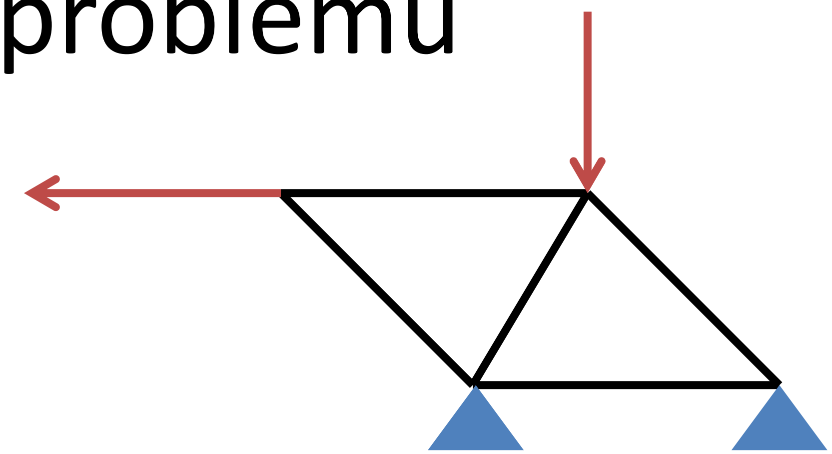
Optimalizace příhradových konstrukcí

Katedra mechaniky ČVUT
Marek Tyburec

Vedoucí projektu: Doc. Ing. Jan Zeman Ph.D.

Formulace problému



- Zadané veličiny:
  - Pozice styčníků
  - Vzájemné vazby
  - Uzlové síly (jeden zatěžovací stav)
  - Umístění podpor
  - Omezení posunů styčníků (protažení prutu)
  - Materiálové charakteristiky
    - *E* – Youngův modul pružnosti
    - σ_0 - mez kluzu pro tah/tlak

homogenní

Formulace problému

- Minimální hmotnost:

$$\min \sum_{i=1}^{n_p} m_i = \min \sum_{i=1}^{n_p} \rho_i \mathrm{v}_i = \min \sum_{i=1}^{n_p} \rho_i a_i l_i$$

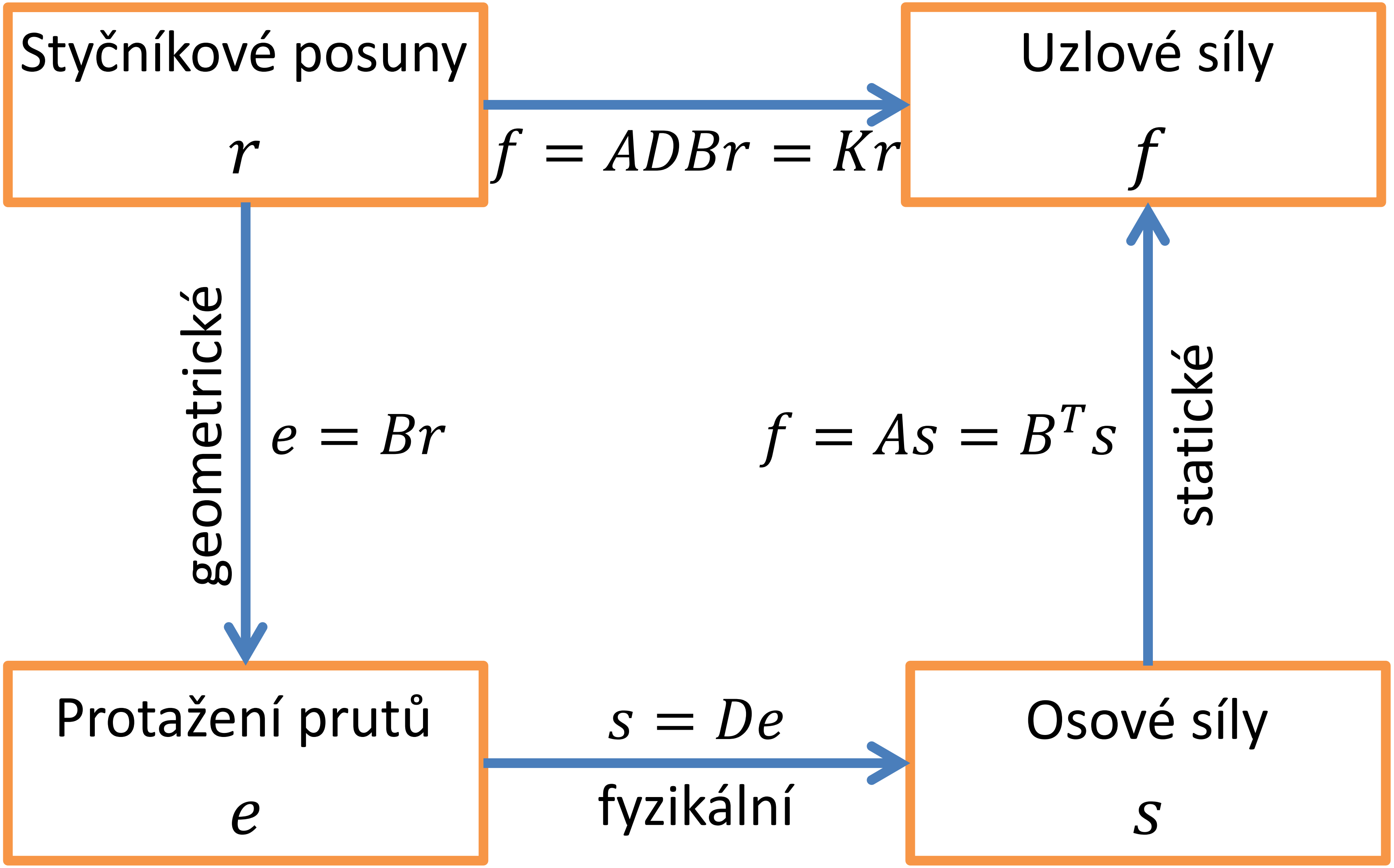
- Redukce na minimální objem:

$$\boxed{\min \sum_{i=1}^{n_p} a_i l_i}$$

- Hledáme minimální plochy a_i a vyřešené normálové (osové) síly s_i → $2n_p$ neznámých, které splňují předešlá omezení

$$\boxed{x = [a_1, \ldots, a_n, s_1, \ldots, s_n]}$$

Příhradové konstrukce



Geometrická matice soustavy

- Zjistíme souřadnice počátečního (*j*) a koncového (*k*) styčníku
- Geometrie prutu:

$$l_{jk} = \sqrt{\left(x_k - x_j\right)^2 + \left(z_k - z_j\right)^2}$$

$$c = \cos\alpha = \frac{\Delta x}{l_{jk}} = \frac{x_k - x_j}{l_{jk}}$$

$$s = \sin\alpha = \frac{\Delta z}{l_{jk}} = \frac{z_k - z_j}{l_{jk}}$$

$$\boxed{l_{tot} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n_p} \\ - \; - \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Geometrická matice soustavy

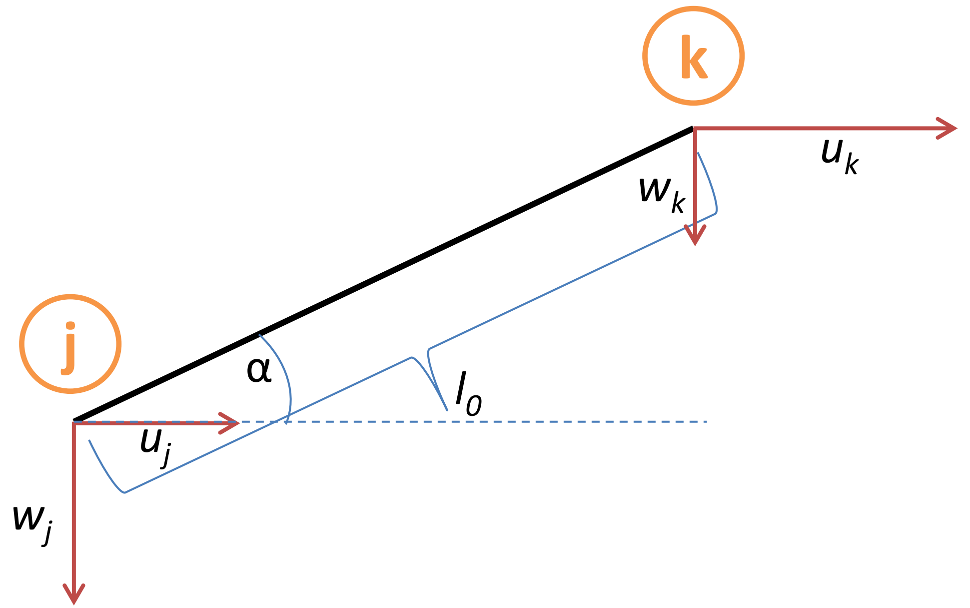
- Závislost posunů *u* a *w* na celkovém protažení prutu

$$\Delta l_{jk} = (u_k - u_j)\cos\alpha + (w_k - w_j)\sin\alpha$$

$$\Delta l_{jk} = -cu_j - sw_j + cu_k + sw_k$$

- Sloupce odpovídají posunům *u* a *w*, řádky jednotlivým prutům
- Pro prut *jk* je potom odpovídající řádek matice:

$$[(2j-1)\ (2j)\ (2k-1)\ (2k)] = [-c_{jk}\ \ -s_{jk}\ c_{jk}\ s_{jk}]$$



Statická rovnice soustavy

$$f = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1z} \\ \vdots \\ f_{n_s x} \\ f_{n_s z} \end{bmatrix}$$

- Matice *f* ale uvažuje nulové síly v místech podpor, které tam ve skutečnosti nejsou – dotčené řádky z *f* a *A* musíme odstranit → vzniknou f_{red} a A_{red}
- Uvažované neznámé jsou ale plochy a síly

Statická rovnice soustavy

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & | & \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & A_{red} \\ 0 & \cdots & 0 & | & \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_p} \\ - \; - \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n_p} \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ - \; - \\ f_{red} \end{bmatrix}}$$

$$\leftrightarrow$$

$$A_{tot} x = f_{tot}$$

Omezení protažení prutů

$$s = DBr \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{Ea_1}{l_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{Ea_{n_p}}{l_{n_p}} \end{bmatrix}$$

- Jednotlivé osové síly:

$$s_i = \frac{Ea_i}{l_i} B_i r$$

- B_i – *i*-tý řádek geometrické matice soustavy (vychází z násobení matic *Br*)

- Omezení protažení – max. a min. osové síly

$$\underbrace{\begin{aligned} s_{i,\min} &= a_i \min\left\{\frac{E}{l_i} B_i r\right\} = a_i \sigma_{\min} \\ s_{i,\max} &= a_i \max\left\{\frac{E}{l_i} B_i r\right\} = a_i \sigma_{\max} \end{aligned}}_{\forall\{r_{j,\min} \leq r_j \leq r_{j,\max}\}}$$

- Převedení podmínek na tvar s neznámou na levé straně a menší nebo rovné pravé straně:

$$\left.\begin{aligned} -r_j &\leq -r_{j,\min} \\ r_j &\leq r_{j,\max} \end{aligned}\right\} \quad \text{Vytvoření matice}$$

Omezující matice

- Sloupce matice odpovídají posunům, řádky počtu podmínek
- K nalezení minima a maxima (záporného minima) funkcí jednotlivých osových sil za lineárních omezení použita v Matlabu funkce *linprog*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_{n_s} \\ w_{n_s} \end{Bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -u_{1,\min} \\ u_{1,\max} \\ \vdots \\ -w_{n_s,\min} \\ -w_{n_s,\max} \end{bmatrix}$$

Mez kluzu

- Vyhnutí se plastickým deformacím, navrhování maximálně na mezi kluzu σ_0
- Pro osové síly platí také dříve vypočtená omezení protažení prutů

$$a_i \sigma_{\min} \le s_i \le a_i \sigma_{\max} \quad \wedge \quad -a_i \sigma_0 \le s_i \le a_i \sigma_0$$

- Porovnání omezujících hodnot
- Obdobné vytvoření omezující matice

$$\boxed{O} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_p} \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n_p} \end{Bmatrix} \le \boxed{P}$$

Nezáporné plochy

- Uvažujeme možnost odebírání prutů – nulové plochy, nesmí být ale záporné
- Dolní číselná mez neznámých:

$$l_b = \begin{bmatrix} a_{1,\min} \\ \vdots \\ a_{n_p,\min} \\ s_{1,\min} \\ \vdots \\ s_{n_p,\min} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{bmatrix}}$$

Optimalizace

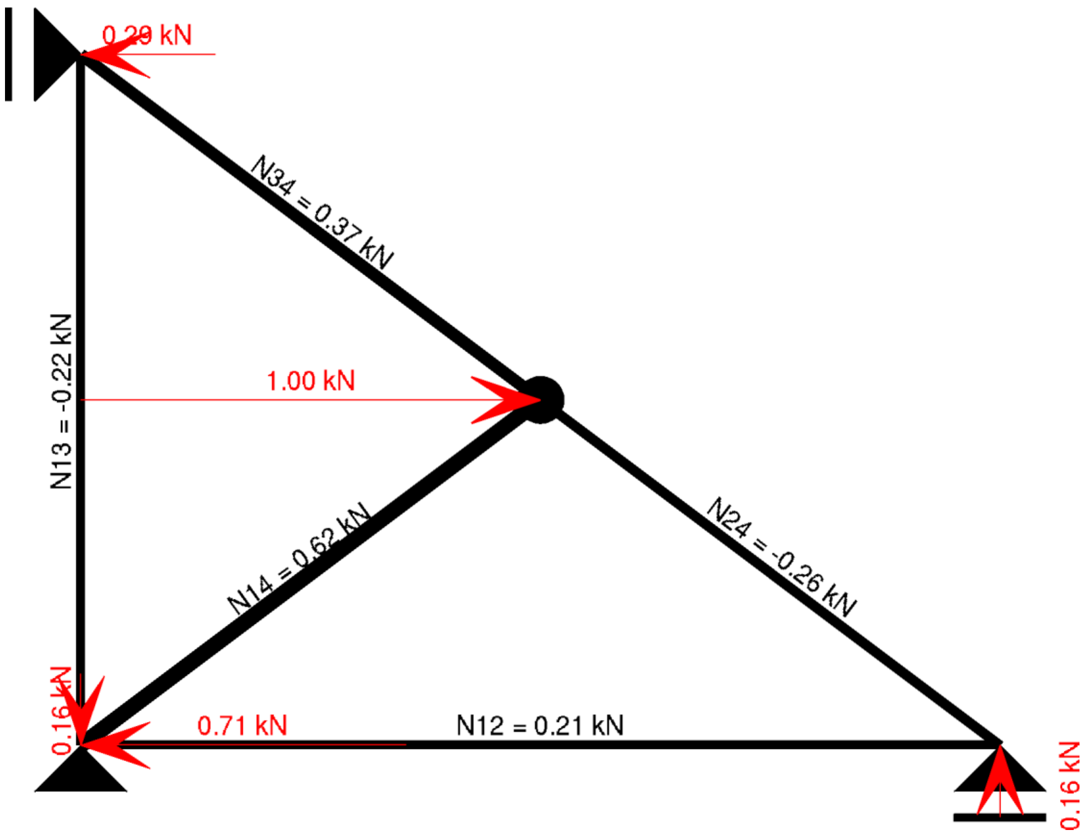
$$\boxed{\begin{aligned} &\min\{l_{tot}^T x\} \\ &\text{st:} \qquad A_{tot}x = f_{tot} \\ &\qquad\qquad Ox \leq P \\ &\qquad\qquad l_b \leq x \leq [\,] \end{aligned}}$$

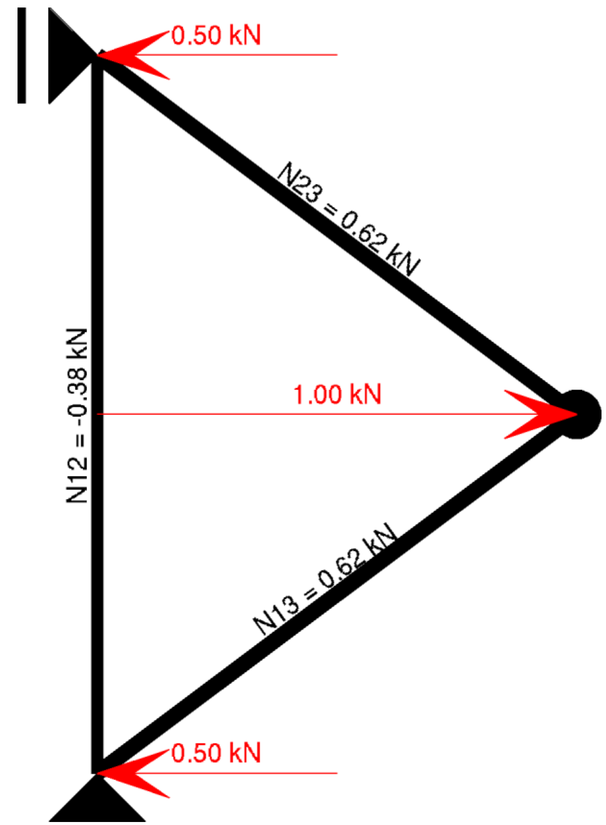
- Matlab: $\boxed{linprog(l_{tot}, O, P, A_{tot}, f_{tot}, l_b, [\,]);}$

Výhody a nevýhody přístupu

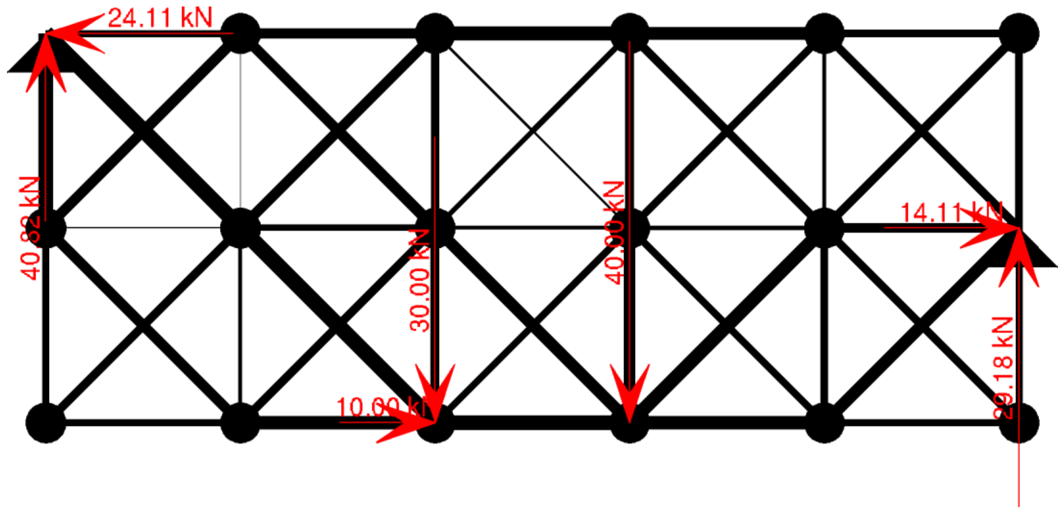
- Globální minimum, tj. globálně optimální řešení
- Odebrání nadbytečných prutů u staticky neurčitých konstrukcí -> možné využití pro topologický návrh (optimalizaci skladby) konstrukce
- Získání hodnot průřezových ploch při předepsaných max. a min. protaženích prutů
- Možnost vzniku výjimkového případu – mechanismu

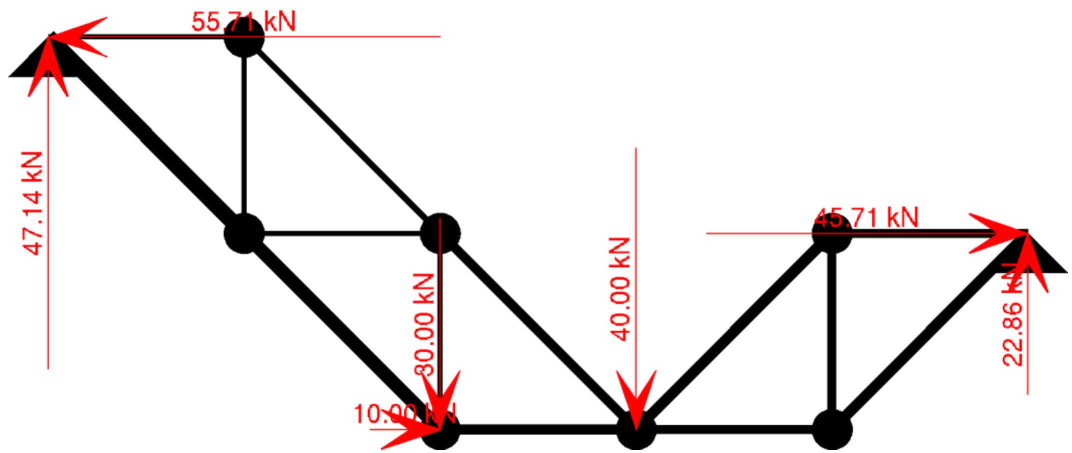
Příklady řešených konstrukcí – staticky neurčitá úloha

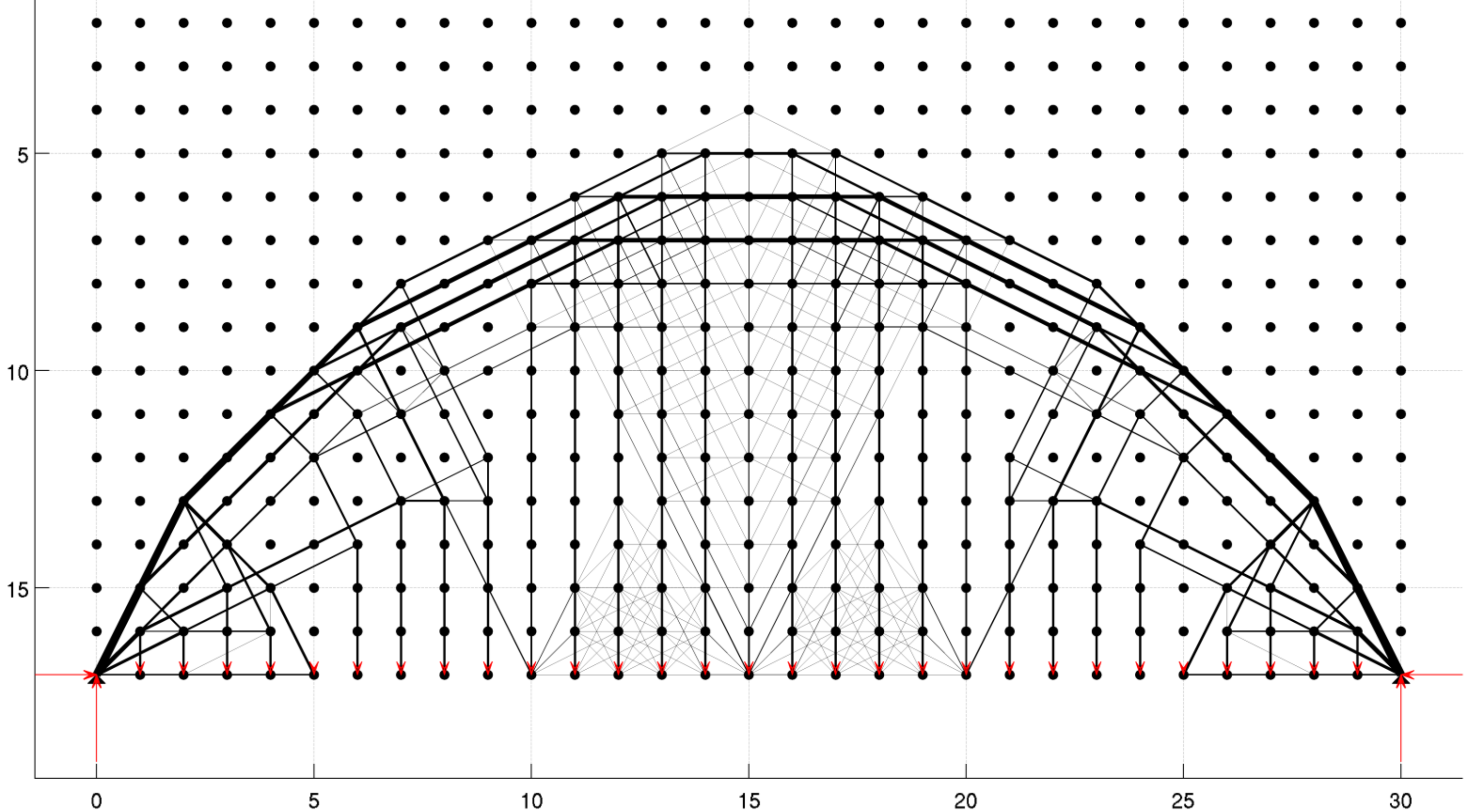




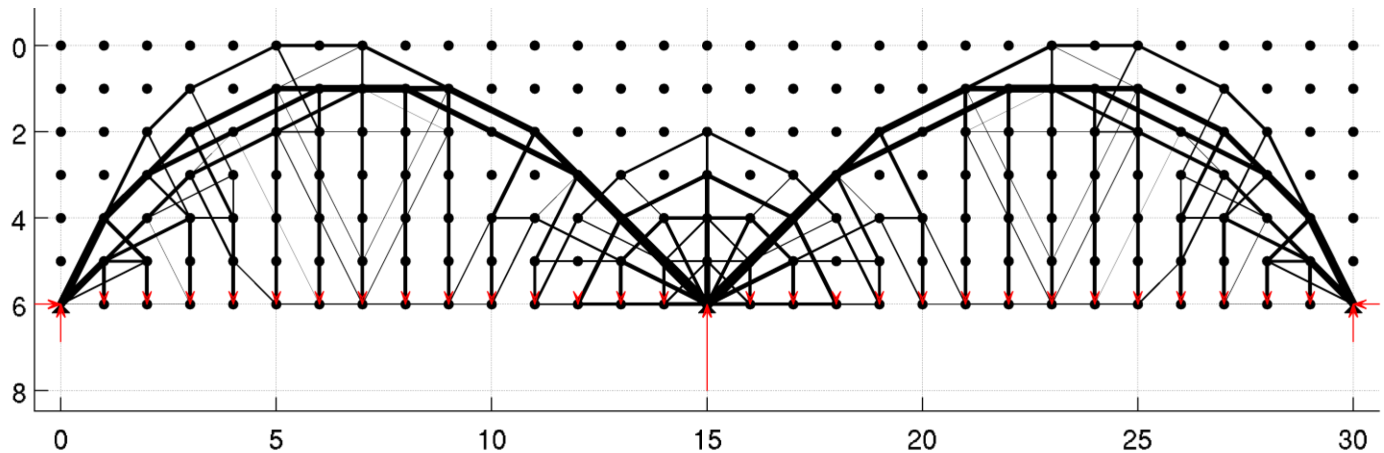
Topologická optimalizace







5
10
15
0
5
10
15
20
25
30



0
2
4
6
8
0
5
10
15
20
25
30

Zdroje

- Bendsoe, M. P.; Sigmund, O.: *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications.* Springer, 2004.
- Jirásek, M.; Konvalinka, P.: *Statika stavebních konstrukcí 1*. České vysoké učení technické, Praha, 1990.
- Rasmussen, M. H.; Stolpe, M.: Global optimization of discrete truss topology design problems using a parallel cut-and-branch method. *Comput. Struct.*, ročník 86, č. 13-14, červenec 2008: str. 1527-1538.

Zadání

- Pozice styčníků, jejich vazby, umístění podpor, vnější silové zatížení:

$$loc = \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n_s} & z_{n_s} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rel} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$dis = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ext = \begin{bmatrix} f_{1x} & f_{1z} \\ \vdots & \vdots \\ f_{n_s x} & f_{n_s z} \end{bmatrix}$$

Zadání

- Omezení posunů r (u ve směru x, w ve směru z)

$$dis\_lim = \begin{bmatrix} u_{1,\ \min} & u_{1,\ \max} \\ w_{1,\ \min} & w_{1,\ \max} \\ \vdots & \vdots \\ u_{n_s,\ \min} & u_{n_s,\ \max} \\ w_{n_s,\ \min} & w_{n_s,\ \max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1,\ \min} & r_{1,\ \max} \\ \vdots & \vdots \\ r_{2_{n_s},\ \min} & r_{2_{n_s},\ \max} \end{bmatrix}$$