STAVEBNÍ MECHANIKA 3

2+2, z, zk

Náplň předmětu :

1. Výpočet a průběhy vnitřních sil na prostorových konstrukcích (balkonový nosník, lomená konzola)
2. Výpočet přetvoření na rámových kcích, příhradových kcích, ležících a zatížených v rovině xz principem virtuálních prací (sil. namáhání, vedl. vlivy)
3. Výpočet a průběhy M, Q, N na jednoduchých staticky neurčitých rámech (rovinných).
   Metody výpočtu : silová metoda (SM)
   deformační metoda (DM)
4. Rošty – průběhy vnitřních sil.

Budeme používat:

Pro globální i lokální osy → pravoúhlé pravotočivé systémy souřadnic x, y, z

Značení vnitřních „sil": $N_x \equiv N$ ...normálová síla

Q_y .... } posouvající síly
$Q_z \equiv Q$..

$M_x \equiv T$... kroutící moment

$M_y \equiv M$.. } ohybové momenty
M_z ....

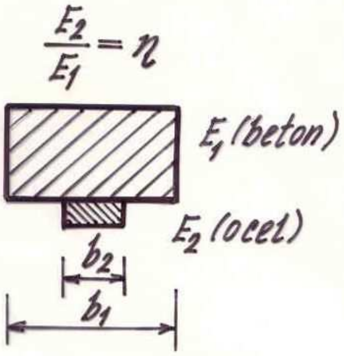
Konzultace : Po 14.00 – 15.30, B323

VÝPOČET PŘETVOŘENÍ

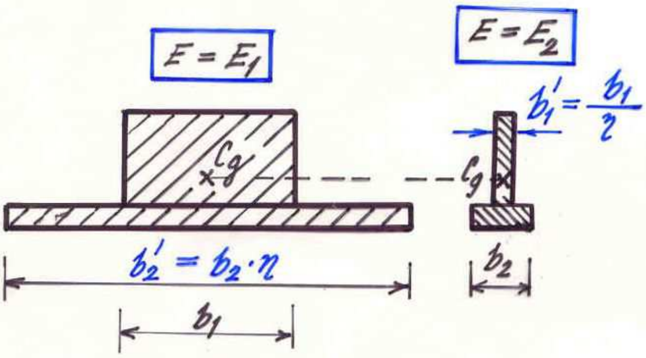
1. Pojem přetvoření

Prut jako součást konstrukce mění pod zatížením svůj tvar. Změnu tvaru sledujeme na **střednici prutu**, která spojuje těžiště **ideálních průřezů**.

Zavedením ideálních průřezů se nehomogenní pruty převádějí na pruty homogenní.



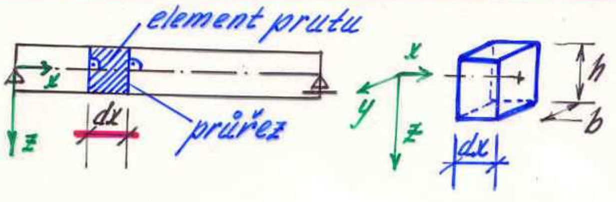
nehomogenní průřez



ideální průřezy

Zaměříme se na výpočet přetvoření přímých prutů s rovinnou střednicí.

2. Přetvoření (diferenciálního) elementu prutu.



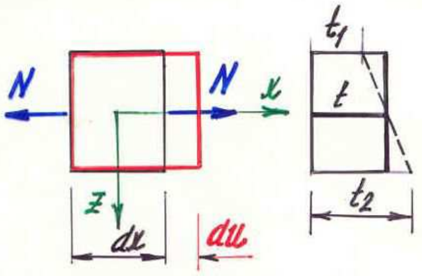
Element prutu - vytínáme dvěma řezy vedenými ⊥ ke střednici prutu

Přetvoření způsobuje: vnitřní síly : $N_x \equiv N$, $M_y \equiv M$, $Q_z \equiv Q$,
počáteční deformace, např. oteplení

Pozn.: Průběh teploty po průřezu = lineární fce
(⇑ z předp. PRPE o zachování rovinnosti průřezů)

a) Normálová síla N a rovnoměrné oteplení t

– způsobí protažení prvku délky dx o

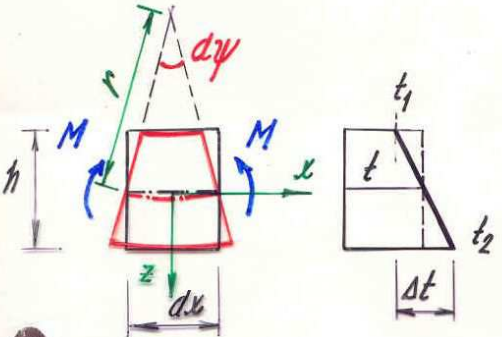


$$\boxed{du = \frac{N dx}{EA} + \alpha t dx} \qquad (1)$$

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

b) Ohybový moment $M = M_y$ a nerovnoměrné oteplení

– způsobí změnu křivosti prutu, danou relativním (vzájemným) pootočením koncových průřezů diferenciálního elementu o úhel



$$\boxed{d\varphi = \frac{M}{EI} dx + \frac{\alpha \Delta t}{h} dx} \qquad (2)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_d - t_h$$

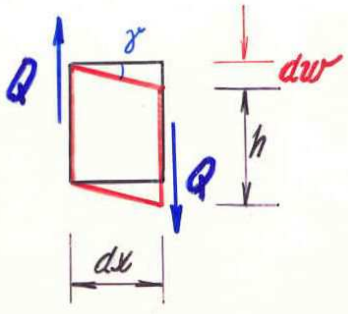
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r} = \rho$$

$t_2 \equiv t_d$ … oteplení dolních vláken

$t_1 \equiv t_h$ … oteplení horních vl.

c) Posouvající síla $Q = Q_z$

– vyvodí relativní (vzájemné) příčné posunutí koncových průřezů elementu



$$\boxed{dw = \frac{\beta Q}{GA} dx} \qquad (3)$$

β … tvarový součinitel [$\varkappa$]
(pro obdélník: $\beta = \varkappa = 1{,}2$)

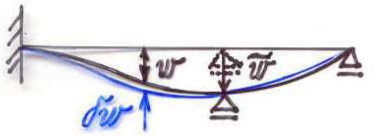
Vliv smyku na přetvoření nosníku lze zanedbat, je-li $h \leq \frac{l}{10}$, kde l … délka prutu

$$dw = \varkappa \cdot dx = \beta \frac{\tau_s}{G} dx$$

3. Základní pojmy z principu virtuálních prací (PVP)

Virtuální posun (variace skutečného posunu)

libovolný, dostatečně malý posun, který nenarušuje vazby v tělese



$\tilde{w}$ ... vynucený (předepsaný) posun podpory

w ... skutečný posun

δw ... virtuální posun

V PRPE: posuny u, v, w ⇒ analogicky $\delta u, \delta v, \delta w$

Virtuální deformace

: z geom. r. TP: $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ... skutečná deformace

$$\delta\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u)$$

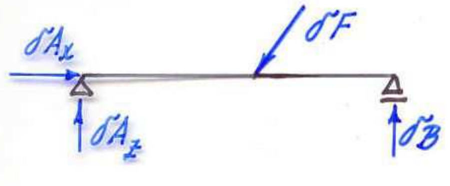
analogicky: $\delta\varepsilon_y$, $\delta\varepsilon_z$ .... $\delta\gamma_{xy}$

Virtuální napětí (variace skutečného napětí)

nenarušuje rovnováhu v tělese

$\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$ ..... $\delta\tau_{xy}$

Virtuální síla – nenarušuje rovnováhu v tělese



$\delta F, \delta A_x, \delta A_z, \delta B$ ... virt. síly vnější

⇒ δN_x, δQ_z, δM_y ... virt. síly vnitřní

z PRPE ⇒ $\delta N_x = \iint\limits_A \delta\sigma_x \, dA$

$$\delta Q_z = \iint\limits_A \delta\tau_{xz} \, dA$$

$$\delta M_y = \iint\limits_A \delta\sigma_x \cdot z \, dA$$

4. Výpočet přetvoření pomocí PVP (varianta PV sil)

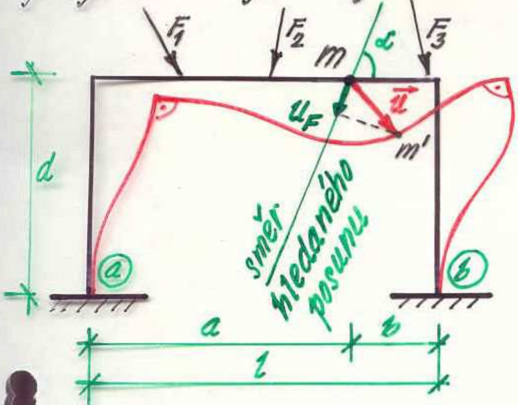
Je-li těleso v rovnováze, potom virtuální práce vnějších sil se rovná virtuální práci sil vnitřních ($\delta A_{ext.} = \delta A_{int.}$)

PVP – 2 varianty

- **PVs** (sil) ⇒ skutečný stav přetvoření, virtuální stav silový
- **PVp** (posunutí) ⇒ skutečný stav silový, virtuál. stav přetvoření (např: výpočet reakcí)

Skutečný (reálný) stav

– je vyvolán danými vnějšími silami



m … sledovaný bod

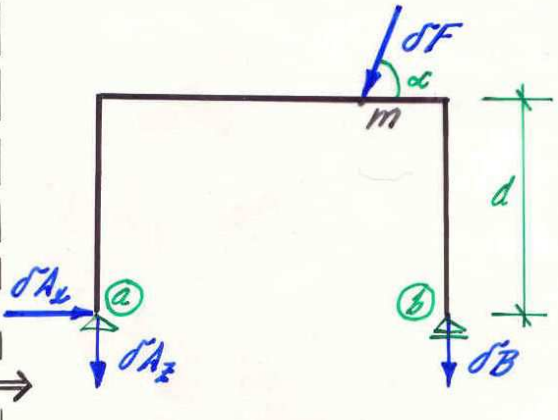
$\vec{u}$ … faktický posun

u_F … posun hledaný (v daném směru) ⟹

Virtuální stav (silový)

– je vyvolán virtuálními „silami";

– nesmí být narušena rovnováha („síly" dle přetvoření, které na skut. kci počítáme)



Z podm. rovnováhy:

ⓐ: $\delta B = \delta F\left(\frac{d}{l}\cos\alpha - \frac{a}{l}\sin\alpha\right)$

↓: $\delta A_z = \delta F\left(-\frac{b}{l}\sin\alpha - \frac{d}{l}\cos\alpha\right)$

→: $\delta A_x = \delta F \cdot \cos\alpha$

Virtuál. práce vnějších sil:

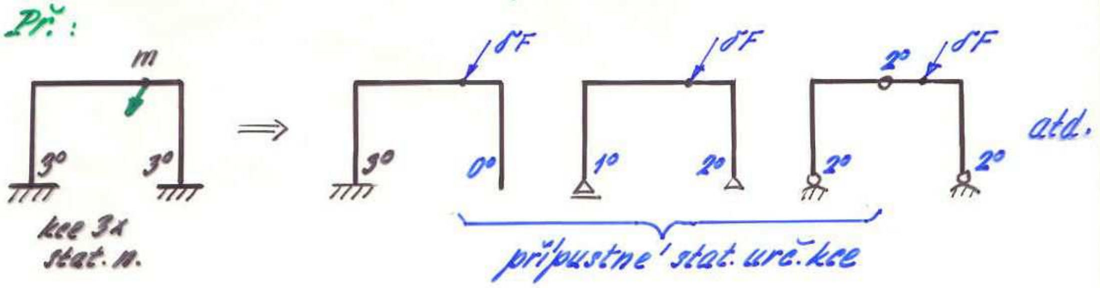
$$\delta A_{ext.} = \delta F \cdot u_F + \delta A_x \cdot 0 + \delta A_z \cdot 0 + \delta B \cdot 0 = \underline{\delta F \cdot u_F}$$

pro náš případ

Výpočet přetvoření PVs na konstrukcích staticky neurčitých: virtuální stav realizujeme na přípustné staticky určité konstrukci !

(stejné rozměry, průřez. i materiálové charakteristiky, ×„měkčí" podepření = z vazby vyšší na vazbu nižší, ne opačně)

Př:



Výpočet přetvoření na kcích staticky určitých: příslušný virtuál. stav realizujeme na téže kci.

4.1. Virtuální práce vnějších sil (zobecnění)

$$\delta A_{ext.} = \sum \delta R_M \cdot \tilde{\varphi} + \sum \delta R_F \cdot \tilde{w}$$

sčítáme přes všechna místa hledaných nebo předepsaných pootočení (φ, $\tilde{\varphi}$)

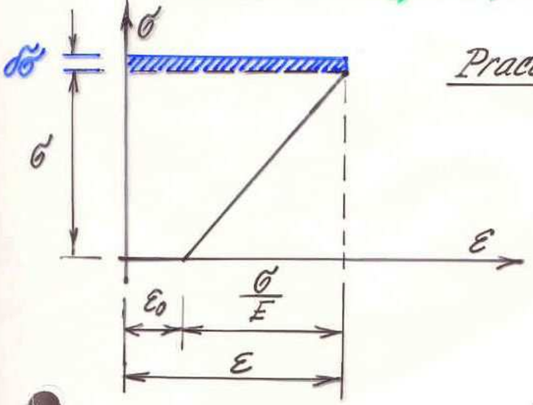
sčítáme přes všechna místa hledaných nebo předepsaných posunů (w, $\tilde{w}$)

$\tilde{w}$, $\tilde{\varphi} = \frac{d\tilde{w}}{dx}$ ... předepsaný posun (n. hledaný posun) a pootočení tečny ke střednici

$\delta R_F (= \delta F)$, δR_M ... odpovídající virtuální „silová" veličina

4.2. Virtuální práce vnitřních sil $\delta A_{int.}$

Pozn. Uvažujeme nejprve pouze účinek $N(x) \Rightarrow \sigma_x = \frac{N(x)}{A(x)}$



Pracovní diagram lineárně pružného materiálu s počáteční deformací

$$\delta A_{int.} = \iiint_V \underbrace{\delta\sigma}_{▨} \cdot \varepsilon \, dV =$$

$$= \iiint_V \delta\sigma_x \left(\varepsilon_0 + \frac{\sigma}{E}\right) dV =$$

$$= \iiint \frac{\delta N(x)}{A(x)} \left(\underset{\overset{\parallel}{\alpha t}}{\varepsilon_0} + \frac{N(x)}{A(x)E}\right) dx\,dA =$$

$$= \int_0^l \frac{\delta N(x)}{\cancel{A(x)}} \left(\alpha t + \frac{N(x)}{A(x)E}\right) dx \, \overset{A(x)}{\cancel{\iint dA}} =$$

$$= \int_0^l \delta N \underbrace{\left(\alpha t \, dx + \frac{N dx}{EA}\right)}_{du \text{ (vzorec č.1)}}$$

Vzniká-li v průřezech prutu kromě N též moment M a posouvající síla Q, vyjde analogicky:

$$\delta A_{int.} = \int_0^l (\delta N \cdot \underset{\overset{\uparrow}{(1)}}{\underline{du}} + \delta M \cdot \underset{\overset{\uparrow}{(2)}}{\underline{d\psi}} + \delta Q \cdot \underset{\overset{\uparrow}{(3)}}{\underline{dw}}) =$$

$$= \int_0^l \left[\underline{\delta N} \underline{\left(\frac{N}{EA} + \alpha t\right)} + \underline{\delta M} \underline{\left(\frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta t}{h}\right)} + \underline{\delta Q} \underline{\left(\frac{\beta Q}{GA}\right)}\right] dx$$

virtuální vnitřní „síla“
(při virtuál. zatížení kce)

skutečné přetvoření

1.3. Výchozí rovnice PV sil:

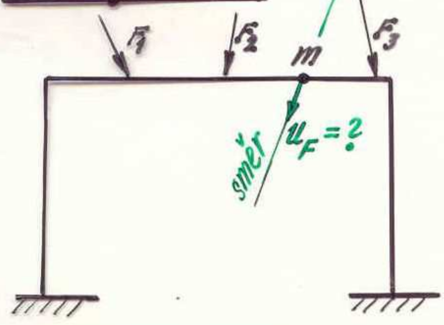
$$\boxed{\delta A_{int.} = \delta A_{ext.}}$$

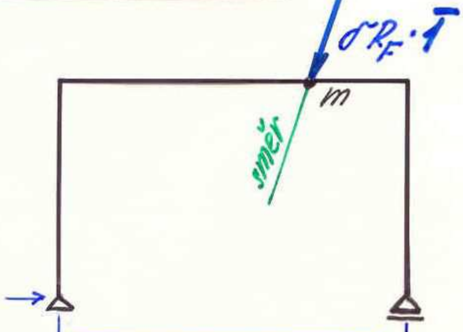
$$\int \left[\delta N \left(\frac{N}{EA} + \alpha t \right) + \delta M \left(\frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta t}{h} \right) + \delta Q \frac{\beta Q}{GA} \right] dx = = \sum \delta R_M \cdot \tilde{\varphi} + \sum \delta R_F \cdot \tilde{w} \qquad (I)$$

1.4. Přechod od virtuálního stavu (silového) k jednotkovému „silovému" stavu.

a) Posun v daném směru

Reálný stav **Virtuální stav**





$\boxed{M, N, Q}$ vnitřní síly

$\boxed{\delta M, \delta N, \delta Q}$

virtuální vnitřní síly:
$\delta M = \delta R_F \cdot \bar{M}$
$\delta N = \delta R_F \cdot \bar{N}$
$\delta Q = \delta R_F \cdot \bar{Q}$

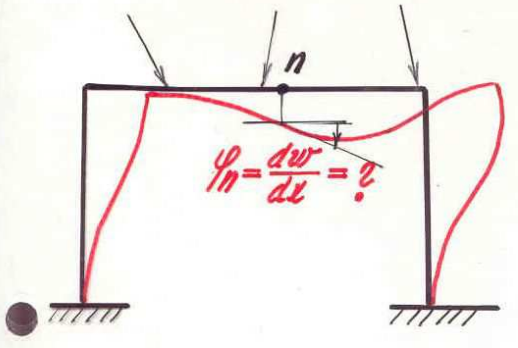
$\bar{M}, \bar{N}, \bar{Q}$ ... vnitř. síly od jednotk. síly $\bar{1}$ [–]

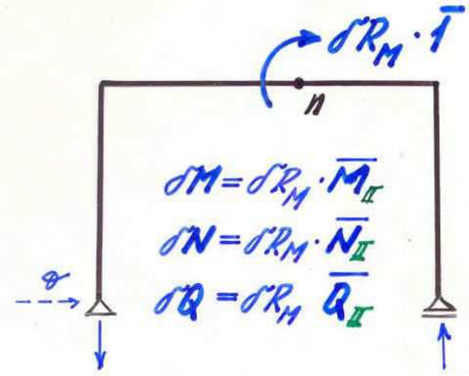
$$(I): \cancel{\delta R_F} \int \left[\bar{N} \left(\frac{N}{EA} + \alpha t \right) + \bar{M} \left(\frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta t}{h} \right) + \bar{Q} \frac{\beta Q}{GA} \right] dx = \cancel{\delta R_F} \cdot \bar{1} \cdot u_F$$

⇒ přetvoření na skutečné (reálné) kci nezáleží na velikosti virtuální „silové" veličiny!

b) Pootočení tečny ke střednici

Reálný stav (zůstává stejný, jen počítáme jiné přetvoření) ⇒ **Virtuální stav** (nový !)





$$\delta M = \delta R_M \cdot \overline{M}_{II}$$
$$\delta N = \delta R_M \cdot \overline{N}_{II}$$
$$\delta Q = \delta R_M \ \overline{Q}_{II}$$

$\boxed{M, N, Q}$ $\boxed{\delta M, \delta N, \delta Q}$

$\overline{M}_{II}, \overline{N}_{II}, \overline{Q}_{II}$ .... vnitř. síly od jednotkového momentu působícího v n

⇒ musí být s jednotk. momentem v rovnováze

PVs (I):

$$\cancel{\delta R_M} \int [\overline{N}_{II} \cdot (\frac{N}{EA} + \alpha t) + \overline{M}_{II} \cdot (\frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta t}{h}) + \dots] dx = \cancel{\delta R_M} \cdot 1 \cdot \varphi_n$$

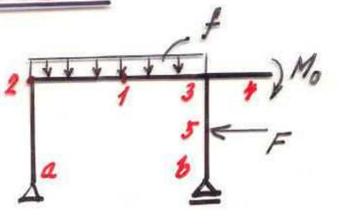
hledané pootočení φ_n považujeme za předepsané $\tilde{\varphi}_n$

Poznámka: Při konkretních výpočtech virtuální stavy silové nahrazujeme stavy „jednotkovými", těch musíme vytvořit tolik, kolik různých přetvoření na redl. kci chceme počítat.

U stat. neurč. kce – jednotkové stavy lze vytvářet na různých staticky přípustných kcích (**redukční věta**)

Postup při výpočtu přetvoření PVs :

a) Na reálné konstrukci vyřešíme skutečný zatěžovací stav ⇒ M, N, Q



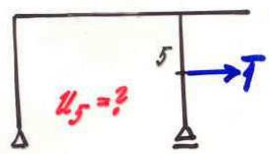
b) Vyřešíme dle hledaného přetvoření odpovídající jednotkové stavy ⇒ $\overline{M}, \overline{N}, \overline{Q}$

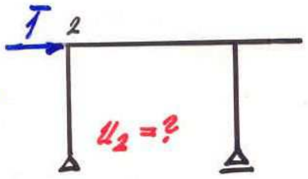
c) Z rovnice (I) PVs určíme skutečné přetvoření.

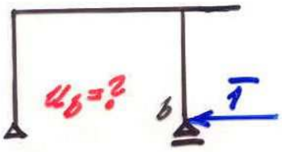
Jednotkové zatěžovací stavy:

určení

b1)

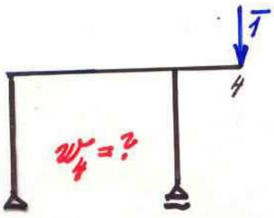


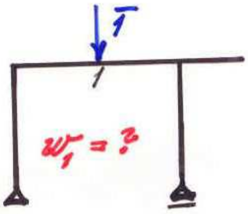




vodorov. posunů

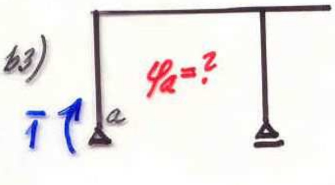
b2)

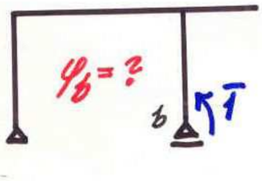


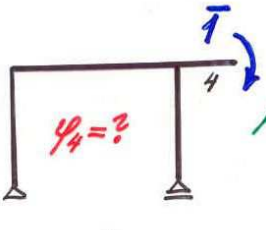


svislých posunů

b3)

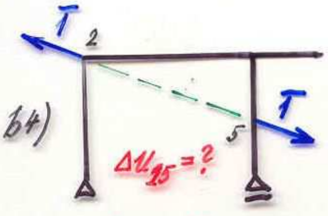


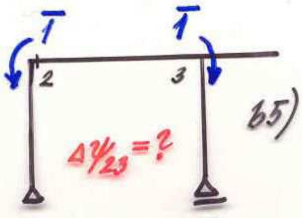




úhlu pootočení

b4)





b5)

určení změny vzdálenosti bodů 2,5

relativního pootočení styčníků 2,3

práce jednotk. „sil“:

b1) $\overline{1} \cdot u_b$

b2) $\overline{1} \cdot w_1$

b3) $\overline{1} \cdot \varphi_4$

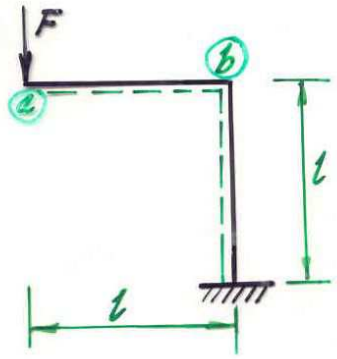
b4) $\overline{1} \cdot \Delta u_{25}$

b5) $\overline{1} \cdot \Delta \varphi_{23}$

Příklad Pomocí principu virtuálních prací určete

a) pootočení φ_a volného konce lomeného nosníku, zatíženého dle obr.

b) Dále určete vodorovný posun bodu b.



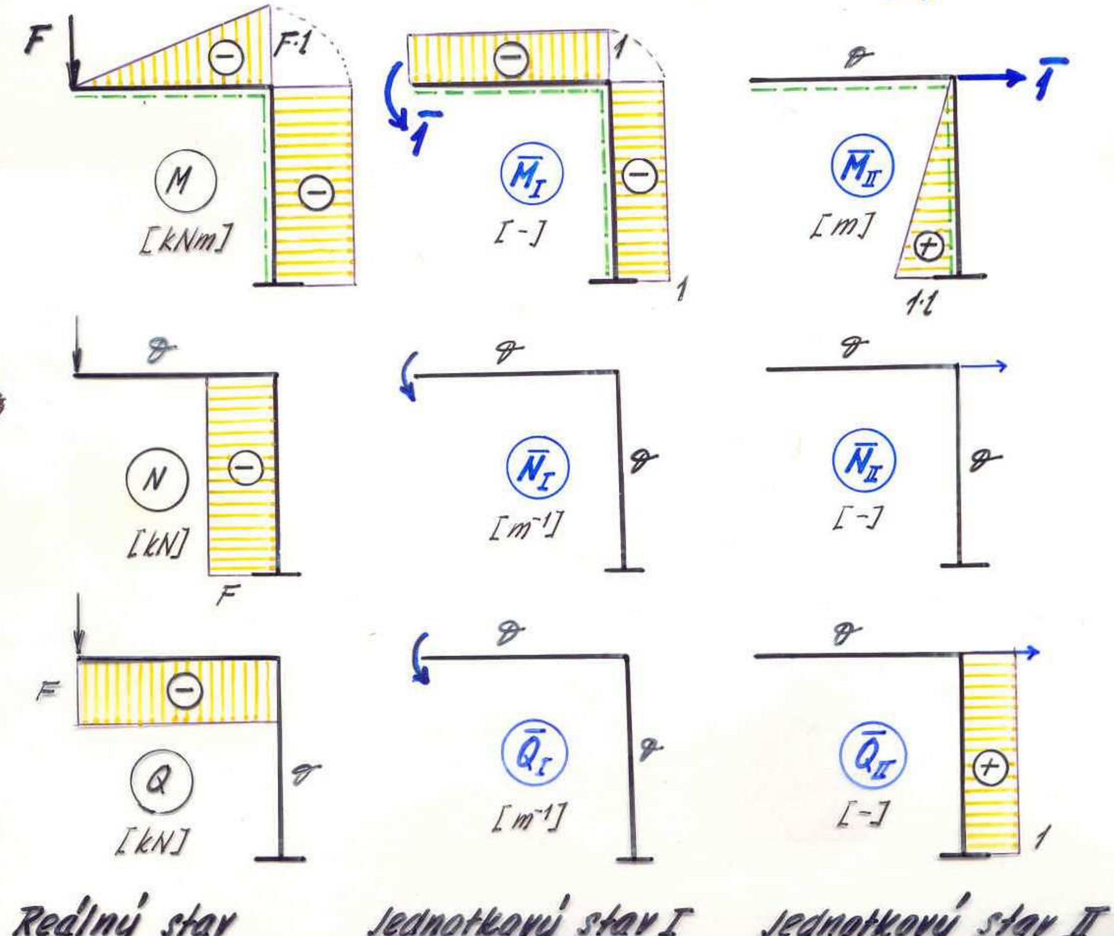
Řešení: Výchozí rovnice

$$\delta A_{int.} = \delta A_{ext.}$$

$$a)\ \int \frac{M}{EI}\bar{M}_I\,ds + \int \frac{N}{EA}\bar{N}_I\,ds + \int \frac{\beta Q}{GA}\bar{Q}_I\,ds = \varphi_a \cdot \bar{1}$$

$$b)\ \int \frac{M}{EI}\bar{M}_{II}\,ds + \ldots\ldots\ldots\ldots = u_b \cdot \bar{1}$$

(nemáme vedl. vlivy: t, Δt, ...
⇒ redukce v (I))



Principem virtuálních sil určíme :

a) pootočení φ_a :

$$\bar{1}\cdot\underline{\varphi_a} = \int \frac{M}{EI}\bar{M}_I\,ds + \underbrace{\int \frac{N}{EA}\bar{N}_I\,ds}_{0} + \underbrace{\int \frac{\beta Q}{GA}\bar{Q}_I\,ds}_{0}$$

$$= \frac{1}{EI}\left(l\frac{Fl}{2} + Fl^2\right) = \underline{\frac{3}{2}\frac{Fl^2}{EI}}$$

...k pootočení dochází ve smyslu působení zavedeného momentu $\bar{1}$

b) vodorovný posun ⓑ : u_b

$$\bar{1}\cdot\underline{u_b} = \int \frac{M}{EI}\bar{M}_{II}\,ds + \underbrace{\int \frac{N}{EA}\bar{N}_{II}\,ds}_{0} + \underbrace{\int \frac{\beta Q}{GA}\bar{Q}_{II}\,ds}_{0}$$

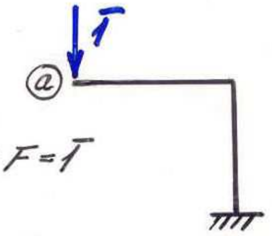
$$= \frac{1}{EI}\left(-Fl\cdot l\cdot\frac{l}{2}\right) = \underline{-\frac{1}{2}\frac{Fl^3}{EI}}$$

...skutečný posun se děje proti zvolené síle $\bar{1}$

c) svislý posun ⓐ : w_a

Jednotkový stav III

⇒ průběhy stejné jako u reál. stavu, pouze $F = \bar{1}$



$\bar{M}_{III}$ $\bar{N}_{III}$ $\bar{Q}_{III}$

$$\bar{1}\cdot\underline{w_a} = \int \frac{M}{EI}\bar{M}_{III}\,ds + \int \frac{N}{EA}\bar{N}_{III}\,ds + \int \frac{\beta Q}{GA}\bar{Q}_{III}\,ds$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}l\cdot Fl\cdot\frac{2}{3}l + l\cdot Fl\cdot l\right) + \frac{1}{EA}(F\cdot 1\cdot 1) + \frac{\beta}{GA}(F1\cdot 1)$$

$$= \underline{\frac{4}{3}\frac{Fl^3}{EI} + Fl\left(\frac{1}{EA} + \frac{\beta}{GA}\right)}$$

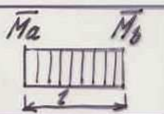
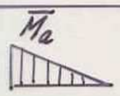
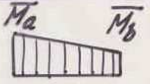
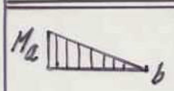
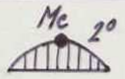
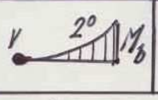
!! Síla (moment) = $\bar{1}$ koná kladnou práci, je-li orientace síly (momentu) a posunu (pootočení) shodná.

Výpočet integrálů typu $\int f \cdot g \cdot dx$

$(\int M\overline{M}dx, \int N\overline{N}dx, \dots)$

a) přímou integrací - použití u prutů přímých i zakřivených

Základní kombinace pro pruty přímé s konst. EI propočteny **v tabulkách.**

$\overline{M}$ \ M	 $\overline{M}_a$ $\overline{M}_b$ l	 $\overline{M}_a$	 $\overline{M}_a$ $\overline{M}_b$
 M_a b	$\frac{1}{2}M_a\overline{M}_a l$	$\frac{1}{3}M_a\overline{M}_a l$	$\frac{1}{6}M_a(2\overline{M}_a+\overline{M}_b)l$
 M_c 2°	$\frac{2}{3}\overline{M}_a M_c l$	$\frac{1}{3}\overline{M}_a M_c l$	$\frac{1}{3}M_c(\overline{M}_a+\overline{M}_b)l$
 V 2° M_b	$\frac{1}{3}\overline{M}_a M_b l$	$\frac{1}{12}\overline{M}_a M_b l$	$\frac{1}{12}M_b(\overline{M}_a+3\overline{M}_b)l$

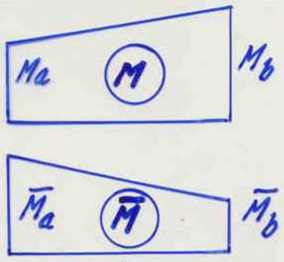
Tab. 1

$\overset{v}{\bullet}$ vrchol paraboly

⋮

b) numerickou integrací - nahrazuje přímou itegr.

1) Spojování dvou přímkových ploch:

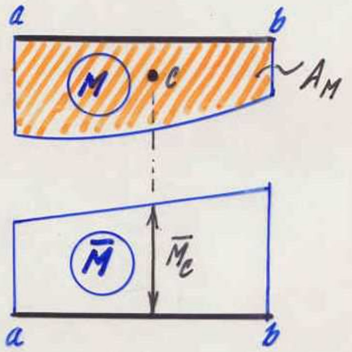


$$\int_a^b M\overline{M}dx =$$

$$= \frac{l}{6}[M_a(2\overline{M}_a+\overline{M}_b)+M_b(2\overline{M}_b+\overline{M}_a)]$$

$$= \frac{l}{6}[\overline{M}_a(2M_a+M_b)+\overline{M}_b(2M_b+M_a)]$$

2) Věresčaginovo pravidlo – spojování přímkové a zakřivené plochy (příp. dvou ploch přímkových)



$$\int_a^b M\bar{M}\,dx = \underline{A_M}\cdot\bar{M}_c$$

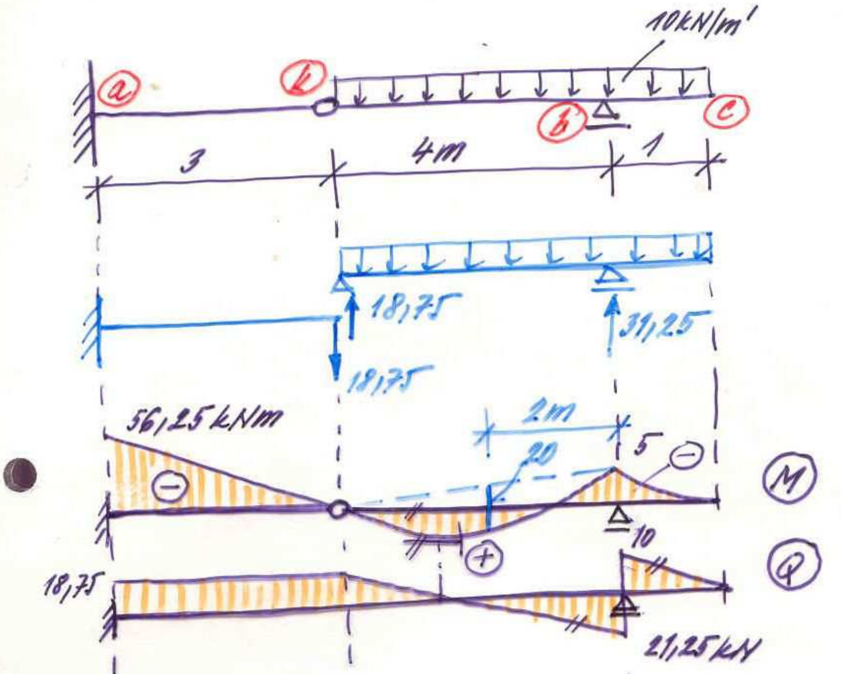
A_M ... vyšrafovaná plocha

$\bar{M}_c$ .... pořadnice fce $\bar{M}$ odečtená v místě těžiště c plochy A_M

Poznámka:

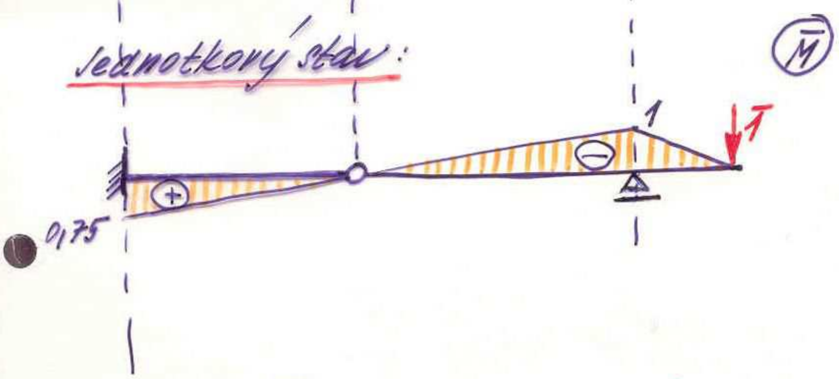
Slučujeme-li Věresčaginovým pravidlem dvě přímkové plochy, je jedno, u které z nich počítáme ▨ plochu.

Př PVP určete $w_c = ?$ [$EI = konst. = 30\,MNm^2$]
(pouze s vlivem M)



$\frac{1}{8}\cdot f\cdot l^2 = \frac{1}{8}\cdot 10\cdot 16$
$= \underline{\underline{20\,kNm}}$

Jednotkový stav:



1. $w_c = \int \frac{M\cdot\bar{M}}{EI}\,dx =$ slučováno dle tabulek

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 5\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 5\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 20\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 56{,}25\cdot 0{,}75\cdot 3\right]$$

$$= -\frac{60{,}94}{30\cdot 10^3} = \underline{-2{,}03\cdot 10^{-3}\,m}$$

⇒ posun w_c je směrem nahoru

V předcházející části ukázáno:
virtuální stav silový nahrazujeme
jednotkovým silovým stavem

⇒ úprava rov. (I):

$$\boxed{\int\left(\frac{M\overline{M}}{EI}+\underline{\frac{\overline{M}\alpha\Delta t}{h}}\right)dx+\int\left(\frac{N\overline{N}}{EA}+\underline{\overline{N}\alpha t}\right)dx+\int\left(\frac{Q\overline{Q}}{GA}\beta\right)dx = \sum \overline{R}_M\cdot\underline{\widetilde{\varphi}}+\sum\overline{R}_F\cdot\underline{\widetilde{w}}} \quad (I')$$

vedlejší vliv – teplota (nerovnoměrná, rovnoměrná)

zahrnuje vedl. vliv předepsané < pootočení / posun

M, N, Q ... průběhy vnitř. sil na reálné kci

(kce staticky určité – M≠0, N≠0, Q≠0 ... při silovém zatíž.
M = N = Q = 0 ... při zatíž. pouze vedl. vlivem !

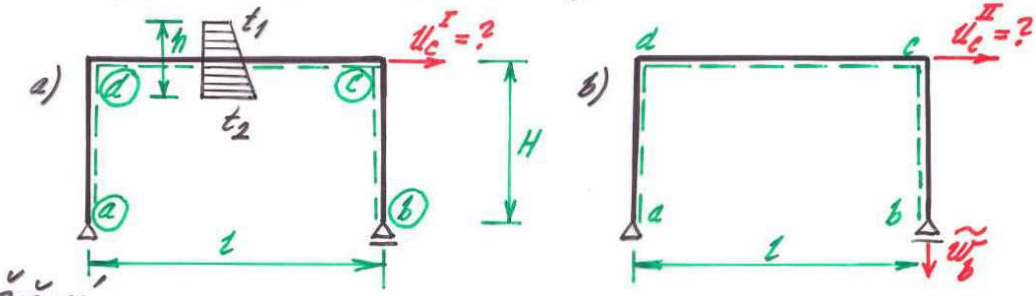
× kce staticky neurčité – M≠0, N≠0, Q≠0 ... při silovém zat.,
POZOR → ale i při zatížení pouze vedlejším vlivem)

$\overline{M}, \overline{N}, \overline{Q}$ ... průběhy vnitř. sil od odpovídajících jednotkových zatěž. stavů silových
(vždy realizovány na stat. určité kci)

$\overline{R}_M$ < jednotkový zatěžovací moment $\overline{M}=\overline{1}$ při hledání φ
n. moment. reakce při jednotk. stavu hledaná v místě zadaného $\widetilde{\varphi}$ (vedlejší vliv v reálném stavu)

$\overline{R}_F$ < jednotková síla $\overline{1}$ při hledání posunu
n. silová reakce při jedn. stavu hledaná v místě zadaného posunu (vedl. vliv v reál. stavu)

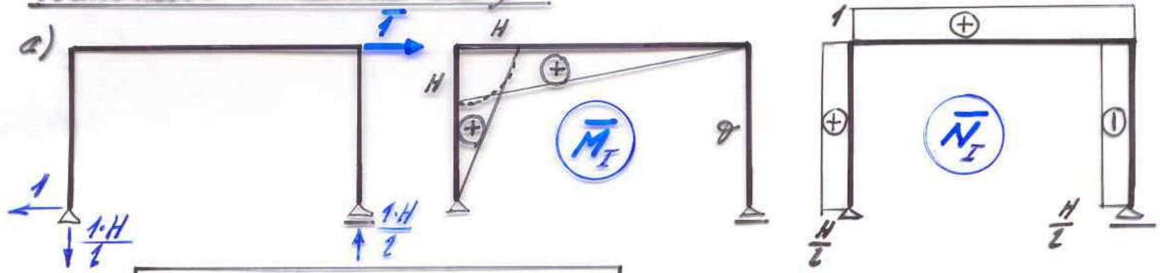
PŘ. Určete vodorovný posun styčníku ⓒ způsobený
a) nerovnoměrným oteplením příčle dc
b) poklesem podpory ⓑ o $\tilde{w}_b$.



Řešení:

Reálný stav: $M = N = Q = 0$ (silové zatížení = 0)
(na kci stat. určité vedl. vlivy nezpůsobí nenulové vnitř. síly)

Jednotkové zatěžovací stavy



$$(I') \quad \boxed{\int \left(\overline{M}_I \frac{\alpha \Delta t}{h} + \overline{N}_I \alpha t\right) dx = \overline{1} \cdot u_c^I}$$

h ... výška příčle

$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$; $\Delta t = t_2 - t_1$

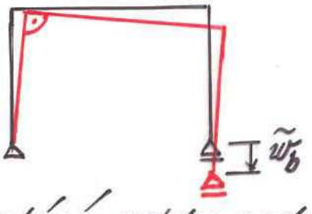
$$\underline{u_c^I} = \underline{\frac{\alpha(t_2 - t_1)}{h} \frac{1}{2} l \cdot H + \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} 1 \cdot l}$$

---

b) — počítáme opět u_c ⇒ stejný jednotkový stav jako a)
teplota = 0, sil. zatíž. = 0 ⇒ levá str. (I') = 0

$$(I') \qquad 0 = \overline{1} \cdot u_c^{II} + \left(-\frac{H}{l}\right) \cdot \tilde{w}_b$$

$$\underline{u_c^{II} = \frac{H}{l} \tilde{w}_b}$$



! Pozor: U staticky neurčitých kcí vyvolává pokles podpory vnitřní síly ⇒ levá str. rov. (I') ≠ 0 ! (⇐ M ≠ 0, N ≠ 0, Q ≠ 0)

Př. Pro kci na obr. určete jaký vliv má:

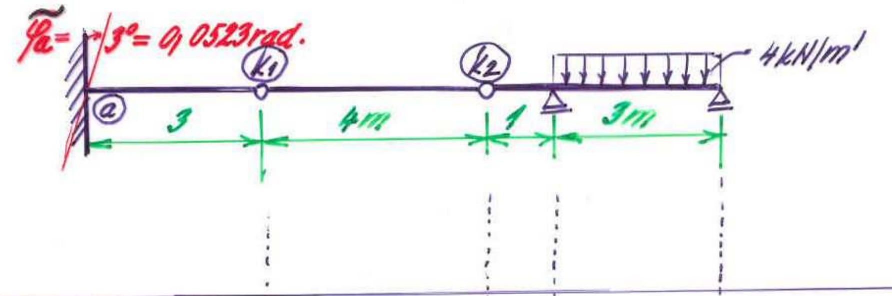
a) silové namáhání $f = 4\,kN/m'$ ($EI = 20\,MNm^2$)

b) předepsané pootočení $\tilde{\varphi}_a = 3°$

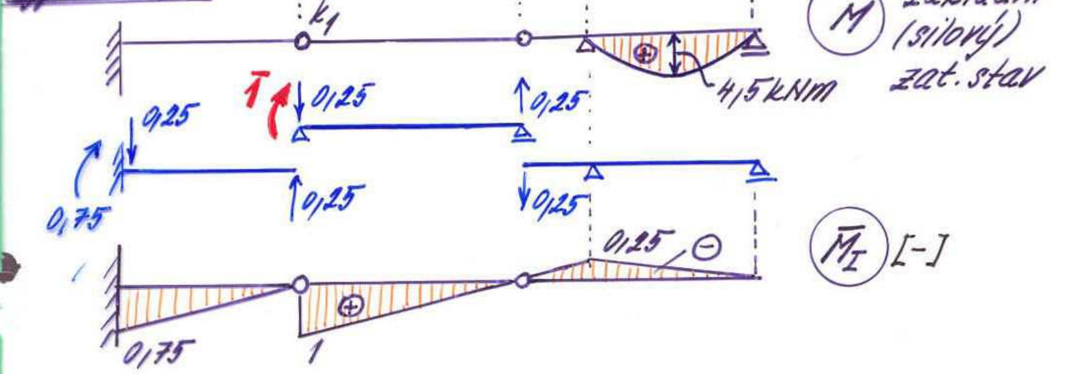
1) na pootočení $\varphi_{k_1}^{p} = ?$

2) na pootočení $\varphi_{k_1}^{l} = ?$

3) na vzájemné pootočení prutů v ⓚ₁ $\Delta\varphi_{k_1} = ?$



Výpočet 1)



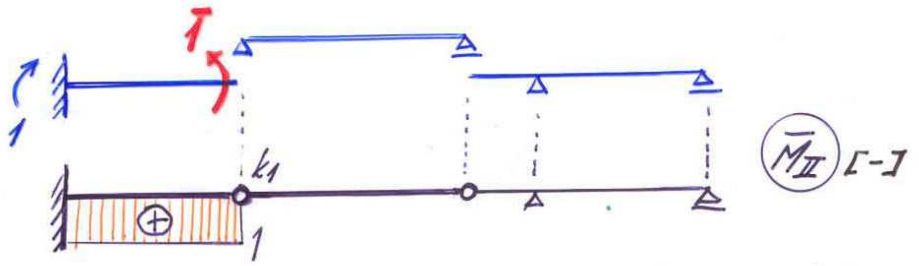
a) $\varphi_{k_1}^{p} = \int M \cdot \bar{M}_I \frac{1}{EI} \cdot dx = \left[-\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 4{,}5 \cdot \frac{0{,}25}{2}\right] \frac{1}{EI} = -0{,}056 \cdot 10^{-3}\,rad$

b) $0 = 0{,}75 \cdot 0{,}0523 + \bar{1} \cdot \varphi_{k_1}^{p} \Rightarrow \varphi_{k_1}^{p} = -0{,}039\,rad$

Celkový účinek a) i b) na pootočení $\varphi_{k_1}^{p}$ je součet a) + b):

$\varphi_{k_1}^{p} = -0{,}039056\,rad$

Výpočet 2)

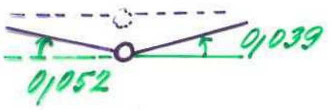


a) $\underline{\varphi_{k_1}^{l}} = \int M \cdot \overline{M}_{II} \frac{1}{EI} dx = \underline{0} \Rightarrow$ silové namáhání nemá na pootočení zleva vliv

b) $0 = 1 \cdot \tilde{\varphi}_a + \bar{1} \cdot \varphi_{k_1}^{l} \Rightarrow \underline{\varphi_{k_1}^{l}} = \underline{-\,0{,}0523 \text{ rad.}}$

Celkový účinek $\underline{\underline{\varphi_{k_1}^{l} = -\,0{,}0523 \text{ rad.}}}$

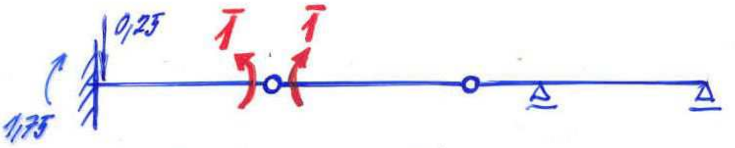
Výpočet 3) superpozicí 1) a 2)



(Vykreslena skutečná pootočení)

$\Delta\varphi_{k_1} = 0{,}039 + 0{,}052 = \underline{0{,}091 \text{ rad.}}$

Totéž bychom obdrželi při kombinaci základního (silového) zatěžovacího stavu a následujícího jednotkového zatěžovacího stavu:



$\bar{1} \cdot \Delta\varphi_{k_1} + 1{,}75 \cdot \tilde{\varphi}_a = 0 \Rightarrow \underline{\Delta\varphi_{k_1} = -\,0{,}091 \text{ rad}}$

Přetvoření prutových kcí s klouby pomocí PVsil

U příhradových kcí zatíž. ve styčnících : $M = Q = 0$
Obvyklé podepření : pevnými, posuv. klouby, kyvnými pruty

⇒ redukce rov. (I') :

$$\boxed{\sum_i \left(\frac{N_i \cdot \overline{N_i}}{E_i \cdot A_i} l_i + \alpha t_i \cdot l_i \overline{N_i} \right) = \sum \overline{R_F} \cdot \widetilde{w}} \qquad (I'')$$

sčítáme přes všechny pruty kce

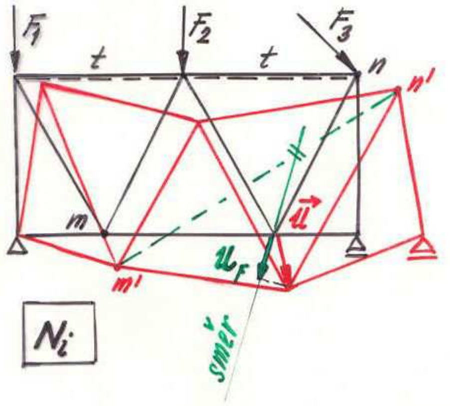
sčítáme přes místa hledaných, či zadaných posunů

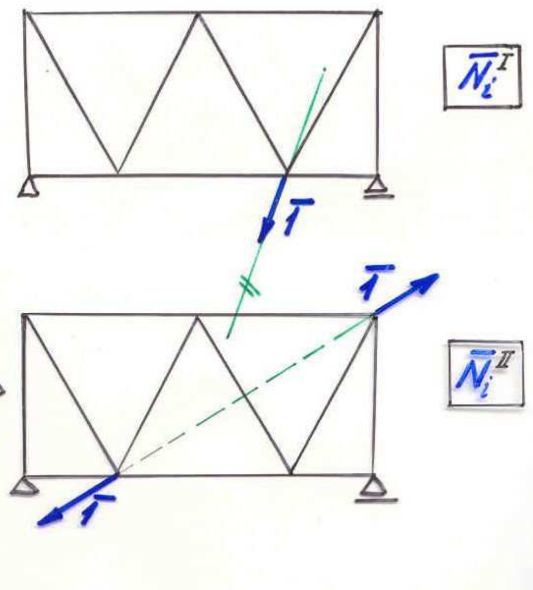
N_i ..... osové síly v reál. stavu v i-tém prutu
$\overline{N_i}$ ..... osové síly v jedn. stavu v i-tém prutu
l_i .... původní délka prutu ,
A_i .... průřezová plocha prutu

PŘ. a) Hledáme posun u_F v daném směru ⇒

Reálný stav

Jednotkový stav



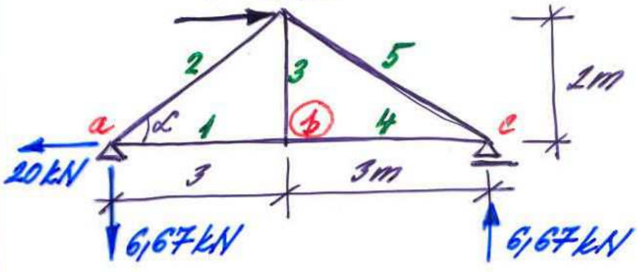


b) Hledáme změnu vzdálenosti Δu_{mn} ⇒

Pravé str. rov. (I'') :

a) $\overline{1} \cdot u_F$
b) $\overline{1} \cdot \Delta u_{mn}$

(Př) PVP určete : $w_b = ?$



$EA = 200 MN$

$\sin\alpha = \frac{2}{3{,}61} = 0{,}554$

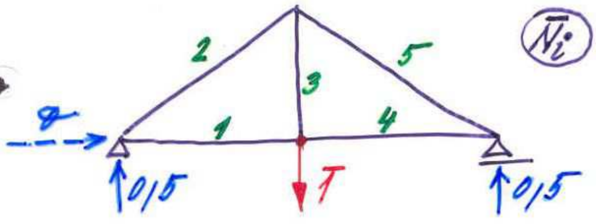
$\cos\alpha = \frac{3}{3{,}61} = 0{,}831$

$l_2 = l_5 = \sqrt{4+9} = \underline{3{,}61 m}$

	[kN]	[-]	[m]	[kNm]
i	N_i	$\overline{N}_i$	l_i	$N_i \overline{N}_i l_i$
1	10	0,75	3	22,5
2	12	−0,9	3,61	− 40,0
3	0	1	2	0
4	10	0,75	3	22,5
5	− 12	−0,9	3,61	40,0

$\Sigma = 45{,}0$

<u>Jednotkový stav :</u>



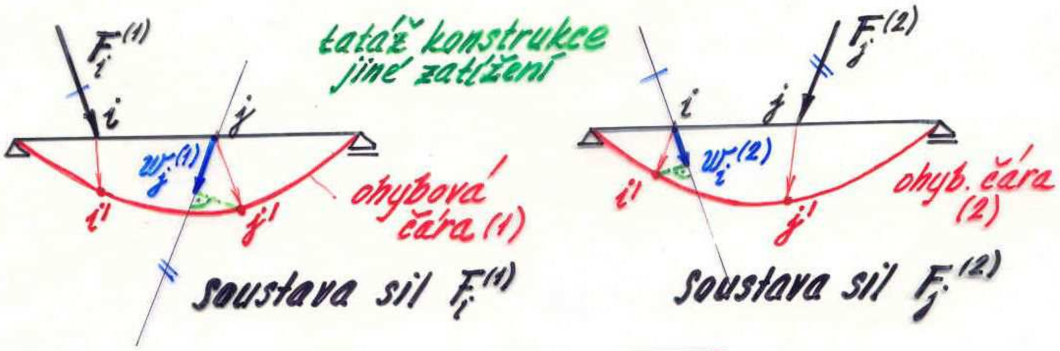
$$w_b = \sum_1^5 \frac{N_i \cdot \overline{N}_i}{EA} \cdot l_i = \frac{45}{200 \cdot 10^3} = 22{,}5 \cdot 10^{-5} m$$

$$= \underline{0{,}225 mm}$$

Průhyb je směrem dolů!

Bettiho věta o vzájemnosti

Definice: Práce sil soustavy $F_i^{(1)}$ na posunech $w_i^{(2)}$ způsobených soustavou sil $F_j^{(2)}$ se rovná práci sil soustavy $F_j^{(2)}$ na posunech $w_j^{(1)}$ způsobených soustavou sil $F_i^{(1)}$.



$$\boxed{\sum_i F_i^{(1)} w_i^{(2)} = \sum_j F_j^{(2)} w_j^{(1)}} \qquad (II)$$

Důkaz: Jednu soustavu považujeme za reálnou, a druhou za virtuální. Uvažíme rovnost virtuálních prací sil vnějších a vnitřních:

$$\sum_i \underset{\text{virt.}}{F_i^{(1)}} \underset{\text{reál.}}{w_i^{(2)}} = \int\left[\frac{N^{(2)}}{EA}\cdot N^{(1)} + \frac{M^{(2)}}{EI}\cdot M^{(1)} + \frac{\beta Q^{(2)}}{GA} Q^{(1)}\right] ds$$

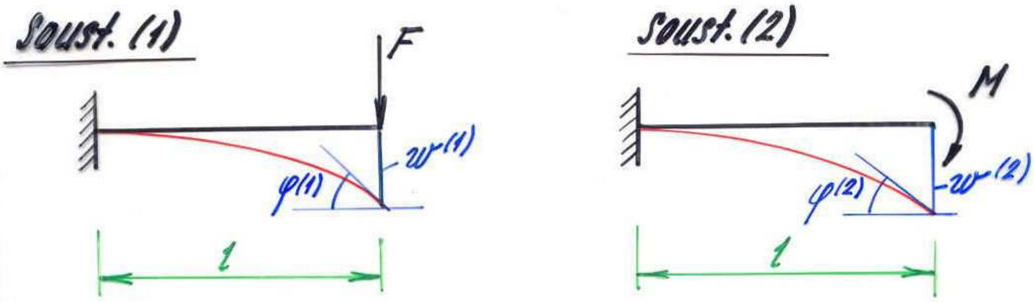
$$\sum \underset{\text{virt.}}{F_j^{(2)}} \underset{\text{reál.}}{w_j^{(1)}} = \int\left[\frac{N^{(1)}}{EA} N^{(2)} + \frac{M^{(1)}}{EI} M^{(2)} + \frac{\beta Q^{(1)}}{GA} Q^{(2)}\right] ds$$

Pravé strany se rovnají, musí se tedy rovnat i str. levé (c.b.d.).

Příklad Konzola zatížená dvěma soustavami

soust. (1) — zatížení silou F

soust. (2) — zatížení momentem M



Bettiho věta :

$$F w^{(2)} = M \varphi^{(1)}$$

Při $F=M=1$

$$1 \cdot w^{(2)} = 1 \cdot \varphi^{(1)} \Rightarrow \underline{\underline{w^{(2)} = \varphi^{(1)}}}$$

budeme využívat u silové metody (SM)

SILOVÁ METODA

-použití: pro výpočet vnitř. sil na staticky neurčitých kcích

Podstata silové metody (SM)

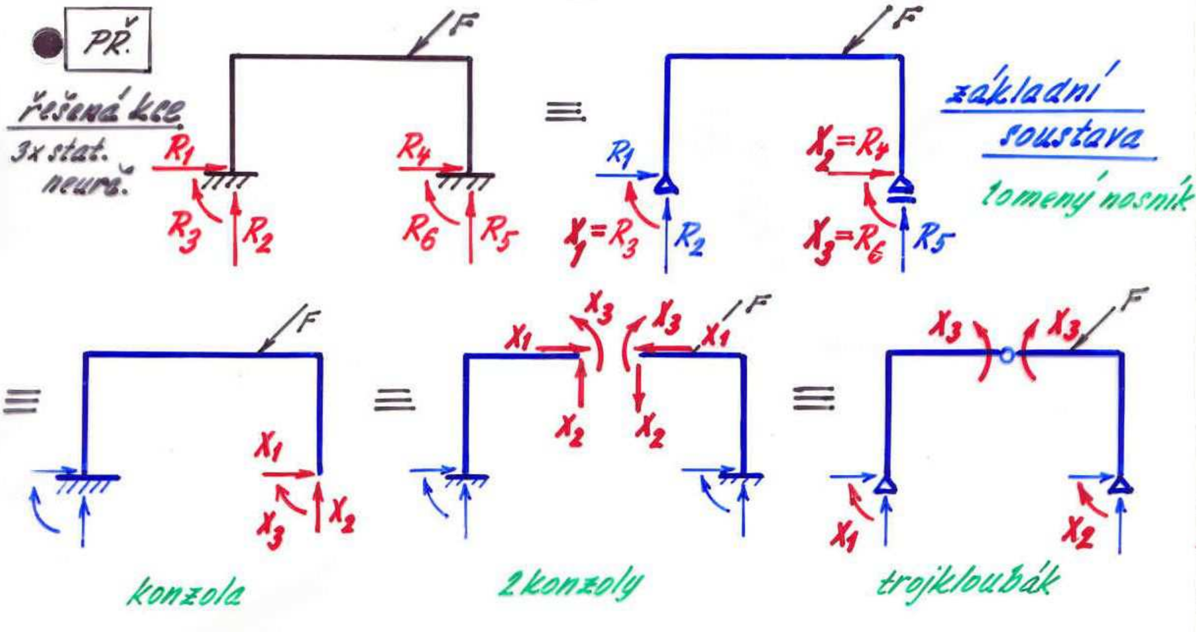
základní předpoklad	Pole vnitřních sil M, Q, N je rovnovážné
řídící variační princip	Castiglianův
Neznámé	Staticky neurčité „síly" X_i
Podmínečné rovnice	Podmínky spojitosti průřezů ≡ přetvárné podmínky

1) Vytvoření rovnovážného pole vnitřních sil

Výsledné vnitřní síly M, N, Q vyjádříme jako lineární kombinaci zatěžovacích stavů na tzv. **základní soustavě** (z.s.)

(z.s. = konstrukce staticky určitá)

PŘ.

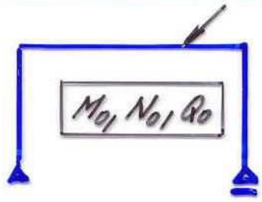


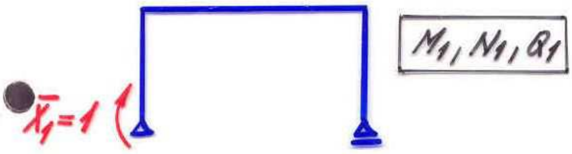
Existuje mnoho způsobů volby základní soustavy.

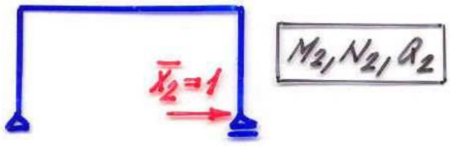
Staticky neurčité síly

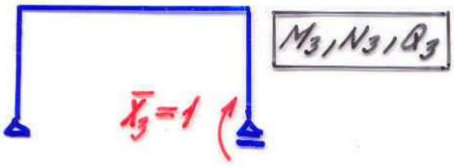
za vnější složky reakcí ... „jedenkrát"

× vnitřní stat. neurčité síly = párové (⇐ z principu akce a reakce









Postup řešení

(z.s. = lomený nosník)

princip superpozice a princip proporcionality

(velikosti X_1, X_2, X_3 neznáme)

$\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$, $\bar{X}_3 = 1$

bezrozměrné jednotkové „síly" (podobně PVs)

Výsledné vnitř. síly v průřezu x:

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3$$

$$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2 + N_3 X_3$$

$$Q = Q_0 + Q_1 X_1 + Q_2 X_2 + Q_3 X_3$$

Výsledné vnitřní síly u kce n krát staticky neurčité

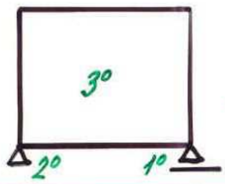
$$\boxed{\begin{aligned} M(x) &= M_0(x) + \sum_i M_i(x) X_i \\ N(x) &= N_0(x) + \sum_i N_i(x) X_i \\ Q(x) &= Q_0(x) + \sum_i Q_i(x) X_i \end{aligned}} \qquad (1)$$

kde: M_0, N_0, Q_0 ... průběhy způsobené vnějším zatížením na zákl. soustavě (**základní zatěžovací stav**)

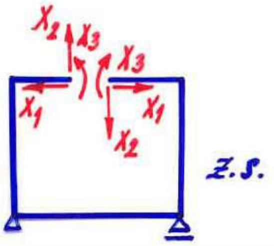
M_i, N_i, Q_i ... průběhy na z.s. vyvolané „silami" $\bar{X}_i = 1$ (tzv. **jednotkové zatěžovací stavy**)

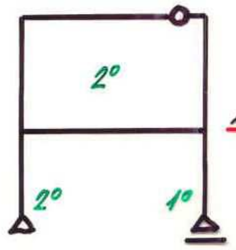
Příklady určení statické neurčitosti kce

(stat. neurčitost nezávisí na druhu zatížení konstrukce)

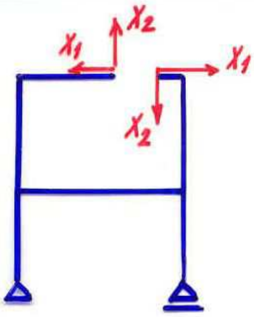


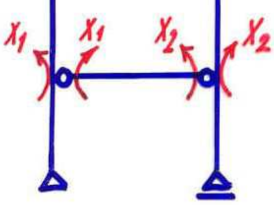
$s = 6-3 = 3x$

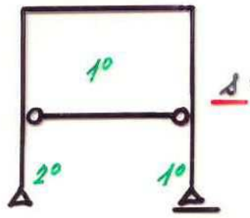




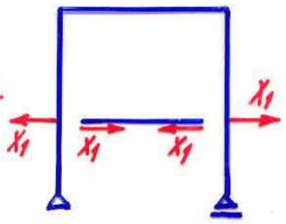
$s = 5-3 = 2x$

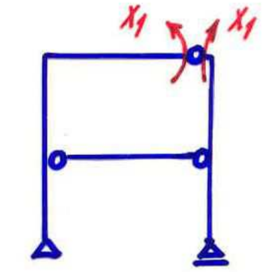


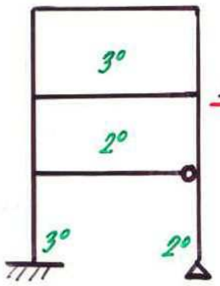




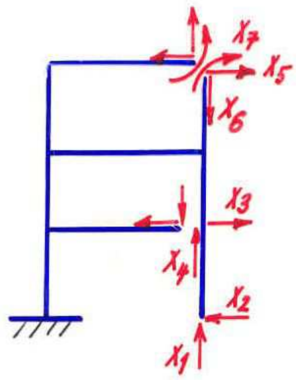
$s = 4-3 = 1x$

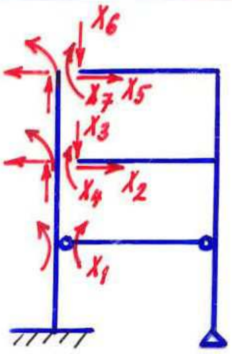






$s = 10-3 = 7X$

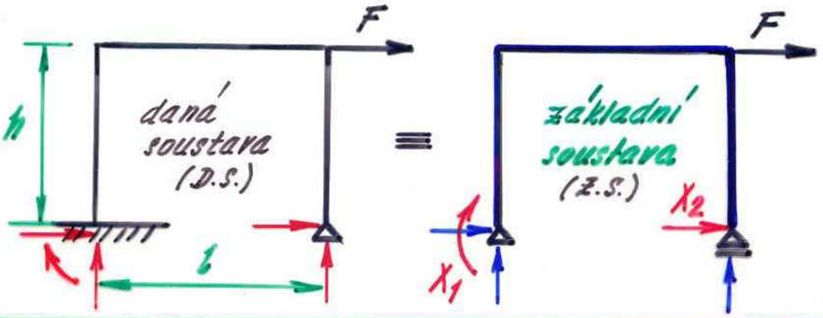


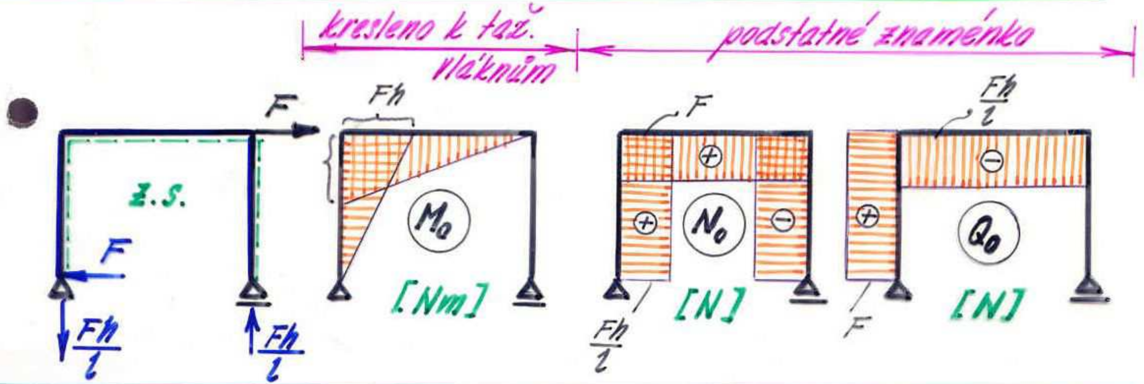


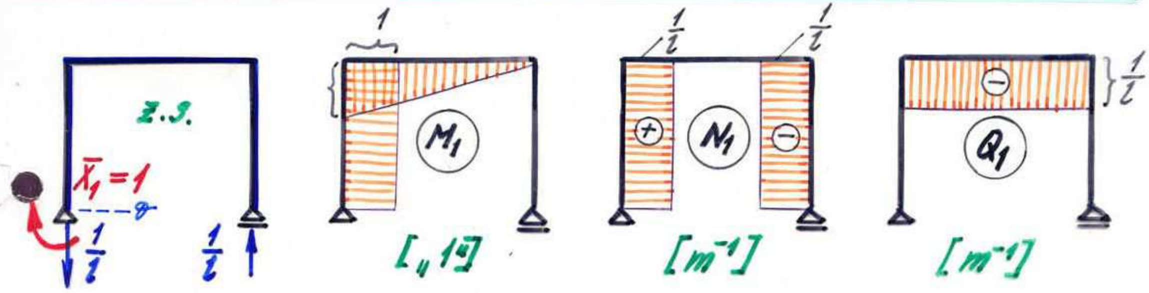
Základní soustavy = stat. určité kce staticky přípustné

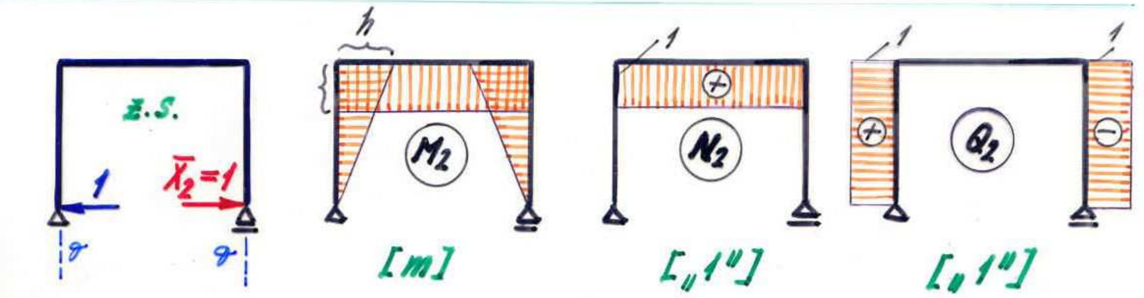
(⇒ při jejich vytváření buď vazbu necháme, nebo jdeme z vazby vyšší na vazbu nižší – ne opačně)

Příklad Určete průběhy $M_0, N_0, Q_0, M_i, N_i, Q_i$ na základní soustavě, stanovené k zadání dle obr.









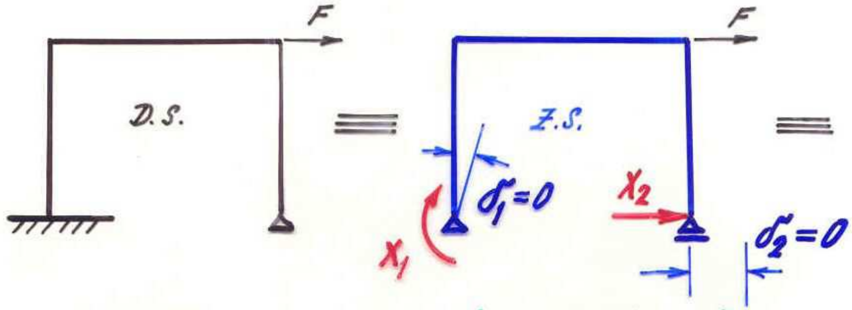
$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$$

⋮

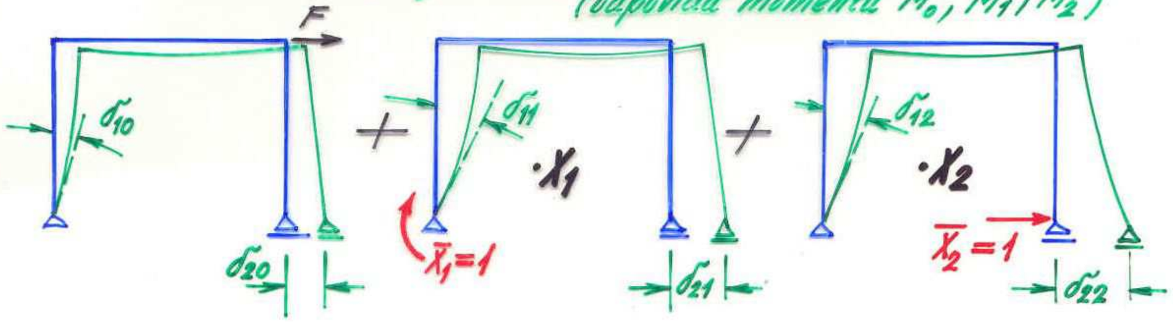
2. Podmínečné rovnice

= přetvárné podmínky, z kterých určíme X_i

2.1. Naše kce rámu 2x stat. neurčitého



- Přetvoření při jednotlivých zatěžovacích stavech (odpovídá momentu M_0, M_1, M_2)



Podle principu superpozice a proporcionality:

- $$\left.\begin{array}{ll} \delta_1=0: & \delta_{10}+\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{12}X_2=0 \\ \delta_2=0: & \delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0 \end{array}\right\}$$

přetvárné (deformační) podmínky ⇒ X_1, X_2

Deformace zákl. soustavy musí být stejná jako u řešené (dané) soustavy.

Koeficienty δ_{ij} .... přetvoření (určíme číselně PVs)

Význam indexů:
j → příčina
i → místo a směr přetvoření

2.2. Konstrukce n krát staticky neurčitá

Soustava podmínečných rovnic (zapsaná pro všechna místa uvolněných vazeb)

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta_{11}\underline{X_1} + \delta_{12}\underline{X_2} + \dots + \delta_{1n}\underline{X_n} + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}\underline{X_1} + \delta_{22}\underline{X_2} + \dots + \delta_{2n}\underline{X_n} + \delta_{20} = 0 \\ \vdots \\ \delta_{n1}\underline{X_1} + \delta_{n2}\underline{X_2} + \dots + \delta_{nn}\underline{X_n} + \delta_{n0} = 0 \end{array}} \qquad (2)$$

n .. rovnic
pro n neznámých
$\underline{X_1}, \underline{X_2}, \dots \underline{X_n}$

- Maticově:

$$\underset{(n\times n)}{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}} \underset{(n\times 1)}{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}} + \underset{(n\times 1)}{\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{n0} \end{Bmatrix}} = \underset{(n\times 1)}{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

rozměry matice, vektorů

Kompaktní maticový zápis

- $$\underset{\uparrow}{[\delta_{ij}]}\,\underset{\uparrow}{\{X_j\}} + \underset{\uparrow}{\{\delta_{i0}\}} = \underset{\uparrow}{\{0\}}$$

nulový vektor

vektor zatíž.

vektor neznámých

matice poddajnosti kce (čtvercová, symetrická)

↳ $\delta_{ij} = \delta_{ji}$
(Bettiho věta)

Prvky δ_{ij} matice poddajnosti představují zobecnělé „posuny" (t.j. posun, pootočení, změna vzdálenosti, relativní ∡ pootočení) způsobené jednotkovými bezrozměrnými „silami" (síly, momenty) ve směrech „sil".

3. Výpočet koeficientů δ_{ij}, δ_{i0} (= přetvoření na Z.S. ⇐ PVs)

$$\boxed{\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int \frac{N_i N_j}{EA} dx + \beta \int \frac{Q_i Q_j}{GA} dx} \qquad (3a)$$

δ_{ij} ↓ prvky matice poddajnosti

zatížení

$$\delta_{i0} = \int \frac{M_i M_0}{EI} dx + \int \frac{N_i N_0}{EA} dx + \beta \int \frac{Q_i Q_0}{GA} dx + \quad \leftarrow \text{silové}$$

$$+ \int N_i \alpha t \, dx + \int M_i \alpha \frac{\Delta t}{h} dx + \quad \leftarrow \text{teplota}$$

$$- \sum R_{F_i} \tilde{u} - \sum R_{M_i} \tilde{\varphi} \quad \leftarrow \text{popuštění, pootočení podpory}$$

(3b)

δ_{i0} ↓ prvky zatěžovacího vektoru

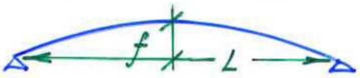
Poznámka:

1.) Integrace po skutečné délce střednice kce (t.j. po všech prutech)

2.) R_{F_i}, R_{M_i} .... reakce v místě předepsaných hodnot $\tilde{u}$, $\tilde{\varphi}$ od $\overline{X}_i = 1$

3) u většiny kcí PS – vliv N, Q na přetvoření zanedbatelný
⇒ největší vliv z vnitř. sil mají M

× vliv N nelze zanedbat: u táhel
u příhradových kcí
u nízkých oblouků $\frac{f}{L} \leq \frac{1}{5}$



vliv Q – uvažujeme u vysokých a krátkých nosníků

⇒ u obvyklých ohýbaných kcí (bez zatížení vedlejšími vlivy)

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI} dx$$

$$\delta_{i0} = \int \frac{M_i M_0}{EI} dx$$

4. Postup výpočtu SM a kontroly řešení

1. Určíme stupeň statické neurčitosti kce … n.
2. Zvolíme základní soustavu (z.s.), zavedeme X_i $(i = 1, \dots n)$.
3. Sestavíme přetvárné podmínky $\Rightarrow X_i$ (Na z.s. určíme a vykreslíme M_0, M_i (N_0, N_i) a určíme velikosti δ_{ij}, δ_{i0}).
4. Určíme výsledné průběhy **M, N, Q**.
5. Provedeme kontroly výsledků řešení.

Výsledné řešení stat. neurčité kce musí splňovat:

a) Statické podmínky rovnováhy

- soustavy jako celku (rovnováha zatížení a vnějších reakcí)
- všech sil a momentů působících na jednotlivé styčníky, případně části kce

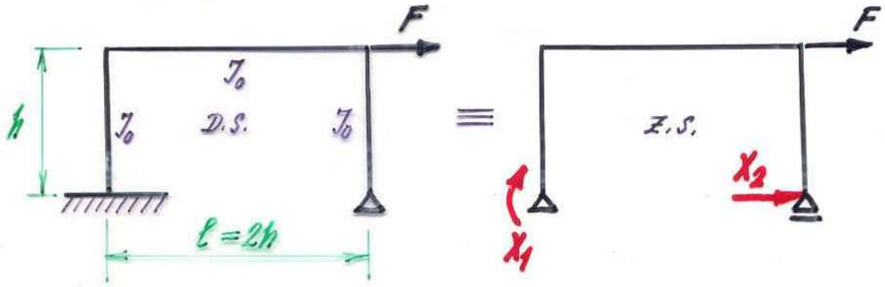
b) Přetvárné podmínky (Používáme PVs a redukční větu)

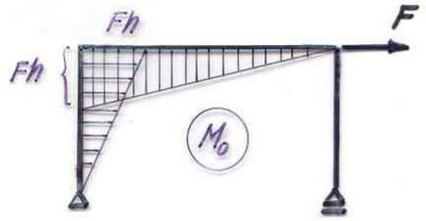
Splnění pouze statických podmínek není postačující!

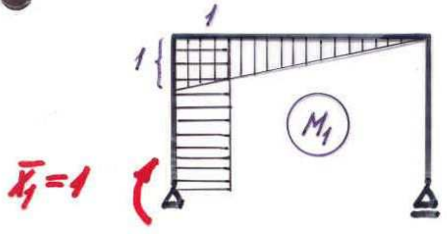
Příklady výpočtu

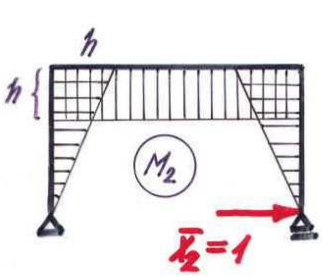
Vypočtěte a vykreslete průběhy M, N, Q na konstrukci 2x staticky neurčité. Při výpočtu součinitelů poddajnosti δ_{ij}, δ_{i0} uvažujte pouze vliv ohybových momentů.

a) Uvažujte zatížení silou F









Výpočet koeficientů poddajnosti

$$\underline{\delta_{11}} = \overset{\square\,\square}{\frac{h}{EI_0}} + \overset{\triangleright\,\triangleright}{\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}h}{EI_0}\frac{2}{3}} = \underline{\frac{5}{3}\frac{h}{EI_0}}$$

$$\underline{\delta_{12}} = \overset{\triangledown\,\square}{\frac{1}{2}h^2\frac{1}{EI_0}} + \overset{\triangleright\,\square}{\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}h^2\frac{1}{EI_0}} = \underline{\frac{3}{2}\frac{h^2}{EI_0}}$$

$$\underline{\delta_{22}} = \overset{\triangledown\,\triangledown}{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}h^2\frac{2}{3}h\frac{1}{EI_0}} + \overset{\square\,\square}{2h^2h\frac{1}{EI_0}} = \underline{\frac{8}{3}\frac{h^3}{EI_0}}$$

$$\underline{\delta_{10}} = \overset{\triangledown\,\square}{\frac{1}{2}\frac{hFh}{EI_0}} + \overset{\triangleright\,\triangleright}{\frac{1}{2}\cancel{2}h^2F\frac{2}{3EI_0}} = \underline{\frac{7}{6}\frac{Fh^2}{EI_0}}$$

$$\underline{\delta_{20}} = \overset{\triangledown\,\triangledown}{\frac{1}{\cancel{2}}h^2F\frac{\cancel{2}}{3}\frac{h}{EI_0}} + \overset{\triangleright\,\square}{\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}h^2\frac{Fh}{EI_0}} = \underline{\frac{4}{3}\frac{Fh^3}{EI_0}}$$

Podmínečné rovnice

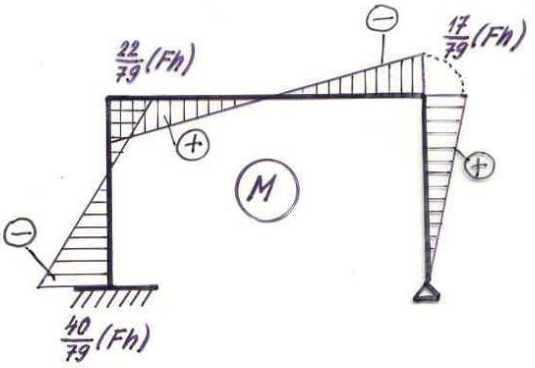
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0$$

$$\frac{5}{3}\frac{h}{EI_0}\underline{X_1} + \frac{3}{2}\frac{h^2}{EI_0}\underline{X_2} + \frac{7}{6}\frac{Fh^2}{EI_0} = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{6EI_0}{h}$$

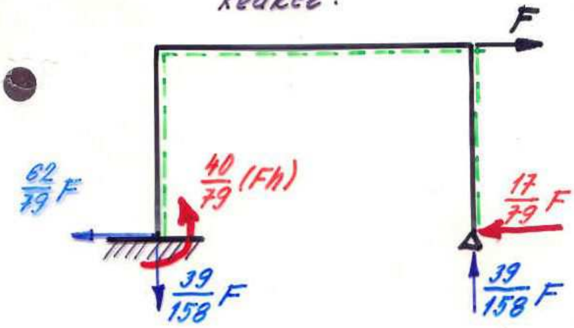
$$\frac{3}{2}\frac{h^2}{EI_0}\underline{X_1} + \frac{8}{3}\frac{h^3}{EI_0}\underline{X_2} + \frac{4}{3}\frac{Fh^3}{EI_0} = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{6EI_0}{h^2}$$

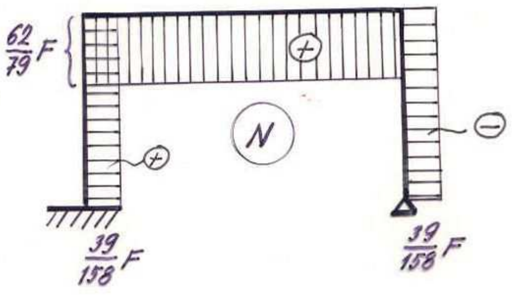
$$\left.\begin{aligned} 10X_1 + 9(X_2 h) + 7Fh &= 0 \\ 9X_1 + 16(X_2 h) + 8Fh &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{symetrie matice poddajnosti}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 &= -\frac{40}{79}(Fh) \\ X_2 &= -\frac{17}{79}F \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &[kNm] \\ &[kN] \end{aligned}$$



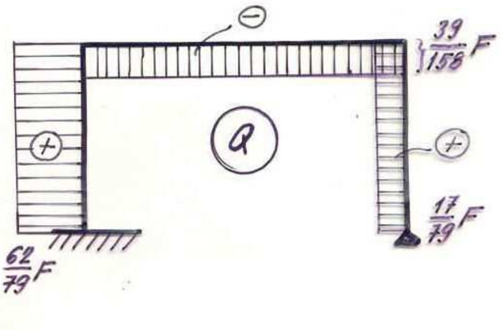
Reakce:





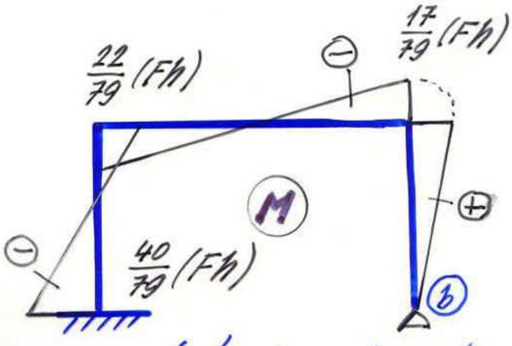
Výsledné hodnoty M, N, Q lze určit:

$$\boxed{\begin{aligned} M &= M_0 - \frac{40}{79}(Fh)M_1 - \frac{17}{79}FM_2 \\ N &= N_0 - \frac{40}{79}(Fh)N_1 - \frac{17}{79}FN_2 \\ Q &= Q_0 - \frac{40}{79}(Fh)Q_1 - \frac{17}{79}FQ_2 \end{aligned}}$$

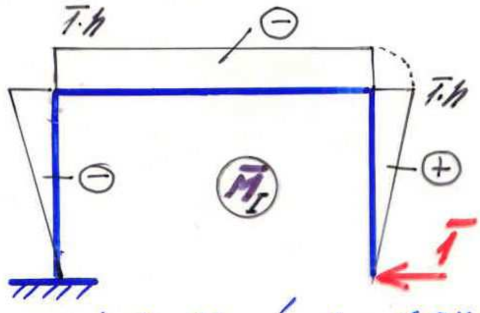


Kontrola přetvárných podmínek:

Např: $\boxed{u_b = 0}$ – použijeme redukční větu:
(počítáno pouze s vlivem M)



reálný stav (výsledný)



jednotkový stav (PVs)

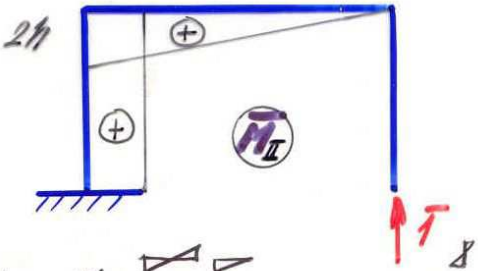
$$\bar{1}\cdot u_b = \int \frac{M\cdot\overline{M}_I}{EI}dx = \frac{F\cdot h}{79\cdot EI}\Big[\frac{1}{3}\cdot 17(\bar{1}h)\cdot h + 2{,}5\cdot(-\bar{1}h)\cdot 2h$$

podle TAB.1

$$+\frac{h}{6}(2\cdot 22 - 40)\cdot\bar{1}h\Big] =$$

$$= \frac{Fh^3}{79EI}\underbrace{\Big[\frac{17}{3} - \frac{15}{3} - \frac{2}{3}\Big]}_{0} = \underline{\underline{0}}$$

$\boxed{w_b = 0}$



$$\bar{1}\cdot w_b = \int \frac{M\cdot\overline{M}_{II}}{EI}\cdot dx = \frac{F\cdot h}{79EI}\Big[\frac{2h}{6}\cdot 2h(2\cdot 22 - 17) - \frac{18}{2}\cdot h^2\cdot 2\Big]$$

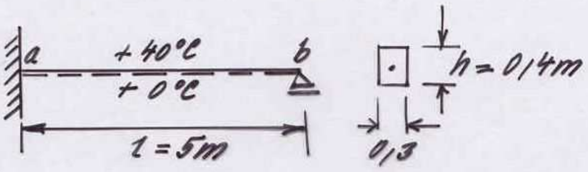
$$= \frac{Fh^3}{79EI}\underbrace{\Big[\frac{2}{3}27 - 18\Big]}_{0} = \underline{\underline{0}}$$

M – průběh momentů na reálné kci
určený *jakoukoliv* metodou!

Př. 1) SM určete průběh M, Q, N

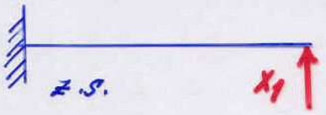
2) Pomocí <u>redukční věty</u> zkontrolujte $\varphi_a = 0$, $w_b = 0$.

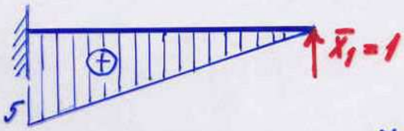
$(EI = 20\,MNm^2,\ \alpha = 12 \cdot 10^{-6}\,°C,\ h = 0{,}4\,m)$



Řešení 1) $\boxed{X_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0}$, $t = \frac{0+40°}{2} = +20°$

$\Delta t = t_d - t_h = 0 - 40° = \underline{-40°}$





$N_1 = 0$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{20 \cdot 10^3} \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

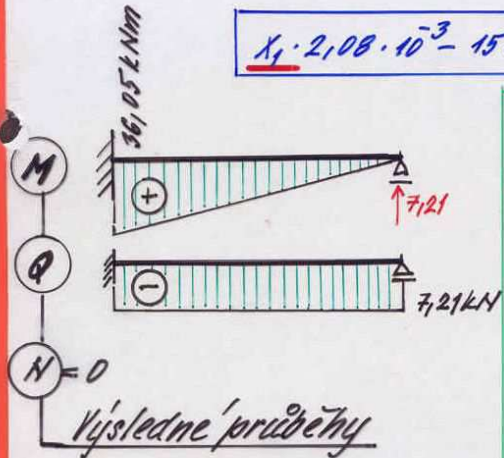
$$= \underline{\underline{2{,}08 \cdot 10^{-3}}}$$

$$\delta_{10} = \int \overset{0}{\overset{\|}{N_1}} \cdot \alpha t \cdot dx + \int \frac{M_1 \alpha \Delta t}{h} dx =$$

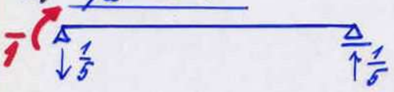
$$= \quad 0 + \frac{-40}{0{,}4} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \underline{\underline{-15 \cdot 10^{-3}}}$$

$$\boxed{\underline{X_1} \cdot 2{,}08 \cdot 10^{-3} - 15 \cdot 10^{-3} = 0}$$

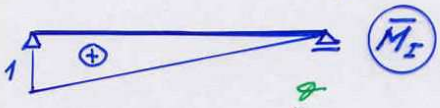
$$\underline{X_1 = 7{,}21\,kN}$$



2) $\underline{\varphi_a = 0\,?}$



$\bar{N}_I = 0$

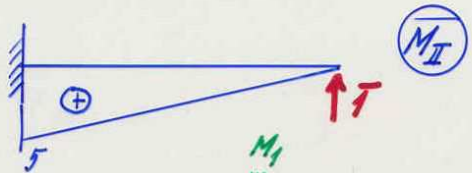


$$\bar{1} \cdot \varphi_a = \int \frac{M \bar{M}_I}{EI} dx + \int \overset{0}{\overset{\|}{\bar{N}_I}} \alpha \cdot t\,dx + \int \frac{\bar{M}_I \cdot \alpha \cdot \Delta t}{h} dx$$

$$= \frac{1}{20 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 36{,}05 \cdot 5 + 0 - \frac{40}{0{,}4} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 =$$

$$= 3 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{0}}$$

2) Kontrola $w_b = 0$?



$\bar{N}_{II} = 0$

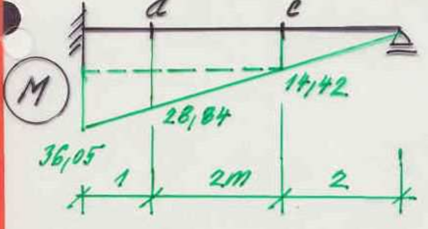
$$\bar{1} \cdot w_b = \int \frac{\overset{\overset{M_1}{|||}}{M} \cdot \bar{M}_{II}}{EI} dx + \int \bar{N}_{II} \cdot \alpha \cdot t \cdot dx + \int \frac{\bar{M}_{II} \cdot \alpha \cdot \Delta t}{h} dx =$$

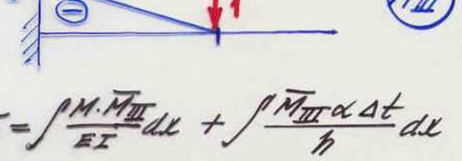
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{36{,}05 \cdot 5 \cdot 5}{20 \cdot 103} + 0 + \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot (-40)}{0{,}4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 =$$

$$= 15 \cdot 10^{-3} - 15 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{0}}$$

Pozor: Při výpočtu přetvoření stat. neurčitých kcí (pomocí redukční věty) nezapomeňte na uplatnění „vedlejšího" vlivu.

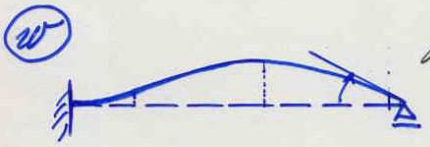
3) Určete průhyby v průřezech c, d nosníku





$$\bar{1} \cdot w_c = \int \frac{M \cdot \bar{M}_{III}}{EI} dx + \int \frac{\bar{M}_{III} \alpha \Delta t}{h} dx$$

$$= -6{,}489 \cdot 10^{-3} + 5{,}4 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{-1{,}089 \cdot 10^{-3} m}}$$



Obdobně vychází:

$$\underline{\underline{w_d = -0{,}24 \cdot 10^{-3} m}}$$

Příhradové kce rovinné staticky neurčité – řešení silovou metodou

Statická neurčitost : $\boxed{n = \pi + \rho - 2\beta}$

π... počet prutů
ρ... počet složek reakcí
β... počet styčníků

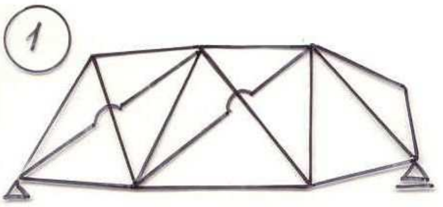
$n = 0$, det. $\neq 0$ ... soustava staticky určitá (tuhá)
det. $= 0$ ... –"– (výjimkový případ)

- **$n > 0$ ... soustava staticky neurčitá**

$n < 0$ ... soustava staticky přeurčitá (pohyblivá)

Příklady statické neurčitosti kce :

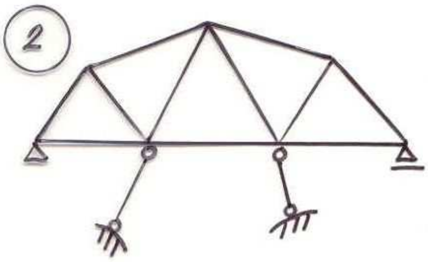
①



- $n = 15 + 3 - 2 \cdot 8 = 2$

soustava vnitřně stat. neurč.

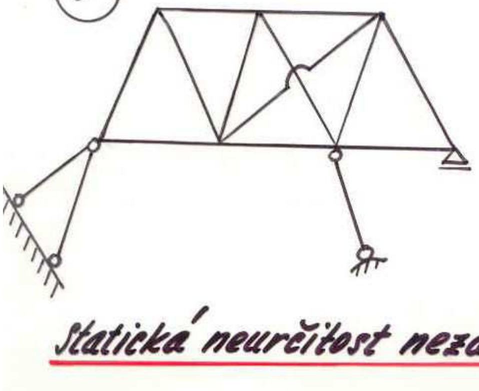
②



$n = 11 + (2 + 3 \cdot 1) - 2 \cdot 7 = 2$

vnější statická neurčitost

③



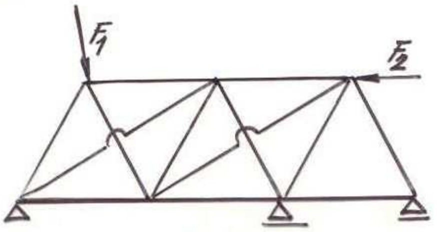
$n = 12 + 4 - 2 \cdot 7 = 2$

statická neurčitost kombinovaná
(vnější i vnitřní)

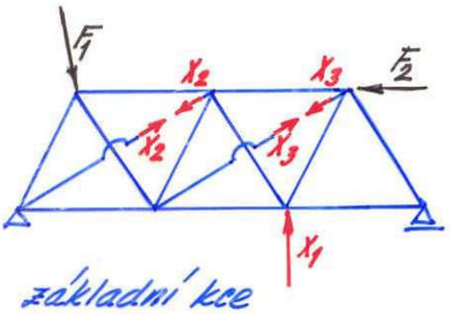
Statická neurčitost nezáleží na zatížení kce!

Při řešení kce nezáleží na druhu statické neurčitosti!

Př. Určete osové síly v prutech zadané kce!



≡



daná kce

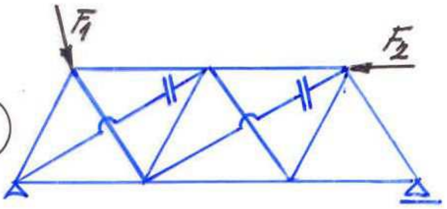
$n = 13+4-7\cdot 2 = \underline{3}$ × stat. neurč.

základní kce

- Jednotlivé zatěžovací stavy

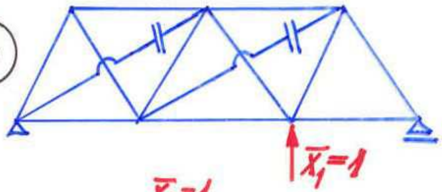
základní

(N0)

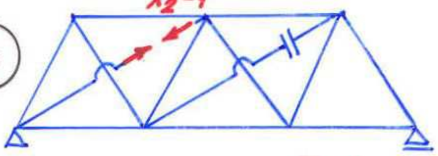


jednotkové

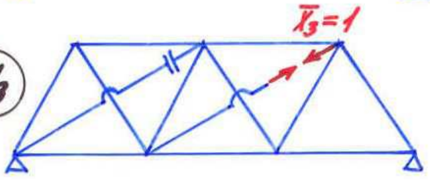
(N1)



(N2)



(N3)



- Výsledné N v prutu (1):

$$N = N_0 + N_1\underline{X_1} + N_2\underline{X_2} + N_3\underline{X_3}$$

neznámé

Podmínečné rov. (2):

Význam podm. r.

$\underline{X_1}\delta_{11} + \underline{X_2}\delta_{12} + \underline{X_3}\delta_{13} + \delta_{10} = 0$ … svislý posun v místě X_1 je nula

$\underline{X_1}\delta_{21} + \dots\dots + \delta_{20} = 0$ … změna vzdál. v řezu „X_2" je nulová

$\underline{X_1}\delta_{31} + \dots\dots + \delta_{30} = 0$ … změna vzdál. v řezu „X_3" je nulová

Kce n× staticky neurčitá

(1) $N = \sum_{i=1}^{n} N_i X_i + N_0$ ... výsledná osová síla v prutu

Soustava podmínečných rovnic stejná jako (2)!

Podmínečné koeficienty (vzhledem ke konst. N po délce prutu)

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum_{\text{pruty}} N_i N_j \frac{l}{EA} \equiv \delta_{ji} \\ \delta_{i0} &= \sum_{\text{pruty}} \left(N_i N_0 \frac{l}{EA} + \underbrace{N_i \alpha t l}_{\text{vliv rovnoměr. oteplení}} \right) - \sum_{\text{podpory}} \tilde{w} R_{F_i} \end{aligned}} \qquad (3')$$

(kde je předepsán posun $\tilde{w}$)

N_i; N_j ... osové síly na z.s. při i-tém jedn. stavu (j-tém jedn. stav

N_0 ... –"– –"– zatížené silovým namáháním

R_{F_i} ... silová reakce při i-tém jednotk. stavu v místě $\tilde{w}$

l ... délka prutu

Souměrné konstrukce – zatížení symetrické
zatížení antisymetrické

pracnost výpočtu lze podstatně snížit, je-li konstrukce symetrická (t.j. nejen symetrická střednice celé konstrukce, ale také symetrické podepření a všechny geometrické a fyzikální veličiny, např. A, I, E, G, ν ....)

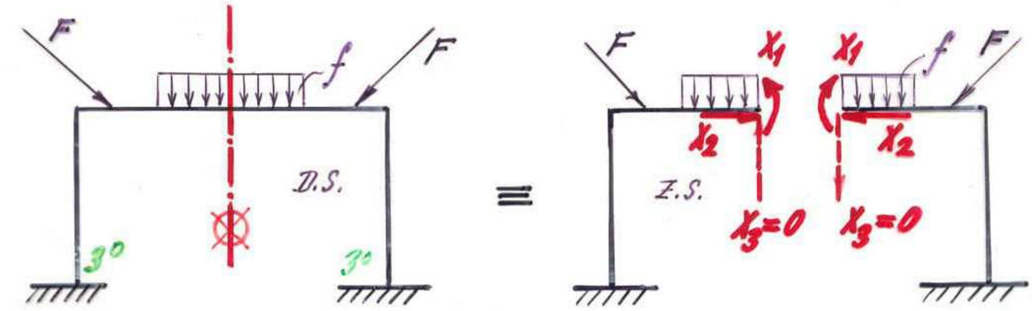
druhy zatížení symetrické konstrukce
- symetrické
- antisymetrické
- nesymetrické

a) Zatížení symetrické

Symetrická konstrukce symetricky zatížená má vzhledem k ose symetrie: **symetrické průběhy**: ohyb. momentů M
normál. sil N
(deformace)

antisymetrický průběh: posouvajících sil Q

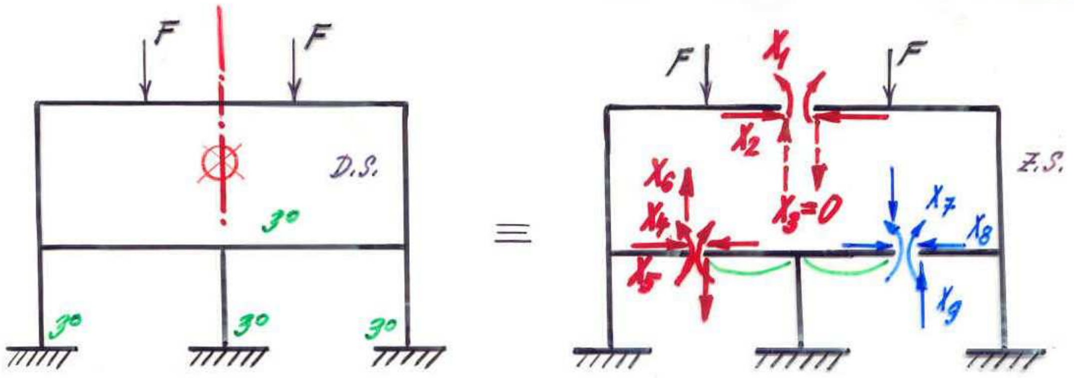
⇒ na ose symetrie: $Q = 0$; $M \neq 0$; $N \neq 0$



obecně: kce 3x stat. neurčitá

kce 2x stat. neurčitá (X_1, X_2)

Základní soustavu volíme obyčejně symetrickou
⇒ snížíme počet stat. neurčitých veličin, stačí obyčejně počítat 1/2 konstrukce



kce 9x staticky neurčitá

$X_3 = 0$

$X_4 = X_7$; $X_5 = X_8$; $X_6 = X_9$

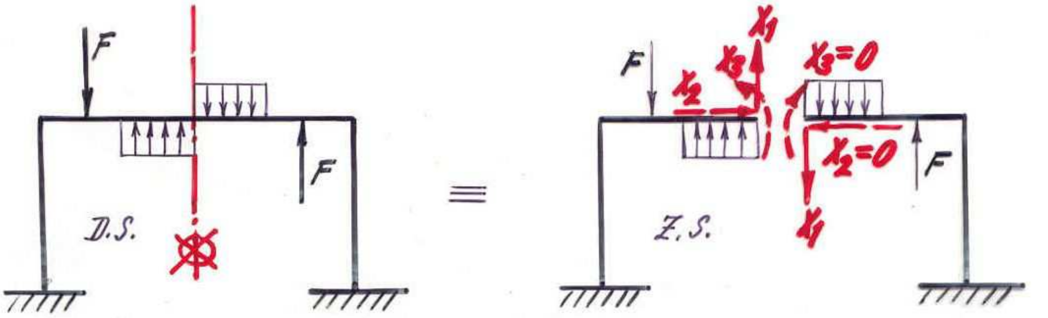
kce 5x staticky neurčitá

b) zatížení antisymetrické

Na symetrické konstrukci jsou vzhledem k ose symetrie průběhy:
ohyb. momentů M
normál. sil N
(deformace)
} antisymetrické

posouvajících sil Q ... symetrické

⇒ na ose symetrie : $M=0$, $N=0$, $Q \neq 0$

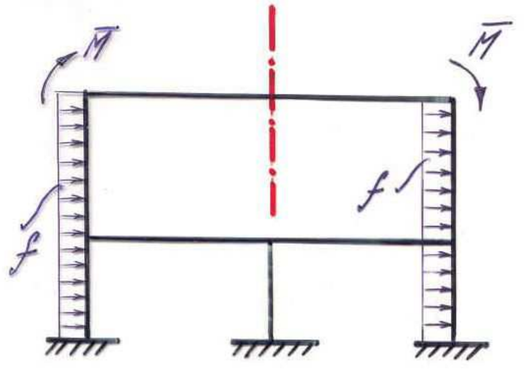


obecně : kce 3x stat. neurčitá

$X_3 = 0$; $X_2 = 0$

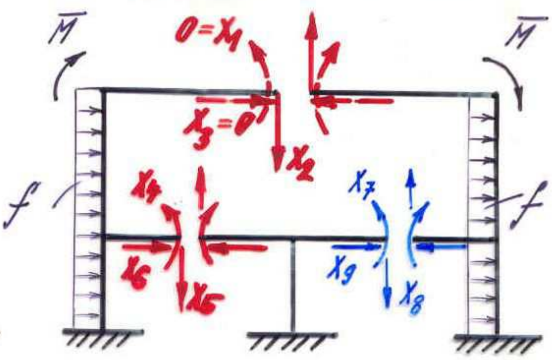
⇒ kce 1x stat. neurčitá (X_1)

Z.S. volíme obyčejně symetrickou, stat. neurč. veličiny jako antisymetrické ⇒ vyvodí antisym. stav namáhání konstrukce



kce 9x stat. neurčitá

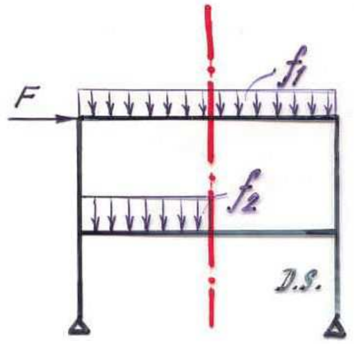
kce 4x staticky neurčitá

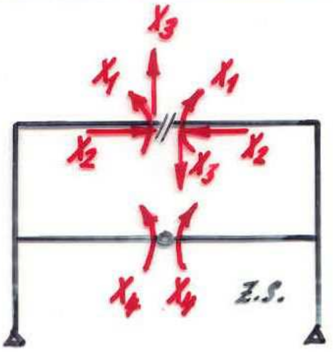


$X_1 = X_3 = 0$,

$X_4 = -X_7$, $X_5 = X_8$, $X_6 = -X_9$

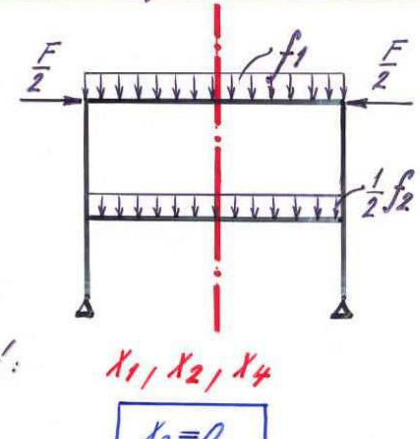
c) Zatížení nesymetrické na souměrné konstrukci
se dá rozdělit na zatížení
symetrické a antisymetrické
výsledné namáhání = součet obou stavů

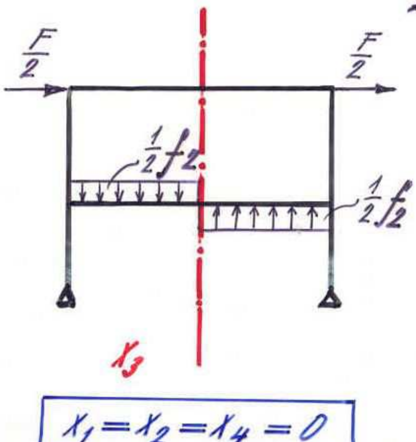




zavedení
staticky
neurč. sil

Zatížení symetrické + zatíž. antisymetrické = dané zatíž.

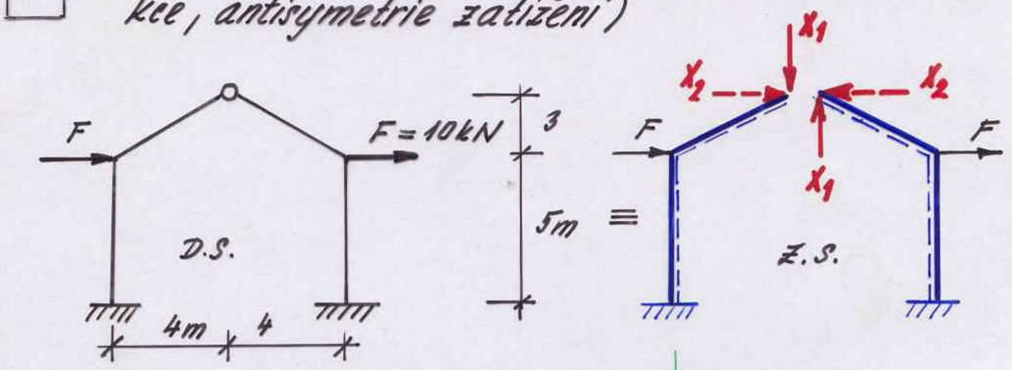




zůstává: X_1, X_2, X_4 X_3

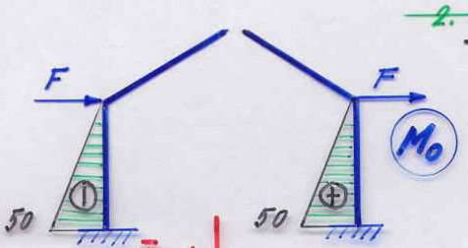
$\boxed{X_3=0}$ $\boxed{X_1=X_2=X_4=0}$

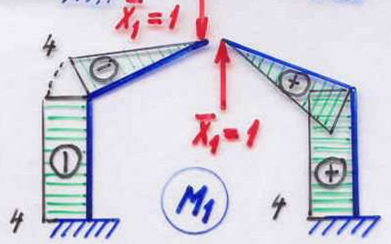
Př.: SM určete průběhy M, N, Q (s využitím symetrie kce, antisymetrie zatížení)

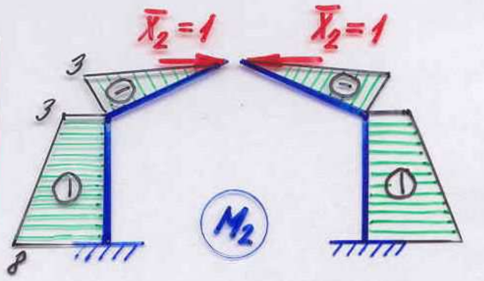


1. $X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \delta_{10} = 0$

2. ~~$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \delta_{20} = 0$~~







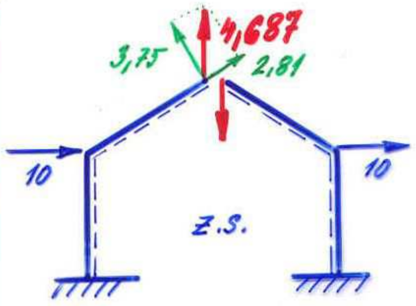
$$\delta_{10} = \frac{2}{EI}\left[\overset{\triangle\,\square}{\frac{1}{2}5\cdot 50\cdot 4}\right] = \frac{2}{EI}\,500$$

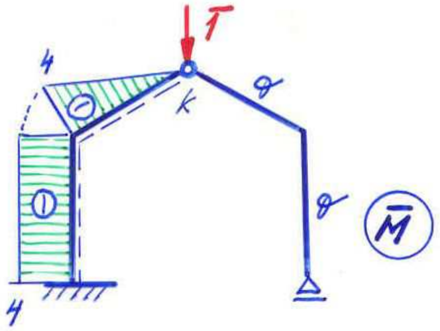
$$\delta_{11} = \frac{2}{EI}\left[\overset{\triangleright\triangleright}{\frac{1}{3}5\cdot 4\cdot 4} + \overset{\square\square}{5\cdot 4\cdot 4}\right] = \frac{2}{EI}\,106{,}67$$

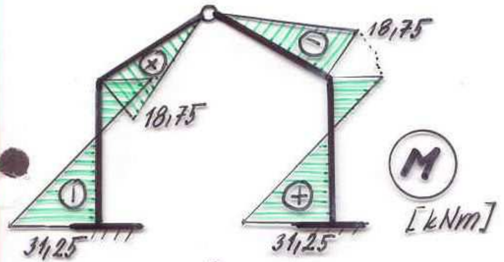
$$\boxed{\begin{aligned}\delta_{12} &= 0\\ \delta_{22} &\neq 0\\ \delta_{20} &= 0\end{aligned}}$$

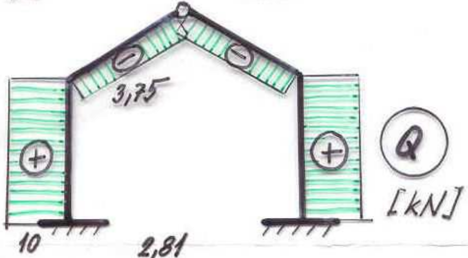
2. $X_1\cdot 0 + X_2\delta_{22} + 0 = 0 \Rightarrow \underline{X_2 = 0}$

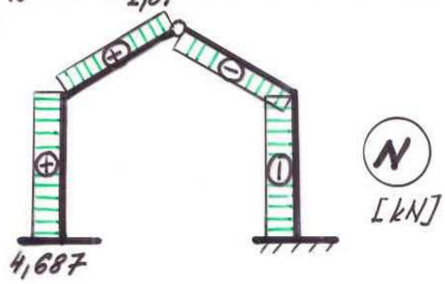
1. $X_1\delta_{11} + \delta_{10} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{X_1 = -4{,}687\,kN}$











Zkontrolujte nulovou hodnotu průhybu na ose symetrie kce ($w_k = 0$).

$$\bar{1} \cdot w_k = \int \frac{M\bar{M}}{EI}\, ds =$$

▷ ▷ ▯ ▱

$$= \left[-\frac{1}{3}5\cdot 4\cdot 18{,}75 + (-5\cdot 4)(-6{,}25)\right]\frac{1}{EI}$$

$$= [-125 + 125]\frac{1}{EI} = \underline{\underline{0}}$$

Výsledné průběhy

M, N – antisymetrické průběhy

Q – symetrický průběh

⇒ stačilo počítat 1/2 kce, na 2. část dokreslit!

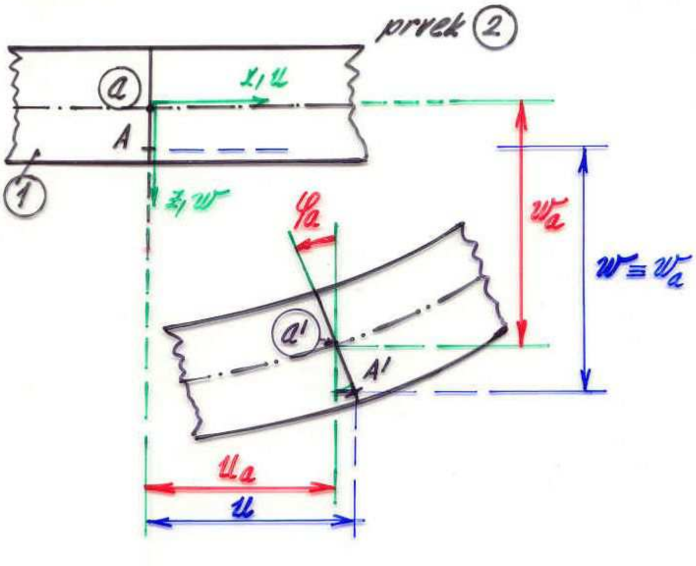
DEFORMAČNÍ METODA

Podstata DM :

Základní předpoklad	Pole posunutí u, w ... spojité
Řídící princip	Lagrangeův
Neznámé	Styčníkové posuny a pootočení
Podmínečné rovnice	Podmínky rovnováhy momentů a sil

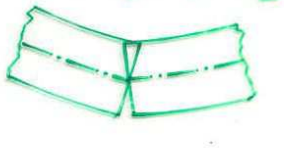
Přednost DM = snadná algoritmizovatelnost
⇒ vhodné maticové zpracování rovnic DM

1. Spojitost pole posunutí, základní neznámé



ⓐ...styčník
A ... libovolný bod [x, z]

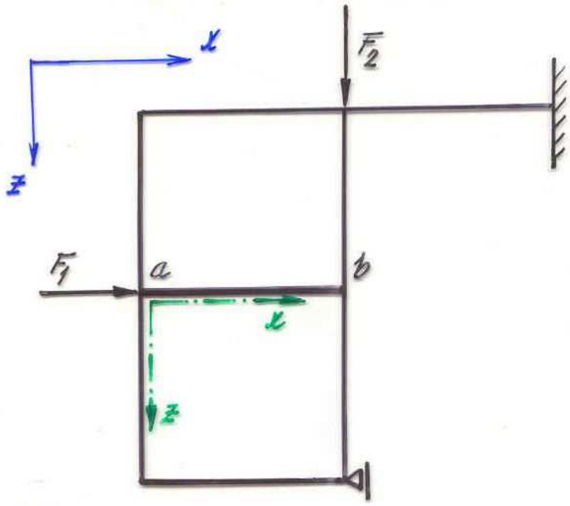
Pozn.:
nespojité φ
⇒ nesp. $u_1 \neq u_2$



Z předp. PRPE o zachování rovinnosti průřezu po deformaci (B.-N.)
⇒ posuny u, w budou spojité v lib. bodě kce, pokud na styku dvou prvků budou stejné posuny u_a, w_a a pootočení φ_a

⇒ u_a, w_a, φ_a ... základní neznámé v DM.

Staticky neurčitá konstrukce (tvarově přeurčitá)



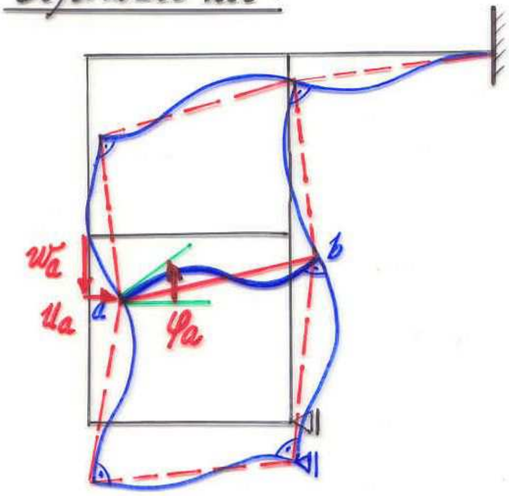
x, z ... globální osy

x, z ... lokální osy (pro prut ab)

SM : 7x stat. neurčité

ODM (obecná DM):
6 pootočení
6 posunů w
5 posunů u
17 deformačních neznámých

Deformace kce :

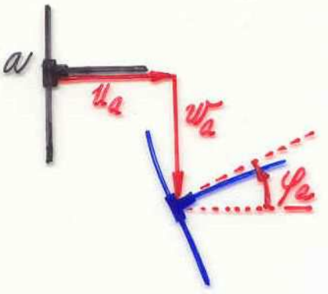


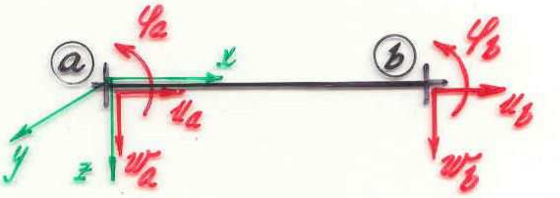
- - - - deformace kloubového mechanismu (tvarově neurč. kce)

— deformace skutečné kce

V dalším : budeme se zabývat prutem a-b (tuhé styčníky)
typ v-v

2. Konvence v DM



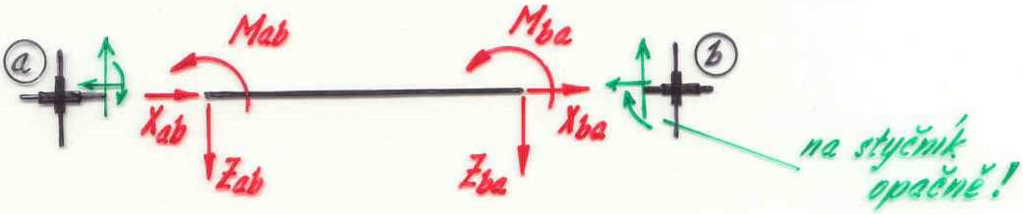


Kladné uzlové „posuny"

Kladné posuny u_a, w_a, u_b, w_b ... směr kladných os x, z
Kladná pootočení φ_a, φ_b ... pravidlo pravé ruky

Vektor uzlových posunů:

$$\{r_{ab}\} = \{u_a, w_a, \varphi_a, u_b, w_b, \varphi_b\}^T \qquad (4)$$



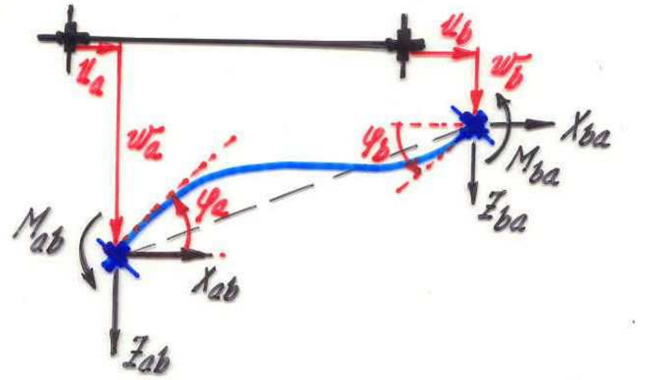
Kladné koncové „síly" na prutu!

Kladné konc. síly v konc. průřezech prutu $X_{ab}, Z_{ab}, X_{ba}, Z_{ba}$
... směr kladných posunutí (n. poloos x, z)
Kladné konc. momenty ... směr klad. pootočení (prav. pravé ruky)

Vektor koncových sil:

$$\{R_{ab}\} = \{X_{ab}, Z_{ab}, M_{ab}, X_{ba}, Z_{ba}, M_{ba}\}^T \qquad (5)$$

3. Vztah mezi koncovými silami $\{R_{ab}\}$ a složkami posunutí $\{r_{ab}\}$



Proč?
neznámé: „posuny"
× rovnice: podm. rov. (v „silách")

Přetvoření prutu způsobeno:

a) **vlastním zatížením prutu** (silové zatíž., změny teploty, ...)
$\Rightarrow \{\bar{R}_{ab}\}$ (momenty $\bar{M}_{ab}$, $\bar{M}_{ba}$ v tab. 2)

b) **účinkem působení sousedních prvků** pomocí uzlových posunů $\{r_{ab}\}$ ← skutečnou velikost zatím neznáme

$\Rightarrow$ Užijeme: princip superpozice a proporcionality pro vyjádření **výsledných koncových sil**

$$\boxed{\{R_{ab}\} = \{\bar{R}_{ab}\} + [K_{ab}]\{r_{ab}\}} \qquad (6)$$

$[K_{ab}]$ ... **matice tuhosti prutu** (MT)

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & \cdot & \cdot & k_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & k_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & k_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & k_{43} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot & k_{53} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 6 & \cdot & \cdot & k_{63} & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

$\uparrow$
$\{R_{ab}\}$

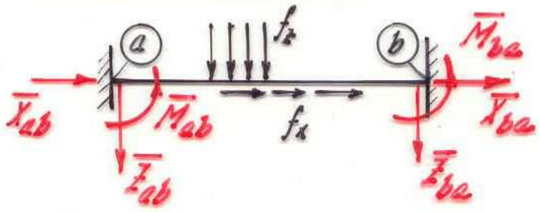
$\varphi_a = 1$; $u_a = 0$
$w_a = 0$
$u_b = 0$

Význam prvků MT

Sloupce MT vyjadřují „síly" způsobené jednotkovým koncovým „posunem", tzv. jednotkovým deformačním příčinkem.

Přímý prut konst. průřezu, typ v–v

3.1. Koncové síly od vlastního zatížení prutu $\{\overline{R}_{ab}\}$ v dokonalém vetknutí ($\{r_{ab}\} = \{0\}$)



$$\{\overline{R}_{ab}\} = \{\underbrace{\overline{X}_{ab}, \overline{Z}_{ab}, \underline{\overline{M}_{ab}}, \overline{X}_{ba}, \overline{Z}_{ba}, \underline{\overline{M}_{ba}}}_{}\}^T \qquad (7)$$

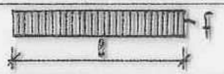
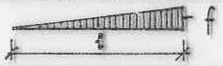
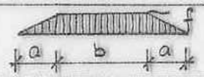
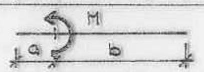
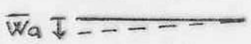
koncové síly od zatížení
v konc. průřezech prutu ← určí se SM
(z.s. = prostý n.)

$\overline{M}_{ab}$, $\overline{M}_{ba}$ ... tabelovány (TAB. 2) pro různá sil. zatížení
i pro vedl. vlivy

× $\overline{X}_{ab}$, $\overline{Z}_{ab}$ .... dopočítáváme z podm. rovnováhy na prutu,
příp. z přetvárných podmínek

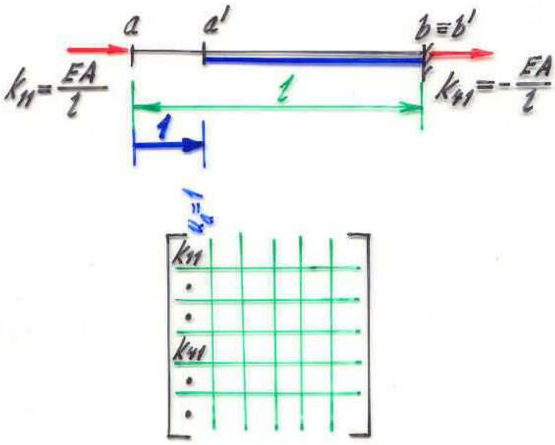
Příklad

TABULKA 2

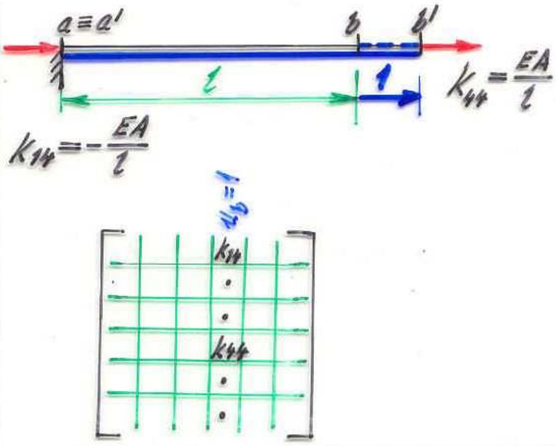
		1	2	3	4
	ZATÍŽENÍ				
1		$\frac{Fab^2}{\ell^2}$	$-\frac{Fa^2b}{\ell^2}$	$\frac{Fab}{2\ell^2}(b+\ell)$	$-\frac{Fab}{2\ell^2}(a+\ell)$
2		$\frac{F\ell}{8}$	$-\frac{F\ell}{8}$	$\frac{3}{16}F\ell$	$-\frac{3}{16}F\ell$
3		$\frac{f\ell^2}{12}$	$-\frac{f\ell^2}{12}$	$\frac{f\ell^2}{8}$	$-\frac{f\ell^2}{8}$
4		$\frac{fa^2}{12\ell^2}(6b^2+3ab+a\ell)$	$-\frac{fa^3}{12\ell^2}(3b+\ell)$	$\frac{fa^2}{8\ell^2}(a^2+4b\ell)$	$-\frac{fa^2}{8\ell^2}(2\ell^2-a^2)$
5		$\frac{f\ell^2}{30}$	$-\frac{f\ell^2}{20}$	$\frac{7}{120}f\ell^2$	$-\frac{1}{15}f\ell^2$
6		$\frac{5}{96}f\ell^2$	$-\frac{5}{96}f\ell^2$	$\frac{5}{64}f\ell^2$	$-\frac{5}{64}f\ell^2$
7		$\frac{f(\ell-a)}{12\ell}(a^2+ab+\ell^2)$	$-\frac{f(\ell-a)}{12\ell}(a^2+ab+\ell^2)$	$\frac{f(\ell-a)}{8\ell}(a^2+ab+\ell^2)$	$-\frac{f(\ell-a)}{8\ell}(a^2+ab+\ell^2)$
8		$\frac{Mb}{\ell^2}(2\ell-3b)$	$\frac{Ma}{\ell^2}(2\ell-3a)$	$\frac{M}{2\ell^2}(\ell^2-3b^2)$	$\frac{M}{2\ell^2}(\ell^2-3a^2)$
9	 $\alpha_t \doteq 0{,}000012$	$\frac{EJ}{h}\alpha_t(t_d-t_h)$	$-\frac{EJ}{h}\alpha_t(t_d-t_h)$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{EJ}{h}\alpha_t(t_d-t_h)$	$-\frac{3}{2}\cdot\frac{EJ}{h}\alpha_t(t_d-t_h)$
10		$-3\frac{k_{ab}}{\ell}\cdot\overline{w_a}$	$-3\frac{k_{ab}}{\ell}\cdot\overline{w_a}$	$-2\frac{k_{ak}}{\ell}\cdot\overline{w_a}$	$-2\frac{k_{kb}}{\ell}\cdot\overline{w_a}$
11		$3\frac{k_{ab}}{\ell}\cdot\overline{w_b}$	$3\frac{k_{ab}}{\ell}\cdot\overline{w_b}$	$2\frac{k_{ak}}{\ell}\cdot\overline{w_b}$	$2\frac{k_{kb}}{\ell}\cdot\overline{w_b}$
12		$2k_{ab}\cdot\overline{\varphi_a}$	$k_{ab}\cdot\overline{\varphi_a}$	$2\cdot k_{ak}\cdot\overline{\varphi_a}$	—
13		$k_{ab}\cdot\overline{\varphi_b}$	$2k_{ab}\cdot\overline{\varphi_b}$	—	$2\cdot k_{kb}\cdot\overline{\varphi_b}$
		$k_{ab}=\frac{2EJ}{\ell}\cdot c$		$k_{ak}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2EJ}{\ell}\cdot c=k_{kb}$	

3.2. Koncové síly od jednotkových deformačních příčinků (prvky MT)

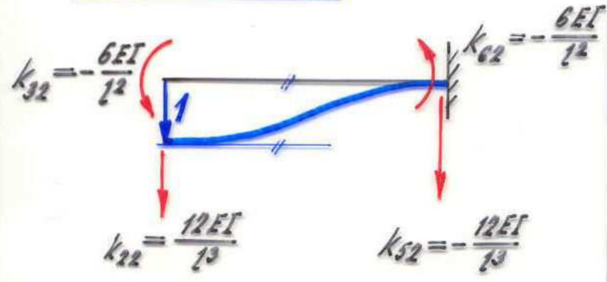
stav $u_a = 1$ 1. sl. MT



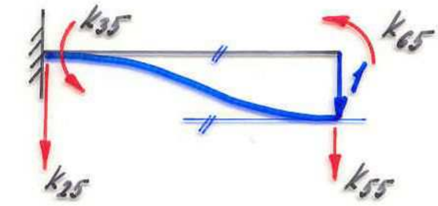
stav $u_b = 1$ 4. sl. MT



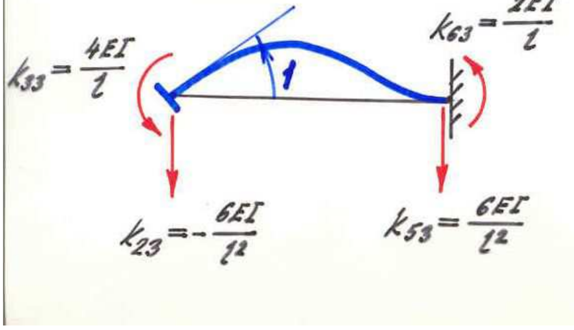
stav $w_a = 1$ 2. sl. MT



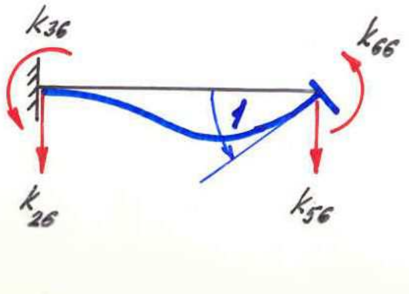
stav $w_b = 1$ 5. sl. MT



stav $\varphi_a = 1$ 3. sl. MT



stav $\varphi_b = 1$ 6. sl. MT



3.3. Základní vztah DM pro prizmatický prut a-b

$$
\left.\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & u_a=1 & w_a=1 & \varphi_a=1 & u_b=1 & w_b=1 & \varphi_b=1 & & \\
1. & X_{ab} & & \bar{X}_{ab} & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & & u_a \\
2. & Z_{ab} & & \bar{Z}_{ab} & & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & & w_a \\
3. & M_{ab} & = & \bar{M}_{ab} & + & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & & \varphi_a \\
4. & X_{ba} & & \bar{X}_{ba} & & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & & u_b \\
5. & Z_{ba} & & \bar{Z}_{ba} & & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & & w_b \\
6. & M_{ba} & & \bar{M}_{ba} & & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & \varphi_b
\end{array}\right. \qquad (6')
$$

$$\{R_{ab}\} = \{\bar{R}_{ab}\} + [\underset{\text{symetrická}}{K_{ab}}]\{r_{ab}\} \qquad (6)$$

$n_{ab} = n = \frac{EA}{l}$ .... **tuhost prutu v tahu** (7)

$k_{ab} = k = \frac{2EI}{l}$ .... **tuhost prutu v ohybu** (≡ ohybová tuhost prutu)

Zápis koncových sil ve skalárním tvaru:

$$X_{ab} = \bar{X}_{ab} - n(u_b - u_a)$$

$$Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} - \frac{k}{l}\left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\,\frac{w_b - w_a}{l}\right)$$

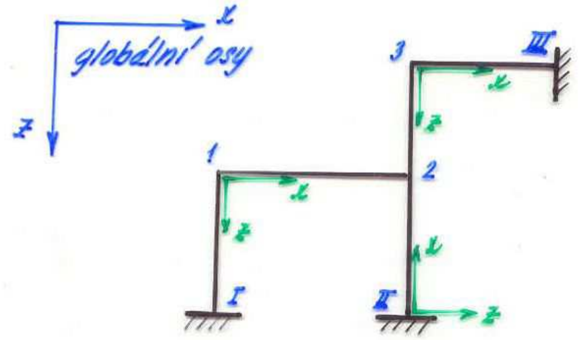
$$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + k\left(2\varphi_a + \varphi_b + 3\,\frac{w_b - w_a}{l}\right)$$

$$X_{ba} = \bar{X}_{ba} + n(u_b - u_a) \qquad (6'')$$

$$Z_{ba} = \bar{Z}_{ba} + \frac{k}{l}\left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\,\frac{w_b - w_a}{l}\right)$$

$$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + k\left(2\varphi_b + \varphi_a + 3\,\frac{w_b - w_a}{l}\right)$$

4. Umístění prutu v konstrukci: Transformace z lokálních do globálních os.



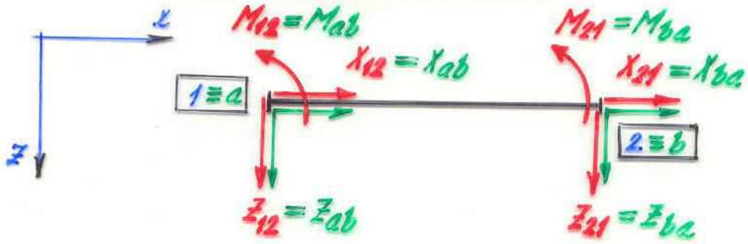
dosud:

prut vyjmutý z kce (a-b)

× kci jako celek nutno řešit v jediné globální soustavě os (⇒ silové i deformační veličiny do ní musíme transformovat)

Neznámé i podm. rovnováhy → v globál. osách!

Prut 1-2 **rovnoběžný s osou x** (vztah je 1 : 1 ⇐ podm. ekvivalence)

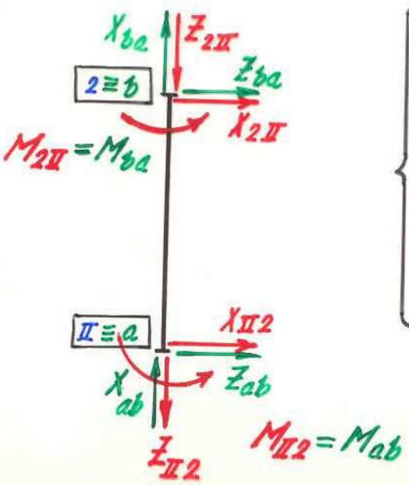


obdobně „posuny" 1 : 1

(8)

Prut II-2 **rovnoběžný s osou z** (9)

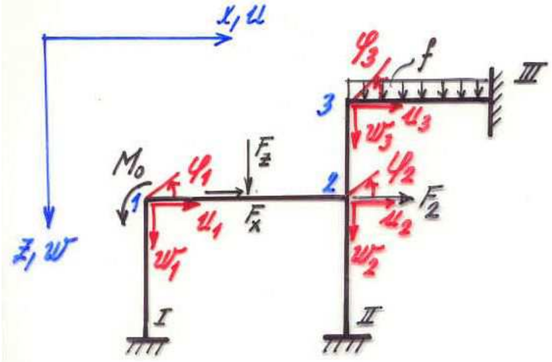
obdobně „posuny"



$$\begin{Bmatrix} X_{II2} \\ Z_{II2} \\ M_{II2} \\ X_{2II} \\ Z_{2II} \\ M_{2II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_{ab} \\ -X_{ab} \\ M_{ab} \\ Z_{ba} \\ -X_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} u_{II} \\ w_{II} \\ \varphi_{II} \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} w_a \\ -u_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ -u_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

5. Podmínky rovnováhy sil a momentů ve styčnících.

(Soustava rovnic pro neznámé styčníkové posuny a pootočení)



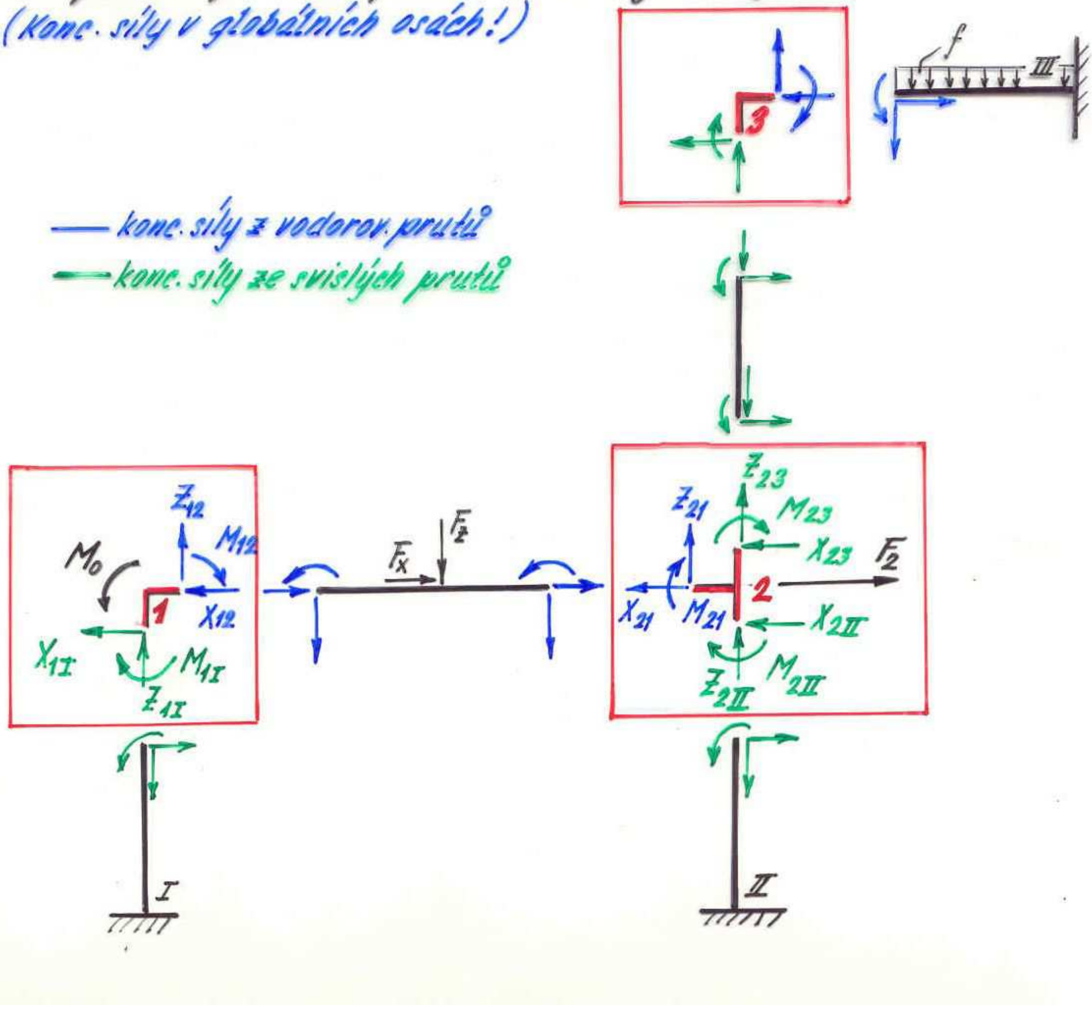
Neznámé = 9 (v globál. osách)

① u_1, w_1, φ_1

② u_2, w_2, φ_2 ⟹ potřebujeme 9 podm. rovn.

③ u_3, w_3, φ_3

Soustavu rozdělíme na pruty a styčníky (princip akce a reakce) a zapíšeme po třech podm. rovnováhy ve styčnících 1, 2, 3.
(Konc. síly v globálních osách!)



Podmínky rovnováhy styčníků:

Styčník ① : ┌

Rovnici zapisujeme kvůli zavedení neznámé:

1. ← : $X_{12}+X_{1I}=0$ . . . . u_1
2. ↑ : $Z_{12}+Z_{1I}=0$ . . . . w_1
3. ↷ : $M_{12}+M_{1I}=M_0$ . . . . φ_1

Styčník ② ┤

4. ← : $X_{21}+X_{2II}+X_{23}=F_2$ . . . . u_2
5. ↑ : $Z_{21}+Z_{2II}+Z_{23}=0$ . . . . w_2
6. ↷ : $M_{21}+M_{2II}+M_{23}=0$ . . . . φ_2

---

7. Obdobně 3 rov. pro styčník ③ u_3
8. w_3
9. φ_3

Obecně pro každý i-tý styčník:
$(i=1,\dots n)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \leftarrow: \sum_{\alpha} X_{i\alpha} = \overline{F}_{xi} \\ \uparrow: \sum_{\alpha} Z_{i\alpha} = \overline{F}_{zi} \\ \curvearrowright: \sum_{\alpha} M_{i\alpha} = \overline{M}_i \end{array}}$$

Obecná DM (10)
(ODM)

když: α … počet prutů jdoucích do i-tého styčníku
$\overline{F}_{xi}$, $\overline{F}_{zi}$, $\overline{M}_i$ .. známé zatížení působící přímo v ⓘ
(např. F_2, M_0)

Poznámka: Zadané zatíž. na prutech (např.: F_x, F_z, f) působí na styčníky nepřímo prostřednictvím $X_{i\alpha}$, $Z_{i\alpha}$, $M_{i\alpha}$
($\overline{X}_{i\alpha}$, $\overline{Z}_{i\alpha}$, $\overline{M}_{i\alpha}$)

Dosazením za konc. „síly" z rov. (6''), (8,9) do systému podm. rovn. (10) obdržíme soustava algebr. rov. pro neznámé deformace u_i, w_i, φ_i $(i=1,2,\dots n)$.

6. Zjednodušená DM (ZDM) (vhodná při „ručních" výpočtech)

→ zjednodušení výpočtu zanedbáním deformačního účinku osových sil (předp. $EA \to \infty$ na všech prutech)

$$\Delta l = u_b - u_a = 0 \quad (\Rightarrow u_b = u_a)$$

$$\Rightarrow X_{ab} = \bar{X}_{ab}$$ rov. 1. z (6'')

$$X_{ba} = \bar{X}_{ba}$$ rov. 4. z (6'')

Důsledek:

- snížení počtu neznámých (⇒ redukce počtu rovnic)

zůstávají jako v ODM : pootočení styčníků

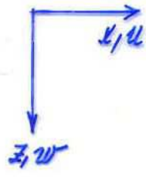
⇒ **momentové podm. rovn. styčníků**

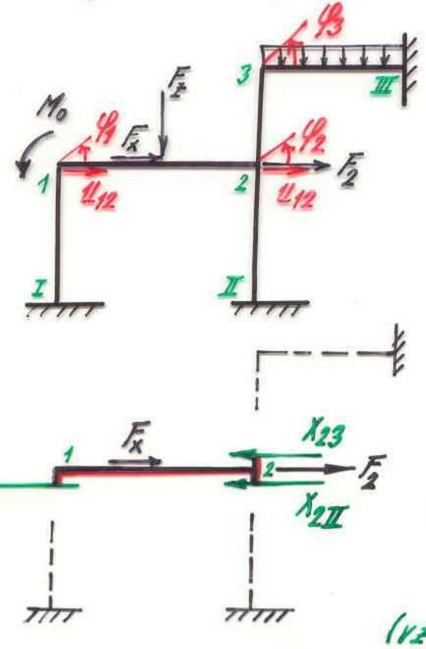
nově : posuny celých pater, příp. sloupů (nepodepřených)

⇒ **patrové, příp. sloupové rovnice**

(≡ podmínky rovn. sil působících na patro či sloup, který se může posunout)

Náš př.






neznámé : 4

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

$u_1 \equiv u_2 \equiv u_{12}$ ...posun patra

$(u_3 = w_1 = w_2 = w_3 = 0)$

→ moment. podm. 3., 6., 9. nezměněny

$$\boxed{X_{1I} + X_{2II} + X_{23} = F_x + F_2}$$

patrová rov.

(vznikne sečtením rov. 1., 4. z ODM)

Pozn.: rov. 2., 5., 7., 8. z ODM odpadají

6.1. Zavedení redukovaných veličin (můžeme i nemusíme používat)

Ve vz. (6'') se vyskytují tuhosti prutu

např. 3. rov. : $M_{ab} = \overline{M}_{ab} + k_{ab}\left(2\varphi_a + \varphi_b + 3\frac{w_b - w_a}{l}\right)$

uzlové „posuny" ($\varphi_a, \varphi_b, w_a, w_b$)… velmi malé
× tuhosti ($k_{ab} = \frac{2EI}{l}$) veliká

⇒ násobení typu $\infty \cdot 0$

⇒ **modifikace** $k'_{ab} = k_{ab} \cdot c = \frac{2EI}{l} \cdot c$ redukovaná tuhost

$\varphi'_a = \frac{\varphi_a}{c}$, $\varphi'_b = \frac{\varphi_b}{c}$, $w'_a = \frac{w_a}{c}$, …. redukované přetvoření

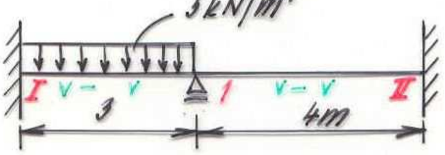
c … zvolená konstanta

Např.: $\underline{\underline{k_{ab}\varphi_b}} = k_{ab}\varphi_b \cdot \frac{c}{c} = \underline{\underline{k'_{ab} \cdot \varphi'_b}}$

6.2. Postup při výpočtu DM

1. Stanovíme přetvárnou neurčitost kce (složky „posunutí")
   (odpovídá typům prutů)
2. podmínky rovnováhy (symbolicky)
3. vypočteme tuhosti prutů (dle jejich typů)
4. podm. rovn. zapíšeme ve složkách „posunutí" (pozor na $\{\overline{R}_{ab}\}$)
5. řešením rovnic ⇒ neznámé „posuny"
6. číselně stanovíme „koncové síly" na prutech
7. vypočteme a vykreslíme po jednotl. prutech M, Q, N !
8. Kontrola : výsledné řešení musí splňovat :
   - podmínky rovnováhy (styčníků, částí kce, celku …)
   - přetvárné podmínky.

Př. ZDM určete průběh M, Q. (EI = konst.)



Řešení:

1 deformační neznámá φ_1

Redukované tuhosti:

$$k_{1I} = \frac{2EI}{l_{1I}} \cdot c = \underline{\underline{1}}$$

$$k_{1II} = \frac{2EI}{l_{1II}} \cdot c = \frac{2EI}{4} \cdot \frac{3}{2EI} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$\boxed{M_{1I} + M_{1II} = 0}$$

$$M_{1I} = \overline{M}_{1I} + k_{1I}(2\varphi_1 + 0 + 0) = -\frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 3^2 + 1 \cdot (2\varphi_1) = \underline{-3{,}75 + 2\varphi_1} = \underline{\underline{-1{,}607}}$$

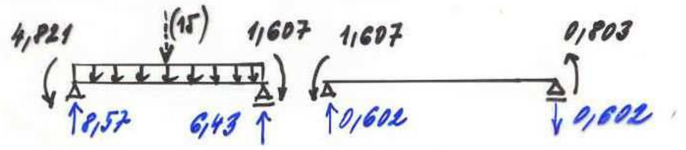
$$M_{1II} = \overline{M}_{1II} + k_{1II}(2\varphi_1 + \varphi_{II} + 0) = 0 \quad + 0{,}75(2\varphi_1) = \underline{1{,}5\varphi_1} = \underline{\underline{1{,}607\,kNm}}$$

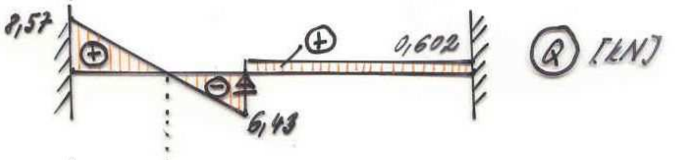
$$\boxed{3{,}5\varphi_1 - 3{,}75 = 0} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_1 = 1{,}071}}$$ (redukované pootočení)

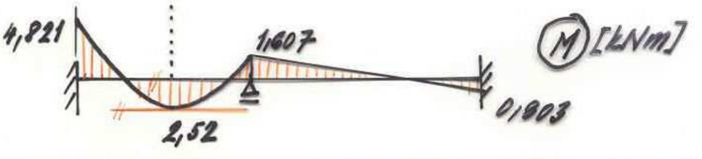
Zbývající momenty:

$$M_{I1} = \overline{M}_{I1} + k_{1I}(2\varphi_I + \varphi_1 + 3 \cdot 0) = +3{,}75 + 1 \cdot \varphi_1 = \underline{4{,}821\,kNm}$$

$$M_{II1} = \overline{M}_{II1} + k_{1II}(2\varphi_{II} + \varphi_1 + 3 \cdot 0) = 0 \quad + 0{,}75\varphi_1 = \underline{0{,}803\,kNm}$$



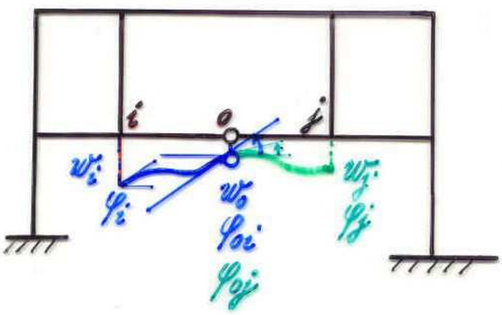




7. Konstrukce s klouby

– pootočení v kloubech můžeme eliminovat před řešením celé kce (⇒ sníží se počet neznámých)

Vnitřní kloub



v kloubu 0:

$\varphi_{0i} \neq \varphi_{0j}$

vyloučíme z rov. pro nulový moment v kloubu

(kondenzace parametrů)

Prut i-0

$$M_{0i} = \overline{M}_{0i} + k_{0i}\left(2\varphi_{0i} + \varphi_i + 3\,\frac{w_0 - w_i}{l_{0i}}\right) = 0$$

(6. rov. v (6''))

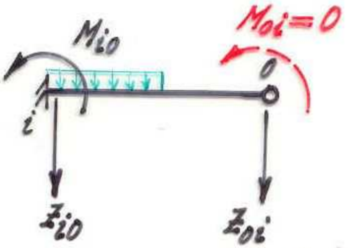
$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{0i} = -\frac{\overline{M}_{0i}}{2k_{0i}} - \frac{\varphi_i}{2} - \frac{3}{2}\,\frac{w_0 - w_i}{l_{0i}}}$$

Zpětným dosazením do (6'') se změní 2., 3., 5. rov. (1., 4. stejné)

2. $$Z_{i0} = \overline{Z}_{i0}^{k} - \frac{3}{4}\,\frac{k_{0i}}{l_{0i}}\left(2\varphi_i + 2\,\frac{w_0 - w_i}{l_{0i}}\right)$$

3. $$M_{i0} = \overline{M}_{i0}^{k} + \frac{3}{4}\,k_{0i}\left(2\varphi_i + 2\,\frac{w_0 - w_i}{l_{0i}}\right)$$

5. $$Z_{0i} = \overline{Z}_{0i}^{k} + \frac{3}{4}\,\frac{k_{0i}}{l_{0i}}\left(2\varphi_i + 2\,\frac{w_0 - w_i}{l_{0i}}\right)$$



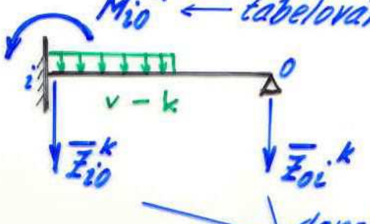
(11)

$$\overline{Z}_{i0}^{k} = \overline{Z}_{i0} + \frac{3}{2}\,\frac{\overline{M}_{0i}}{l_{0i}}$$

$$\overline{M}_{i0}^{k} = \overline{M}_{i0} - \frac{\overline{M}_{0i}}{2}$$

$$\overline{Z}_{0i}^{k} = \overline{Z}_{0i} - \frac{3}{2}\,\frac{\overline{M}_{0i}}{l_{0i}}$$

$\overline{M}_{i0}^{k}$ ← tabelováno (sl.3 TAB2)

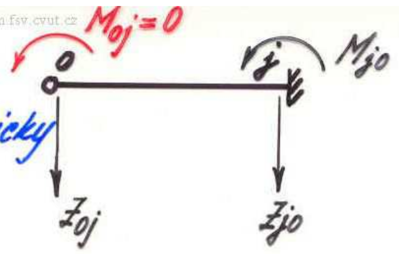


dopočítáváme

hodnotu na

Prut o-j

analogicky



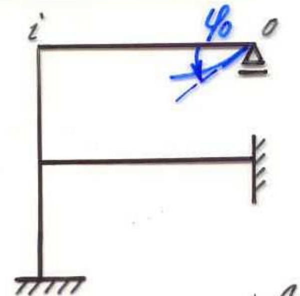
$M_{oj}=0$ (3. rovnice v (6"))

$\Rightarrow \varphi_{oj}$ (vyloučíme)

$\Rightarrow Z_{oj}\,,\; Z_{jo}\,,\quad M_{jo}=\overline{M}_{jo}+\frac{3}{4}k_{jo}\left(2\varphi_j+2\,\frac{w_j-w_o}{l_{jo}}\right)$

tabelováno (sloupec 4. TAB. 2)

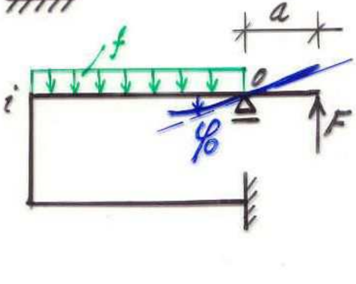
Vnější kloub



na prutu $i-0$: $w_0=0$

$M_{0i}=0 \Rightarrow \varphi_0$ (vyloučíme)

další výpočet dle (11)



Prut $i-0$ lze počítat jako typ v-v a neznámé pootočení ponechat

$\Rightarrow$

(vzorec z (6"))

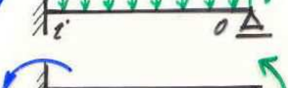
$$\underline{M_{oi}-Fa=0}$$

nebo φ_0 z rov. vyloučit předem a prut počítat jako v-k (vz. 11)

$\Rightarrow M_{io}=\overline{M}_{io}^{k}+\frac{3}{4}k_{io}\left(2\varphi_i+2\frac{(-w_i)}{l_{io}}\right)$

:

$\overline{M}_{io}^{kI}$



$\overline{M}_{io}^{kII}$

} superponujeme !

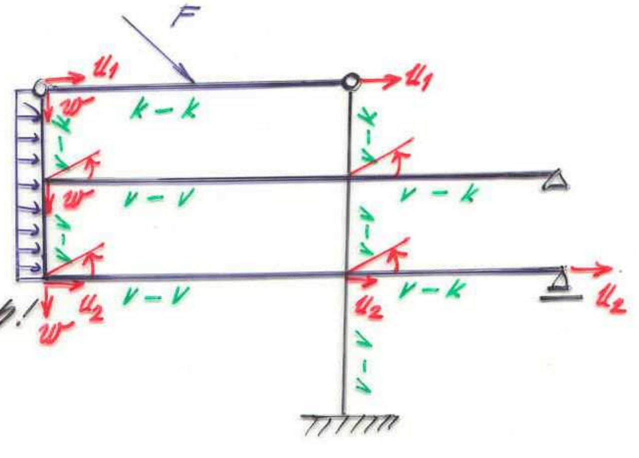
Oboustranně kloubově uložený prut:

$$n = \frac{EA}{l}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{ab}\\ Z_{ab}\\ X_{ba}\\ Z_{ba}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{X}_{ab}\\ \overline{Z}_{ab}\\ \overline{X}_{ba}\\ \overline{Z}_{ba}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 & -n & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -n & 0 & n & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_a\\ w_a\\ u_b\\ w_b\end{Bmatrix} \qquad (12)$$

Př:

Popište typy prutů tak, abychom při výpočtu dostali min. počet neznámých!

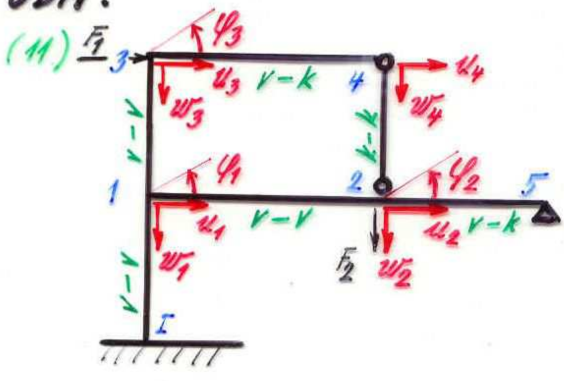


ZDM : u_1, u_2, w
$+ 4 \times \varphi$

ODM : $7 \times u$
$6 \times w$
$4 \times \varphi$

Př.: U konstrukce: a) vyznačte typy prutů
b) zakreslete neznámé do obr. < ODM
ZDM

ODM:



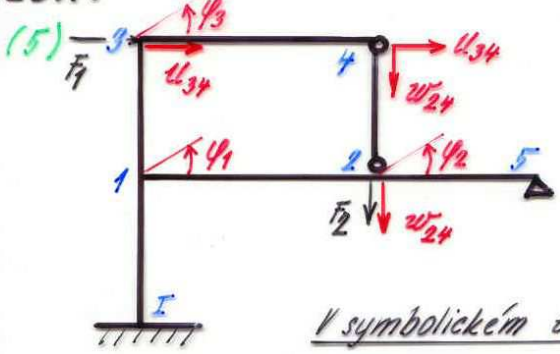
V symbolickém tvaru rov. v (2)

$$M_{21} + M_{25} = 0$$

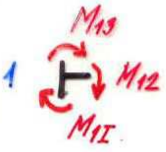
$$-F_2 + Z_{21} + Z_{25} + Z_{24} = 0$$

$$X_{21} + X_{25} + (X_{24}) = 0$$

ZDM:

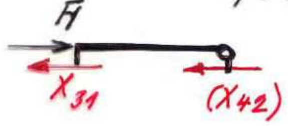


V symbolickém tvaru všechny rovnice:



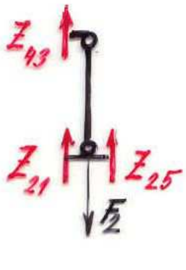
$$M_{1I} + M_{12} + M_{13} = 0$$

$$\leftarrow: \quad -F_1 + X_{31} + X_{42} = 0$$



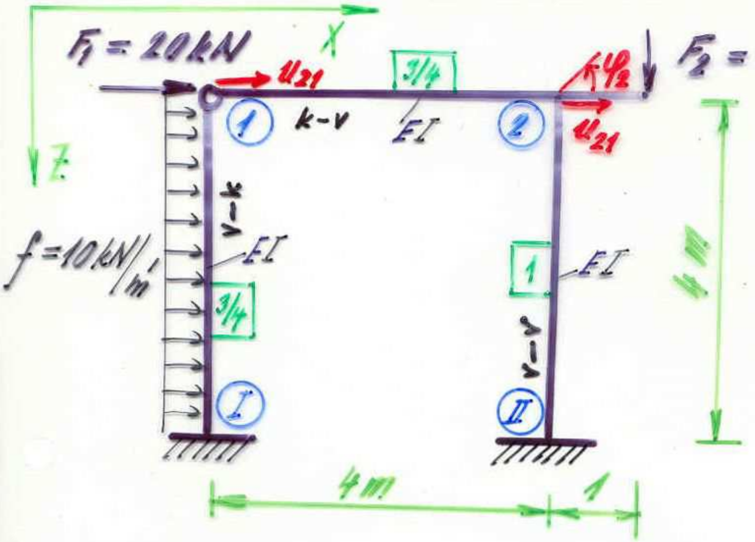
$$M_{21} + M_{25} = 0$$

$$M_{31} + M_{34} = 0$$



$$\uparrow: \quad -F_2 + Z_{21} + Z_{25} + Z_{43} = 0$$

Př: Stanovte průběhy M, N, Q na zadané kci zjednodušenou DM :



Řešení:

1. Přetvárná neurčitost: $d = 1 + 1 = 2$

$\varphi_2,\ u_{12} = u$

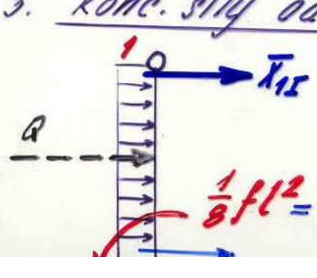
2. Redukované tuhosti:

$$\underline{k_{2II}} = \frac{2EI}{l_{2II}} \cdot c = \underline{1} \Rightarrow c = \frac{1}{2EI}$$

$$\underline{k_{1I}} = \frac{2EI}{l_{1I}} \cdot c \cdot \frac{3}{4} = \underline{\frac{3}{4}}$$

$$\underline{k_{12}} = \frac{2EI}{l_{12}} \cdot c \cdot \frac{3}{4} = \underline{\frac{3}{4}}$$

3. Konc. síly od zatížení

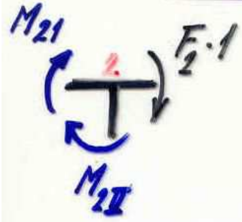


$\curvearrowleft I : \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 4^2 - \bar{X}_{1I} \cdot 4 - 40 \cdot 2 = 0$

$\frac{1}{8} f l^2 = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 16 = 20 = \bar{M}_{I1}$

$\underline{\bar{X}_{1I} = -15}$

4. 5. Podmínk. rovnice



$$\boxed{M_{21} + M_{2II} = -F_2 \cdot 1}$$ 1.

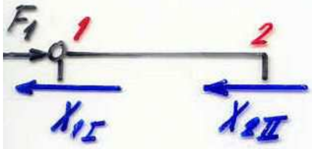
$$M_{21} = \cancel{\overline{M}_{21}} + k_{12}\left(2\varphi_2 + 2\frac{\cancel{w_2} - \cancel{w_1}}{l_{12}}\right) = k_{12} \cdot 2\varphi_2$$

$$M_{2II} = \cancel{\overline{M}_{2II}} + k_{2II}\left(2\varphi_2 + \cancel{\varphi_{II}} + 3\frac{u_2 - \cancel{u_{II}}}{l}\right) = k_{2II}\left(2\varphi_2 + 3\frac{u_2}{l}\right)$$

$$\varphi_2(2k_{21} + 2k_{2II}) + u_{21}\frac{3k_{2II}}{l} = -10$$

$$\varphi_2\left(2 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot 1\right) + u_{21}\frac{3 \cdot 1}{4} = -10$$

$$\boxed{\varphi_2 \cdot 3{,}5 + u_{21} \cdot 0{,}75 = -10}$$ 1.



$$\boxed{X_{1I} + X_{2II} = F_1}$$ 2.

$$X_{1I} = \overline{X}_{1I} + \frac{k_{1I}}{l_{1I}}\left(2\cancel{\varphi_I} + 2\frac{u_1 - \cancel{u_I}}{l_{1I}}\right) = \overline{X}_{1I} + \frac{2k_{1I}}{l^2} \cdot u_{21}$$

$$X_{2II} = \cancel{\overline{X}_{2II}} + \frac{k_{2II}}{l_{2II}}\left(3\varphi_2 + 3\cancel{\varphi_{II}} + 6\frac{u_{21} - \cancel{u_{II}}}{l}\right) =$$

$$= 3\frac{k_{2II}}{l}\varphi_2 + 6\frac{k_{2II}}{l^2}u_{21}$$

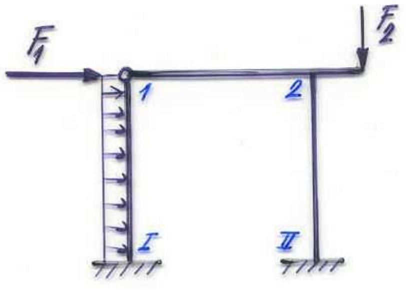
$$\varphi_2\frac{3k_{2II}}{l} + u_{21}\left(2\frac{k_{1I}}{l^2} + 6\frac{k_{2II}}{l^2}\right) = F_1 - \overline{X}_{1I}$$

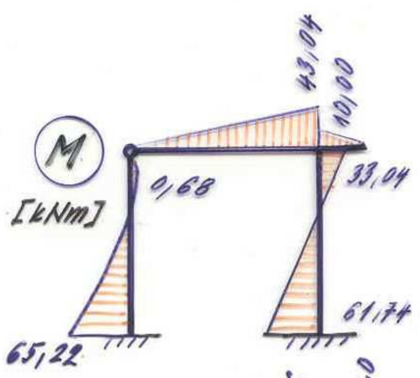
$$\boxed{\varphi_2 \cdot 0{,}75 + u_{21} \cdot 0{,}468 = 35}$$ 2.

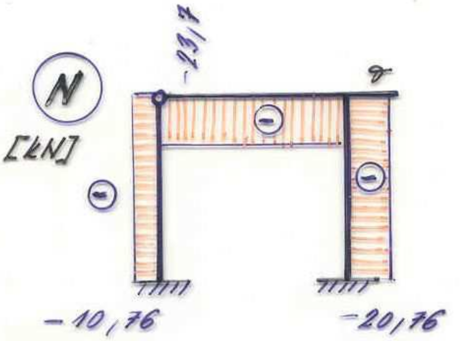
6. **řešením:**

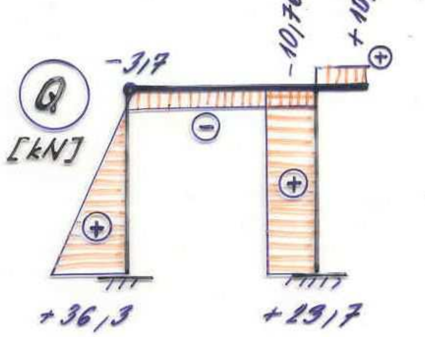
$$\boxed{\begin{aligned} u_{21} &= 120{,}58 \\ \varphi_2 &= -28{,}70 \end{aligned}}$$

redukované hodnoty



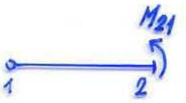






7. Koncové „síly" na prutech:

$M_{21} = k_{12} \cdot 2\varphi_2 = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot (-28,7) = \underline{-43,04}$



$M_{2II} = k_{2II} (2\varphi_2 + 3\frac{u_2}{l}) = 1(2 \cdot (-28,70) + 3 \cdot \frac{120,58}{4}] = \underline{33,04}$

$M_{II2} = k_{2II} (0 + \varphi_2 + 3\frac{u_2}{l_{2II}}) = (-28,7 + 3\frac{120,58}{4}) = 61,74$

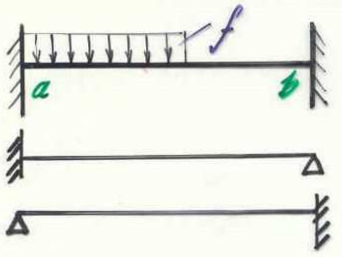
$M_{I1} = \overline{M}_{I1} + k_{1I}(2 \cdot 0 + 2\frac{u_1}{l_{1I}}) = 20 + \frac{3}{4}(2\frac{120,58}{4}) = 65,22$

Řešení kce vystavené různým vlivům

Základní vztah pro prut a-b :

$$\boxed{\{R_{ab}\} = \{\overline{R}_{ab}\} + [K_{ab}]\{r_{ab}\}} \qquad (6)$$

a) Vliv silového působení na prut



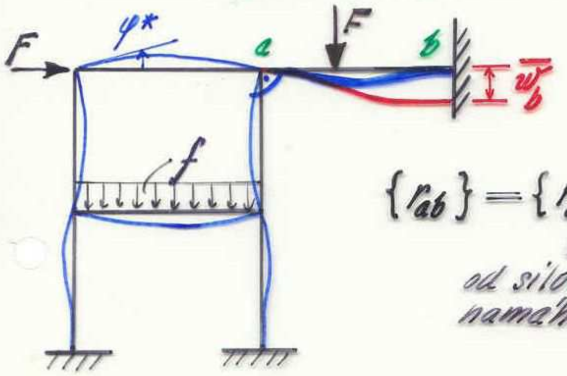
projeví se ve vektoru $\{\overline{R}_{ab}\}$

= koncové síly při $\{r_{ab}\} = \{0\}$

(Tab. 2 – řádek 1–8)

b) Vliv nepružného přemístění podpor (Tab. 2 – ř. 10 – 13)

přemístění podpory = posun resp. pootočení podpory



$$\{r_{ab}\} = \{r_{ab}^*\} + \{\overline{r}_{ab}\}$$

od silového namáhání kce

předepsané hodnoty v určitých místech kce

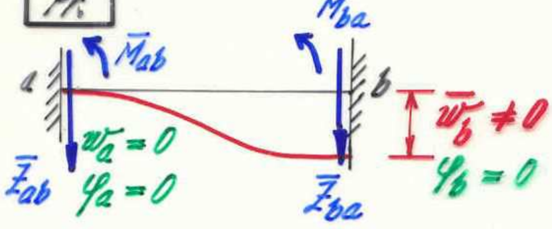
$$\{R_{ab}\} = \{\overline{R}_{ab}^{I}\} + [K_{ab}]\{r_{ab}^*\} + \underbrace{[K_{ab}]\{\overline{r}_{ab}\}}_{\{\overline{R}_{ab}^{II}\}}$$

$$\{R_{ab}\} = \{\overline{R}_{ab}\} + [K_{ab}]\{r_{ab}^*\}$$

$$(13) \quad \boxed{\{\overline{R}_{ab}^{II}\} = [K_{ab}]\{\overline{r}_{ab}\}} \qquad \{\overline{R}_{ab}\} = \{\overline{R}_{ab}^{I}\} + \{\overline{R}_{ab}^{II}\}.$$

Koncové síly $\{\overline{R}_{ab}^{\,II}\}$ dostaneme z definice MT.

Př.



Pro oboustranně vetknutý nosník (viz vz. (6'), 5.sloupec)
(princip proporcionality)

$$\overline{Z}_{ab} = k_{ab}\left(-\frac{6}{l^2}\right)\overline{w}_b$$

$$\overline{M}_{ab} = k_{ab}\left(\frac{3}{l}\right)\overline{w}_b$$

$$\overline{Z}_{ba} = k_{ab}\left(\frac{6}{l^2}\right)\overline{w}_b$$

$$\overline{M}_{ba} = k_{ab}\left(\frac{3}{l}\right)\overline{w}_b$$

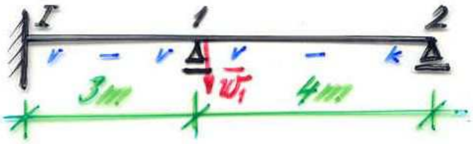
stejný výpočet z (13)
při $\{\overline{r}_{ab}\} = \{0, 0, 0 \mid 0, \overline{w}_b, 0\}^T$

→ tabelováno (TAB.2, ř. 11)
$\overline{Z}_{ab}, \overline{Z}_{ba}$ – dopočítáme z podm. rovnováhy

---

Obdobně při $\overline{w}_a \neq 0$ (T2, ř. 10)
$\overline{\varphi}_a \neq 0$ (T2, ř. 12)
$\overline{\varphi}_b \neq 0$ (T2, ř. 13)

Př. Stanovte průběhy M, Q spoj. nosníku způsobené poklesem podpory 1 o 3mm.



$\overline{w}_{1,sk} = 0{,}003\,m$

$I = 0{,}9 \cdot 10^{-3}\,m^4$

$E = 2{,}1 \cdot 10^{7}\,kPa$

neznámá : φ_1

M_{1I}  M_{12}

$$\boxed{M_{1I} + M_{12} = 0}$$

výpočet v redukovaných hodnotách, v kN, m

$$k_{1I} = \frac{2EI}{3} \cdot c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{2EI} = 0{,}79 \cdot 10^{-4}$$

$$k_{12} = \frac{3}{4}\,\frac{2EI}{4} \cdot c = 0{,}56$$

$$\overline{w}_{1}\,red = \frac{\overline{w}_{1,sk}}{c} = \frac{0{,}003}{0{,}79 \cdot 10^{-4}} = \underline{37{,}9}$$

Podle tabulky 2 :

$$\overline{M}_{1I} = 3\,\frac{k_{ab}}{l} \cdot \overline{w}_b = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 37{,}9 = \underline{37{,}9\,kNm} \quad (sl.\,2, ř.\,11)$$

$$\overline{M}_{12} = -2\,\frac{k_{ak}}{l} \cdot \overline{w}_a = -2 \cdot \frac{0{,}56}{4} \cdot 37{,}9 = \underline{-10{,}61} \quad (sl.\,3, ř.\,11)$$

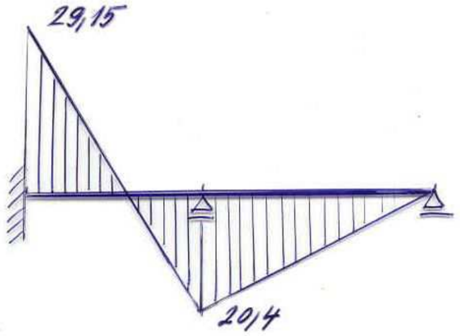
$$M_{1I} = \overline{M}_{1I} + k_{1I}\left(2\varphi_1 + \varphi_I + 3\,\frac{\overline{w}_1 - \overline{w}_I}{l}\right) = 37{,}9 + 1(2\varphi_1) = +20{,}4$$

$$M_{12} = \overline{M}_{12} + k_{12}\left(2\varphi_1 + 2\,\frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{l}\right) = -10{,}61 + 0{,}56(2\varphi_1) = -20{,}4$$

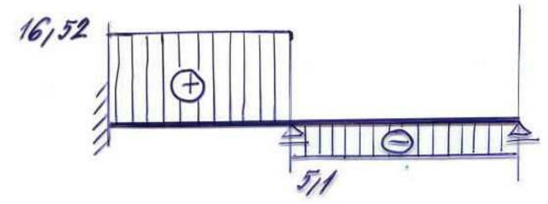
$$\boxed{27{,}29 + 3{,}12\varphi_1 = 0} =$$

$$\boxed{\varphi_1 = -8{,}75}$$ redukované pootočení

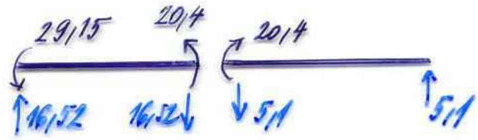
$$M_{I1} = \overline{M}_{I1} + 1\left(2\cancel{\varphi_I} + \varphi_1 + 3\,\cancel{\frac{w_1 - w_I}{l}}\right) = 37{,}9 - 8{,}75 = 29{,}15$$



Ⓜ [kNm]



Ⓠ [kN]



namáhání prutů (skutečná orientace sil a momentů)

2. alternativa výpočtu (bez tab. 2, zadaný pokles dosazujeme přímo)

$$M_{1I} = \overline{M}_{1I} + k_{1I}\left(2\varphi_1 + \varphi_I + 3\,\frac{w_1 - w_I}{l_{1I}}\right)$$

$$= 0 + 1\left(2\varphi_1 + 0 + 3\cdot\frac{37{,}9 - 0}{3}\right) = 2\varphi_1 + 37{,}9$$

$$M_{12} = \overline{M}_{12} + k_{12}\left(2\varphi_1 + 2\,\frac{w_2 - w_1}{l_{12}}\right) =$$

$$= 0 + 0{,}56\left(2\varphi_1 + 2\,\frac{0 - 37{,}9}{4}\right) = 1{,}12\varphi_1 - 10{,}61$$

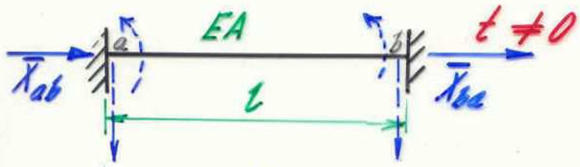
Pozor: Jsou-li $k_{red.}$, dosazujeme $w_{red.}$!

c) Vliv rovnoměrné, nerovnoměrné změny teploty

V obecné DM : **teplota = zatížení**

(t.j. na vetknutém stavu určíme koncové síly - např. SM)

Př.: Výpočet koncových sil od rovnoměr. ohřátí t

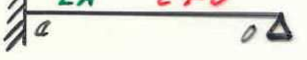


$\Delta l = \alpha \cdot t \cdot l$ prodloužení od teploty

$\Delta l = \frac{X \cdot l}{EA}$ prodloužení od síly

$\Rightarrow X = \alpha\, t\, EA$

$$\{\overline{R}_{ab}\} \equiv \begin{Bmatrix} \overline{X}_{ab} \\ \overline{Z}_{ab} \\ \overline{M}_{ab} \\ \overline{X}_{ba} \\ \overline{Z}_{ba} \\ \overline{M}_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \cdot t EA \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\alpha \cdot t EA \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

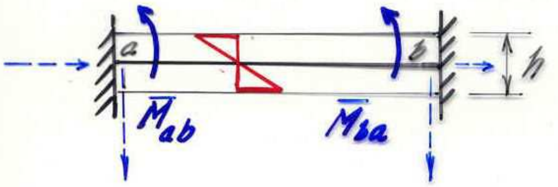


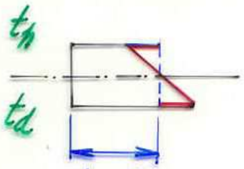
$\{\overline{R}_{ao}\}$ .... stejné jako u vetknutí

$\{\overline{R}_{ao}\} = \{0\}$

(naše tab. ř. 9)

Koncové síly při nerovnoměrném oteplení Δt





$t_d > t_h$

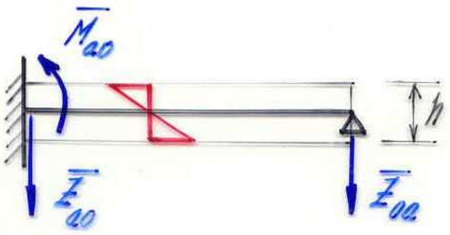
$t = \frac{t_h + t_d}{2}$ = rovnoměrná tepl.

$\Delta t = t_d - t_h$ ... nerovnoměrná teplota

Řešením SM:

$$\{\bar R_{ab}\} = \{0,\ 0,\ \bar M_{ab},\ \vdots\ 0,\ 0,\ \bar M_{ba}\}^T$$

$$\bar M_{ab} = -\bar M_{ba} = EI\alpha \frac{t_d - t_h}{h}$$ ← tabelováno



$$\{\bar R_{a0}\} = \{0,\ \bar Z_{a0},\ \bar M_{a0},\ \vdots\ 0,\ \bar Z_{0a}\}^T$$

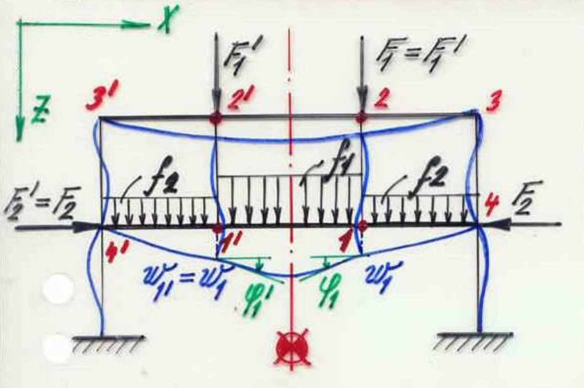
$$\bar M_{a0} = \frac{3}{2} EI\alpha \frac{t_d - t_h}{h}$$ ← tabelováno

$$\bar Z_{a0} = -\bar Z_{0a} = -\frac{\bar M_{a0}}{l}$$

Souměrné konstrukce - zatížení symetrické, zatížení antisymetrické

1. Zatížení symetrické (deformace symetrická)

a) Osa souměrnosti protíná prut



kci řešíme buď celou s neznámými $\underbrace{u_1, w_1, \varphi_1}_{①}, \underbrace{u_1', w_1', \varphi_1'}_{1'}$.....

nebo kci za osou symetrie vyloučíme

$$\boxed{\begin{aligned} u_1' &= -u_1 \\ \varphi_1' &= -\varphi_1 \\ w_1' &= w_1 \end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned} &\underline{\text{na ose sym.}} \\ &\varphi = 0 \\ &u = 0 \end{aligned}$$

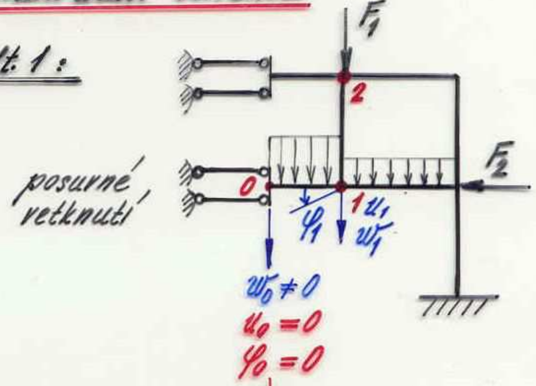
Ze skutečné kce:

$$M_{11'} = \bar{M}_{11'} + k_{11'}\left(2\varphi_1 + \varphi_1' + 3\,\frac{w_1 - w_1'}{l_{11'}}\right)$$

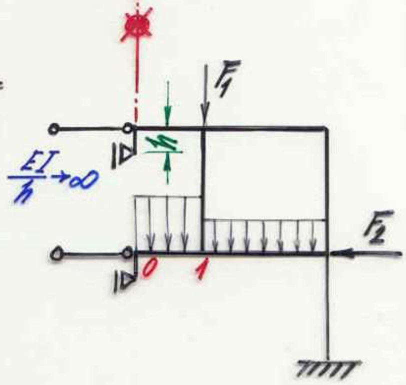
$$\underline{= \bar{M}_{11}' + k_{11'} \cdot \varphi_1}$$

náhradní schema

alt. 1:



alt. 2:



Poznámka

posun w_0 (na ose symetrie) nemusíme počítat, můžeme jej vyloučit z podm.:

$$\boxed{Z_{01} = 0}$$

$$\Rightarrow w_0 = w_0(\varphi_1, w_1)$$

$$\Rightarrow M_{10} = M_{11'}\text{(skut. kce)}$$

→ lze využít při výpočtu na počítači standardním programem!

Obecná DM :

neznámé (při řešení 1/2 kce)

$$\left.\begin{array}{l} 1:\ u_1,\ w_1,\ \varphi_1 \\ 2:\ u_2,\ w_2,\ \varphi_2 \\ 3:\ u_3,\ w_3,\ \varphi_3 \\ 4:\ u_4,\ w_4,\ \varphi_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{po třech podmínkách rovnováhy} \\ \text{v každém styčníku 1, 2, 3, 4}\end{array}$$

Zjednodušená DM :

neznámé :

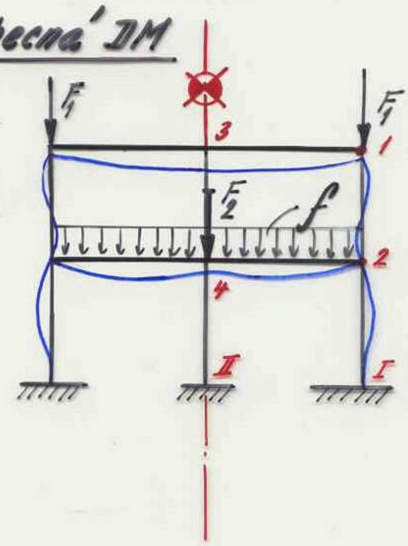
$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \ 0,\ w_{12},\ \varphi_1 \\ 2.\ \ 0,\ w_{12},\ \varphi_2 \\ 3.\ \ 0,\ 0,\ \varphi_3 \\ 4.\ \ 0,\ 0,\ \varphi_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{4 momentové p. rovnováhy} \\ \text{1 sloupová rovnice}\end{array}$$

Přehled průběhů
sym. kce, sym. zatížení (rovinný rám)

SM	DM
M - průběh symetrický	φ - antisymetrické
N - průběh symetrický	u - antisymetrické
Q - antisymetrický p.	w - symetrické

b) Osa souměrnosti protíná sloup

Obecná DM



neznámé :

1 : u_1, w_1, φ_1

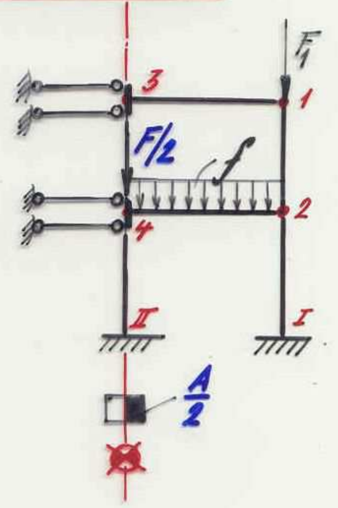
2 : u_2, w_2, φ_2

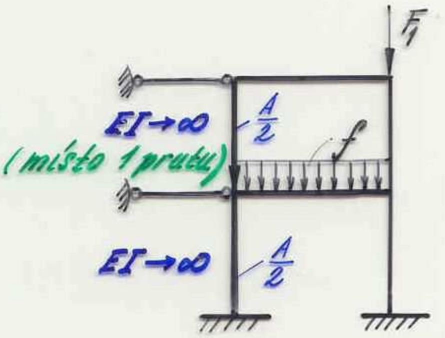
3 : 0 w_3 0

4 : 0 w_4 0

každé nulové hodnotě odpovídá jednoduchá vazba

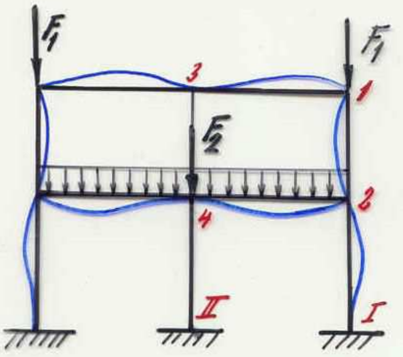
náhradní model



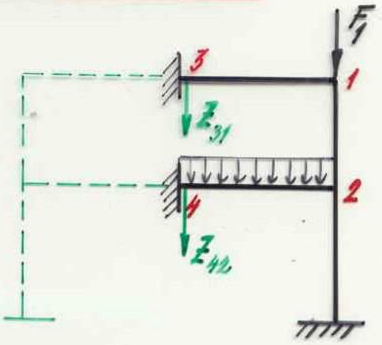


Zjednodušená DM

-neuvažujeme-li stlačení sloupů, schema se zjednoduší



náhradní model

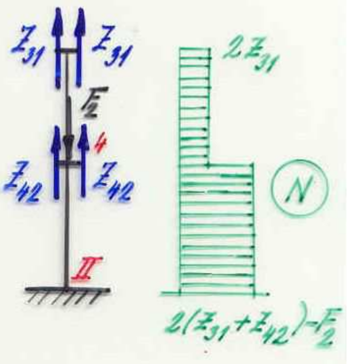


neznámé :

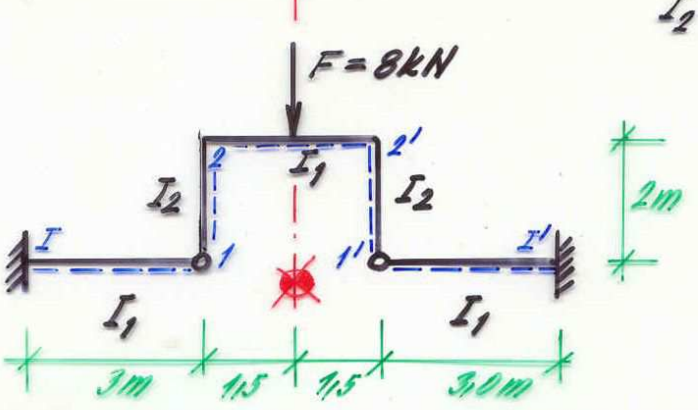
	u	w	φ
1 :	0	0	φ_1
2 :	0	0	φ_2
3 :	0	0	0
4 :	0	0	0

⇒ 2 momentové podmínky rovnováhy (v 1, 2)

Normálovou sílu v prutu 3-4-II určíme dodatečně z podmínky rovnováhy ve svislém směru :



Př: ZDM určete průběhy M, Q, N ($I_1 = 0{,}003\,m^4$, $I_2 = 0{,}002\,m^4$)



neznámé:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_2 &= -\varphi_{2'}\\ w_{21} &= +w_{2'1'}\end{aligned}}$$

$u_2 = -u_{2'} = 0$

Redukované tuhosti:

$$k_{22'} = \frac{2EI_1}{l}\cdot c = \frac{2E\cdot 0{,}003}{3}\cdot c = \underline{1} \Rightarrow c = \frac{3}{2E\cdot 0{,}003}$$

$$k_{1I} = \frac{3}{4}\,\frac{2EI_1}{l}\cdot c = \underline{0{,}75}$$

$$k_{12} = \frac{3}{4}\,\frac{2EI_2}{l}\cdot c = \frac{3}{4}\,\frac{2E\cdot 0{,}002}{2}\cdot c = \underline{0{,}75}$$

Rovnice:

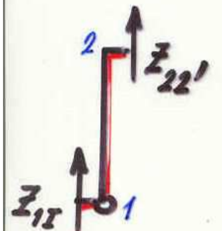
1. $\boxed{M_{22'} + M_{21} = 0}$

$$M_{22'} = \bar{M}_{22'} + k_{22'}\left(2\varphi_2 + \varphi_{2'} + 3\overbrace{\cancel{\frac{w_{2'} - w_2}{3}}}^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 8\cdot 3 + 1(\varphi_2) = 3 + \varphi_2$$

$$M_{21} = \cancel{\bar{M}_{21}} + k_{12}\left(2\varphi_2 + 2\cancel{\frac{u_2 - u_1}{2}}\right) = 1{,}5\varphi_2$$

1. $\boxed{2{,}5\varphi_2 + 3 = 0}$



2. $\boxed{Z_{22'} + Z_{1I} = 0}$

$$Z_{22'} = \bar{Z}_{22'} - \frac{k_{22'}}{l}\left(\cancel{3\varphi_2} + \cancel{3\varphi_{2'}} + 6\overbrace{\frac{w_{2'} - w_2}{3}}^{0}\right) = -4 - 0$$

$$Z_{1I} = \cancel{\bar{Z}_{1I}} + \frac{k_{1I}}{l}\left(\cancel{2\varphi_I} + 2\frac{w_1 - \cancel{w_I}}{3}\right) = \frac{0{,}75}{3}\cdot\frac{2}{3}w_1$$

2. $\boxed{-4 + 0{,}16\bar{6}\,w_1 = 0}$

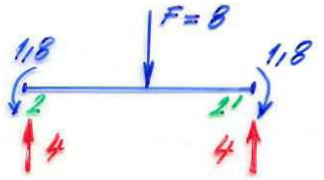
Řešení : $\boxed{\begin{aligned} w_1 &= 24 \\ \varphi_2 &= -1{,}2 \end{aligned}}$ (redukované hodnoty)

Zpětným dosazením :

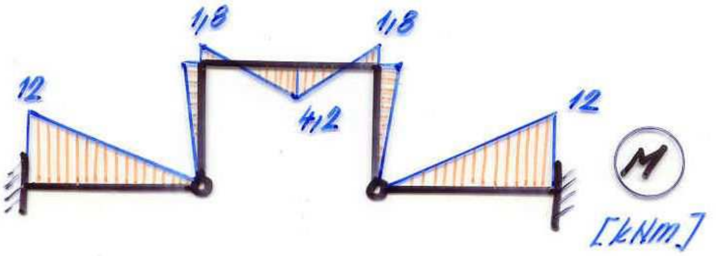
$M_{22'} = 3 + \varphi_2 = = 1{,}8 \text{ kNm}$

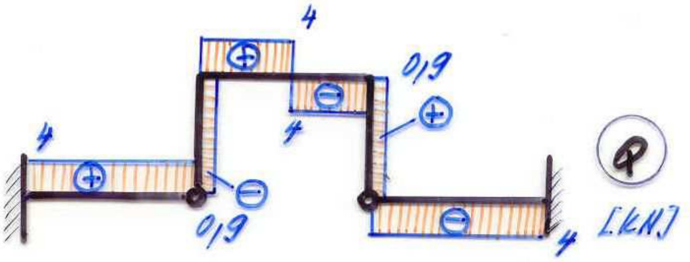
$M_{21} = 1{,}5\,\varphi_2 = -1{,}8 \text{ kNm}$

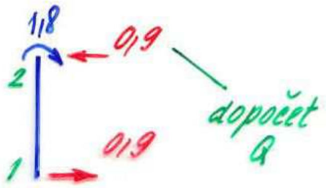
$M_{I1} = 0{,}5\,w_1 = +12 \text{ kNm}$

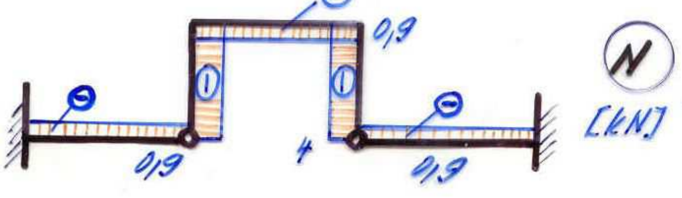


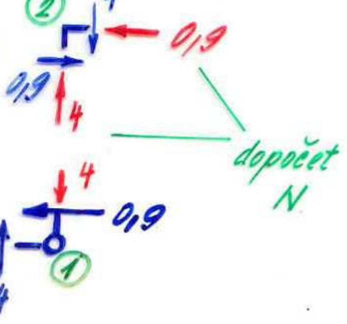
$M_F = -1{,}8 + 4 \cdot 1{,}5 = +4{,}2 \text{ kNm}$





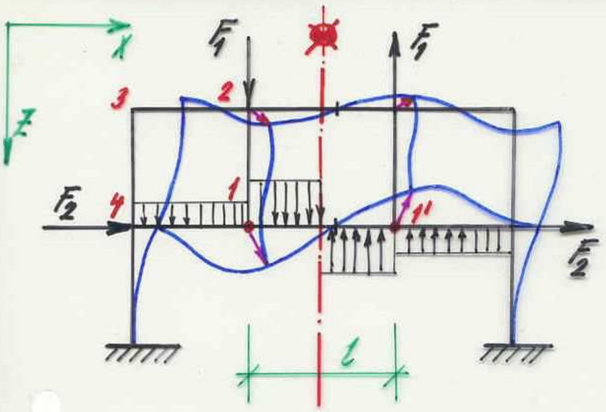






2. Zatížení antisymetrické

a) Osa souměrnosti protíná prut



pro bod i lze zaznamenat posun do strany u_i

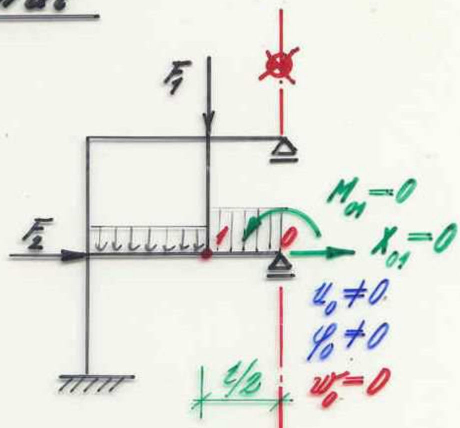
platí:

$$\boxed{\begin{aligned} u_1' &= u_1 \\ \varphi_1' &= \varphi_1 \\ w_1' &= -w_1 \end{aligned}} \Rightarrow \frac{\text{na ose sym.}}{w = 0}$$

ze skutečné kce:

$$M_{11'} = \overline{M}_{11'} + k_{11'}\left(2\varphi_1 + \varphi_1' + 3\frac{w_1' - w_1}{l_{11'}}\right)$$

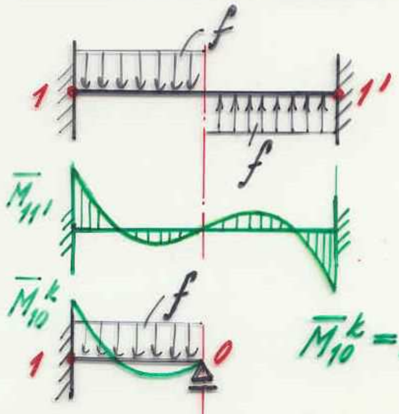
$$= \overline{M}_{11'} + k_{11'}\left(3\varphi_1 - 3\frac{2w_1}{l_{11'}}\right)$$



náhradní schema

neznámé φ_0, u_0 můžeme vyloučit z podm.:

$$\boxed{\begin{aligned} M_{01} &= 0 \text{ (moment)} \\ X_{01} &= 0 \text{ (normál. síla)} \end{aligned}}$$



$\overline{M}_{10}^{k} = \overline{M}_{11'}$

Analogicky

$M_{10} = M_{11'}$ (skutečné kce)

ODM : (12 neznámých)

$$\left.\begin{array}{l} 1:\ u_1,\ w_1,\ \varphi_1 \\ 2:\ u_2,\ w_2,\ \varphi_2 \\ 3:\ u_3,\ w_3,\ \varphi_3 \\ 4:\ u_4,\ w_4,\ \varphi_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{po třech podm. rovn. v } 1,2,3,4$$

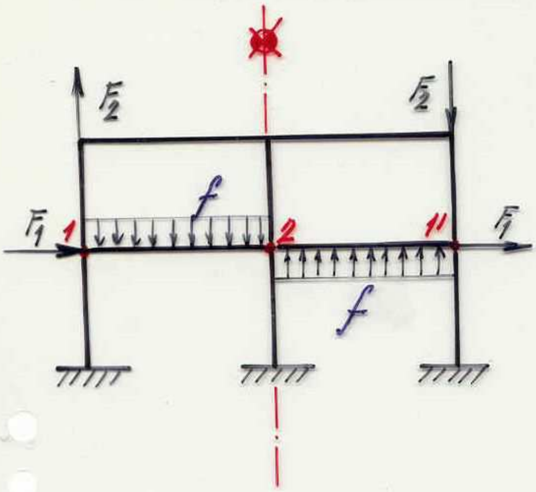
ZDM : (7 neznámých)

$$\left.\begin{array}{l} 1:\ u_{14},\ w_{12},\ \varphi_1 \\ 2:\ u_{23},\ w_{12},\ \varphi_2 \\ 3:\ u_{23},\ 0,\ \varphi_3 \\ 4:\ u_{14},\ 0,\ \varphi_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{4 moment. p. rovnováhy} \\ \text{2 patrové r.} \\ \text{1 sloup. r.} \end{array}$$

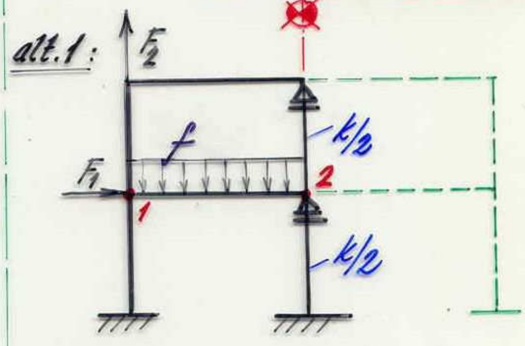
Přehled průběhů sym. kce, antisymetrické zatížení (rovinný rám)

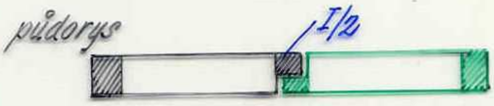
SM	DM
M - antisymetrický p.	φ - symetrické hodnoty
N - antisymetrický p.	u - symetrické hodnoty
Q - symetrický p.	w - antisymetrické h.

b) Osa souměrnosti kce protíná sloup



náhradní model





Tuhost středního sloupu je při antisymetrickém zatížení poloviční ($k^a = \frac{2E(I/2)}{l} = \frac{EI}{l} = \frac{k}{2}$)