Tomáš Malecký

Vzpěradlo

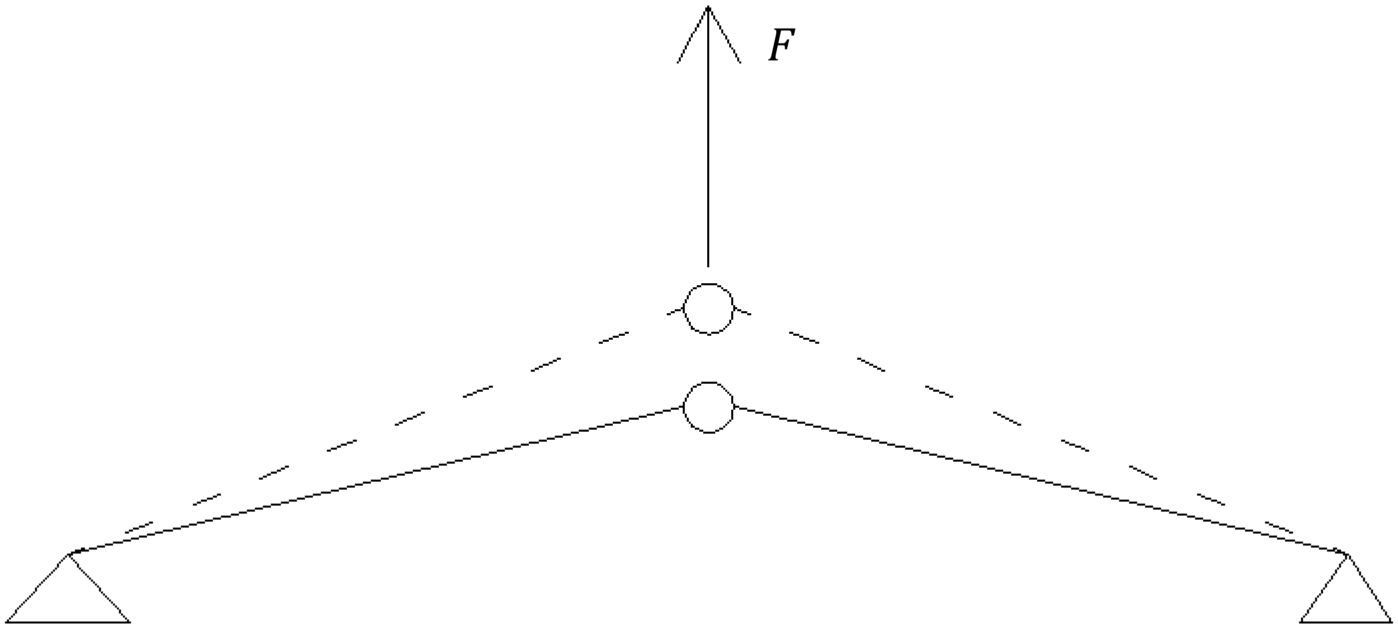
Dva kloubově připojené pruty přenášející pouze normálové síly.

Navazuji na předchozí práci na řetězovky (PRPE), úloha vzpěradla je prvním krokem k vyřešení řetězovky metodami SM3, tj. uvažujeme-li vliv prodloužení střednice.

Jako známe veličiny budeme brát geometrii nedoformované konstrukce a materiálové vlastnosti, cílem pak bude zjistit reakci vzpěradla (posuny, deformace, vnitřní síly) na vnější silové zatížení.

Symetrická úloha „1D“

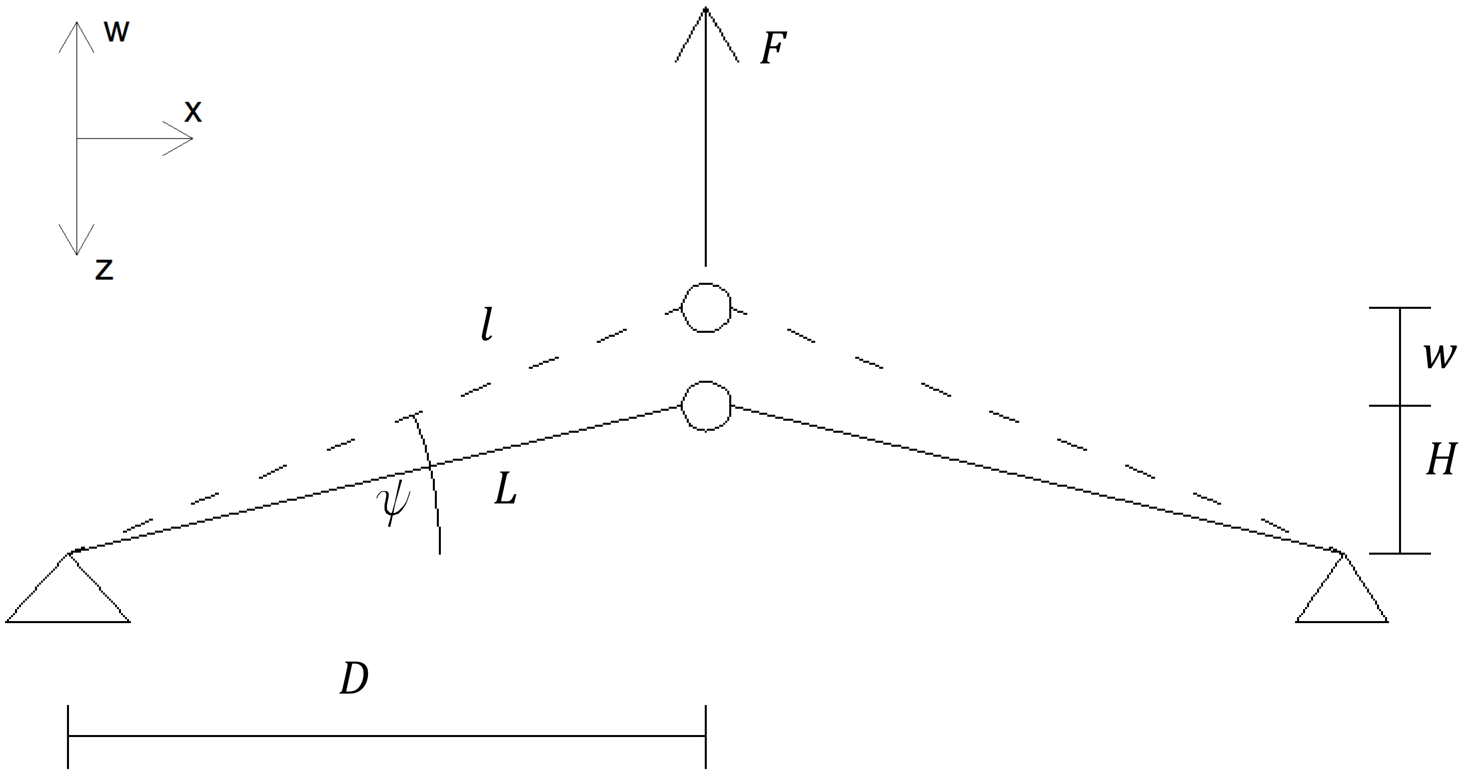
Grafické zadání:



Pouze 1 stupeň volnosti – posun styčníku, označíme jako w.

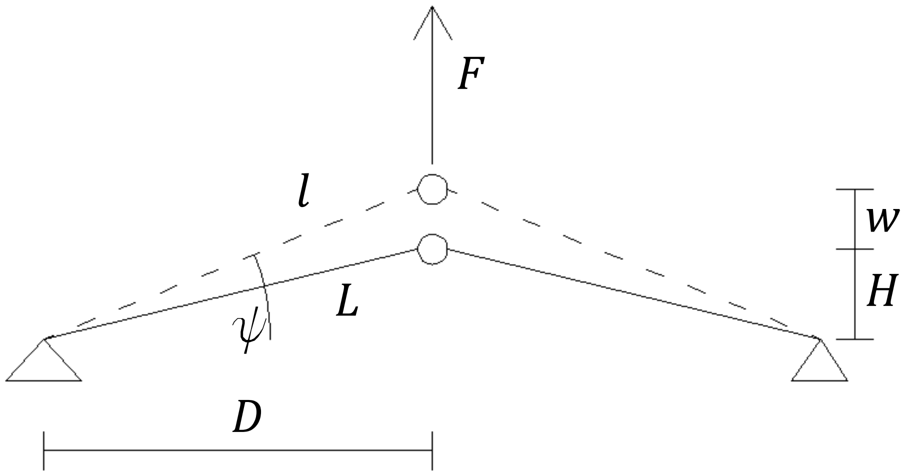
1D

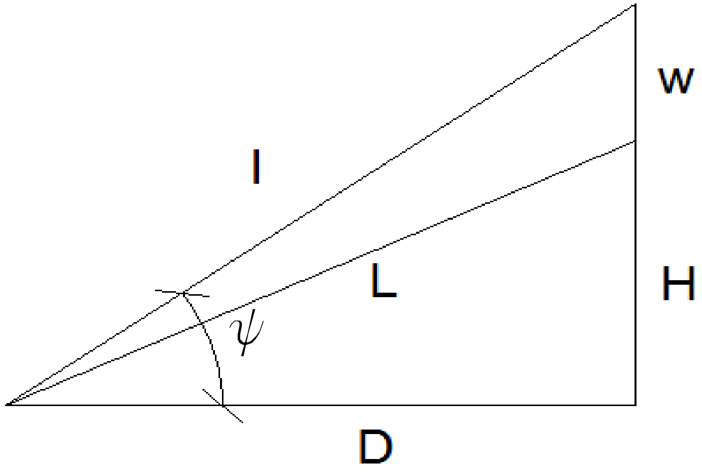
Zavedeme všechny potřebné veličiny a souřadnicové osy:



F – vnější síla [N]
L – původní délka prutu [m]
l – délka deformovaného prutu [m]
D – průmět délky prutu [m]
H – počáteční výška [m]
w – posun styčníku ve směru z [m]
ψ – úhel odklonu ramene od osy x [-]

1D





Odvodíme z geometrie kce:

$D=\sqrt{L^2-H^2}$

$l=\sqrt{D^2+(H+w)^2}=\sqrt{L^2-H^2+H^2+2Hw+w^2}$

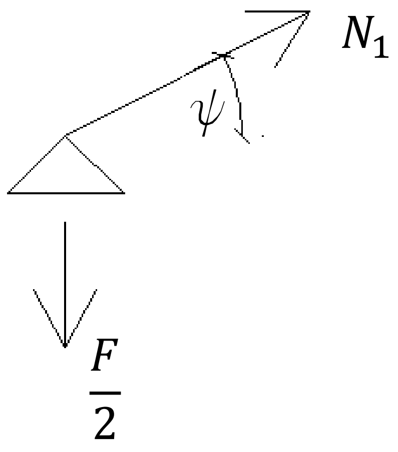
$l=\sqrt{L^2+2Hw+w^2}$

$\sin(\psi)=\frac{w+H}{l}=\frac{w+H}{\sqrt{L^2+2Hw+w^2}}$

$$l^2=(H+w)^2+D^2$$
$$l^2=H^2+2Hw+w^2+L^2-H^2$$
$$l^2-L^2=2Hw+w^2$$
$$(l-L)(l+L)=2Hw+w^2$$
$$(l-L)=\frac{2Hw+w^2}{(l+L)}$$

1D

Sestavíme podmínku rovnováhy, např. v podpoře:



$$\sum \downarrow : \; \frac{F}{2} = N_1 \sin(\psi)$$

$$N_1 = \frac{F * l}{2(H + w)}$$

Dodáme rovnici pro normálovou sílu:

$$N = EA\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{l - L}{L} = \frac{2Hw + w^2}{L(l + L)}$$

$$N = EA\frac{2Hw + w^2}{L(l + L)}$$

1D

Dořešíme vztah F a w, úlohu lze dořešit za zjednodušujícího předpokladu L≈l:

$$N = \frac{F * l}{2(H + w)} \approx \frac{F * L}{2(H + w)}$$

$$N = EA\frac{2Hw + w^2}{L(l + L)} \approx EA\frac{2Hw + w^2}{2L^2}$$

$$EA\frac{2Hw + w^2}{2L^2} = \frac{F * L}{2(H + w)}$$

$$F = \frac{EA}{L^3}(2H^2w + 3Hw^2 + w^3)$$

Sestavíme funkci f(w), pro kterou jsou vnější a vnitřní síly v rovnováze:

$$f(w) = \frac{EA}{FL^3}(2H^2w + 3Hw^2 + w^3) - 1$$

$$f'(w) = \frac{EA}{FL^3}(2H^2 + 6Hw + 3w^2)$$

1D

Úloha jde dořešit i naprosto přesně, bez použití zjednodušujícího předpokladu:

$$N = \frac{F * l}{2(H + w)}$$

$$N = EA\frac{2Hw + w^2}{L(l + L)}$$

$$EA\frac{2Hw + w^2}{L(l + L)} = \frac{F * l}{2(H + w)}$$

$$F = 2EA\frac{(2H^2w + 3Hw^2 + w^3)}{L(l + L)l}; l = \sqrt{L^2 + 2Hw + w^2}$$

$$f(w) = \frac{F\sqrt{L^2 + 2Hw + w^2}}{2(H + w)} - EA\frac{2Hw + w^2}{L(\sqrt{L^2 + 2Hw + w^2} + L)}$$

$$f'(w) = -\frac{2EA(H + w)^3 + FL(L^2 - H^2)}{2L(H + w)^2\sqrt{L^2 + 2Hw + w^2}}$$

Newtonova metoda

Pro vyřešení f(w) použijeme Newtonovu metodu. Jedná se o iterační metodu, která hledá f(x)=0 ve směru tečen f(x). Metoda vyžaduje znalost počátečního řešení x_0, proto nejdřív sestavíme graf F(w), abychom mohli odhadovat počáteční řešení.

Obecný zápis pro Newtonovu metodu pro f(x):

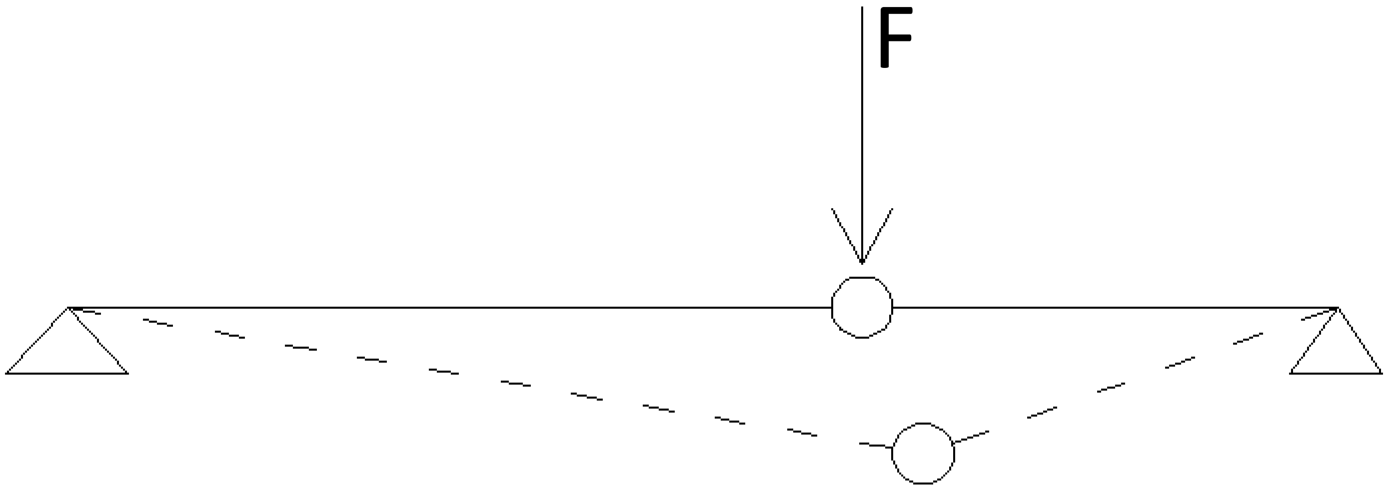
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Vysvětlující gif.

Výsledky viz Excel.

Nesymetrický případ „2D“

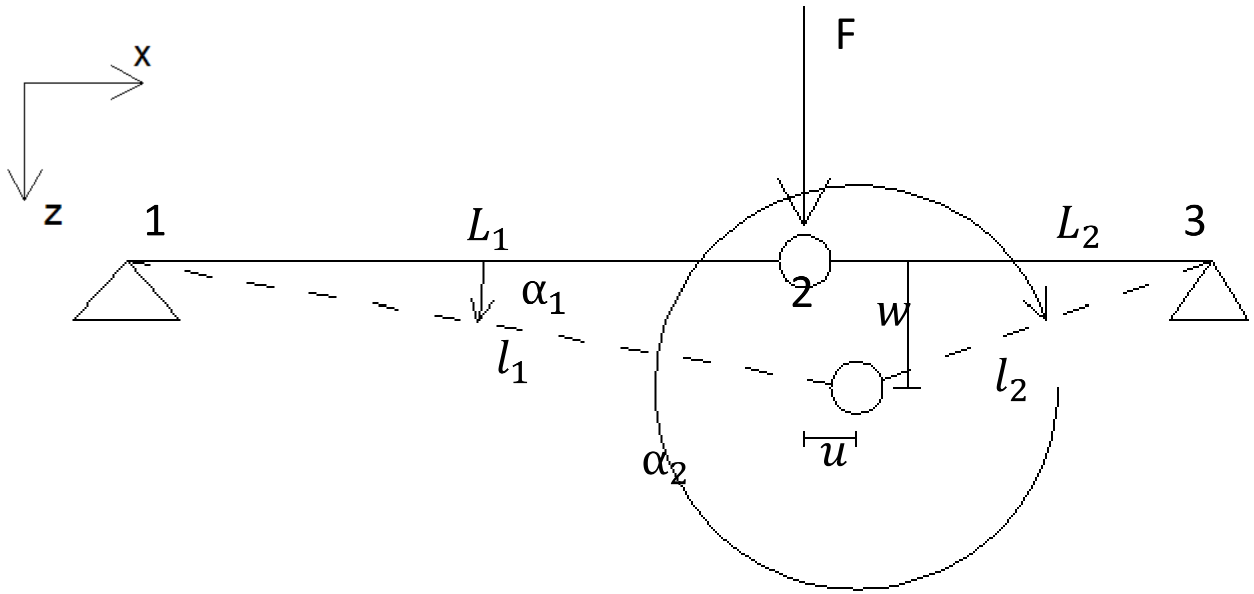
Grafické zadání:



Styčník to posune ve směru obou os.

2D

Zavedeme všechny potřebné veličiny a souřadnicové osy:

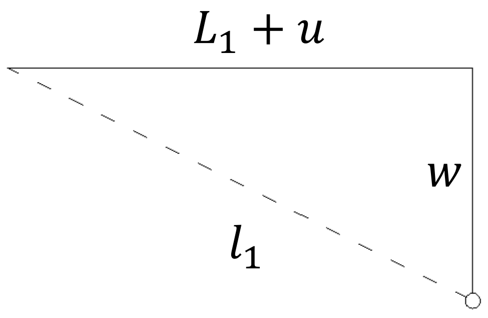


F – vnější síla [N]
L – původní délka prutu [m]
l – délka deformovaného prutu [m]
u – posun styčníku ve směru x [m]
w – posun styčníku ve směru z [m]
α – ORIENTOVANÝ úhel odklonu ramene od osy x [-]

2D

Odvodíme z geometrie:

12:



$$l_1 = \sqrt{(L_1 + u)^2 + w^2}$$

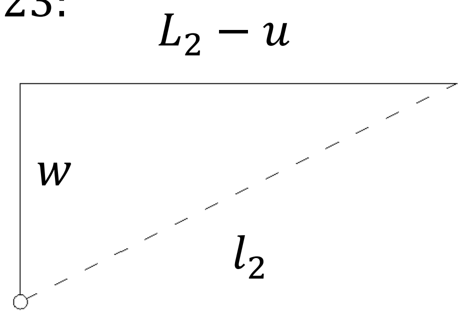
$$\sin(\alpha_1) = \frac{w}{l_1}$$

$$cos(\alpha_1) = \frac{L_1 + u}{l_1}$$

$$\cos(\alpha_i) = \frac{x_b - x_a}{l_i}$$

$$\sin(\alpha_i) = \frac{z_b - z_a}{l_i}$$

23:



$$l_2 = \sqrt{(L_2 - u)^2 + w^2}$$

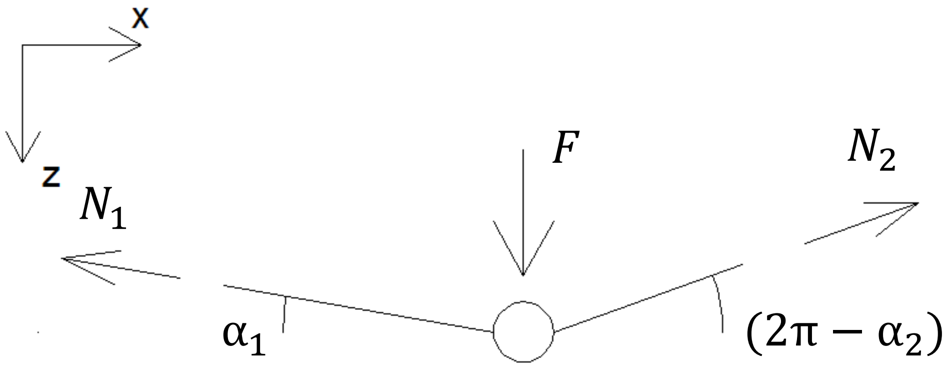
$$\sin(\alpha_2) = \frac{w}{l_1}$$

$$cos(\alpha_1) = \frac{L_1 + L_2 - (L_1 + u)}{l_1}$$

$$cos(\alpha_1) = \frac{L_2 + u}{l_1}$$

2D

Silová rovnováha ve styčníku:



$$N_{1z} = N_1 * \sin(\alpha_1) = N_1 \frac{w}{l_1(u,w)}$$
$$N_{1x} = N_1 * \cos(\alpha_1) = N_1 \frac{L_1 + u}{l_1(u,w)}$$
$$N_{2z} = N_2 * \sin(360 - \alpha_2) = N_2 * (-\sin(\alpha_2)) = N_2 \frac{w}{l_2(u,w)}$$
$$N_{2x} = N_2 * \cos(360 - \alpha_2) = N_2 * \cos(\alpha_2) = N_2 \frac{L_2 - u}{l_2(u,w)}$$

$\sum \rightarrow$:

$$N_{1x} = N_{2x}$$
$$N_1 \frac{L_1 + u}{l_1(u,w)} = N_2 \frac{L_2 - u}{l_2(u,w)} \qquad (1)$$

$\sum \downarrow$:

$$F = N_{1z} + N_{2z}$$
$$F = N_1 \frac{w}{l_1(u,w)} + N_2 \frac{w}{l_2(u,w)}$$
$$\frac{F}{w} = \frac{N_1}{l_1(u,w)} + \frac{N_2}{l_2(u,w)} \qquad (2)$$

2D

Sestavíme $f_1(u,w)$ a $f_2(u,w)$

$$N = EA\varepsilon = EA\frac{l-L}{L}$$

$$(1)\ N_1\frac{L_1+u}{l_1(u,w)} = N_2\frac{L_2-u}{l_2(u,w)}$$

$$N_1(u,w) = EA\frac{l_1-L_1}{L_1}$$

$$N_2(u,w) = EA\frac{l_2-L_2}{L_2}$$

$$l_1 = \sqrt{(L_1+u)^2+w^2}$$

$$l_2 = \sqrt{(L_2-u)^2+w^2}$$

$$f_1(u,w) = N_1(u,w)\frac{L_1+u}{l_1(u,w)} - N_2(u,w)\frac{L_2-u}{l_2(u,w)}$$

$$(2)\ \frac{F}{w} = \frac{N_1}{l_1(u,w)} + \frac{N_2}{l_2(u,w)}$$

$$f_2(u,w) = \frac{N_1(u,w)}{l_1(u,w)} + \frac{N_2(u,w)}{l_2(u,w)} - \frac{F}{w}$$

Numerická derivace

Protože $f_1(u, w)$ a $f_2(u, w)$ jsou moc složité na derivaci, použijeme přibližnou metodu derivace.

Klasická derivace:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Numerická derivace

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Kde za Δx zvolíme danou reálnou hodnotu, např. 10^{-6}.

Newtonova metoda pro f(x,y)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Výsledky viz Excel.