# Matematické základy MKP

Tato prezentace byla vytvořena na základě podpory grantu
FRVŠ 1249/2013

# Obsah

- Silná vs. slabá formulace úlohy
- AVP
- Galerkinova metoda
- Céaovo lemma
- Apriorní odhad chyby

# Obsah

- Silná vs. slabá formulace úlohy
- AVP
- Galerkinova metoda
- Céaovo lemma
- Apriorní odhad chyby

# Obsah

- Silná vs. slabá formulace úlohy
- AVP
- Galerkinova metoda
- Céaovo lemma
- Apriorní odhad chyby

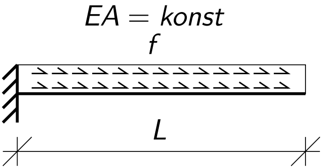
# Obsah

- Silná vs. slabá formulace úlohy
- AVP
- Galerkinova metoda
- Céaovo lemma
- Apriorní odhad chyby

# Obsah

- Silná vs. slabá formulace úlohy
- AVP
- Galerkinova metoda
- Céaovo lemma
- Apriorní odhad chyby

# Slabá vs. silná formulace úlohy




Obrázek: Zadání

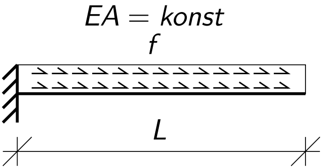
- Silná formulace

$$EAu_{,xx} = f \qquad u(0) = 0 \qquad N(L) = EAu_{,x}(L) = 0. \tag{1}$$

- Slabá formulace

$$\int_0^L EAu_{,x}v_{,x}\mathrm{d}x = \int_0^L fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in H^1(0,L),\ v(0) = 0, \tag{2}$$

# Slabá vs. silná formulace úlohy




Obrázek: Zadání

- Silná formulace

$$EAu_{,xx} = f \qquad u(0) = 0 \qquad N(L) = EAu_{,x}(L) = 0. \tag{1}$$

- Slabá formulace

$$\int_0^L EAu_{,x}v_{,x}\mathrm{d}x = \int_0^L fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in H^1(0, L), \; v(0) = 0, \tag{2}$$

## Abstraktní variační problém

- Slabá formulace AVP

$$a(u,v) := \int_0^L EA u_{,x} v_{,x} \mathrm{d}x, \qquad (f,v) := \int_0^L f v \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Hledáme $u \in V$ takové, že

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V, \tag{4}$$

kde $V$ je reálný Hilbertův prostor s normou $||\cdot||_V$,
$a : V \times V \to \mathbb{R}$ je bilineární forma, která je spojitá a koercivní na $V$, tj.

$$\exists M, \alpha > 0 : \qquad |a(u,v)| \leq M||u||_V||v||_V, \quad \forall u,v \in V, \tag{5}$$

$$a(u,u) \geq \alpha||u||_V^2, \quad \forall u \in V \tag{6}$$

a $F(v) = (f,v)$ je spojitý lineární funcionál na $V$.

# Minimalizace funkcionálu energie

Nechť je bilineární forma z AVP symetrická. Pak řešení AVP je ekvivalentní minimalizaci kvadratického funkcionálu

$$J(u) = \inf_{v \in H^1} J(v), \tag{7}$$

kde

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v). \tag{8}$$

# Galerkinova metoda

Místo řešení spojitého problému (AVP) tedy hledání funkce $u \in V$ hledáme funkci $u_h \in V_h$, $V_h \subset V$ tak, aby platilo

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{9}$$

Alternativní Ritzova metoda (pro symetrickou bilineární formu $a$)

$$J(u_h) = \inf_{v_h \in V_h} J(v_h). \tag{10}$$

# Céaovo lemma

Céaovo lemma nám umožňuje převést odhad chyby $||u - v_h||_V$ na problém schopnosti prostorů $V_h$ aproximovat původní prostor $V$.

$$||u - u_h||_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_V. \tag{11}$$

# Apriorní odhad chyby

Ze Céaova lemmatu víme, že abychom odhadli chybu $||u - u_h||_V$, stačí pracovat s $\inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_V$, neboli stačí odhadnout normu $||u - v_h||_V$ pro libovolné $v_h \in V_h$. Za $v_h$ zvolíme interpolaci $u$ takovou, že restrikce $\Pi(u)$ na prvek $K$ je Lagrangeova interpolace $u$.

$$||u - u_h||_V \leq C||u - v_h||_V = C||u - \Pi(u)||_V \tag{12}$$

$\rightarrow$ Chybu řešení můžeme zapsat pomocí chyby interpolace na jednotlivých elementech

$$||u - u_h||_{1,\Omega} \leq C||u - \Pi(u)||_{1,\Omega} = C\left(\sum_K ||u - \Pi(u)||_{1,K}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \tag{13}$$

$$= C\left(\sum_K ||u - \Pi_K(u|_K)||_{1,K}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

# Apriorní odhad chyby

Chyba interpolace se dá odhadnout jako

$$|u - \Pi_K(u)|_{1,K} \leq Ch_K|u|_{2,K} \quad \forall u \in H^2(K) \tag{15}$$

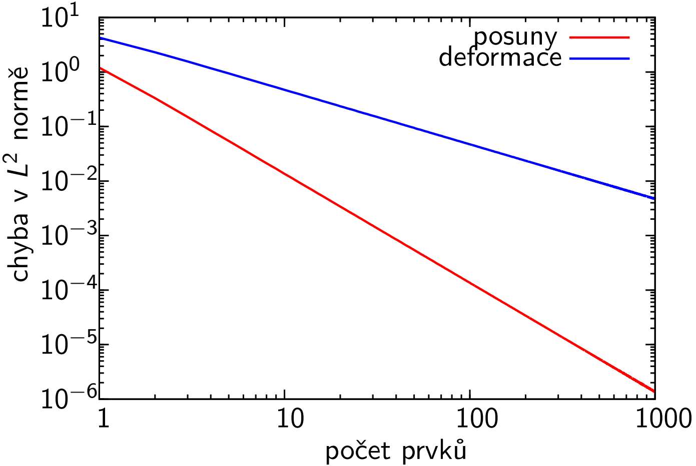
posčítáme přes všechny prvky $\rightarrow$ Chyba aproximace

$$|(u - \Pi(u))|_{1,\Omega} \leq Ch|u|_{2,\Omega} \tag{16}$$

odhad chyby aproximace derivace funkce $u$, neboli deformace.

Odhad chyby aproximace pro posuny(chyba v $L^2$-normě) $\rightarrow$ Aubinův-Nietscheho trik. Dostáváme

$$||u - u_h||_{0,\Omega} \leq Ch||u - u_h||_{1,\Omega} \leq Ch^2||u - u_h||_{2,\Omega} \tag{17}$$


posuny
deformace
chyba v $L^2$ normě
$10^1$
$10^0$
$10^{-1}$
$10^{-2}$
$10^{-3}$
$10^{-4}$
$10^{-5}$
$10^{-6}$
1
10
100
1000
počet prvků