



České vysoké učení technické v Praze
Stavební fakulta

Studentská vědecká odborná činnost
Akademický rok 2003/2004

Optimální návrh a optimální řízení konstrukcí v oboru velkých deformací

Jméno a příjmení, ročník a obor :

Anna Kučerová 5. ročník M

Konzultant :

Ing. Jan Zeman, PhD.

Katedra :

stavební mechanika

Anotace

Předmětem této soutěžní práce je řešení úloh optimálního návrhu a optimálního řízení konstrukcí v oboru velkých deformací. Jinými slovy, cílem práce je ukázat, jakým způsobem je možné optimalizovat návrhové parametry konstrukce nebo složky zatížení tak, aby bylo dosaženo požadované deformace nebo jiných vlastností konstrukce.

Pro ilustraci navrhovaného postupu řešení optimálního návrhu a optimálního řízení je použit Reissnerův dvourozměrný model geometricky přesného prutu, který je schopen popsat velké deformace konstrukce.

V této práci jsou představeny dvě možné formulace řešeného problému. První z nich přistupuje k problému nelineární mechaniky a optimalizace více či méně odděleně, kdy řešení statických podmínek mechaniky představuje pouze omezení přípustných řešení pro optimalizační problém. Ve druhé formulaci jsou použity Langrangeovy multiplikátory pro svázání mechanického i optimalizačního problému tak, aby je posléze bylo možné řešit simultánně. To za předpokladu, že složky deformace konstrukce a optimalizované parametry konstrukce či zatížení jsou uvažovány jako nezávislé.

Optimalizační problém je řešen metodou založenou na principu genetických algoritmů. Konkrétně je použit algoritmus SADE, pro který bylo v rámci této práce navrženo a odzkoušeno také několik pozměňujících návrhů.

Výhody a nevýhody představených postupů řešení jsou ilustrovány na několika numerických příkladech.

In this competition paper the optimal design and optimal control of structures undergoing large displacements and rotations is investigated. In other words, the aim of this work is to show how to find corresponding initial configuration and the corresponding set of multiple load parameters in order to recover a desired deformed configuration or some desirable features of the deformed structure.

The numerical model chosen to illustrate the proposed optimal design and optimal control methodologies is the Reissner geometrically exact two-dimensional beam, which is able to describe large displacements and rotations.

Two different formulations of the optimal design and optimal control are presented. In the first one, the problem of non-linear mechanics and the problem of optimization are considered more or less separately; equilibrium equations are only constraint for an optimization problem. The second one relies on the method of Lagrange multipliers in order to make the mechanics state variables independent from either design or control variables and thus provide the basis for simultaneous method of solution.

The solution procedure is based on principles of genetic algorithms. Particularly, the SADE algorithm is used and some developments of this algorithm are presented.

A number of numerical examples are given in order to illustrate both the advantages and potential drawbacks of each of the presented procedures.

1 Úvod

Moderní konstrukce musí být často dimenzovány tak, aby odolávaly velkým posunům a rotacím a přitom zůstaly plně funkční. Také konstrukční fáze, kdy jsou montovány jednotlivé části konstrukce, by měla být pod pečlivou kontrolou. A nakonec i ekonomická kritéria nabývají stále více a více na důležitosti a jsou důvodem pro snahu popsat uvedený problém na přesnějším teoretickém základě. Námi navrhované optimalizační metody mohou být využity ve fázi návrhu konstrukce a dopomoci k získání takového návrhu, který maximálně vystihuje předepsané požadavky. Analogicky, metody optimálního řízení konstrukcí mohou být užitečným prostředkem pro stanovení minimálního zatížení, které vyvolá požadovanou výslednou deformaci konstrukce. Formálně mohou být oba problémy, optimalizace návrhu i řízení, definovány jako minimalizace objektivní funkce, která vyjadřuje naše požadavky. Největší rozdíl mezi těmito problémy je volba proměnných objektivní funkce, neboli optimalizačních proměnných. Ty můžeme pro případ optimálního návrhu označit jako návrhové proměnné, které jsou typicky spjaty s mechanickými vlastnostmi konstrukce (např. Youngův modul pružnosti) nebo s její geometrií (např. parametry počátečního tvaru konstrukce nebo její dílčí rozměry). V případě optimálního řízení označíme proměnné objektivní funkce jako řídicí. Ty jsou obvykle spojeny se zatížením dané konstrukce. Namísto řešení problému optimalizace návrhu a řízení odlišným způsobem, jak je obvyklé, se tato práce zaměřuje na společné vlastnosti obou úloh, což vytváří možnost jejich shodné prezentace a vyvinutí nové metody řešení.

V první části práce jsou představeny dva odlišné přístupy k formulaci problémů optimálního návrhu či řízení jako úloh spojených s problémem nelineární mechaniky. První přístup, spíše tradiční (viz [9]), je případem, kdy se řeší odděleně optimalizační úloha na jedné straně a problém nelineární mechaniky na straně druhé. Obvykle bývají užívány dva různé programy, jeden pro řešení mechanické úlohy, druhý pro optimalizaci. Důsledkem je omezení komunikace mezi oběma programy na minimum (viz [19] nebo [16]), klasicky ve formě objektivní funkce a jejího gradientu. V tomto případě jsou statické podmínky rovnováhy nelineární mechaniky redukovány na pouhé omezení přípustných řešení problému, respektující meze pro daný stav konstrukce, její posuny a rotace.

Druhý přístup využívá tradiční metodu Lagrangeových multiplikátorů (viz [13] nebo [18]) ke spojení obou úloh v jednu, vyjádřenou jedinou rovnicí. Ta zahrnuje jak statické podmínky rovnováhy nelineární mechaniky, tak výraz definující optimalizační úlohu a také vnitřní vztahy statických proměnných (posunů a rotací) s optimalizačními proměnnými, přičemž všechny tyto proměnné jsou nadále uvažovány jako nezávislé. Řešením této rovnice je následně řešen problém optimalizace a problém nelineární mechaniky současně. Takovou formulaci úlohy dále nazýváme simultánní. Tato myšlenka je zároveň vyvíjena v rámci diskrétní aproximace metodou konečných prvků, což vytváří model konečných prvků se stupněmi volnosti nesestávajícími pouze z posunů a rotací, ale také z optimalizačních proměnných. Detailní formulace uvedených postupů je představena na Reissnerově dvojrozměrném modelu geometricky přesného prutu (viz [6]).

V další části předkládané práce je představena numerická metoda, která umožňuje řešení výše zmíněných problémů. Použita je metoda ze skupiny genetických algoritmů (viz [2], [14]), konkrétně algoritmus SADE (viz [4],[5]), který byl vyvinut na naší fakultě v minulých letech a též byl úspěšně testován na některých úlohách stavebního inženýrství [1, 10, 12]. Dále je také představena nová modifikace tohoto algoritmu založená na principu zjednodušeného gradientu, která zvyšuje rychlost jeho konvergence a tak i jeho efektivitu. Tato modifikace algoritmu SADE je dále nazývána GRADE.

Osnova práce je následující. V první kapitole je stručně představen použitý model geo-

metricky přesného prutu, schopný popsat velké posuny a rotace. Teoretické formulace problémů optimalizace návrhu a řízení jsou prezentovány v kapitole 3. Metodika řešení je popsána v kapitole 4. Kapitola 5 pak uvádí několik konkrétních příkladů a kapitola 6 shrnutí a další práce. V příloze A je detailněji popsána metoda řešení problému nelineární mechaniky. Diskrétní formulace sdruženého problému optimalizace a nelineární mechaniky jsou vyjádřeny v příloze B. Příloha C uvádí průběhy optimalizovaných funkcí pro tři úlohy tradičně formulovaného optimálního řízení. Některé obtíže při aplikaci algoritmu SADE na úlohu tradičně formulovaného optimálního řízení jsou popsány v příloze D. Poslední příloha E obsahuje ukázkou jiné optimalizační metody na řešení tradičně formulované úlohy optimálního řízení.

2 Model prutu s nelineární kinematikou

V této kapitole je detailně popsána formulace dvourozměrného modelu počátečně zakřiveného geometricky přesného prutu s nelineární kinematikou (viz [6]). Dále je představena aproximace tohoto modelu metodou konečných prvků. K tradičnímu postupu řešení nelineární úlohy uvažující uvedený model je použita inkrementální analýza, která je stručně vysvětlena v příloze A.

Reissnerův 2D model geometricky přesného zakřiveného prutu uvažující velké deformace

Dle Ibrahimbegoviće a kol. [7] je uvažován předpoklad, že počáteční zakřivení je možné odvodit isometrickou transformací od přímého prutu. Jestliže $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ jsou bázové vektory referenčního ortogonálního systému souřadnic, pak bázové vektory lokálního systému souřadnic křivého prutu $(\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2)$ lze vyjádřit jako:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_1 & \hat{\mathbf{g}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

kde α je počáteční pootočení průřezu křivého nezátíženého prutu vzhledem k odpovídajícímu průřezu referenčního přímého prutu.

Míra zobecněné deformace prutu je uvažována podle Reissnera [15]. Rotací systému $(\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2)$ o úhel ψ zavedeme vliv zatížení, tak získáme pohyblivý souřadný systém s jednou osou (označovanou \mathbf{n}) kolmou k průřezu a druhou (označovanou \mathbf{t}) v jeho rovině. Můžeme tedy psát (viz Obrázek 1)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_1 & \hat{\mathbf{g}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \psi) & \sin(\alpha + \psi) \\ -\sin(\alpha + \psi) & \cos(\alpha + \psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Při uvažování velkých deformací může být polohový vektor na deformované konstrukci vyjádřen jako:

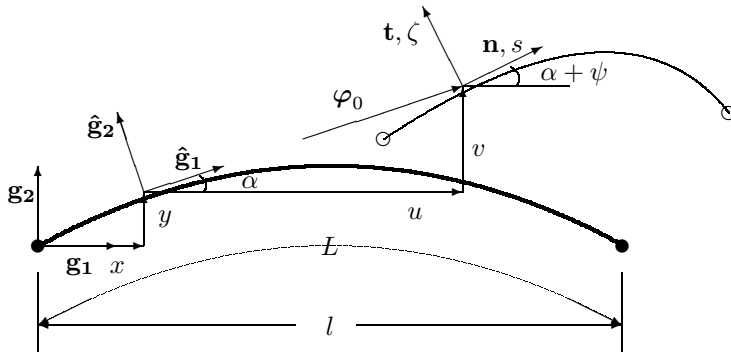
$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \zeta \mathbf{t} = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} -\sin(\alpha + \psi) \\ \cos(\alpha + \psi) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

kde x a y jsou souřadnice počáteční polohy prutu, u a v jsou složky posunu v globálním souřadném systému a ζ je souřadnice podél normály k ose deformovaného prutu.

Gradient deformace je vyjádřen jako

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{ds} + \frac{du}{ds} - \zeta \frac{d\psi}{ds} \cos(\alpha + \psi) & -\sin(\alpha + \psi) \\ \frac{dy}{ds} + \frac{dv}{ds} - \zeta \frac{d\psi}{ds} \sin(\alpha + \psi) & \cos(\alpha + \psi) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

přičemž s představuje souřadnici podél osy deformovaného prutu.



Obrázek 1: Pohyblivý souřadnicový systém.

Poté může být gradient deformace rozložen na část odpovídající rotaci a ryzím deformacím

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \psi) & -\sin(\alpha + \psi) \\ \sin(\alpha + \psi) & \cos(\alpha + \psi) \end{bmatrix} \quad (5)$$

a s využitím tzv. Biotova tensoru $\mathbf{H} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$ jako míry deformace (viz [6]), kde $\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{F}$, jsou získány jeho následující nenulové složky

$$H_{11} = \Sigma - \zeta K; \quad H_{21} = \Gamma, \quad (6)$$

kde Σ , K , Γ jsou míry zobecněné deformace vyjádřené Reissnerem v podobě

$$\begin{aligned} \Sigma &= \cos(\alpha + \psi) \left(\frac{dx}{ds} + \frac{du}{ds} \right) + \sin(\alpha + \psi) \left(\frac{dy}{ds} + \frac{dv}{ds} \right) - 1, \\ \Gamma &= -\sin(\alpha + \psi) \left(\frac{dx}{ds} + \frac{du}{ds} \right) + \cos(\alpha + \psi) \left(\frac{dy}{ds} + \frac{dv}{ds} \right), \\ K &= \frac{d\psi}{ds}. \end{aligned} \quad (7)$$

V maticovém zápisu lze rovnici (7) zapsat jako

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda}^T (\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{n}) = \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}_1, \quad (8)$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Gamma \\ K \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \psi) & -\sin(\alpha + \psi) & 0 \\ \sin(\alpha + \psi) & \cos(\alpha + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} + \frac{du}{ds} \\ \frac{dy}{ds} + \frac{dv}{ds} \\ \frac{d\psi}{ds} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

V rámci této práce se omezíme na lineárně pružný materiál, kde fyzikální rovnice mají tvar

$$N = (EA)\Sigma, \quad V = (GA)\Gamma, \quad M = (EI)K, \quad (9)$$

kde normálová síla N , posouvající síla V a moment M jsou složky vnitřních sil, plocha průřezu A a moment setrvačnosti průřezu I jsou průřezové charakteristiky konstantní v průběhu zatěžování a Youngův modul pružnosti E a smykový modul pružnosti G jsou konstantní materiálové parametry. Vektor vnitřních sil \mathbf{N} může být vyjádřen v maticovém zápisu jako

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}^T (\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{n}), \quad (10)$$

kde

$$\mathbf{N} = (N, V, M)^T, \quad \mathbf{C} = \text{diag}(EA, GA, EI).$$

Pro definování slabého řešení statických podmínek rovnováhy je ještě zapotřebí vyjádřit virtuální deformaci jako

$$\begin{aligned} \delta \Sigma &= \delta [\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{e}_1] \\ &= \delta \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{u}) + \mathbf{\Lambda}^T \delta \mathbf{h}(\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{\Lambda}^T (\mathbf{W} \mathbf{h}(\mathbf{u}) \delta \psi + \mathbf{d}(\delta \mathbf{u})), \end{aligned} \quad (11)$$

kde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}(\delta \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{d\delta u}{ds} \\ \frac{d\delta v}{ds} \\ \frac{d\delta \psi}{ds} \end{pmatrix}, \quad \delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta \psi \end{pmatrix}.$$

Slabá formulace statické podmínky rovnováhy je následně definována jako

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \underbrace{\int_L (\delta \Sigma^T \mathbf{N}) ds}_{\mathbf{G}_{int}} - \underbrace{\int_L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^{ext} ds}_{\mathbf{G}_{ext}} = 0, \quad (12)$$

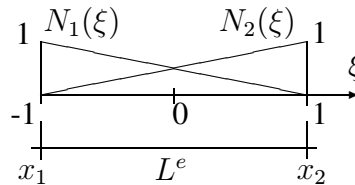
kde \mathbf{f}^{ext} je vektor vnějších sil působících na konstrukci.

Výraz pro virtuální práci vnitřních sil je pak

$$G_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_L ((\mathbf{d}(\delta \mathbf{u}) + \mathbf{W} \mathbf{h}(\mathbf{u}) \delta \psi)^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}^T (\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{n})) ds. \quad (13)$$

Aproximace Reissnerova modelu prutu metodou konečných prvků

Pro přehlednost následujících výpočtů použijeme co nejjednodušší aproximaci Reissnerova modelu pomocí prvku se dvěma uzly. Lineární bázové funkce na tomto prvku a jejich derivace jsou následující:



$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi), & \frac{dN_1}{d\xi} &= -\frac{1}{2}, \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi), & \frac{dN_2}{d\xi} &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Aproximace počátečního tvaru prutu je tedy uvažována jako

$$\begin{aligned} x^e &= N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2, \\ y^e &= N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 \end{aligned} \quad (15)$$

a Jakobián transformace z referenční soustavy souřadnic do soustavy x, y

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{L^e}{2}, \quad L^e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (16)$$

Orientace průřezu je definována úhlem

$$\alpha^e = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (17)$$

Isoparametrické aproximace posunů a rotací jsou uvažovány ve tvaru

$$\begin{aligned} u^e &= N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 \quad , \\ v^e &= N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 \quad , \\ \psi^e &= N_1(\xi)\psi_1 + N_2(\xi)\psi_2 \quad . \end{aligned} \quad (18)$$

Diskrétní aproximace jednotlivých složek zobecněné deformace pak mají tvar (srovnej s vyjádřením 7)

$$\begin{aligned} \Sigma^e &= \frac{1}{L^e} [(x_2 - x_1) + (u_2 - u_1)] \cos \left[\alpha^e + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) + \xi \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) \right] \\ &+ \frac{1}{L^e} [(y_2 - y_1) + (v_2 - v_1)] \sin \left[\alpha^e + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) + \xi \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) \right] - 1 \quad , \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^e &= -\frac{1}{L^e} [(x_2 - x_1) + (u_2 - u_1)] \sin \left[\alpha^e + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) + \xi \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) \right] \\ &+ \frac{1}{L^e} [(y_2 - y_1) + (v_2 - v_1)] \cos \left[\alpha^e + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) + \xi \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) \right] \quad , \end{aligned} \quad (20)$$

$$K^e = \frac{d\psi^e}{ds} = \frac{1}{L^e}(\psi_2 - \psi_1). \quad (21)$$

Prvek musí být schopen korektně popsat stav čistého ohybu (Kirchhoffova namáhání), kdy

$$\Sigma^e(\xi) = 0, \quad \Gamma^e(\xi) = 0 \quad \text{a} \quad K^e = \text{konst.} \neq 0 \quad \forall \xi \quad , \quad (22)$$

což je možné jen za podmínky, že výrazy (19) a (20) jsou nezávislé na ξ , resp. výraz

$$\frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) \quad (23)$$

je roven nule. To však podle vztahu (21) vyloučí zakřivení prutu:

$$K^e = \frac{1}{L^e}(\psi_2 - \psi_1) = 0 \quad , \quad (24)$$

což je v rozporu s požadavkem (22).

Nejjednodušším řešením výše popsaného problému je užití jednobodové Gaussovy integrace při vyjádření virtuální práce vnitřních sil (viz 13). V takovém případě jsou pro vyjádření zobecněných měř deformace v (19), (20) a (21) použity hodnoty ve středu prvku (kde $\xi = 0$), čímž je eliminován výraz závislý na ξ a tím i ohybové zamknutí. Zavedením následujících výrazů

$$\beta^e = \alpha^e + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) \quad , \quad (25)$$

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)_2 - (\cdot)_1 \quad (26)$$

je získána zjednodušená aproximace deformace, která ohybové zamknutí nezpůsobuje.

$$\begin{aligned} \Sigma^e &= \frac{1}{L^e}(\Delta x + \Delta u) \cos \beta^e + \frac{1}{L^e}(\Delta y + \Delta v) \sin \beta^e - 1 \quad , \\ \Gamma^e &= -\frac{1}{L^e}(\Delta x + \Delta u) \sin \beta^e + \frac{1}{L^e}(\Delta y + \Delta v) \cos \beta^e \quad , \\ K^e &= \frac{\Delta \psi}{L^e} \quad . \end{aligned} \quad (27)$$

Diskretizovaná statická rovnice na úrovni jednoho prvku má tvar

$$G^e(\mathbf{u}^e, \delta\mathbf{u}^e) = \int_{L^e} (\mathbf{d}(\delta\mathbf{u}) + \mathbf{W}\mathbf{h}(\mathbf{u})\delta\psi)^T \mathbf{\Lambda}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^T (\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{n}) ds - \int_{L^e} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}^{ext} ds = 0 \quad , \quad (28)$$

kde

$$\mathbf{d}(\delta\mathbf{u}) = \frac{1}{L^e} \begin{pmatrix} \delta u_2 - \delta u_1 \\ \delta v_2 - \delta v_1 \\ \delta\psi_2 - \delta\psi_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \frac{1}{L^e} \begin{pmatrix} \Delta x + \Delta u \\ \Delta y + \Delta v \\ \Delta\psi \end{pmatrix}, \quad \delta\psi = \frac{1}{2}(\delta\psi_1 + \delta\psi_2),$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \cos \beta^e & -\sin \beta^e & 0 \\ \sin \beta^e & \cos \beta^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta u_1 + \delta u_2 \\ \delta v_1 + \delta v_2 \\ \delta\psi_1 + \delta\psi_2 \end{pmatrix}.$$

Virtuální práce vnitřních sil se získá součtem příspěvků jednotlivých prvků

$$G(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \sum_e G^e(\mathbf{u}^e, \delta\mathbf{u}^e). \quad (29)$$

Lokalizací pak obdržíme vektor vnitřních sil

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_e \mathbf{f}_e^{int}(\mathbf{u}) \quad (30)$$

a soustavu nelineárních rovnic pro neznámé složky deformace \mathbf{u}

$$\mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad . \quad (31)$$

Diskretizované vyjádření každé složky vektoru \mathbf{f}^{int} je uvedeno v příloze B.1, kde je ukázána i odpovídající diskretizovaná formulace tečnové matice tuhosti \mathbf{K} . Postup řešení uvedené soustavy je popsán v příloze A.

3 Optimalizační úlohy pro konstrukce s nelineární kinematikou

Výše uvedený model prutu dává dostatečný základ pro popsání optimalizační úlohy konstrukce s materiálově elastickým, ale geometricky nelineárním chováním. Optimální návrh geometrických vlastností konstrukce nebo řízení jejího chování nastavením vnějšího zatížení je tak možné popsat shodným způsobem, jak ukáží následující odstavce.

Optimální návrh geometrických vlastností konstrukce

Problém optimálního návrhu představuje zvolení vlastností mechanického modelu a hledání geometrických vlastností prutů (např. jejich tloušťek) nebo počátečního tvaru konstrukce. Složky zatížení jsou v tomto případě uvažované jako dané konstantní hodnoty. Z matematického hlediska může být optimální návrh formulován jako minimalizace objektivní funkce $J(\cdot)$, která definuje požadované vlastnosti konstrukce. Taková funkce pak není závislá pouze na návrhových proměnných \mathbf{d} popisujících geometrii konstrukce (např. tloušťky prutů, počáteční tvar konstrukce), ale závisí také na jednotlivých složkách deformace konstrukce, jejich posunech a rotacích \mathbf{u} .

Tradiční přístup k popsání optimalizační úloze předpokládá, že návrhové proměnné prostřednictvím statických podmínek rovnováhy přímo definují odpovídající deformaci konstrukce. Proces optimalizace $\hat{J}(\cdot)$ pak lze formulovat jako

$$\hat{J}(\mathbf{d}) = \min J(\mathbf{u}(\mathbf{d}), \mathbf{d}) ; \quad \mathbf{u}(\mathbf{d}) : G(\mathbf{u}(\mathbf{d}), \delta\mathbf{u}) = 0 \quad . \quad (32)$$

Nejdůležitější vlastností tohoto přístupu je malý počet proměnných optimalizační úlohy, jelikož jsou mezi ně zahrnuty pouze návrhové proměnné. Složky deformace se pro každou konkrétní kombinaci hodnot geometrických proměnných vypočítají jako slabé řešení statických podmínek rovnováhy pomocí některé numerické iterační metody, např. inkrementální analýzy (viz příloha A). Pro takto získaný vektor návrhových proměnných a k nim iteračně dopočítaných složek deformace je následně vyčíslena hodnota objektivní funkce $J(\cdot)$. Zřejmou nevýhodou tohoto postupu je značná výpočtová náročnost, jelikož každé vyhodnocení objektivní funkce zde představuje další cyklus iteračního řešení nelineární soustavy rovnic (31).

Simultánní řešení prezentované optimalizační úlohy se opírá o využití Lagrangeových multiplikátorů. Problém podmíněné optimalizace (32) je tak převeden na následující úlohu:

$$\max_{\forall \lambda} \min_{\forall (\mathbf{u}, \mathbf{d})} L(\mathbf{u}, \mathbf{d}; \boldsymbol{\lambda}),$$

kde Lagrangian $L(\cdot)$ je definován jako

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{d}; \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{u}, \mathbf{d}) + G(\mathbf{u}, \mathbf{d}; \boldsymbol{\lambda}). \quad (33)$$

V rovnici (33) $\boldsymbol{\lambda}$ značí vektor Lagrangeových multiplikátorů, které zaujaly místo virtuálních rotací a posunů $\delta \mathbf{u}$ ve slabé formulaci statické podmínky rovnováhy (rovnice (12) a (13)) následujícím způsobem

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_L ((\mathbf{d}(\boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{W}\mathbf{h}(\mathbf{u})\lambda_\psi)^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{C} \boldsymbol{\Lambda}^T (\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{n})) ds, \quad (34)$$

kde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_u, \lambda_v, \lambda_\psi)^T$.

Zásadním rozdílem tohoto vyjádření oproti formulaci (32) je fakt, že složky deformace jsou zde uvažovány jako proměnné, které jsou nezávislé na návrhových proměnných a tudíž jsou zahrnuty mezi optimalizované proměnné, stejně tak jako jsou mezi ně zahrnuty i Lagrangeovy multiplikátory. Počet optimalizovaných proměnných je tak v tomto případě několikanásobně větší, než v případě tradiční formulace, což zvyšuje komplikovanost optimalizačního procesu. Naproti tomu významnou výhodou této formulace je značné zjednodušení jednotlivých vyhodnocení objektivní funkce. Tentokrát není zapotřebí další iterační metoda pro výpočet odpovídajících hodnot složek deformace, jelikož ty jsou produktem optimalizačního procesu.

Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky optimality (např. [13]) spojené s minimalizačním problémem v (33) můžou být zapsány jako

$$0 = \mathbf{r}_u^T \delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{d}) \delta \mathbf{u}, \quad (35)$$

$$0 = \mathbf{r}_d^T \delta \mathbf{d} = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{d}} \right)^T \delta \mathbf{d} = \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \right)^T \delta \mathbf{d} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d}, \quad (36)$$

$$0 = \mathbf{r}_\lambda^T \delta \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T \delta \boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{d}) - \mathbf{f}^{ext}]^T \delta \boldsymbol{\lambda}, \quad (37)$$

příčemž $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{u}}$ je tečná matice tuhosti.

V rovnici (35), (36) a (37) jsou vektory $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_d, \mathbf{r}_\lambda$ rezidua optimalizačního problému. Pak je možné definovat proces řešení následujícím způsobem:

$$\min_{\forall (\mathbf{u}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{r}^T \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{d}; \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_d, \mathbf{r}_\lambda). \quad (38)$$

Optimální řízení konstrukcí zatížením

Studované řízení konstrukcí zahrnuje řízení vnějším kvazistatickým zatížením, které je vybíráno tak, aby vyvolalo u konstrukce přímo optimální či požadovaný deformovaný tvar a nebo takový tvar, který je na základě jiných kritérií definován objektivní funkcí $J(\cdot)$. Parametry počátečního tvaru konstrukce jsou tu uvažovány jako známé zadané hodnoty. Za předpokladu, že zatížení konstrukce je nezávislé na deformaci konstrukce (zatížení je konzervativní), jsou řídicí proměnné přímo složky zatížení, které definují výraz pro práci vnějších sil jako

$$G^{ext}(\mathbf{c}; \delta \mathbf{u}) := \int_l \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{c} ds \quad , \quad (39)$$

kde \mathbf{c} je vektor obsahující pouze nenulové složky zatížení a \mathbf{F}_0 je matice, která definuje rozložení těchto složek do příslušných uzlů na diskretizované konstrukci.

Jak se obvykle provádí při použití tradičního postupu, pro každou konkrétní variaci řídicích proměnných \mathbf{c} je možné vyřešit soustavu podmínek rovnováhy a získat tak odpovídající deformaci konstrukce. Za tohoto předpokladu můžeme proces optimalizace řízení $\hat{J}(\cdot)$ popsat jako

$$\hat{J}(\mathbf{c}) = \min J(\mathbf{u}(\mathbf{c}), \mathbf{c}) ; \quad \mathbf{u}(\mathbf{c}) : G(\mathbf{u}(\mathbf{c}), \delta \mathbf{c}) = 0 \quad , \quad (40)$$

což je ekvivalentní formulace k formulaci optimálního návrhu v (32).

Také použití Lagrangeových multiplikátorů v problému optimálního řízení vede k formulaci, která má mnohé společné s odpovídající formulací optimálního návrhu, jak je vidět srovnáním rovnice (33) a rovnice následující

$$\max_{\forall \lambda} \min_{\forall (\mathbf{u}, \mathbf{c})} L(\mathbf{u}, \mathbf{c}; \lambda) ; \quad L(\mathbf{u}, \mathbf{c}; \lambda) = J(\mathbf{u}, \mathbf{c}) + G(\mathbf{u}, \mathbf{c}; \lambda). \quad (41)$$

Jisté rozdíly jsou ve vyjádření Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky optimality, které jsou při řešení úlohy optimálního řízení následující:

$$0 = \mathbf{r}_u^T \delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} = \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} + \lambda^T \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \delta \mathbf{u} \quad , \quad (42)$$

$$0 = \mathbf{r}_c^T \delta \mathbf{c} = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \delta \mathbf{c} = \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \delta \mathbf{c} - \lambda^T \mathbf{F}_0 \delta \mathbf{c} \quad . \quad (43)$$

$$0 = \mathbf{r}_\lambda^T \delta \lambda = \left(\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda} \right)^T \delta \lambda = [\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}, \mathbf{c}) - \mathbf{F}_0 \mathbf{c}]^T \delta \lambda \quad , \quad (44)$$

Nakonec může být výsledný proces řešení popsán stejným způsobem jako pro případ optimálního návrhu:

$$\min_{\forall (\mathbf{u}, \mathbf{c}, \lambda)} \mathbf{r}^T \mathbf{r} ; \quad \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{c}; \lambda) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_c, \mathbf{r}_\lambda). \quad (45)$$

4 Metoda řešení na principu genetických algoritmů

Genetické algoritmy patří mezi velice moderní a populární optimalizační metody. Jsou založené na analogii s procesy pozorovanými ve volné přírodě, jako je vývoj živých organismů v průběhu milionů let. Narozdíl od klasických gradientních metod pracují genetické algoritmy s takzvanou populací jedinců, která představuje skupinu přípustných řešení optimalizační úlohy. Na populaci jsou aplikovány genetické operátory křížení, mutace a selekce. Princip genetických algoritmů byl poprvé představen J. H. Hollandem v [3]. Od té doby byly tyto algoritmy s úspěchem použity k řešení širokého okruhu úloh (viz např. publikace D. E. Goldberga [2] a Z. Michalewicze [14]).

Genetické algoritmy v jejich původní podobě pracují s populací takzvaných chromozomů. To jsou binární řetězce reprezentující určitým způsobem přípustné řešení problému. V případě inženýrských optimalizačních úloh se však setkáváme s proměnnými z oboru reálných čísel. V úlohách zde prezentovaných představují tyto proměnné hodnoty složek zatížení nebo geometrické vlastnosti konstrukce (např. tloušťky prutů), které nabývají reálných hodnot. R. Storn v [17] představuje evoluční algoritmus nazvaný diferenciální evoluce, který je upraven tak, aby přímo pracoval s reálnými proměnnými. Binární řetězce představující chromozomy jsou zde nahrazeny řetězci reálných čísel, které je možné chápat jako reálné vektory. Ty pak umožňují vytvoření nového operátoru křížení, založeného na výpočtu rozdílu dvou mateřských chromozomů.

V této práci byl k optimalizaci použit algoritmus SADE¹ [11]. Reprezentace chromozomů jako reálných vektorů vychází z diferenciální evoluce a stejně tak i princip pro operátor křížení. Liší se ale od diferenciální evoluce tím, že stejně jako klasické genetické algoritmy používá operátor mutace a upravenou tradiční podobu operátoru selekce. V [4] bylo ukázáno, že algoritmus je schopen vyřešit i úlohy s vyšším počtem proměnných. Stejně tak si umí poradit i u problémů, které mají více lokálních optim a najít globální optimum, přestože gradient objektivní funkce nabývá vysokých hodnot a optimální hodnota se v blízkosti optima jeví jako izolovaná. V následujících odstavcích je stručný popis jednotlivých operátorů algoritmu. Detailnější popis je prezentován např. v [4]. Během práce na tomto soutěžním tématu bylo vyzkoušeno také několik modifikací algoritmu SADE a tak byla vyvinuta nová verze algoritmu nazvaná GRADE².

Algoritmus SADE

V tradičních evolučních metodách je prvním krokem vytvoření počáteční populace chromozomů, neboli první generace. Chromozomy jsou generovány jako náhodné vektory tak, že jejich jednotlivé složky jsou vybírány z rovnoměrného rozdělení na intervalu v předem zadaných mezích. Následuje opakování cyklu

- vytvoření dvojnásobku původního počtu chromozomů pomocí operátorů: mutace, lokální mutace a křížení,
- ohodnocení nových chromozomů,
- selekce chromozomů do nové generace o stejném počtu jedinců jako generace počáteční,

dokud nejsou splněny zvolené podmínky pro zastavení algoritmu.

V prezentovaných výpočtech pracoval algoritmus s populací o ' $PR \times n$ ' chromozomech, kde n představuje celkový počet proměnných objektivní funkce a PR je parametr algoritmu roven 10.

Necht' $CH_i(t)$ je i -tý chromozom v generaci t . Jeho vyjádření je možné zapsat jako

$$CH_i(t) = (ch_{i1}(t), ch_{i2}(t), \dots, ch_{in}(t)). \quad (46)$$

Vývoj populace chromozomů je zajišťován těmito operátory:

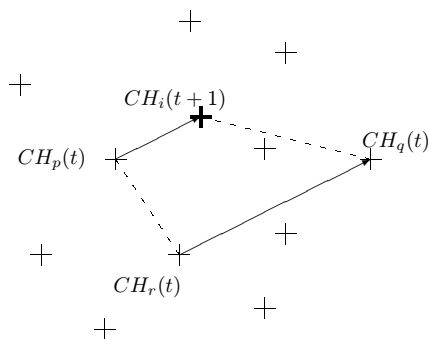
Operátor MUTATE

Pro vytvoření nového chromozomu tímto operátorem je nejprve náhodně vybrán z populace chromozom $CH_i(t)$. Dále je vytvořen náhodný vektor RP z rovnoměrného rozdělení nad definičním oborem objektivní funkce. Nový chromozom $CH_k(t+1)$ je pak získán podle předpisu:

$$CH_k(t+1) = CH_i(t) + MR(RP - CH_i(t)), \quad (47)$$

¹Simplified Atavistic Differential Evolution

²GRadiant Atavistic Differential Evolution



Obrázek 2: Schéma operátoru křížení u algoritmu SADE

kde MR je konstantní parametr algoritmu roven 0.5. Počet chromozomů vytvořených operátorem mutace je definován dalším parametrem algoritmu označovaným "radioaktivita", jenž je roven 0.1.

Operátor LOCAL_MUTATE

Lokální mutace vytváří nový chromozom vždy v blízkosti některého již existujícího jedince. Nejdříve tedy vybere náhodný chromozom z populace a změní všechny jeho složky o náhodné hodnoty z obvykle velice úzkého intervalu. Cílem operátoru je rychlejší dohledávání řešení s vyšší přesností. Jeho efektivitu lze ocenit zejména při optimalizaci funkcí, které se vyznačují vysokou hodnotou gradientu v okolí optima, kde malá změna hodnoty proměnných představuje velkou změnu funkční hodnoty, a je tedy užitečné zjemnit krok algoritmu. Počet chromozomů vytvořených operátorem lokální mutace je definován parametrem zvaným "lokální radioaktivita", jehož hodnota je rovna 0.1.

Operátor CROSS

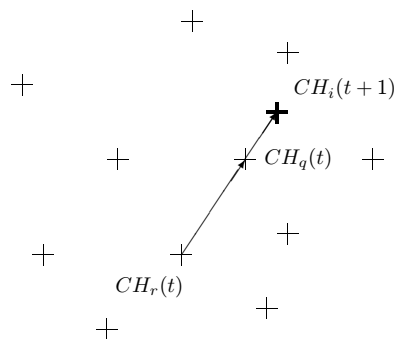
Úkolem operátoru křížení je doplnit jedince vzniklé operátory mutace či lokální mutace o takový počet nových chromozomů tak, aby bylo dosaženo celkem dvojnásobku počáteční velikosti populace. Nový chromozom $CH_i(t+1)$ je tu vytvořen podle následujícího schématu: z populace jsou náhodně vybrány tři chromozomy $CH_p(t)$, $CH_q(t)$ a $CH_r(t)$, je spočítán rozdíl vektorů $CH_q(t)$ a $CH_r(t)$, získaný diferenční vektor je přenásoben konstantou CR a nakonec přičten k chromozomu $CH_p(t)$, neboli

$$CH_i(t+1) = CH_p(t) + CR(CH_q(t) - CH_r(t)). \quad (48)$$

Toto schéma je zobrazeno také na obrázku 2. Každá složka nového chromozomu, která překročí pro ni zadanou mez definičního oboru objektivní funkce je nahrazena hodnotou právě oné překročené meze. Parametr CR má pravděpodobně největší vliv na chování algoritmu. Čím větší je hodnota parametru, tím pomaleji algoritmus konverguje, což je výhodné u problémů s větším počtem lokálních optim. Naopak nízké hodnoty parametru zvyšují rychlost konvergence algoritmu. Během prezentovaných výpočtů byla hodnota parametru nastavena na 0.3.

Operátor SELECT

Selekce představuje jádro genetického algoritmu. Jejím cílem je zajistit zlepšování populace vybíráním lepších jedinců do nové generace. Výběr je prováděn na principu inverzního turnaje, kdy je ze dvou náhodně vybraných chromozomů vyřazen ten horší, což se opakuje do té doby, než zůstane v populaci stejný počet jedinců jako na začátku cyklu. Šance horšího jedince přežít v populaci do další generace při tomto způsobu selekce zajišťuje užitečnou míru diverzity populace.



Obrázek 3: Schéma operátoru křížení u algoritmu GRADE

Algoritmus GRADE

Algoritmus GRADE vznikl drobnými úpravami algoritmu SADE. Myšlenka těchto úprav má dva hlavní cíle:

- zrychlení konvergence algoritmu na hladkých funkcích s jedním jediným optimmem,
- snížení počtu parametrů algoritmu SADE a omezení jejich vlivu na chování algoritmu, jelikož nastavení jejich hodnot tak, aby byl algoritmus efektivní, se pro různé optimalizační úlohy může výrazně lišit, přičemž jedinou metodou jejich nastavení je pouze metoda pokusu a omylu.

Pro připomenutí, parametry algoritmu SADE jsou: PR , definující počet chromozomů v populaci; MR a "radioaktivita", parametry operátoru mutace; "lokální radioaktivita", parametr operátoru lokální mutace a CR , parametr operátoru křížení. Ještě jeden parametr vystupuje v operátoru lokální mutace, který slouží k upřesnění intervalu pro definování posunů zvoleného jedince k vytvoření nového.

Ze zmíněných důvodů byla vytvořena nová verze algoritmu SADE, pojmenovaná GRADE. Nová verze si zachovává původní schéma a rozdíly oproti SADE jsou jen následující:

- zrušení operátoru lokální mutace,
- parametr MR není nadále konstatou algoritmu, ale při tvorbě každého nového chromozomu je jeho hodnota vybírána náhodně z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$,
- schéma operátoru křížení je nahrazeno následujícím schématem:

$$CH_i(t+1) = \max(CH_q(t); CH_r(t)) + SG \cdot CR(CH_q(t) - CH_r(t)), \quad (49)$$

kteří je zobrazeno na obrázku 3. Operátor tentokrát pracuje pouze se dvěma náhodně vybranými chromozomy z populace $CH_q(t)$ a $CH_r(t)$. Jejich rozdílem vznikne diferenční vektor, který je přenásoben parametrem CR a jeho směr případně změněn přenásobením součinitelem SG . Nový chromozom $CH_i(t+1)$ je získán součtem výsledného diferenčního vektoru a lepšího z chromozomů $CH_q(t)$ a $CH_r(t)$. Parametr CR již také není konstatním parametrem algoritmu, ale je při každém křížení generován náhodně z intervalu $\langle 0, CL \rangle$, kde CL je nový parametr algoritmu. Nastavení hodnoty tohoto parametru má již ovšem menší vliv na chování algoritmu, než jak tomu byly u parametru CR . Pokud není u konkrétních výpočtů upřesněno jinak, je jeho hodnota rovna 1. Součinitel SG je roven -1 pokud je chromozom $CH_r(t)$ lepší než $CH_q(t)$ a roven 1 v ostatních případech.

Parametry algoritmu GRADE jsou tedy následující: PR , "radioaktivita" a CL . Hodnota parametru PR je pro tento algoritmus též zvolena rovna 10 a parametr "radioaktivita" je nastaven na hodnotu 0.2.

5 Numerické příklady

Příklady optimálního řízení konstrukcí zatížením

Nejčastějším předmětem problémů optimálního řízení je najít takové zatížení, které vyvolá požadovanou deformaci \mathbf{u}^d . Objektivní funkce $J(\cdot)$ příslušná tomuto problému je

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_L \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^d\|^2 ds \quad . \quad (50)$$

V následující části jsou ukázány výsledky řešení této úlohy formulované tradičně pro výpočet inkrementální analýzy při každém vyhodnocení objektivní funkce. Dále jsou předvedeny výsledky pro simultánní formulaci úlohy založené na Lagrangeových multiplikatorech.

Tradiční formulace

Při použití tradiční formulace úlohy a genetického algoritmu jako maximalizační metody je možné popsat proces řešení $\hat{J}(\cdot)$ jako

$$\hat{J}(\mathbf{c}) = \max [-J(\mathbf{u}(\mathbf{c}))] \quad (51)$$

s

$$J(\mathbf{u}(\mathbf{c})) = \frac{1}{2} \int_L \|\mathbf{u}(\mathbf{c}) - \mathbf{u}^d\|^2 ds; \quad \mathbf{u}(\mathbf{c}) : G(\mathbf{u}(\mathbf{c}), \mathbf{c}; \delta \mathbf{u}) = 0, \quad (52)$$

kde deformace $\mathbf{u}(\mathbf{c})$ je vypočítána inkrementální analýzou o sto krocích jako řešení soustavy podmínek rovnováhy $G(\cdot)$.

Ve výpočtech použijeme zjednodušenou diskretní aproximaci objektivní funkce

$$J = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n_{el}} \sum_{j=1}^2 [(u_{ij} - u_{ij}^d)^2 + (v_{ij} - v_{ij}^d)^2] L_i \quad , \quad (53)$$

kde n_{el} je počet konečných prvků, L_i je počáteční délka i -tého prvku, u_{ij}, v_{ij} jsou složky deformace vypočítané inkrementální analýzou a u_{ij}^d, v_{ij}^d jsou složky požadované deformace.

Je možné poznamenat, že v reálném životě nenastane často situace, kdy můžeme určit všechny složky požadované deformace. Z tohoto důvodu jsou v předkládaném příkladu rotace ve všech uzlech uvažovány jako neznámé.

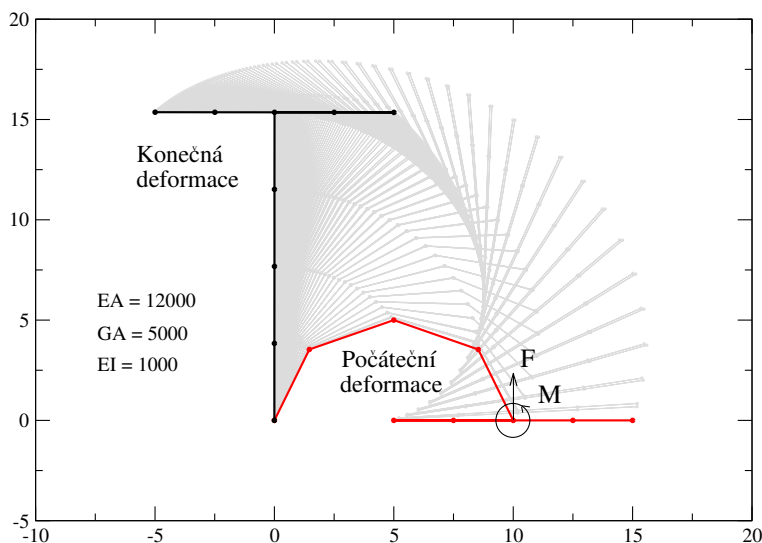
Následují dva příklady optimálního řízení zatížením ilustrující proces řešení (51) s využitím genetických algoritmů popsaných v předcházející kapitole. Zvolené hodnoty parametrů algoritmů jsou zaznamenány v tabulce 1. K získání představy o charakteru řešené úlohy z hlediska optimalizace mohou posloužit řezy objektivní funkcí v místě optima, které jsou ukázány na obrázcích v příloze C.

Algoritmus SADE	Algoritmus GRADE
$PR = 10$	$PR = 10$
"radioaktivita" = 0.1	"radioaktivita" = 0.1
$MR = 0.5$	$CL = 1.0$
"lokální radioaktivita" = 0.1	
$CR = 0.3$	

Tabulka 1: Parametry algoritmů SADE a GRADE.

První příklad se týká jednoduché konstrukce ve tvaru písmene T se zatížením o dvou složkách. Jedná se tedy o maximalizační problém o dvou neznámých. Mechanické vlastnosti

konstrukce, její počáteční a požadovaná deformace a rozmístění zatížení je zobrazeno na obrázku 4.



Obrázek 4: Písmeno T - počáteční a požadovaná deformace konstrukce a rozmístění jejího zatížení.

Jelikož uváděné úlohy mají za cíl vyzkoušet popsany proces řešení a ukázat jeho efektivitu, bylo jejich zadání vytvořeno následovně. Metodou pokusu a omylu bylo nalezeno zatížení, jež vyvolalo uspokojivou deformaci (která byla vypočítána inkrementální metodou) a ta byla nadále označena za požadovanou s tím, že zatížení jí odpovídající bylo známé. V případě "písmene T" jsou optimální hodnoty složek vektoru zatížení $\mathbf{c} = (F, M)$ a jejich minimální a maximální přípustné hodnoty zaneseny do tabulky 2.

Složka	Optimální	Minimální	Maximální
F	40	10	60
M	205	175	225

Tabulka 2: Hodnoty zatížení konstrukce ve tvaru písmene T.

Protože genetický algoritmus je stochastická metoda, je třeba spustit výpočet například stokrát pro omezení vlivu náhody. Jelikož není možné najít optimální hodnotu objektivní funkce absolutně přesně, je výpočet vždy zastaven, jakmile dosáhne hodnoty maximalizované funkce $-J(\cdot)$ větší než -10^{-7} , neboli jakmile dosáhne optimální hodnoty, která je rovna nule s přesností větší než 10^{-7} . Za těchto podmínek byl při každém výpočtu zaznamenán počet vyhodnocení objektivní funkce a nalezené hodnoty jednotlivých složek zatížení. Statistika z výsledků výpočtů je zaznamenána v tabulkách 3 a 4³.

Algoritmus	Minimální	Maximální	Průměrný
SADE	240	2860	648.8
GRADE	280	1180	512.4

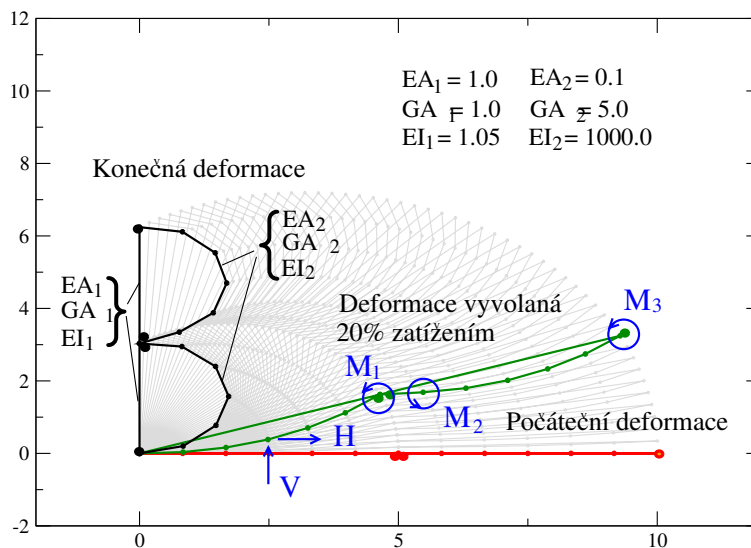
Tabulka 3: Písmeno T - potřebný počet vyhodnocení objektivní funkce $-J(\cdot)$.

³Statistika výsledků v této tabulce byla provedena na výsledcích algoritmu GRADE. Výpočet prováděný oběma algoritmy byl zastaven při dosažení stejné přesnosti optimální hodnoty objektivní funkce $-J(\cdot)$ a proto i chyby v nalezených hodnotách zatížení se významně neliší.

Složka	Minimální	Maximální	Průměrná	Směrodatná odchylka
F	39.912	40.084	40.002	0.0474
M	205.00	205.00	205.00	0.001

Tabulka 4: Písmeno T - nalezené hodnoty zatížení.

Druhý příklad se týká o něco složitější konstrukce ve tvaru písmene B se zatížením o pěti složkách. Jde tu tedy o maximalizační problém o pěti proměnných. Mechanické vlastnosti konstrukce, její počáteční a požadovaná deformace a rozmístění zatížení jsou zobrazeny na obrázku 5.



Obrázek 5: Písmeno B - počáteční a požadovaná deformace konstrukce a rozmístění jejího zatížení.

V případě "písmene B" jsou optimální a přípustné minimální a maximální hodnoty jednotlivých složek vektoru zatížení $\mathbf{c} = (H, V, M_1, M_2, M_3)$ zapsány v tabulce 5.

Složka	Optimální	Minimální	Maximální
H	0.04	0.025	0.050
V	-0.05	-0.06	-0.035
M_1	0.782	0.6	0.9
M_2	-0.792	-0.9	-0.65
M_3	0.792	0.6	0.85

Tabulka 5: Hodnoty zatížení konstrukce ve tvaru písmene B.

Každý výpočet byl zastaven při dosažení hodnoty objektivní funkce větší než -10^{-6} . Výsledky jsou uvedeny v tabulkách 6 a 7 stejným způsobem jako v předchozím příkladu "písmene T".

Algoritmus	Minimální	Maximální	Průměrný
SADE	2600	165800	46887.5
GRADE	1900	117850	20632.0

Tabulka 6: Písmeno B - potřebný počet vyhodnocení objektivní funkce $-J(\cdot)$.

Složka	Minimální	Maximální	Průměrná	Směrodatná odchylka
H	0.039638	0.040353	0.039977	0.0002218
V	-0.050265	-0.49733	-0.049998	0.0001590
M_1	0.78178	0.78221	0.78199	0.000121
M_2	-0.79237	-0.79163	-0.79202	0.000214
M_3	0.79180	0.79224	0.79200	0.000092

Tabulka 7: Písmeno B - nalezené hodnoty zatížení.

Na obrázcích v příloze D je zachycen průběh konvergence algoritmu SADE při řešení úlohy s "písmenem B". Tamtéž je i poznámka týkající se jistých potíží při výpočtech algoritmem SADE.

Na základě již uvedených výsledků lze vyjádřit domněnku, že algoritmus GRADE je z obou metod efektivnější a proto je při řešení dalších úloh používán už pouze on.

Simultánní formulace

Simultánní formulace problému optimálního řízení je ukázána na úloze s konstrukcí ve tvaru písmene T, popsané v předcházející kapitole. Minimalizovaná funkce $J(\cdot)$ je definovaná jako

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{c}) = \alpha_1 \frac{1}{2} \int_L \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^d\|^2 ds \quad (54)$$

s $\alpha_1 = 10^3$.

Proces řešení $\hat{L}(\cdot)$ je formulován jako

$$\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \max_{\forall(\mathbf{u}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda})} [-\mathbf{r}^T \mathbf{r}], \quad (55)$$

kde vektor \mathbf{r} je definován v rovnicích (44) - (45). Jeho diskretizovaná podoba je uvedena v příloze B.2.

Optimalizované proměnné jsou tentokrát: složky zatížení (2 proměnné), složky deformace (21 proměnných) a Lagrangeovy multiplikátory (21 proměnných), což dává celkem 44 proměnných optimalizační úlohy. Mezní přípustné hodnoty pro složky zatížení jsou uvedeny v předcházející kapitole v tabulce 2. Intervaly přípustných hodnot složek deformace jsou vyjádřeny vztahem k jejich požadovaným hodnotám \mathbf{u}_d jako

$$\mathbf{u}_{min} = (1 - EP)\mathbf{u}_d, \quad (56)$$

$$\mathbf{u}_{max} = (1 + EP)\mathbf{u}_d, \quad (57)$$

kde EP představuje takzvanou "chybu v odhadu konečné deformace. Pro následující výpočty je jeho hodnota stanovena $EP = 0.00001$. Mezní hodnoty Lagrangeových multiplikátorů jsou nastaveny pevně na hodnotách ± 0.000225 .

K optimalizaci je použit algoritmus GRADE s hodnotami parametrů: $PR = 20$, $CL = 1.0$ a "radioaktivita" = 0.2. Výpočet je spuštěn stokrát a pokaždé zastaven v okamžiku, kdy algoritmus nalezne řešení s hodnotou výrazu $\mathbf{r}^T \mathbf{r}$ větší než -0.1 . Zaznamenávána je opět přesnost nalezených složek zatížení a počet potřebných vyhodnocení optimalizovaného výrazu $\mathbf{r}^T \mathbf{r}$. Statistika ze získaných výsledků je uvedena v tabulce 8.

Pro následující sérii výpočtů je optimalizační úloha zjednodušena redukováním Lagrangeových multiplikátorů jako optimalizovaných proměnných. Tato redukce je možná díky vyjádření závislosti těchto multiplikátorů na složkách deformace \mathbf{u} a zatížení \mathbf{c} z rovnice (42)

	Minimum	Maximum	Průměr	Směrodatná odchylka
F	39.938	40.083	40.004	0.0284
M	204.85	205.09	204.99	0.0437
počet vyhodnocení výrazu $-\mathbf{r}^T \mathbf{r}$	36960	360800	102203	—

Tabulka 8: Získané výsledky simultánní optimalizace zatížení - série 1.

následujícím způsobem:

$$\boldsymbol{\lambda} = - \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{K}^{-1} \quad (58)$$

Vektor reziduí \mathbf{r} se tak zjednoduší na $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_\lambda)$ a počet optimalizovaných proměnných klesne na 23. Všechny ostatní parametry výpočtu jsou ponechány stejné jako pro předchozí sérii. Statistika ze získaných výsledků je uvedena v tabulce 9.

	Minimum	Maximum	Průměr	Směrodatná odchylka
F	39.973	40.034	40.000	0.0135
M	204.96	205.05	205.00	0.0192
počet vyhodnocení výrazu $-\mathbf{r}^T \mathbf{r}$	14720	201480	37701	—

Tabulka 9: Získané výsledky simultánní optimalizace zatížení - série 2.

Příklad optimálního návrhu geometrických vlastností konstrukce

Problém optimálního návrhu konstrukce zahrnuje mnohem širší a proměnlivější skupinu úloh než problém optimálního řízení. Pro úlohy optimálního návrhu bývá obvykle typické, že vstupními konstantami jsou známé složky zatížení. Méně často se už setkáme s případem, kdy je rovněž známa i požadovaná deformace, jelikož objektivní funkce se častěji opírá o jiný typ požadavků, než je docílení požadovaného tvaru konstrukce. Právě jeden takový příklad byl zvolen pro ilustraci, a to na konstrukci co nejjednodušší, s objektivní funkcí velice jednoduchou a se snadno představitelným fyzikálním významem.

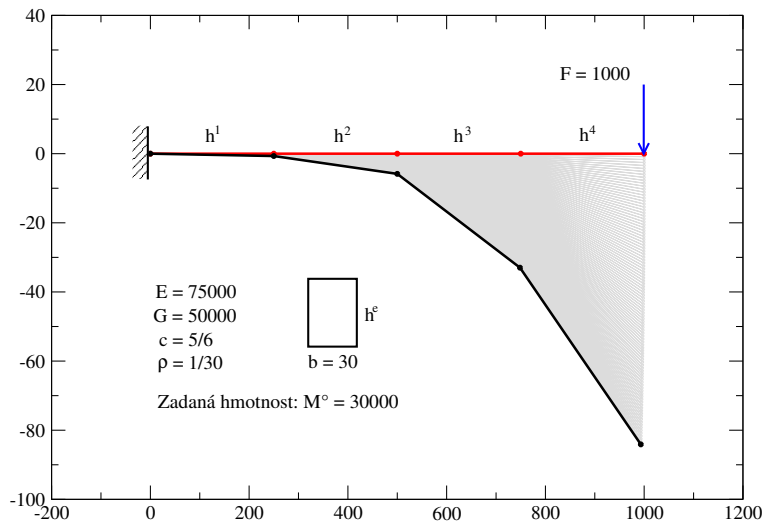
Zvolenou konstrukcí je konzola proměnlivého průřezu, přičemž předmětem optimalizace je právě jeho tloušťka. Při aproximaci metodou konečných prvků je konzola rozdělena na čtyři prvky. Tloušťka prutu na úseku jednoho prvku je pak uvažovaná jako konstantní. Optimalizační proměnné \mathbf{d} tedy představují tloušťky prutů na jednotlivých prvcích a je možné je zapsat do vektoru $\mathbf{d} = \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4)$, což znamená, že úloha představuje optimalizační problém o čtyřech proměnných.

Předmětem řešení je minimalizace deformace vyvolané daným zatížením (viz obrázek 6) za podmínky, že hmotnost konstrukce má být $M_0 = 30000$. Výraz pro výpočet hmotnosti je následující:

$$M = \int_L \rho b h \, ds \quad , \quad (59)$$

kde $\rho = 1/30$ a $b = 30$.

Narozdíl od všech příkladů optimálního řízení není v tomto případě předem známé optimální řešení. Dané jsou jen mezní přípustné hodnoty optimalizačních proměnných, které jsou uvedené v tabulce 10.



Obrázek 6: Počáteční tvar konstrukce, její zatížení a materiálové vlastnosti.

	h_1	h_2	h_3	h_4
Minimální	30	30	15	5
Maximální	60	60	35	25

Tabulka 10: Mezní přípustné hodnoty tlouštěk prutů jednotlivých prvků.

Tradiční formulace

V tradičně formulované úloze má objektivní funkce následující podobu:

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{d}) = -\alpha \frac{1}{2} \int_L \|\mathbf{u}\|^2 ds - (M - M_0)^2, \quad (60)$$

kde konstanta α má hodnotu $\alpha = 1$.

Diskretizovaná formulace objektivní funkce je pak:

$$J = -\alpha \sum_{i=0}^{n_{el}} \sum_{j=0}^6 u_{ij}^2 L_i - \left(\rho b \sum_{i=0}^{n_{el}} (h_i L_i) - M_0 \right)^2, \quad (61)$$

kde $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}, u_{i6})$ je vektor deformace na jednom prvku a kde n_{el} znamená počet prvků.

K optimalizaci je použit algoritmus GRADE s parametry $PR = 10$, $CL = 1.0$ a "radioaktivita" = 0.2. Pro každou variaci tlouštěk prutů je spočtena odpovídající deformace inkrementální analýzou o sto kroků. Při prvním výpočtu byla nalezena maximální hodnota funkce

$$J_{opt}(\cdot) = -627646.$$

Poté byl spuštěn výpočet ještě stokrát a zastaven při dosažení uvedené hodnoty s přesností 1, resp. při dosažení hodnoty funkce $J_{opt}(\cdot)$ větší než -627647 . Statistika ze získaných výsledků je uvedena v tabulce 11.

	Minimum	Maximum	Průměr	Směrodatná odchylka
h_1	43.772	43.807	43.790	0.0094
h_2	35.914	35.949	35.932	0.0088
h_3	26.313	26.346	26.328	0.0082
h_4	14.184	14.210	14.197	0.0064
počet vyhodnocení funkce $-J(\cdot)$	1440	9960	3497	—

Tabulka 11: Výsledky tradičního řešení optimalizace návrhu.

Simultánní formulace

Pro simultánní formulaci úlohy optimálního návrhu konzoly se v předpisu objektivní funkce vyskytuje pouze výraz vyjadřující velikost deformace

$$J(\mathbf{u}) = -\alpha_1 \frac{1}{2} \int_L \|\mathbf{u}\|^2 ds, \quad (62)$$

kde parametr $\alpha_1 = 10^{-3}$.

Lagrangeovy multiplikátory nejsou uvažovány jako optimalizované proměnné, ale jsou počítány s užitím vztahu (35) jako

$$\boldsymbol{\lambda} = - \left(\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{K}^{-1}. \quad (63)$$

Podmínka dané hmotnosti konzoly je obsažena až ve vektoru reziduí \mathbf{r} , jako její další složka v podobě

$$r_{lim} = \alpha_2 (M - M_0), \quad (64)$$

kde parametr $\alpha_2 = 1$.

Proces řešení úlohy $\hat{L}(\cdot)$ je definován jako

$$\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{d}) = \max_{\forall(\mathbf{u}, \mathbf{c})} [-\mathbf{r}^T \mathbf{r}]; \quad \mathbf{r} = (\mathbf{r}_d, \mathbf{r}_\lambda, r_{lim}), \quad (65)$$

kde $\mathbf{r}_d, \mathbf{r}_\lambda$ jsou definovány rovnicemi (36) a (37) a diskretizovaná podoba vektoru \mathbf{r} je uvedena v příloze B.3.

Optimalizované proměnné jsou tedy složky deformace (15 proměnných) a tloušťky prutů jednotlivých prvků (4 proměnné), což je celkem 19 proměnných.

Mezní přípustné hodnoty tlouštěk prutů zůstaly stejné jako v tabulce 10. Pro získání mezních hodnot deformace je použito výsledku řešení tradiční formulace této úlohy:

$$\mathbf{h}^{init} = (43.79, 35.93, 26.32, 14.20); \quad M^{init} = 30060 \quad (66)$$

a pro dané zatížení (viz obrázek 6) je s užitím inkrementální analýzy spočítána odpovídající deformace \mathbf{u}^{init} . Mezní přípustné hodnoty deformace \mathbf{u}_{min} a \mathbf{u}_{max} jsou dané výrazem

$$\mathbf{u}_{min} = (1 - EP)\mathbf{u}^{init}, \quad (67)$$

$$\mathbf{u}_{max} = (1 + EP)\mathbf{u}^{init}, \quad (68)$$

kde hodnota parametru EP je rovna 0.0001.

Jako maximalizační metoda je opět použit algoritmus GRADE s parametry $PR = 20$, $CL = 2.0$ a "radioaktivita" = 0.1. Výpočet byl spuštěn stokrát a pokaždé zastaven při dosažení hodnoty výrazu $-\mathbf{r}^T \mathbf{r}$ větší než -10000.0 . Statistika ze získaných výsledků je uvedena v tabulce 12.

	Minimum	Maximum	Průměr	Směrodatná odchylka
h_1	43.782	43.794	43.789	0.0026
h_2	35.925	35.935	35.930	0.0021
h_3	26.315	26.324	26.319	0.0019
h_4	14.197	14.202	14.200	0.0010
počet vyhodnocení funkce $-J(\cdot)$	111340	968240	313006	—

Tabulka 12: Výsledky simultánního řešení optimalizace návrhu.

Na tomto příkladu optimálního návrhu konstrukce je těžší porovnávat efektivitu tradiční či simultánní formulace a to hned z několika důvodů. Prvním z nich je již rozdílná formulace objektivní funkce $J(\cdot)$, jelikož pro různé formulace úlohy jsou rozdílným způsobem definované váhy mezi výrazem pro velikost konečné deformace a podmínkou definující hmotnost konzoly, což vede k rozdílným řešením úlohy. Dalším důvodem je rozdíl v množství vstupních informací, které ten který postup vyžaduje. Přesto při srovnání výsledků se zdá být simultánní formulace efektivnější než tradiční.

6 Závěr

V této soutěžní práci je nejprve představen tradiční postup řešení problému optimálního řízení, který je tvořen dvěma cykly na různých úrovních řešení. V prvním z nich je použito iteračního postupu inkrementální analýzy k výpočtu vektoru posunů a rotací na základě zvolených hodnot zatížení ze soustavy nelineárních statických podmínek. Tento problém nelineární mechaniky je již formulován tak, aby na optimalizační úrovni umožnil použití moderních numerických metod založených na genetických algoritmech. V optimalizačním cyklu pak vyhodnocení objektivní funkce pro každou konkrétní kombinaci proměnných představuje průběh jednoho cyklu inkrementální analýzy. Pro optimalizaci je nejdříve použit genetický algoritmus SADE (viz [4]) a posléze jeho nově upravená verze nazvaná GRADE, která se liší využitím operátoru založeném na zjednodušeném výpočtu gradientu. V kapitole 5 je ukázáno srovnání těchto dvou algoritmů na dvou příkladech optimálního řízení pro dvě, resp. pět proměnných. Z výsledků⁴ je patrné, že v obou případech je algoritmus GRADE rychlejší a tudíž výhodnější. Poznámky k obtížím, které vznikly při aplikaci těchto algoritmů, jsou zmíněny v příloze D.

V druhé části soutěžní práce je věnována pozornost takzvanému simultánnímu řešení problému optimalizace řízení. V tomto případě jsou složky zatížení a deformace uvažovány jako nezávislé proměnné. Statické podmínky rovnováhy a výraz minimalizované objektivní funkce jsou uvedeny do vzájemného vztahu pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Problém nelineární mechaniky a optimalizace je tak řešen současně na jedné úrovni, v jediném optimalizačním cyklu. Na příkladu v kapitole 5 je ukázáno, že taková formulace úlohy optimálního řízení může být efektivní, ovšem za předpokladu, že se značnou přesností známe všechny výsledné složky deformace. Neboli, pokud se podaří správně předpovědět přibližné hodnoty složek deformace s dostatečnou přesností, může být řešení takto simultánně formulované úlohy efektivnější ve srovnání s tradičním postupem. Tento názor dokládají výsledky v tabulce 13, kde jsou porovnány výsledky pro obě formulace optimálního řízení na úloze o dvou proměnných. Porovnání bylo provedeno jednak ve výpočtové náročnosti obou způsobů a jednak i v přesnosti nalezených hodnot složek zatížení ze souboru sta různých spuštění výpočtu. Srovnání výpočtové náročnosti se opírá o průměrný počet vyhodnocení objektivní funkce. Nicméně je nutné znovu připomenout, že jedno vyhodnocení pro tradičně formulovanou úlohu představuje iterační výpočet inkrementální analýzou, což v našem případě znamená stonásobný výpočet soustavy o 21 lineárních

⁴Pro výpočty v předkládané práci byl vyvinut software v programovacím jazyce C/C++.

rovnících. Naproti tomu jedno vyhodnocení v první sérii výpočtů simultánní formulace úlohy představuje jediné vyhodnocení výrazů ve vektoru r . V druhé sérii je už ovšem během jednoho vyhodnocení řešena jedna soustava o 21 lineárních rovnicích pro získání hodnot Lagrangeových multiplikátorů. Proto byly všechny výpočty provedeny na stejném počítači, kde byla provedena i časová studie prováděných operací. V tabulce 13 je tedy uvedeno i porovnání časové náročnosti jednotlivých postupů řešení problému optimálního řízení.

formulace	tradiční	simultánní - série 1	simultánní - série 2
směrodatná odchylka pro F	0.0474	0.0284	0.0135
směrodatná odchylka pro M	0.001	0.044	0.019
počet vyhodnocení	512.4	102203	37701
jedno vyhodnocení [s]	0.01518	0.0000718	0.0001423
doba výpočtu [s]	7.778	7.338	5.365

Tabulka 13: Srovnání výsledků získaných při řešení úlohy optimálního řízení o dvou proměnných formulované tradičním a simultánním způsobem.

Třetí a poslední etapa předkládané práce byla zaměřena na formulování problému optimálního návrhu konstrukce oběma výše popsány způsoby. Na základě zkušeností z předchozích výpočtů byl pro případ optimálního návrhu zvolen jednoduchý příklad, na kterém je možné snadno ukázat principy řešení tohoto typu úloh. I zde výsledky ukázaly, že řešení simultánně formulované úlohy je výhodnější než řešení úlohy formulované tradičně. Srovnání výsledků obou postupů je uvedeno v tabulce 14.

	tradiční formulace	simultánní formulace
směrodatná odchylka pro h_1	0.0094	0.0026
směrodatná odchylka pro h_2	0.0088	0.0021
směrodatná odchylka pro h_3	0.0082	0.0019
směrodatná odchylka pro h_4	0.0064	0.0010
počet vyhodnocení	$3497 \times 100 = 349700$	313006

Tabulka 14: Srovnání výsledků získaných při řešení úlohy optimálního návrhu konstrukce formulované tradičním a simultánním způsobem.

Jeden ze zásadních rozdílů mezi problémy optimálního návrhu a optimálního řízení je ve vstupních zadávaných veličinách. V případě optimálního návrhu může často nastat případ, kdy nebude zadána požadovaná deformace, která představuje současně i informaci o konečné deformaci. Pokud na konečnou deformaci nejsou kladeny požadavky, nastávají obtíže při formulování úlohy k simultánnímu řešení, kde přibližný odhad konečné deformace představuje nezbytný vstupní parametr úlohy. V takovém případě je třeba využít jinou metodu, výpočtově nenáročnou, která je schopna poskytnout třeba jen velice přibližně odhad konečné deformace.

Motivací další práce by měla být snaha nalezení optimalizační metody, která při minimální výpočtové náročnosti dokáže poskytnout hrubý odhad řešení. Takovou metodu by poté bylo možné kombinovat se simultánně formulovaným optimalizačním problémem. Ten by již v zúženém prostoru přípustných řešení dokázal vyřešit přesněji genetický algoritmus GRADE. Příkladem takové výpočtově nenáročné metody by mohla být difuzní aproximace, která využívá při řešení tzv. plochu odezvy. Jeden příklad výsledků této metody je uveden v příloze E.

Závěry a výsledky této soutěžní práce byly též publikovány v [8].

Reference

- [1] J. Drchal, A. Kučerová, and J. Němeček. Optimizing synaptic weights of neural networks. In B.H.V. Topping and Z. Bittnar, editors, *Proceedings of the Third International Conference on Engineering Computational Technology*, Stirling, United Kingdom, 2002. Civil-Comp Press. paper 86.
- [2] D.E. Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley, 1989.
- [3] J. H. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems*. University of Michigan, Ann Arbor, MI, Internal report, 1975.
- [4] O. Hrstka and A. Kučerová. Improvements of the different types of binary and real coded genetic algorithms preventing the premature convergence. *Advances in Engineering Software in press*, 2003.
- [5] O. Hrstka, A. Kučerová, M. Lepš, and J. Zeman. A competitive comparison of different types of evolutionary algorithms. *Computers & Structures*, 81(18–19):1979–1990, August 2003.
- [6] A. Ibrahimbegović and F. Frey. Finite element analysis of linear and non-linear planar deformations of elastic initially curved beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:3239–3258, 1993.
- [7] A. Ibrahimbegovic, F. Frey, G. Fonder, and Ch. Massonnet. A variational formulation of shallow shells. In E. et al. (eds.) Onate, editor, *Finite elements in the 1990's*, pages 68–79. Springer, Berlin, 1991. A Book dedicated to O. C. Zienkeiwicz.
- [8] A. Ibrahimbegović, C. Knopf-Lenoir, A. Kučerová, and P. Villon. Optimal design and optimal control of elastic structures undergoing finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering in press*, 2003.
- [9] M. Kleiber, H. Antunez, T.D. Hein, and P. Kowalczyk. Parameter sensitivity in nonlinear mechanics; theory and finite element computations. *John Wiley & Sons*, 1997.
- [10] V. Kuráž, A. Kučerová, and M. Kuráž. Využití genetických algoritmů pro aproximaci retenčních čar. In M. Sáňka and J. Kulhavý, editors, *Sborník konference dny 2003*, pages 107–111. Mendelova zemědělská universita v Brně, 2003.
- [11] A. Kučerová and O. Hrstka. Homepage of SADE.
<http://klobouk.fsv.cvut.cz/~ondra/sade/sade.html>.
- [12] A. Kučerová, M. Mühlbauer, and Z. Bittnar. Parameter identification for rock long term behaviour simulation. In *NAFEMS world congress 2003*, Orlando, Florida, U.S.A., 2003.
- [13] D.G. Luenberger. Linear and nonlinear programming. *Addison-Wesley Publ.*, 1984.
- [14] Z. Michalewicz. *Genetic Algorithms+Data Structures=Evolution Programs*. Springer-Verlag, 1992.
- [15] E. Reissner. On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem. *Journal Appl. Math. Phys.*, 23:795–804, 1972.
- [16] B. Rousselet. A finite strain rod model and its design sensitivity. *Mechanics of Structures and Machines*, 20:415–432, 1992.

- [17] R. Storn. On the usage of differential evolution for function optimization. In *Biennial Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society*, pages 519–523, 1996.
- [18] G. Strang. Introduction to applied mathematics. *Wellesley-Cambridge Press*, 1986.
- [19] D.A. Tortorelli and P. Michaleris. Design sensitivity analysis: overview and review. *Inverse Problems in Engineering*, 1:71–105, 1994.

Příloha A : Metoda řešení problému nelineární mechaniky

Tradiční úloha stavební mechaniky uvažuje jako zadané hodnoty mechanické vlastnosti konstrukce (které jsou obsaženy v matici tuhosti) a na ní působící zatížení. Poté bývá použita některá numerická či analytická metoda pro výpočet odpovídajících posunů a rotací konstrukce. Řešení úlohy představuje výpočet soustavy podmínek rovnováhy:

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^{ext}. \quad (69)$$

V případě geometricky nelineární mechaniky je vektor vnitřních sil nelineární funkcí posunů \mathbf{u} .

Nejčastěji užívanou metodou řešení systému nelineárních rovnic je inkrementální analýza. Tato metoda zavádí nový parametr označovaný jako pseudo-čas "t" nebo parametr zatížení

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{f}^{ext}(t); \quad t \in [0, T]. \quad (70)$$

Poté je zvolena diskretizace časového intervalu

$$[0, T] = \bigcup_{n=1}^{n_{inc}} [t_n, t_{n+1}]. \quad (71)$$

Zatížení jako funkce pseudo-času je definováno jako

$$\mathbf{f}^{ext}(t) = \mathbf{f}_0^{ext} g(t); \quad g(T) = \frac{\|\mathbf{f}^{ext}(T)\|}{\|\mathbf{f}_0^{ext}\|}, \quad (72)$$

kde $\mathbf{f}^{ext}(T)$ představuje celkové zatížení působící na konstrukci, \mathbf{f}_0^{ext} je konstantní vektor a $g(t)$ je zvolená kladná rostoucí funkce, např. $g(t) = t$.

Přírůstek zatížení je

$$\Delta \mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \mathbf{f}_{n+1}^{ext} - \mathbf{f}_n^{ext}; \quad \mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \mathbf{f}_0^{ext} g(t_{n+1}); \quad \mathbf{f}_n^{ext} = \mathbf{f}_0^{ext} g(t_n). \quad (73)$$

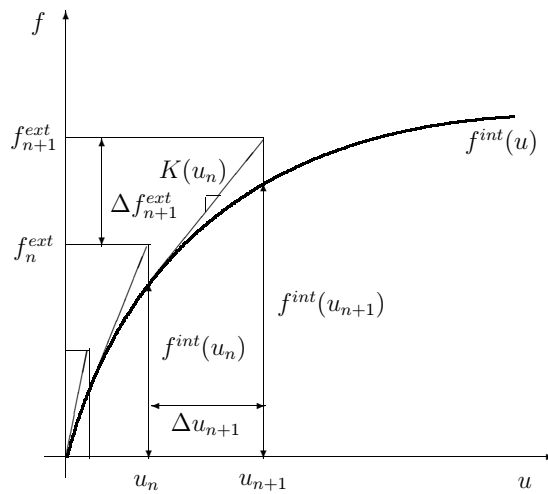
Přírůstek deformace

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n; \quad \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}(t_{n+1}); \quad \mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_n) \quad (74)$$

je určen jako

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{u}_n) [\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_n) + \Delta \mathbf{f}_{n+1}^{ext}], \quad (75)$$

kde $\mathbf{K}(\mathbf{u}_n) = \frac{\partial \mathbf{f}_n^{int}}{\partial \mathbf{u}}$ je tečnová matice tuhosti získaná derivací vektoru vnitřních sil $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_n)$ podle všech složek deformace \mathbf{u} .



Obrázek 7: Schéma inkrementální analýzy.

Příloha B : Diskretizovaná formulace sdruženého problému optimalizace a nelineární mechaniky

Diskretizace problému nelineární mechaniky

Snahou následující formulace je maximálně usnadnit programování (např. v jazyce C/C++).

Pro snazší vyjádření systému podmínek rovnováhy (31) je možné nejprve zavést vektor ΛN^e pro jeden element jako

$$\Lambda N^e = \Lambda^e C^e \Lambda^{eT} (\mathbf{h}^e(\mathbf{u}) - \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \Lambda N_1 \\ \Lambda N_2 \\ \Lambda N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta^e E A^e \Sigma^e - \sin \beta^e G A^e \Gamma^e \\ \sin \beta^e E A^e \Sigma^e + \cos \beta^e G A^e \Gamma^e \\ EI^e K^e \end{pmatrix}, \quad (76)$$

kde diskrétní formulace pro β^e , Σ^e a Γ^e je uvedena v rovnicích (25) a (27).

Nyní je možné vyjádřit vektor vnitřních sil jednoduše následujícím způsobem:

$$\mathbf{f}_e^{int} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda N_1 \\ -\Lambda N_2 \\ \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta u)(-\Lambda N_2) + \frac{1}{2}(\Delta y + \Delta v)(\Lambda N_1) - \Lambda N_3 \\ \Lambda N_1 \\ \Lambda N_2 \\ \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta u)(-\Lambda N_2) + \frac{1}{2}(\Delta y + \Delta v)(\Lambda N_1) + \Lambda N_3 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Tečnová matice tuhosti je definovaná jako derivace vektoru \mathbf{f}_e^{int} podle všech složek vektoru posunů a rotací \mathbf{u} :

$$\mathbf{K}^e = \frac{\partial \mathbf{f}_{(6 \times 1)}^{int}}{\partial \mathbf{u}_{(6 \times 1)}}; \quad \mathbf{u}^e = (u_1, v_1, \psi_1, u_2, v_2, \psi_2)^T. \quad (78)$$

S využitím několika analogií mezi jednotlivými prvky vektoru \mathbf{f}_e^{int} a v samotné matici \mathbf{K} je

možné její podobu vyjádřit pomocí následujícího schématu

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & -K_{11}^e & -K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{12}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & -K_{12}^e & -K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{13}^e & K_{23}^e & K_{33}^e & -K_{13}^e & -K_{23}^e & K_{36}^e \\ -K_{11}^e & -K_{12}^e & -K_{13}^e & K_{11}^e & K_{12}^e & -K_{13}^e \\ -K_{12}^e & -K_{22}^e & -K_{23}^e & K_{12}^e & K_{22}^e & -K_{23}^e \\ K_{13}^e & K_{23}^e & K_{36}^e & -K_{13}^e & -K_{23}^e & K_{33}^e \end{bmatrix}, \quad (79)$$

kde jednotlivé prvky jsou

$$\begin{aligned} K_{11}^e &= \frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{1}{L^e} (EA^e \cos^2 \beta^e + GA^e \sin^2 \beta^e) \quad , \\ K_{12}^e &= \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = \frac{1}{L^e} (\cos \beta^e EA^e \sin \beta^e - \sin \beta^e GA^e \cos \beta^e) \quad , \\ K_{13}^e &= \frac{\partial f_1}{\partial \psi_1} = \frac{1}{2} [(EA^e - GA^e)(\sin \beta^e \Sigma^e - \cos \beta^e \Gamma^e) - \sin \beta^e GA] \quad , \\ K_{22}^e &= \frac{\partial f_2}{\partial v_1} = \frac{1}{L^e} (EA^e \sin^2 \beta^e + GA^e \cos^2 \beta^e) \quad , \\ K_{23}^e &= \frac{\partial f_2}{\partial \psi_1} = \frac{1}{2} [(EA^e - GA^e)(-\cos \beta^e \Sigma^e - \sin \beta^e \Gamma^e) + \cos \beta^e GA] \quad , \\ K_{33}^e &= \frac{\partial f_3}{\partial \psi_1} = \frac{1}{4} (\Delta x + \Delta u) [(EA^e - GA^e)(-\cos \beta^e \Sigma^e - \sin \beta^e \Gamma^e) + \cos \beta^e GA] + \\ &\quad + \frac{1}{4} (\Delta y + \Delta v) [(EA^e - GA^e)(-\sin \beta^e \Sigma^e + \cos \beta^e \Gamma^e) + \sin \beta^e GA] + \\ &\quad + \frac{EI^e}{L^e} = \frac{1}{2} [(\Delta x + \Delta u)K_{23}^e - (\Delta y + \Delta v)K_{13}^e] + \frac{EI^e}{L^e} \quad , \\ K_{36}^e &= \frac{\partial f_3}{\partial \psi_2} = \frac{1}{4} (\Delta x + \Delta u) [(EA^e - GA^e)(-\cos \beta^e \Sigma^e - \sin \beta^e \Gamma^e) + \cos \beta^e GA] + \\ &\quad + \frac{1}{4} (\Delta y + \Delta v) [(EA^e - GA^e)(-\sin \beta^e \Sigma^e + \cos \beta^e \Gamma^e) + \sin \beta^e GA] - \\ &\quad - \frac{EI^e}{L^e} = K_{33}^e - \frac{2EI^e}{L^e} \quad , \end{aligned} \quad (80)$$

kde L^e je definováno rovnicí (17).

Globální vektor vnitřních sil \mathbf{f}^{int} a matice tuhosti \mathbf{K} jsou pak dány lokalizací

$$\mathbf{f}^{int}_{(n_{ddl} \times 1)} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \{ \mathbf{f}_e^{int} \}_{(6 \times 1)}; \quad \mathbf{K}_{(n_{ddl} \times n_{ddl})} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} \{ \mathbf{K}^e \}_{(6 \times 6)} \quad , \quad (81)$$

kde n_{ddl} je celkový počet stupňů volnosti konstrukce a n_{el} je počet elementů konstrukce.

Diskretizace problému optimálního řízení konstrukce zatížením

Formulace problému optimálního řízení konstrukce je vyjádřena pro příklad z kapitoly 5. Při simultánní formulaci problému je třeba vyjádřit derivace objektivní funkce $J(\cdot)$ v následující diskretizované podobě:

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{u}} = \alpha_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}^d); \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n_{ddl}})^T, \quad \mathbf{u}^d = (u_1^d, u_2^d, \dots, u_{n_{ddl}}^d)^T, \quad (82)$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} = \alpha_2 \mathbf{c}; \quad \mathbf{c} = (F, M)^T. \quad (83)$$

Vektor reziduí $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_\lambda, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_c)$ je pak

$$\mathbf{r}^T = \left(\underset{(1 \times n_{ddl})}{(\mathbf{f}^{int} - \mathbf{F}_0 \mathbf{c})^T}; \underset{(1 \times n_{ddl})}{\alpha_1 (\mathbf{u} - \mathbf{u}^d)^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}}; \underset{(1 \times n_c)}{\alpha_2 \mathbf{c}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}_0} \right), \quad (84)$$

kde n_{ddl} je počet stupňů volnosti celé konstrukce a n_c je počet nenulových složek zatížení (v tomto případě $n_c = 2$).

Diskretizace problému optimálního návrhu geometrických vlastností konstrukce

V případě problému optimálního návrhu konstrukce je třeba ještě vyjádřit následující výrazy tvořící vektor reziduí \mathbf{r} . Jedná se o derivace objektivní funkce $J(\cdot)$ podle jednotlivých deformačních proměnných, dále podle optimalizačních proměnných a posledním výrazem je derivace podmínek rovnováhy podle optimalizačních proměnných. V této kapitole budou tyto derivace vyjádřeny pro konkrétní příklad z kapitoly 5.

Optimalizační proměnné jsou v tomto případě tloušťky prutu na jednotlivých prvcích. Vektor optimalizačních proměnných má tedy zápis

$$\mathbf{d} = \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T. \quad (85)$$

Derivace podmínek rovnováhy vyjádřená pro e -tý prvek tedy zahrnuje jedinou optimalizační proměnnou h_e , která je obsažena pouze ve výrazu pro vektor vnitřních sil \mathbf{f}_e^{int} . Výraz materiálové matice tuhosti je

$$\mathbf{C} = \text{diag}(EA, GA, EI) = \text{diag}(Ebh_e, Gbh_e, E\frac{1}{12}bh_e^3). \quad (86)$$

Dále je možné definovat vektor $\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{N}^{e'l}$ jako

$$\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{N}' = \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{N}^e}{\partial h} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda} N'_1 \\ \boldsymbol{\Lambda} N'_2 \\ \boldsymbol{\Lambda} N'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta^e Eb \Sigma^e - \sin \beta^e Gb \Gamma^e \\ \sin \beta^e Eb \Sigma^e + \cos \beta^e Gb \Gamma^e \\ \frac{1}{4} Ebh_e^2 \cdot K^e \end{pmatrix}, \quad (87)$$

což nakonec vede k

$$\frac{\partial \mathbf{f}_e^{int}}{\partial h} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\Lambda} N'_1 \\ -\boldsymbol{\Lambda} N'_2 \\ \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta u)(-\boldsymbol{\Lambda} N'_2) + \frac{1}{2}(\Delta y + \Delta v)(\boldsymbol{\Lambda} N'_1) - \boldsymbol{\Lambda} N'_3 \\ \boldsymbol{\Lambda} N'_1 \\ \boldsymbol{\Lambda} N'_2 \\ \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta u)(-\boldsymbol{\Lambda} N'_2) + \frac{1}{2}(\Delta y + \Delta v)(\boldsymbol{\Lambda} N'_1) + \boldsymbol{\Lambda} N'_3 \end{pmatrix}. \quad (88)$$

Matice $\frac{\partial \mathbf{f}_e^{int}}{\partial h}$ v globální podobě je dána lokalizací

$$\underset{(n_{ddl} \times n_{el})}{\frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial h}} = \underset{(6 \times 1)}{\mathbf{A}} \Bigg\{ \underset{(6 \times 1)}{\frac{\partial \mathbf{f}_e^{int}}{\partial h}} \Bigg\}, \quad (89)$$

kde n_{ddl} je počet stupňů volnosti celé konstrukce a n_{el} je počet prvků.

Derivace objektivní funkce $J(\cdot)$ definované v (62) jsou

$$\frac{\partial J(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \alpha_1 \mathbf{u}; \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n_{ddl}})^T \quad (90)$$

a

$$\frac{\partial J(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{h}} = 0. \quad (91)$$

Nakonec, pro definování kompletního vektoru reziduí pro problém optimálního návrhu, je třeba ještě vyjádřit diskretizovanou podobu výrazu pro hmotnost konstrukce M jako

$$M = \rho b \sum_{i=0}^4 h_i L_i \quad . \quad (92)$$

Diskretizovaný vztah pro výpočet Lagrangeových multiplikátorů je

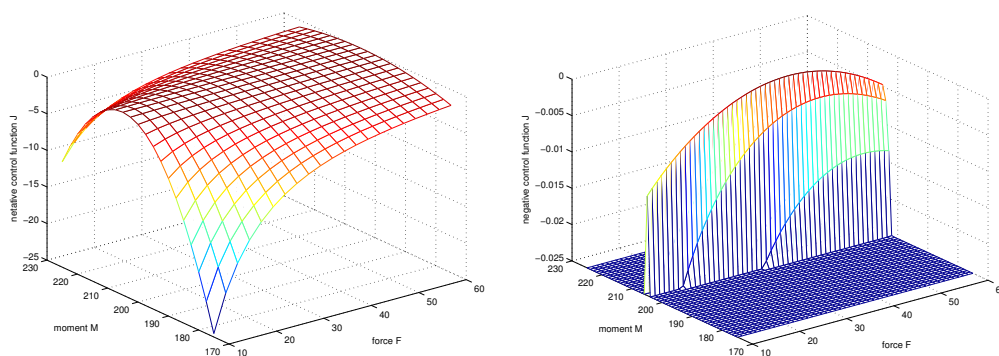
$$\boldsymbol{\lambda} = -\alpha_1 \mathbf{u}^T \mathbf{K}^{-1} \quad . \quad (93)$$

A konečně vektor reziduí $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_d, \mathbf{r}_\lambda, r_{lim})^T$ je

$$\mathbf{r}^T = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \mathbf{h}}; \quad (\mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext})^T; \quad \alpha_2 (M - M_0) \\ (1 \times n_{el}) \quad (1 \times n_{ddl}) \quad (1 \times 1) \end{array} \right), \quad (94)$$

kde n_{ddl} je počet stupňů volnosti konstrukce a n_{el} je počet prvků (v tomto případě $n_{el} = 4$).

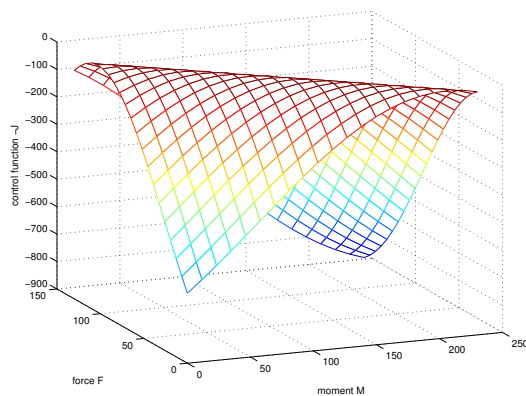
Příloha C : Průběhy maximalizovaných funkcí pro tři tradičně formulované problémy optimálního řízení



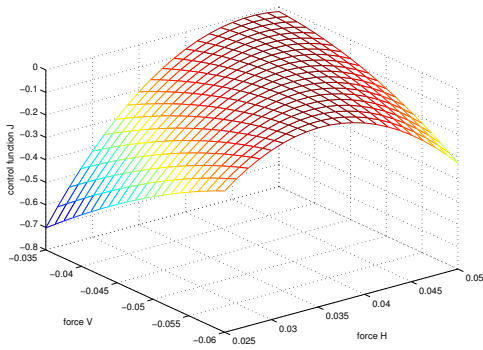
Celý obor hodnot funkce $-J(\cdot)$

Detail v okolí optimální hodnoty funkce $-J(\cdot)$.

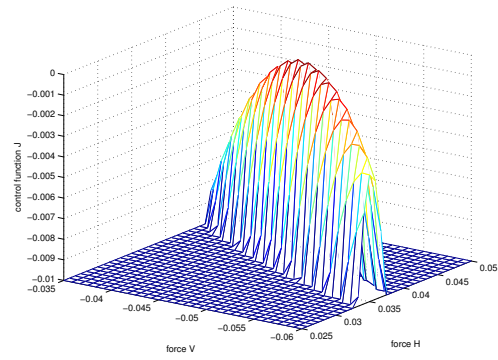
Obrázek 8: Písmeno T - průběh maximalizované funkce řízení $-J(\cdot)$.



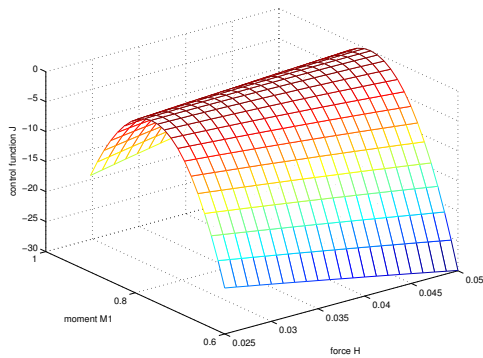
Obrázek 9: Písmeno I - průběh maximalizované funkce řízení $-J(\cdot)$ v její nerozšířené podobě 51.



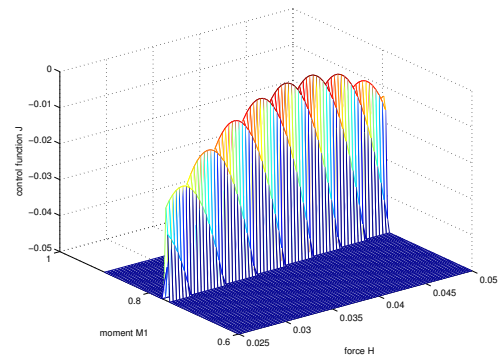
Řez $H - V$



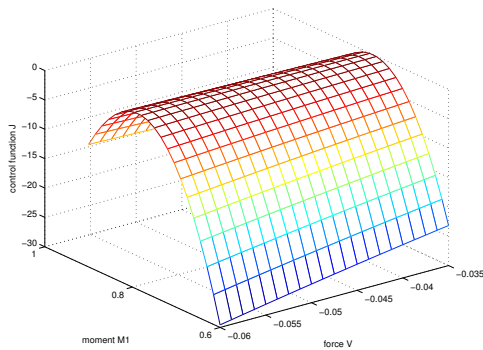
Detail řezu $H - V$ v blízkosti optima



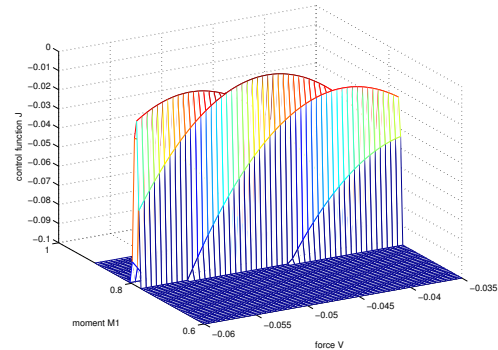
Řez $H - M_1$



Detail řezu $H - M_1$ v blízkosti optima

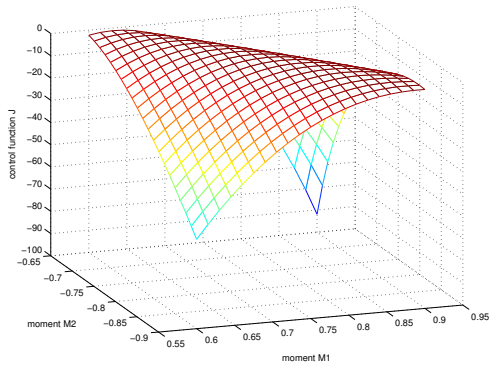


Řez $V - M_1$

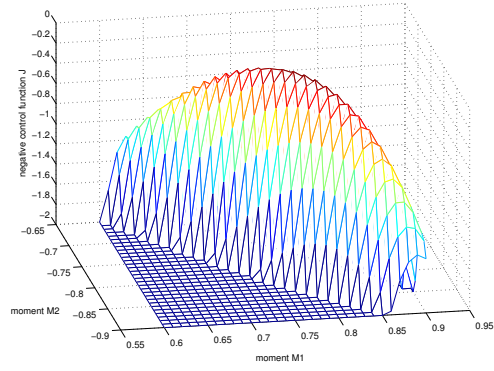


Detail řezu $V - M_1$ v blízkosti optima

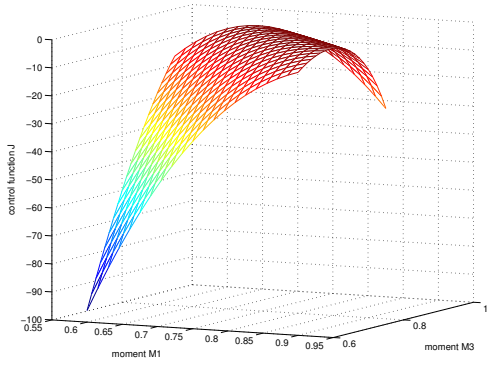
Obrázek 10: Písmeno B - průběh maximalizované funkce řízení $-J(\cdot)$.



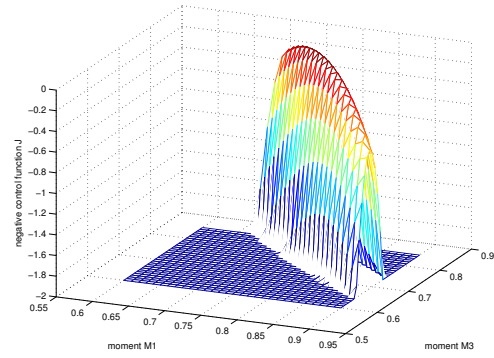
Řez $M_1 - M_2$



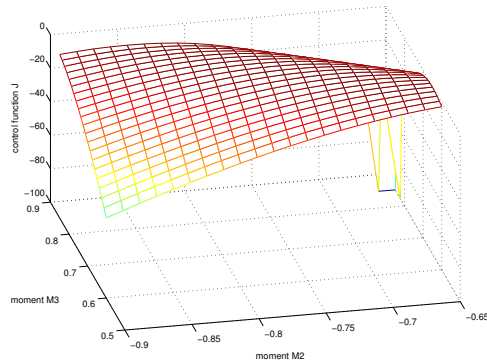
Detail řezu $M_1 - M_2$ v blízkosti optima



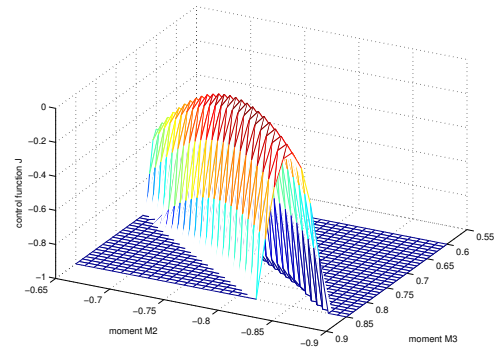
Řez $M_1 - M_3$



Detail řezu $M_1 - M_3$ v blízkosti optima



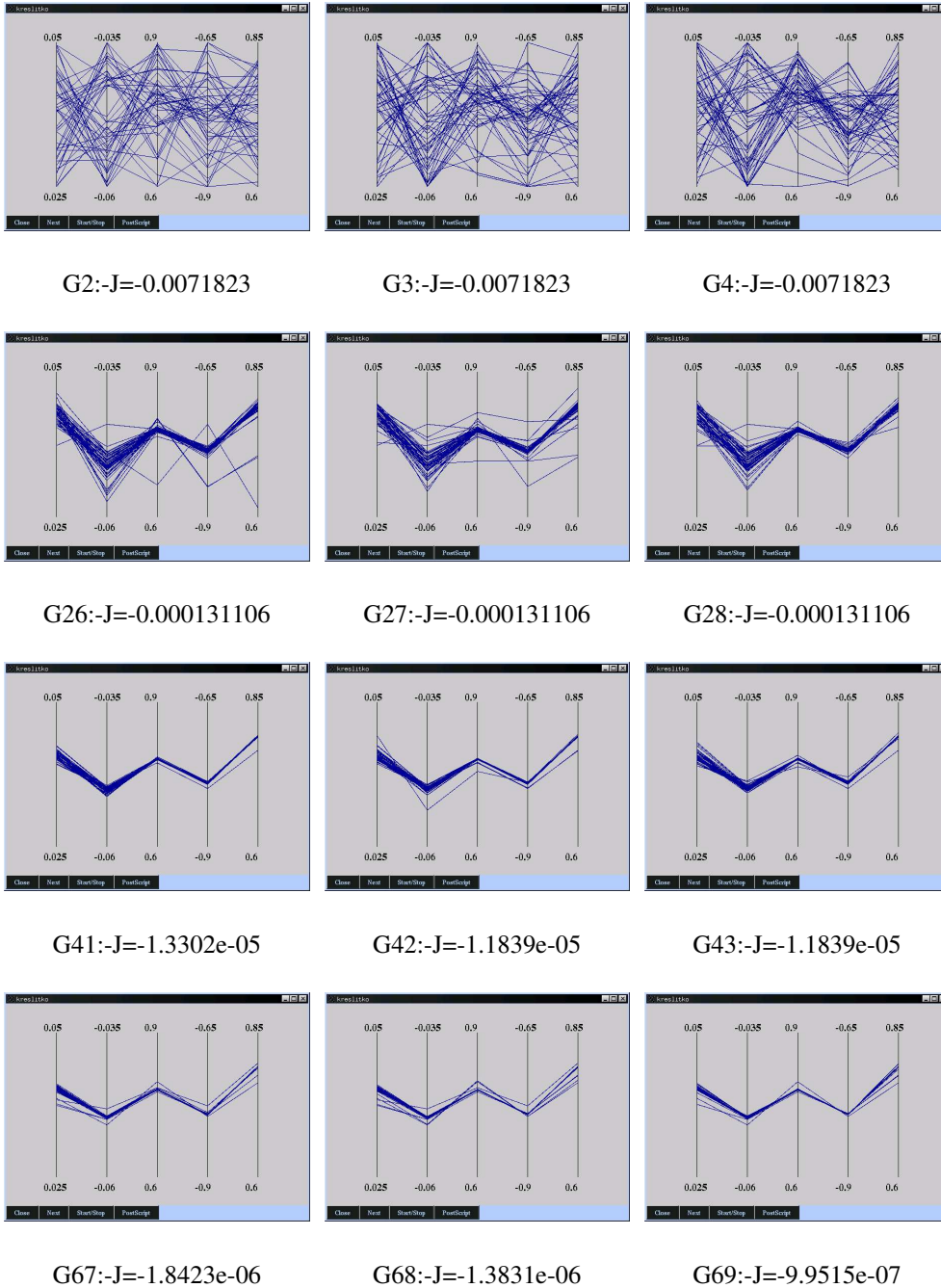
Řez $M_2 - M_3$



Detail řezu $M_2 - M_3$ v blízkosti optima

Obrázek 11: Písmeno B - průběh maximalizované funkce řízení $-J(\cdot)$.

Příloha D : Optimální řízení konstrukce ve tvaru písmene B algoritmem SADE



Obrázek 12: Konvergence algoritmu SADE při tradičním řešení problému "písmene B".

Obrázek 12 zobrazuje průběh konvergence algoritmu SADE při tradičním řešení úlohy s "písmenem B". Svislé čáry představují měřítko hodnot pro každou optimalizovanou proměnnou v pořadí: H , V , M_1 , M_2 a M_3 . Chromozomy jsou znázorněny lomenými čarami, spojující hodnoty každé proměnné vynesené na odpovídajícím měřítku. Přestože obrázky byly vyhotoveny během výpočtu, který konvergoval poměrně rychle, je možné postřehnout, že složky zatížení M_1 , M_2 a M_3 konvergují rychleji než složky H a V . Důvodem je pravděpodobně fakt, že hodnoty momentů M_1 , M_2 a M_3 mají mnohem větší vliv na hodnotu objektivní funkce $J(\cdot)$ než síly

H a V , což je znatelné i z obrázků 10 a 11.

Značná nerovnost mezi vlivem jednotlivých optimalizovaných proměnných na objektivní funkci může znamenat významný problém pro algoritmus SADE. Hned od počátku začne algoritmus rychle konvergovat ke správným hodnotám momentů M_1 , M_2 a M_3 , ale současně není téměř vůbec ovlivňován hodnotami sil H a V . Přesto však si ani tyto složky chromozomů nezachovávají v populaci počáteční diverzitu, ale konvergují také, leč k téměř náhodným hodnotám. Ke konci výpočtu, kdy už jsou téměř nalezeny optimální hodnoty momentů, začíná růst význam sil, jenže v této době už je diverzita populace tak malá, že algoritmus se jen těžko pohybuje po definičním oboru a trvá velice dlouho, než dosáhne optimálních hodnot sil H a V .

Tento fenomén zůstává do jisté míry problémem i pro algoritmus GRADE. Přesto díky využití zjednodušeného gradientu je algoritmus schopen pohybovat se po definičním oboru funkce rychleji a správným směrem, jestliže je tato funkce hladká a má jediný extrém, což jsou podmínky, které studované úlohy splňují.

Pokud jde o simultánní formulaci problémů optimálního návrhu a řízení, je dobré si uvědomit, že popsaný fenomén je přímo ovlivněn nastavením tzv. vah, resp. parametrů α ve funkci $L(\cdot)$.

Příloha E : Optimální řízení konstrukce ve tvaru písmene T metodou difuzní aproximace

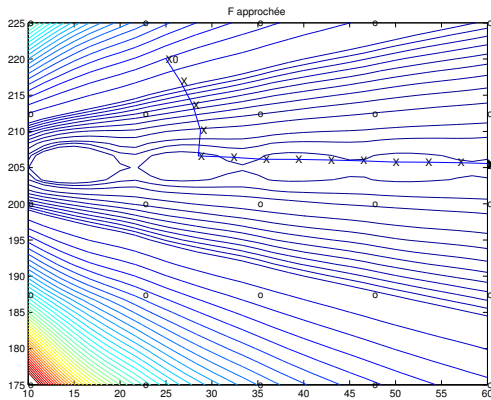
Metoda difuzní aproximace představuje alternativní metodu řešení optimalizačních problémů. Její výsledky je možné srovnat s výsledky získanými algoritmem GRADE. Jedná se o metodu na principu optimalizace plochy odezvy. Pro sestavení této plochy je třeba nejdříve vyčíslit objektivní funkci v bodech zvolené sítě. Plocha je pak získána interpolací mezi těmito body. Následující ukázka představuje tuto metodu při řešení úlohy s "písmenem T" popsané v kapitole 5.

Je nutné poznamenat, že výpočet objektivní funkce v bodech sítě i zde představuje iterační výpočet k vyřešení problému nelineární mechaniky, např. pomocí inkrementální analýzy. Naproti tomu následná optimalizace se odehrává už jen na ploše odezvy, kde jedno vyhodnocení objektivní funkce je velice rychlé a nenáročné.

Následující výpočty byly provedeny paní Catherine Knopf-Lenoir-Vayssade z Technologické Univerzity v Compiègne ve Francii. Pro difuzní aproximaci byl zvolen startovací bod $x_0 = (25, 220)$.

Při pohledu na prezentované výsledky lze říct, že difuzní aproximace sama o sobě není dostatečnou metodou k vyřešení úlohy s "písmenem T". Ve čtvrtém výpočtu byla použita síť (20×20) , pro kterou bylo třeba 400 vyhodnocení skutečné objektivní funkce. Přesto nalezená hodnota síly $F = 47.444$ se od správného řešení $F = 40.000$ významně liší. Také tato metoda totiž naráží na problém popsaný v příloze D, který je pro ni mnohem fatálnější, jelikož jemný vliv síly F není vůbec na ploše odezvy zachycen. Proto je možné konstatovat, že při srovnání difuzní aproximace s algoritmem GRADE je tento algoritmus metodou efektivnější.

Přesto je nutné upozornit, že již na síti (5×5) dosáhla difuzní aproximace hodnoty momentu $M = 205.26$, která je velice blízko optimální hodnotě $M = 205.00$, přičemž k dosažení tohoto výsledku bylo zapotřebí pouhých 25 vyhodnocení objektivní funkce. To vede k možnosti, kombinovat tuto metodu se simultánním řešením úlohy algoritmem GRADE a tak získat nástroj mnohem efektivnější.

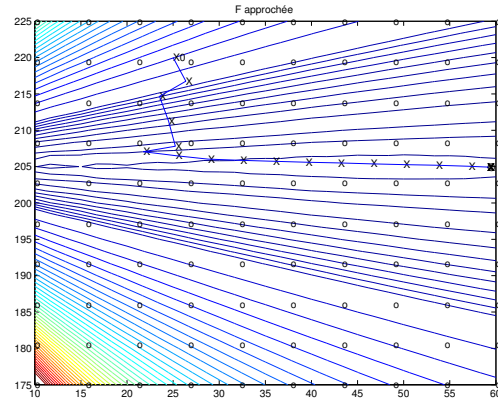


Sít' (5×5)

Výsledek : $F = 60.000$

$M = 205.26$

38 vyhodnocení metodou DA

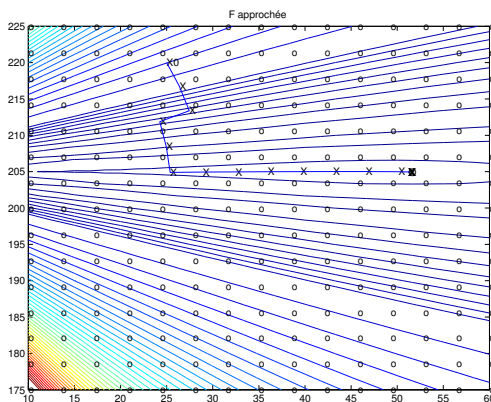


Sít' (10×10)

Výsledek : $F = 59.073$

$M = 204.91$

38 vyhodnocení metodou DA

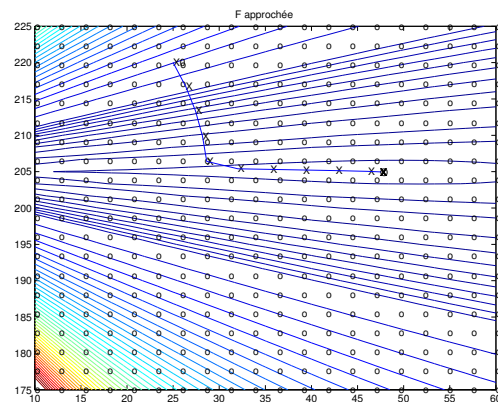


Sít' (15×15)

Výsledek : $F = 51.218$

$M = 204.95$

19 vyhodnocení metodou DA



Sít' (20×20)

Výsledek : $F = 47.444$

$M = 204.97$

15 vyhodnocení metodou DA

Obrázek 13: Řešení "problému písmene T" difuzní aproximací