisí nejen na rozměrech prvků, ale také na směru této zóny vzhledem k síti konečných prvků. Při simulaci se zóna poškození obvykle lokalizuje do nejmenší možné skupiny prvků, která ještě umožňuje rozpad tělesa na dvě části. Na pravidelné síti složené ze čtvercových prvků o straně  $a$  dochází při šíření zóny poškození ve směru rovnoběžném se stranami prvků k lokalizaci do jedné vrstvy prvků o šířce  $h = a$  (obr. 4.18a), ale při šíření v diagonálním směru k lokalizaci do zubatého pásu o průměrné šířce  $h = \sqrt{2}a$  (obr. 4.18b). Při výpočtu však s určením  $h$  není možno čekat, až se vytvoří kompletní lokalizovaná zóna, protože tento parametr je potřebný při konstrukci zákona poškození pro jednotlivé prvky a tudíž při výpočtu napětí, a to už od začátku změkčování. Na nepravidelné síti a v případech, kdy směr lokalizované zóny není předem znám, je proto potřeba sestrojít vhodný odhad  $h$ , nejlépe s využitím pouze lokálních informací, které jsou k dispozici na úrovni jednoho prvku. Jako odhad lze použít délku průmětu prvku do směru kolmého na směr očekávaných trhlin, tedy např. do směru největší hlavní deformace, viz obr. 4.18c.



## Dodatek A

# Lineární diferenciální rovnice

V tomto dodatku stručně připomeneme některé užitečné poznatky o diferenciálních rovnicích, s nimiž se již čtenář nepochybně setkal v kurzech matematiky. Pro naše účely postačí, když se omezíme na obyčejné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Začneme jednoduchou *homogenní rovnicí* prvního řádu ve tvaru

$$a_1 u'(x) + a_0 u(x) = 0 \quad (\text{A.1})$$

kde  $a_0$  a  $a_1$  jsou dané konstanty a  $u$  je neznámá funkce, kterou máme najít. Tuto funkci můžeme hledat ve tvaru

$$u(x) = e^{\lambda x} \quad (\text{A.2})$$

kde  $\lambda$  je zatím neurčená konstanta. Po dosazení takového předpokládaného řešení do (A.1) a vytknutí  $e^{\lambda x}$  za závorku dostaneme podmínku

$$(a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} = 0 \quad (\text{A.3})$$

kteřá je splněna pro všechna reálná čísla  $x$  právě tehdy, když platí

$$a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (\text{A.4})$$

Z této tzv. *charakteristické rovnice* vypočteme konstantu

$$\lambda = -\frac{a_0}{a_1} \quad (\text{A.5})$$

Funkce  $u(x) = e^{-a_0 x/a_1}$  je pak řešením rovnice (A.1). Zároveň je ale řešením i její libovolný násobek. Obecné řešení má proto tvar

$$u(x) = c e^{-a_0 x/a_1} \quad (\text{A.6})$$

kde  $c$  je libovolná konstanta.

Ukázalo se, že diferenciální rovnice (A.1) má nekonečně mnoho řešení. Taková rovnice může popisovat určitý fyzikální jev, ale sama o sobě nestačí k jednoznačnému určení příslušného řešení. Součástí reálných úloh bývají ještě podmínky, specifikující hodnoty řešení v některých významných bodech. Pokud má nezávisle proměnná  $x$  fyzikální význam času, pak jde obvykle o *počáteční podmínky*, udávající hodnotu hledané funkce (případně pro rovnice vyšších řádů i jejích derivací) na počátku zkoumaného procesu, tedy např. v bodě  $x = x_0$ . Pokud je  $x$  prostorovou proměnnou, hledá se obvykle řešení na jistém konečném intervalu a na obou koncích tohoto intervalu mohou být předepsány *okrajové podmínky*. Aby úloha měla jednoznačné řešení, musí celkový počet podmínek odpovídat počtu neurčených konstant, které se objeví v obecném řešení. Jak uvidíme později, tento počet odpovídá řádu výchozí diferenciální rovnice, tj. řádu nejvyšší derivace, která se v této rovnici vyskytuje. V případě rovnice 1. řádu (A.1) obsahuje obecné řešení (A.6) jednu konstantu  $c$ , a proto je zapotřebí předepsat jednu počáteční podmínku ve tvaru

$$u(x_0) = u_0 \quad (\text{A.7})$$

kde  $u_0$  je daná hodnota. Po dosazení obecného řešení (A.6) do počáteční podmínky (A.7) získáme rovnici

$$c e^{-a_0 x_0/a_1} = u_0 \quad (\text{A.8})$$

ze které vypočteme konstantu

$$c = u_0 e^{a_0 x_0/a_1} \quad (\text{A.9})$$

a po zpětném dosazení do (A.6) dospějeme k výslednému řešení diferenciální rovnice (A.1) s počáteční podmínkou (A.7) ve tvaru

$$u(x) = u_0 e^{a_0 x_0/a_1} e^{-a_0 x/a_1} = u_0 e^{-a_0(x-x_0)/a_1} \quad (\text{A.10})$$

Zatím jsme se zabývali homogenní rovnicí (A.1) s nulovou pravou stranou. Pokud se na pravé straně objeví daná nenulová funkce  $f$ , jde o *nehomogenní rovnici*

$$a_1 u'(x) + a_0 u(x) = f(x) \quad (\text{A.11})$$

Taková rovnice má opět nekonečně mnoho řešení, ale rozdíl libovolných dvou řešení je řešením příslušné homogenní rovnice (A.1). Z toho plyne, že obecné řešení nehomogenní rovnice (A.11) lze zapsat jako součet jednoho jejího (libovolně vybraného) řešení a obecného řešení příslušné homogenní rovnice. Stačí tedy najít jakékoliv řešení  $\bar{u}$  rovnice (A.11) a její obecné řešení pak lze zapsat jako

$$u(x) = \bar{u}(x) + c e^{-a_0 x/a_1} \quad (\text{A.12})$$

kde  $c$  je opět libovolná konstanta. Dosazením (A.12) do počáteční podmínky (A.7) získáme rovnici

$$\bar{u}(x_0) + c e^{-a_0 x_0/a_1} = u_0 \quad (\text{A.13})$$

ze které vypočteme konstantu

$$c = [u_0 - \bar{u}(x_0)] e^{a_0 x_0/a_1} \quad (\text{A.14})$$

a po zpětném dosazení do (A.12) dospějeme k řešení nehomogenní diferenciální rovnice (A.11) s počáteční podmínkou (A.7) ve tvaru

$$u(x) = \bar{u}(x) + [u_0 - \bar{u}(x_0)] e^{a_0 x_0/a_1} e^{-a_0 x/a_1} = \bar{u}(x) + [u_0 - \bar{u}(x_0)] e^{-a_0(x-x_0)/a_1} \quad (\text{A.15})$$

Celý postup lze zobecnit i na rovnice vyšších řádů. Například pro homogenní rovnici druhého řádu

$$a_2 u''(x) + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = 0 \quad (\text{A.16})$$

s danými koeficienty  $a_0$ ,  $a_1$  a  $a_2$  získáme po dosazení předpokládaného řešení ve tvaru (A.2) charakteristickou rovnici

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (\text{A.17})$$

Tentokrát jde o kvadratickou rovnici, která má dva kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} \quad (\text{A.18})$$

Pokud je diskriminant  $a_1^2 - 4a_2 a_0$  kladný, jsou oba kořeny reálné a obecné řešení homogenní rovnice (A.16) zapíšeme jako

$$u(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (\text{A.19})$$

kde  $c_1$  a  $c_2$  jsou konstanty, které určíme např. z počátečních podmínek

$$u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = v_0 \quad (\text{A.20})$$

Po dosazení podle (A.19) získáme soustavu dvou lineárních algebraických rovnic, ze které lze vypočítat  $c_1$  a  $c_2$ . Pokud je ovšem diskriminant  $a_1^2 - 4a_2 a_0$  záporný, má charakteristická rovnice (A.17) dva komplexně sdružené kořeny, které můžeme zapsat jako

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm i \frac{\sqrt{4a_2 a_0 - a_1^2}}{2a_2} = \alpha \pm i\omega \quad (\text{A.21})$$

kde  $i$  je imaginární jednotka ( $i = \sqrt{-1}$ ) a pro jednoduchost jsme zavedli označení

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4a_2 a_0 - a_1^2}}{2a_2} \quad (\text{A.22})$$

Lze ukázat, že v takovém případě má obecné řešení rovnice (A.16) tvar

$$u(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) \quad (\text{A.23})$$

Konstanty  $c_1$  a  $c_2$  se určí známým způsobem z počátečních podmínek.

Místo počátečních podmínek by pro rovnici 2. řádu mohly být předepsány okrajové podmínky, např. ve tvaru  $u(a) = u_a$  a  $u(b) = u_b$ , kde  $a$  a  $b$  jsou krajní body intervalu, na kterém hledáme řešení, a  $u_a$  a  $u_b$  jsou předepsané hodnoty.

Přechod k nehomogenní rovnici 2. řádu

$$a_2 u''(x) + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = f(x) \quad (\text{A.24})$$

je velmi jednoduchý, její obecné řešení se zapíše jako jedno partikulární řešení plus obecné řešení (A.19) nebo (A.23) příslušné homogenní rovnice (A.16) a konstanty  $c_1$  a  $c_2$  se opět určí z počátečních nebo okrajových podmínek.

S rovnicemi vyššího řádu než druhého se v tomto skriptu nesetkáme, nicméně pro úplnost poznamenejme, že pro homogenní diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu

$$a_n u^{(n)}(x) + a_{n-1} u^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 u''(x) + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = 0 \quad (\text{A.25})$$

by měla charakteristická rovnice tvar

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (\text{A.26})$$

a šlo by o algebraickou rovnici  $n$ -tého stupně. Pokud by měla  $n$  různých reálných kořenů  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , zapsali bychom obecné řešení diferenciální rovnice (A.25) jako

$$u(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \quad (\text{A.27})$$

a konstanty  $c_1$  až  $c_n$  bychom určili z  $n$  počátečních podmínek, nebo v případě rovnice sudého řádu z okrajových podmínek, přičemž v každém ze dvou okrajových bodů  $a$  a  $b$  by těchto podmínek bylo předeepsáno  $n/2$ . Obvyklým způsobem bychom pak mohli výsledky rozšířit i na nehomogenní rovnice.

Mohlo by se samozřejmě stát, že charakteristická rovnice (A.26) má komplexně sdružené kořeny, případně že jsou některé kořeny vícenásobné. Pro komplexně sdružené kořeny tvaru  $\alpha_k + i\omega_k$  by se v obecném řešení (A.27) objevily členy  $e^{\alpha_k x} (c_{2k-1} \cos \omega_k x + c_{2k} \sin \omega_k x)$ , pro  $p$ -násobný reálný kořen  $\lambda_k$  by šlo o členy  $e^{\lambda_k x} (c_k + c_{k+1} x + \dots + c_{k+p-1} x^{p-1})$ . Podrobnější vysvětlení lze nalézt v učebnicích matematiky.



## Dodatek B

# Základní pojmy a vztahy lineární teorie pružnosti

V tomto dodatku jsou připomenuty základy lineární teorie pružnosti, s nimiž se čtenář nejspíš již seznámil v předmětu Pružnost a pevnost. Kromě shrnutí elementárních poznatků dodatek obsahuje i určité prohloubení, zejména pokud jde o rozklad deformace a napětí na objemovou a deviatorickou část a s ním spojený maticový formalismus.

### B.1 Zobecněný Hookeův zákon

V obecně zatíženém trojrozměrném tělese popisujeme napjatost pomocí šesti nezávislých složek napětí, mezi něž patří tři normálové složky  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  a  $\sigma_z$  a tři smykové složky, např.  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  a  $\tau_{yz}$ . Existují sice také složky označené  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}$  a  $\tau_{zy}$ , ale ty jsou podle věty o vzájemnosti smykových napětí rovny již uvedeným složkám, konkrétně platí  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  a  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ . Proto budeme pracovat jen se šesti nezávislými složkami a uspořádáme je do sloupcové matice

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Podobně je přetvoření elementárního (nekonečně malého) kvádrů charakterizováno šesti složkami deformace, mezi něž patří tři normálové složky (relativní protažení)  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  a  $\varepsilon_z$  a tři smykové složky (smyková zkosení)  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  a  $\gamma_{yz}$ . Složky deformace uspořádáme do sloupcové matice

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Všimněte si, že řazení složek napětí a deformace si navzájem odpovídá, takže skalární součin

$$\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \quad (\text{B.3})$$

má význam práce vykonané složkami napětí na odpovídajících složkách deformace.

V lineární teorii pružnosti je vztah mezi napětím a deformací lineární a pro izotropní materiál stačí znát dvě materiálové konstanty — *Youngův modul pružnosti*  $E$  a *Poissonův součinitel*  $\nu$ . Z nich pak lze vypočítat *modul pružnosti ve smyku*

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{B.4})$$

Vztah mezi napětím a deformací se nejlépe pamatuje v podobě vzorců pro výpočet složek deformace ze známých složek napětí. Jak známo, při jednoosé napjatosti platí Hookeův zákon  $\boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{\varepsilon}$ , kde napětí a deformace jsou charakterizovány normálovými složkami ve směru působícího zatížení. Jestliže tedy na materiál působí pouze napětí  $\sigma_x$ , odpovídající deformace  $\varepsilon_x$  se vypočte jako  $\varepsilon_x = \sigma_x/E$ . Zbývající normálové složky deformace nejsou nulové, ale v důsledku příčné kontrakce budou mít opačné znaménko a jejich velikost bude  $\nu$ -násobkem podélné deformace, tj.  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\sigma_x/E$ . Při obecné napjatosti je ale třeba vzít v úvahu také normálová napětí  $\sigma_y$  a  $\sigma_z$ . Příslušné příspěvky se snadno odvodí na základě analogie, protože pro izotropní materiál je např. vliv

$\sigma_y$  na  $\varepsilon_x$  stejný jako vliv  $\sigma_x$  na  $\varepsilon_y$ , jeho příspěvek k  $\varepsilon_x$  tedy bude  $-\nu\sigma_y/E$ . Sečtením všech příspěvků získáme vztahy pro výpočet normálových složek deformace

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \quad (\text{B.5})$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z) \quad (\text{B.6})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z) \quad (\text{B.7})$$

V případě izotropního materiálu je každé ze smykových napětí úměrné odpovídající smykové deformaci a konstantou úměrnosti je smykový modul pružnosti  $G$ . Vztahy pro smykové deformace tedy zapíšeme jako

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \quad (\text{B.8})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz} \quad (\text{B.9})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \quad (\text{B.10})$$

Rovnice (B.5)–(B.10) můžeme přepsat do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

a kompaktně je zapsat jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_e \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.12})$$

kde  $\mathbf{C}_e$  je *matice pružné poddajnosti* materiálu. Je to čtvercová symetrická matice, jejíž podoba je zřejmá ze vztahu (B.11). Prvky matice  $\mathbf{C}_e$  závisí na materiálových konstantách  $E$  a  $\nu$  a jelikož jsou nepřímou úměrné modulu pružnosti  $E$ , vyjadřují poddajnost materiálu; odtud tedy název této matice. Inverzí vztahu (B.12) získáme *zobecněný Hookeův zákon*, neboli vyjádření napětí pomocí deformace ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{C}_e)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{B.13})$$

kde

$$\mathbf{D}_e = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

je *matice pružné tuhosti* materiálu, která je inverzní k matici pružné poddajnosti.

## B.2 Hlavní napětí a deformace

Konkrétní hodnoty složek napětí závisí nejen na samotné napjatosti v daném bodě, ale také na volbě soustavy souřadnic, vůči které je vyjadřujeme. Při otáčení soustavy souřadnic se mění i hodnoty jednotlivých složek napětí, přitom však materiál zůstává stále ve stejném stavu. Proto hrají důležitou roli tzv. invarianty napětí, což jsou vhodně definované veličiny, které mají vůči libovolné soustavě souřadnic stejnou hodnotu. Příkladem takového invariantu je třeba *střední napětí*

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (\text{B.15})$$

kteří popisuje hydrostatickou část daného stavu napětí. Jinými invarianty jsou *hlavní napětí*  $\sigma_1, \sigma_2$  a  $\sigma_3$ , která se vypočtou jako kořeny charakteristické rovnice

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.16})$$

Po rozepsání determinantu zjistíme, že jde o kubickou rovnici, která má vždy tři kořeny  $\sigma_I, I = 1, 2, 3$ . V některých případech existují jen dva různé kořeny nebo dokonce jen jeden, ale to znamená, že se jedná o kořeny

vícenásobné a dvě nebo všechna tři hlavní napětí mají stejnou hodnotu. Například pro jednoosý tah nebo tlak je při vhodné volbě soustavy souřadnic jedinou nenulovou složkou napětí  $\sigma_x$ , takže charakteristická rovnice (B.16) nabývá tvaru

$$(\sigma_x - \sigma) \sigma^2 = 0 \quad (\text{B.17})$$

a má jednoduchý kořen  $\sigma_x$  a dvojnásobný kořen 0. Odpovídající hlavní napětí jsou proto  $\sigma_1 = \sigma_x$ ,  $\sigma_2 = 0$  a  $\sigma_3 = 0$ . Pro hydrostatický tlak je  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_m < 0$  a smykové složky napětí jsou nulové, takže charakteristická rovnice (B.16) nabývá tvaru

$$(\sigma_m - \sigma)^3 = 0 \quad (\text{B.18})$$

a má trojnásobný kořen  $\sigma_m$ . V tomto případě jsou všechna hlavní napětí stejná a máme  $\sigma_1 = \sigma_m$ ,  $\sigma_2 = \sigma_m$  a  $\sigma_3 = \sigma_m$ .

Hlavní napětí se často řadí podle velikosti tak, aby platilo  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , ale tuto konvenci někdy není výhodné dodržovat, takže žádné zvláštní uspořádání nebudeme předpokládat. Například při rovinné napjatosti v rovině  $xy$  jsou nenulové pouze složky napětí  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  a  $\tau_{xy}$ , takže charakteristická rovnice (B.16) má tvar

$$[\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2]\sigma = 0 \quad (\text{B.19})$$

a její kořeny jsou

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \sigma_3 = 0 \quad (\text{B.20})$$

Zde je tedy výhodné označit  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  hlavní napětí v rovině  $xy$  a  $\sigma_3$  hlavní napětí kolmé na tuto rovinu, bez ohledu na to, které hlavní napětí je nejmenší. Největší a nejmenší hlavní napětí ale hrají významnou roli, a proto pro ně zavedeme označení  $\sigma_{\max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  a  $\sigma_{\min} = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Zbývající hlavní napětí nazýváme *prostřední* (pozor—nezaměňovat se *středním* napětím  $\sigma_m$ ).

Podobně jako hlavní napětí můžeme definovat *hlavní deformace*  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  a  $\varepsilon_3$ , ovšem s tím rozdílem, že v charakteristické rovnici

$$\det \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.21})$$

se místo smykových zkosení  $\gamma$  objeví jejich poloviny, které představují tzv. tenzorové složky smykové deformace. Podrobnější zdůvodnění lze nalézt v učebnicích teorie pružnosti pracujících s tenzorovým zápisem. Z matematického hlediska totiž nemá deformace ani napětí charakter klasického vektoru, ale tzv. tenzoru druhého řádu.

Vzhledem k tenzorovému charakteru napětí a deformace je třeba jisté obezřetnosti i při výpočtu jejich norem. Pro obvyklé vektory v geometrickém smyslu, např. pro polohový vektor  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}^T$ , se používá obvyklá euklidovská norma  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , která vyjadřuje vzdálenost koncového bodu tohoto vektoru od počátku. Takto vypočtená vzdálenost nezávisí na konkrétní volbě orientace souřadnicových os, takže je invariantem. Norma napětí by se obdobným způsobem vypočetla z hlavních napětí  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$ . Pokud ji však chceme zapsat pomocí složek napětí vzhledem k obecně zvolené soustavě souřadnic, podrobný matematický rozbor ukazuje, že druhé mocniny smykových složek musíme vynásobit dvěma. Norma napětí se tedy vypočte jako

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2} \quad (\text{B.22})$$

což lze maticově přepsat jako

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{B.23})$$

kde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

je diagonální matice o šesti řádcích a šesti sloupcích, která má na prvních třech diagonálních pozicích jedničky a na zbývajících třech dvojky. S touto maticí se ještě setkáme v dalších souvislostech, a proto bude užitečné pro ni zavést název *škálovací matice*.<sup>1</sup> Potřebnost faktorů „2“ u druhých mocnin smykových napětí je možné ověřit např. tak, že za předpokladu rovinné napjatosti dosadíme do výrazu  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$  za hlavní napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  jejich vyjádření pomocí složek  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  a  $\tau_{xy}$  dané vzorcem (B.20).

<sup>1</sup> „Škálováním“ zde rozumíme změnu měřítka. Po vynásobení maticí  $\mathbf{P}$  zůstanou normálové složky beze změny a smykové složky se zdvojnásobí, což si lze představit jako jistou změnu měřítka pro smykové složky.

Při výpočtu normy deformace se postupuje obdobně, ale tentokrát je druhé mocniny smykových složek potřeba **vydělit** dvěma, takže příslušný vzorec lze zapsat jako

$$\|\varepsilon\|_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xz}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{yz}^2} = \sqrt{\varepsilon^T \mathbf{P}^{-1} \varepsilon} \quad (\text{B.25})$$

kde

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

je *inverzní škálovací matice*.

### B.3 Rozklad na hydrostatickou a deviatorickou část

Hydrostatická napjatost je zvláštním stavem, při kterém je normálové napětí v libovolném směru stejné a smykové složky napětí jsou nulové (při libovolné volbě souřadnicových os). Tento stav odpovídá napjatosti v kapalině, která není schopna přenášet smyková napětí, odtud tedy přívlastek „hydrostatická“. V kapalině samozřejmě vzniká hydrostatický tlak, ale pevné látky jsou v zásadě schopny přenášet i hydrostatický tah. Za hydrostatické napjatosti dochází v izotropním materiálu pouze k normálovým deformacím, zatímco smykové deformace jsou nulové. Navíc mají normálové deformace ve všech směrech stejnou hodnotu. To vše lze snadno odvodit z rovnic (B.5)–(B.10), dosadíme-li  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_m$  a  $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Relativní protažení v libovolném směru je pak

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_m \quad (\text{B.27})$$

Myšlená vlákna materiálu se v libovolném směru protahují (nebo pro  $\sigma_m < 0$  zkracují) stejným způsobem a úhly mezi vlákny různých směrů zůstávají zachovány. Proto se např. krychle transformuje opět na krychli, nebo koule na kouli, jen se jejich rozměry zvětšují (pro  $\sigma_m > 0$ ) nebo zmenšují (pro  $\sigma_m < 0$ ). Při hydrostatické napjatosti tedy nedochází ke změně tvaru, ale pouze ke změně objemu.

Věnujme se opět obecné (ne nutně hydrostatické) napjatosti. Pod vlivem napětí se materiál deformuje a mění tvar i objem. Elementární kvádr o hranách  $dx$ ,  $dy$  a  $dz$  a objemu  $dV = dx dy dz$  se ztransformuje na rovnoběžnostěn o objemu  $dV' = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + O(\varepsilon^2))$ , kde symbol  $O(\varepsilon^2)$  označuje členy, které jsou součiny dvou nebo tří deformací a za předpokladu malých deformací je můžeme zanedbat. Relativní změnu objemu tedy můžeme vyjádřit jako

$$\varepsilon_V = \frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (\text{B.28})$$

Toto je obvyklá definice *objemové deformace*, s níž se čtenář nejspíš setkal již v předmětu Pružnost a pevnost. Jelikož  $\varepsilon_V$  jakožto relativní změna objemu nemůže záviset na naší volbě souřadnicových os, musí být v daném bodě součet normálových deformací v libovolných třech navzájem kolmých směrech stejný, jde tedy o invariant. Po dosazení z rovnic (B.5)–(B.7) dostaneme

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) + \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z) + \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z) = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \\ &= \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_m}{K} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

kde

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (\text{B.30})$$

je *objemový modul pružnosti* a  $\sigma_m$  je již dříve zmíněné střední napětí, definované v (B.15). Vidíme, že pro izotropní materiál je objemová deformace úměrná střednímu napětí, neboli aritmetickému průměru normálových napětí ve třech navzájem kolmých směrech. Konstantou úměrnosti je zde převrácená hodnota objemového modulu pružnosti  $K$ , který lze vypočítat z Youngova modulu pružnosti a Poissonova součinitele podle vzorce (B.30).

Při obecné deformaci dochází jak ke změně objemu, tak i ke změně tvaru. Například elementární krychle se obecně přetvoří na rovnoběžnostěn a koule na elipsoid. Celkovou deformaci však můžeme vždy rozložit na dvě části, z nichž jedna odpovídá pouze změně objemu (při zachování tvaru) a druhá pouze změně tvaru (při zachování objemu). Objemovou část deformace si představíme jako rovnoměrné protažení materiálu ve všech směrech, odpovídající průměrné hodnotě normálové deformace

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}\varepsilon_V \quad (\text{B.31})$$

Po odečtení  $\varepsilon_m$  od jednotlivých normálových složek deformace (a ponechání smykových složek beze změny) získáme zbylou část deformace, která odpovídá změně tvaru. Říkáme jí *deviatorická deformace* a její normálové složky značíme

$$e_x = \varepsilon_x - \varepsilon_m, \quad e_y = \varepsilon_y - \varepsilon_m, \quad e_z = \varepsilon_z - \varepsilon_m \quad (\text{B.32})$$

V maticovém tvaru rozklad deformace na objemovou a deviatorickou část zapíšeme jako

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_m \\ \varepsilon_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{B.33})$$

neboli jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_m \mathbf{i} + \mathbf{e} \quad (\text{B.34})$$

kde

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.35})$$

je pomocná sloupcová matice s jednotkovými hodnotami normálových složek a nulovými hodnotami smykových složek a  $\mathbf{e}$  je sloupcová matice deviatorických složek deformace  $e_x, e_y, e_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$  a  $\gamma_{yz}$ .

Pro izotropní lineárně pružný materiál lze relativní změnu objemu  $\varepsilon_V = 3\varepsilon_m$  vypočítat ze středního napětí  $\sigma_m$  podle vzorce (B.29). Pokud je materiál podroben hydrostatickému napětí, dochází pouze ke změně objemu, zatímco deviatorická část deformace zůstává nulová. Jestliže od jednotlivých normálových napětí odečteme jejich střední hodnotu a smyková napětí ponecháme beze změny, získáme tzv. deviatorickou část napětí. I pro napětí lze tedy zkonstruovat rozklad

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{i} + \mathbf{s} \quad (\text{B.36})$$

na hydrostatickou část  $\sigma_m \mathbf{i}$  a deviatorickou část

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{B.37})$$

kde

$$s_x = \sigma_x - \sigma_m = \sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{2}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y - \frac{1}{3}\sigma_z \quad (\text{B.38})$$

$$s_y = \sigma_y - \sigma_m = \sigma_y - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{2}{3}\sigma_y - \frac{1}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_z \quad (\text{B.39})$$

$$s_z = \sigma_z - \sigma_m = \sigma_z - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{2}{3}\sigma_z - \frac{1}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y \quad (\text{B.40})$$

jsou normálové složky deviatorického napětí.

Pro deviatorické napětí a deformaci lze také definovat hlavní hodnoty, tj. *hlavní deviatorická napětí*  $s_1, s_2$  a  $s_3$  a *hlavní deviatorické deformace*  $e_1, e_2$  a  $e_3$ . Získali bychom je řešením příslušné charakteristické rovnice (B.16) nebo (B.21), ve které by se normálové složky  $\sigma_x, \varepsilon_x$ , atd. nahradily odpovídajícími deviatorickými složkami  $s_x, e_x$ , atd. Snadno lze ukázat, že hlavní deviatorická napětí jsou vlastně hlavní napětí „posunutá“ o střední napětí  $\sigma_m$ , platí tedy  $s_I = \sigma_I - \sigma_m$ ,  $I = 1, 2, 3$ , a podobně je i  $e_I = \varepsilon_I - \varepsilon_m$ ,  $I = 1, 2, 3$ . Součet tří hlavních deviatorických napětí je vždy nulový, stejně jako součet tří hlavních deviatorických deformací.

Je pozoruhodné, že pro izotropní lineárně pružný materiál závisí relativní změna objemu  $\varepsilon_V$  pouze na hydrostatickém napětí  $\sigma_m$  a změna tvaru, popsaná deviatorickou deformací  $\mathbf{e}$ , závisí pouze na deviatorickém napětí  $\mathbf{s}$ . Objemové a tvarové změny tedy lze (na úrovni materiálového bodu) zkoumat odděleně.<sup>2</sup> Vztah (B.29) mezi  $\varepsilon_V$  a  $\sigma_m$  jsme již odvodili a víme, že se v něm objevuje objemový modul pružnosti  $K$ . Vztahy mezi deviatorickými normálovými složkami napětí a deformace odvodíme z rovnic (B.32) s využitím (B.5)–(B.7), (B.29), (B.31) a (B.38)–(B.40). Například pro složku  $e_x$  získáme vztah

$$\begin{aligned} e_x &= \varepsilon_x - \varepsilon_m = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) - \frac{1}{3K}\sigma_m = \frac{1}{E}[s_x + \sigma_m - \nu(s_y + \sigma_m) - \nu(s_z + \sigma_m)] - \frac{1 - 2\nu}{E}\sigma_m = \\ &= \frac{1}{E}(s_x - \nu s_y - \nu s_z) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

<sup>2</sup>Tato vlastnost se přenáší i na některé (ale ne všechny) pružnoplastické modely.

Tento výraz se dá dále zjednodušit, pokud si uvědomíme, že

$$s_x + s_y + s_z = \sigma_x - \sigma_m + \sigma_y - \sigma_m + \sigma_z - \sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_m = 3\sigma_m - 3\sigma_m = 0 \quad (\text{B.42})$$

jinými slovy, že součet deviatorických normálových složek napětí je vždy nulový. Proto místo  $-\nu s_y - \nu s_z$  můžeme do (B.41) dosadit  $\nu s_x$  a tak zjistíme, že deviatorická deformace  $e_x$  je úměrná deviatorickému napětí  $s_x$  podle vzorce

$$e_x = \frac{1 + \nu}{E} s_x = \frac{1}{2G} s_x \quad (\text{B.43})$$

kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku. Obdobné vztahy samozřejmě platí mezi  $e_y$  a  $s_y$  a mezi  $e_z$  a  $s_z$ . U smykových napětí a deformací není žádný rozdíl mezi celkovými a deviatorickými hodnotami (jinými slovy, smykové složky mají čistě deviatorický charakter), a proto pro ně stále platí vztahy (B.8)–(B.10). Po shrnutí pak můžeme vše přepsat v maticové podobě

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2G} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{B.44})$$

neboli

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2G} \mathbf{P} \mathbf{s} \quad (\text{B.45})$$

kde  $\mathbf{P}$  je škálovací matice definovaná v (B.24).

Rovnice (B.45) dává návod pro výpočet deviatorické části deformace z deviatorické části napětí. Vzhledem k diagonálnímu charakteru matice  $\mathbf{P}$  je její inverze velmi jednoduchá. Závislost deviatorických napětí na deviatorických deformacích můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{s} = 2G \mathbf{P}^{-1} \mathbf{e} \quad (\text{B.46})$$

kde  $\mathbf{P}^{-1}$  je inverzní škálovací matice definovaná v (B.26).

Vraťme se ještě na okamžik k rovnici (B.42), podle které je součet deviatorických normálových napětí nulový. Názorně to znamená, že pokud má napětí čistě deviatorický charakter, je příslušné střední napětí nulové. Tuto skutečnost můžeme maticově zapsat jako  $\mathbf{i}^T \mathbf{s} = 0$ , neboť vzhledem k definici sloupcové matice  $\mathbf{i}$  v (B.35) je její skalární součin se sloupcovou maticí  $\mathbf{s}$  roven součtu tří prvních složek  $\mathbf{s}$ . Podobně je  $\mathbf{i}^T \boldsymbol{\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_m$  a  $\mathbf{i}^T \mathbf{i} = 1 + 1 + 1 = 3$ . Důkaz identity  $\mathbf{i}^T \mathbf{s} = 0$ , který byl v (B.42) proveden ve skalární podobě, můžeme maticově zapsat jako

$$\mathbf{i}^T \mathbf{s} = \mathbf{i}^T (\boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{i}) = \mathbf{i}^T \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{i}^T \mathbf{i} = 3\sigma_m - \sigma_m 3 = 0 \quad (\text{B.47})$$

Zcela analogicky lze postupovat pro deviatorickou deformaci a dokázat identitu  $\mathbf{i}^T \mathbf{e} = 0$ . Protože hydrostatická část napětí je popsána sloupcovou maticí  $\sigma_m \mathbf{i}$ , je její skalární součin s libovolnou deviatorickou deformací  $\mathbf{e}$  nulový; je totiž  $(\sigma_m \mathbf{i})^T \mathbf{e} = \sigma_m (\mathbf{i}^T \mathbf{e}) = \sigma_m \cdot 0 = 0$ . Připomeňme, že skalární součin napětí a přírůstku deformace odpovídá práci vykonané napětím během tohoto přírůstku, vztážené na jednotku objemu. Hydrostatická část napětí tedy při změně tvaru za konstantního objemu nekoná žádnou práci. Podobně lze ukázat, že deviatorická část napětí nekoná práci na objemových změnách. To platí samozřejmě i pro výkon, který představuje práci vykonanou za jednotku času a lze jej vypočítat jako součin napětí a rychlosti deformace.<sup>3</sup> Odtud pak plyne, že výkon podávaný napětím na rychlosti deformace můžeme také rozložit na objemovou a deviatorickou část. Je totiž

$$\boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = (\sigma_m \mathbf{i} + \mathbf{s})^T (\dot{\epsilon}_m \mathbf{i} + \dot{\mathbf{e}}) = \sigma_m \dot{\epsilon}_m \mathbf{i}^T \mathbf{i} + \sigma_m \mathbf{i}^T \dot{\mathbf{e}} + \dot{\epsilon}_m \mathbf{s}^T \mathbf{i} + \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{e}} = \sigma_m \dot{\epsilon}_m 3 + 0 + 0 + \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{e}} = \sigma_m \dot{\epsilon}_V + \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{e}} \quad (\text{B.48})$$

Součin středního napětí  $\sigma_m$  a rychlosti objemové deformace  $\dot{\epsilon}_V$  představuje výkon spojený se změnou objemu, součin deviatorického napětí  $\mathbf{s}$  a rychlosti deviatorické deformace  $\dot{\mathbf{e}}$  představuje výkon spojený se změnou tvaru.

Pro pružný materiál se veškerá práce vykonaná napětím na změnách deformace transformuje na *potenciální energii pružné deformace*. Pokud je materiál lineárně pružný, lze potenciální energii pružné deformace v daném stavu popsaném deformací  $\boldsymbol{\epsilon}$  a napětím  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\epsilon}$  vypočítat jako

$$W_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}_e \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.49})$$

a v případě izotropního materiálu pak lze tuto energii rozložit na části odpovídající objemovým a tvarovým změnám:

$$W_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\sigma_m \mathbf{i} + \mathbf{s})^T (\epsilon_m \mathbf{i} + \mathbf{e}) = \frac{1}{2} \sigma_m \epsilon_V + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{e} = W_{eV} + W_{eD} \quad (\text{B.50})$$

<sup>3</sup>Přesněji řečeno, součin napětí a rychlosti deformace je výkon na jednotku objemu materiálu.

Po uplatnění vztahů (B.29) a (B.45) (případně (B.46)), umožňujících převody mezi napětím a deformací, zjistíme, že energie spotřebovaná na pružnou změnu objemu je

$$W_{eV} = \frac{1}{2}\sigma_m \varepsilon_V = \frac{K}{2}\varepsilon_V^2 = \frac{1}{2K}\sigma_m^2 \quad (\text{B.51})$$

a energie spotřebovaná na pružnou změnu tvaru je

$$W_{eD} = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T \mathbf{e} = G\mathbf{e}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{e} = \frac{1}{4G}\mathbf{s}^T \mathbf{P} \mathbf{s} \quad (\text{B.52})$$

Závěrem ještě ukážeme, jak lze na objemovou a deviatorickou část rozložit matici pružné tuhosti  $\mathbf{D}_e$ , která se objevuje v maticové podobě zobecněného Hookeova zákona (B.13). Rozložíme-li napětí podle (B.36) a uplatníme vztahy (B.29) a (B.45), dostaneme

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{i} + \mathbf{s} = K\varepsilon_V \mathbf{i} + 2G\mathbf{P}^{-1} \mathbf{e} \quad (\text{B.53})$$

Abychom mohli pravou stranu vyjádřit v závislosti na celkové deformaci  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , musíme najít maticové vyjádření objemové deformace  $\varepsilon_V$  a deviatorické deformace  $\mathbf{e}$  pomocí  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Pro objemovou deformaci si stačí připomenout vztah  $\varepsilon_V = \mathbf{i}^T \boldsymbol{\varepsilon}$  a deviatorickou deformaci vyjádříme jako

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_m \mathbf{i} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathbf{i}\varepsilon_V = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathbf{i}\mathbf{i}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{i}\mathbf{i}^T) \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}_D \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{B.54})$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice a

$$\mathbf{I}_D = \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{i}\mathbf{i}^T = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.55})$$

je matice transformující celkovou deformaci na deviatorickou. Po dosazení do (B.53) nakonec zjistíme, že zobecněný Hookeův zákon lze přepsat jako

$$\boldsymbol{\sigma} = K\mathbf{i}\varepsilon_V + 2G\mathbf{P}^{-1} \mathbf{e} = K\mathbf{i}\mathbf{i}^T \boldsymbol{\varepsilon} + 2G\mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_D \boldsymbol{\varepsilon} = (K\mathbf{i}\mathbf{i}^T + 2G\mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_D) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{B.56})$$

takže matice pružné tuhosti je

$$\mathbf{D}_e = K\mathbf{i}\mathbf{i}^T + 2G\mathbf{P}^{-1} \mathbf{I}_D = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.57})$$

Porovnáním s (B.14) můžeme ověřit, že jde skutečně o stejnou matici. Stačí si uvědomit, že

$$K + \frac{4}{3}G = \frac{E}{3(1-2\nu)} + \frac{4}{3}\frac{E}{2(1+\nu)} = E \frac{1+\nu+2-4\nu}{3(1-2\nu)(1+\nu)} = E \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (\text{B.58})$$

$$K - \frac{2}{3}G = \frac{E}{3(1-2\nu)} - \frac{2}{3}\frac{E}{2(1+\nu)} = E \frac{1+\nu-1+2\nu}{3(1-2\nu)(1+\nu)} = E \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (\text{B.59})$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{B.60})$$

Zároveň (B.57) ukazuje, že matici pružné tuhosti můžeme chápat jako součet dvou matic, z nichž jedna závisí na objemovém modulu pružnosti a uplatní se při změnách objemu (které ovlivní hydrostatickou část napětí) a druhá závisí na smykovém modulu pružnosti a uplatní se při změnách tvaru (které ovlivní deviatorickou část napětí).

# Rejstřík

- algoritmus
  - exponenciální, 17
- analýza
  - mezní plastická, 68
  - přírůstková pružnoplastická, 68
- čas
  - relaxační, 12
  - retardační, 11
- článek
  - ideálně plastický, 49
- část
  - kladná, 143
- deformace
  - deviatorická, 171
  - ekvivalentní, 141
  - hlavní, 169
  - hlavní deviatorická, 171
  - kumulovaná plastická, 63
  - objemová, 170
- dilatace
  - plastická, 101
- dotvarování, 7
- délka
  - charakteristická, 152
- efekt
  - Bauschingerův, 62
- energie
  - lomová, 123
  - pružné deformace, 172
  - uvolňovaná, 124
- faktor
  - intenzity napětí, 114
  - koncentrace napětí, 112
- funkce
  - Heavisidova, 8
  - plasticity, 50
  - poddajnosti, 7, 8
  - poškození, 141
  - přerodělovací, 43
  - relaxační, 7, 24
- houževnatost
  - lomová, 120
- integrita, 138
- koeficient
  - dilatace, 102
  - vnitřního tření, 93
- konzola
  - dvojitá, 122
- kořen trhliny, 112
- kritérium
  - maximálního hlavního napětí, 135
  - maximálního obvodového napětí, 134
- lokalizace
  - nepružné deformace, 137, 150
- materiál
  - bez stárnutí, 8
  - duktilní, 150
  - kvazikřehký, 150
  - křehký, 48, 150
  - s vnitřním třením, 88
  - se stárnutím, 8
  - soudržný, 88
  - tažný, 48, 150
- matice
  - pružné poddajnosti, 168
  - pružné tuhosti, 168
  - pružnoplastické tuhosti, 104
  - škálovací, 169
  - škálovací inverzní, 170
- mechanika
  - lineární lomová, 119
- meridián, 87
  - tahový, 87
  - tlakový, 87
- metoda
  - AAEM, 28
- mez kluzu, 49
  - okamžitá, 58
  - počáteční, 58
- model
  - B3, 15
  - ideálně pružnoplastický, 53
  - ideálně tuhoplastický, 49
  - Kelvinův, 10
  - Maxwellův, 9
  - poškození izotropní, 142
  - tuhoplastický se zpevněním, 57
- modul
  - plastický, 57
  - pružnoplastický, 61
  - pružnosti
    - asymptotický, 14
    - dynamický, 14
    - konvenční, 14
    - objemový, 170
    - smykový, 167
    - Youngův, 167
  - průřezový
    - elastický, 76
    - plastický, 77
  - sečný, 140
  - upravený efektivní, 28
  - zpevnění, 57
- moment
  - mezní elastický, 76
  - mezní plastický, 76
- módy I, II, III, 117
- napětí

- efektivní, 137
- ekvivalentní, 106
- hlavní, 83, 168
- hlavní deviatorická, 171
- Misesovo, 88
- nominální, 137
- střední, 83, 168
- zpětné, 57
- násobitel
  - plastický, 50
- oblast
  - plasticky přípustná, 69
  - pružná, 143
- obálka
  - pevnosti, 145
- odtížení
  - pružné, 55
- operátor
  - poddajnosti, 32
  - relaxační, 32
- osa
  - hydrostatická, 87
- parametr
  - poškození, 138
- pevnost, 48
- plocha
  - poškození, 141, 143
- podmínka
  - komplementarity, 51
  - okrajová, 163
  - plasticity, 51
    - Druckerova-Pragerova, 93
    - Misesova, 85
    - Mohrova-Coulombova, 88
    - Rankinova, 92
    - Trescova, 84
  - plastické konzistence, 56
  - plastické přípustnosti, 51
  - počáteční, 163
  - zatěžování-odtěžování, 51, 103
- pole napětí
  - asymptotické, 113
- postulát
  - maxima plastické disipace, 96
- potenciál
  - plastický, 102
- poškození, 137
- pravidlo
  - kinematického zpevnění
    - Melanovo-Pragerovo, 107
- princip
  - kauzality, 8
  - maxima plastické disipace, 68, 70
  - superpozice, 7
- proces, 55
  - kinematicky přípustný, 71
- prostor
  - Westergaardův, 87
- relaxace, 7
- rovina
  - deviatorická, 87
  - meridiánová, 87
  - Rendulićova, 87
- rovnice
  - homogenní, 163
  - charakteristická, 163
  - nehomogenní, 164
- rozevření trhliny, 119
- rozklad
  - aditivní, 53
- řada
  - Dirichletova, 19
  - Pronyho, 19
- řetězec
  - Kelvinův, 18
  - Maxwellův, 26
- řez
  - deviatorický, 87
  - Rendulićův, 87
- řízení
  - posunem, 125
  - silou, 125
- součinitel
  - dotvarování, 15
  - Poissonův, 167
  - zatížení, 72
    - kinematicky přípustný, 72
    - staticky přípustný, 72
- stav, 55
  - mezní elastický, 67
  - mezní plastický, 68
  - plasticky přípustný, 71
  - staticky přípustný, 71
- systém
  - kluzný, 48
- síla
  - mezní plastická, 65
- trhlina
  - fiktivní, 159
  - kohezivní, 159
- úhel
  - vnitřního tření, 89
- viskoelasticita, 7
- viskozita, 9
- věta mezní plastické analýzy
  - kinematická, 72
  - statická, 72
  - základní, 72
- zkouška
  - dotvarovací, 7
  - relaxační, 24
- zpevnění, 57
  - izotropní, 62, 107
  - kinematické, 59, 106
- zákon
  - Hookeův zobecněný, 168
  - koheze, 159
  - plastického přetváření, 51
    - nesdružený, 102
    - sdružený, 98
  - plastického zpevnění, 59
  - poškození, 138
  - Schmidův, 47
  - zpevnění, 63
- zóna
  - procesní, 119



# Literatura

- Bažant, Z. and Chern, J. (1985). Log double power law for concrete creep. *American Concrete Institute Journal*, 82(5):665–675.
- Bažant, Z. P. and Kim, S. S. (1979). Approximate relaxation function for concrete. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 105(2695–2705).
- Inglis, C. (1913). Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Transactions of the Institution of Naval Architects*, 55:219–230.
- Jirásek, M. and Bažant, Z. P. (2002). *Inelastic Analysis of Structures*. John Wiley and Sons, Chichester.
- Kormeling, H. A. and Reinhardt, H. W. (1983). Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete. Technical Report 5-83-18, Stevin Lab, Delft University of Technology.
- Kupfer, H. and Gerstle, K. (1973). Behaviour of concrete under biaxial stress. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, (99):853–866.
- Maugin, G. A. (1992). *The thermodynamics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Procházka, J., Bradáč, J., Krátký, J., Filipová, J., and Hanzlová, H. (2003). *Betonové konstrukce. Příklady navrhování podle Eurocode 2*. Česká betonářská společnost ČSSI, 8. vydání edition. 170 stran.