Princip maxima plastické disipace (PMPD)

ČVUT
UPM 6/2013

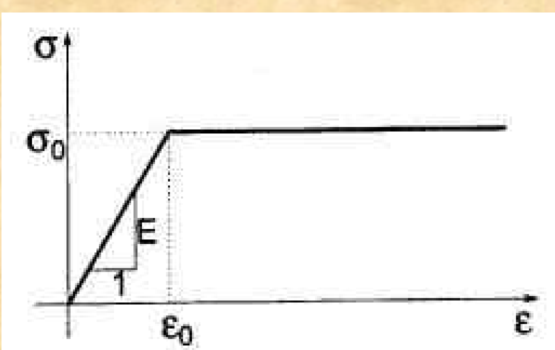
Eliška Bartůňková

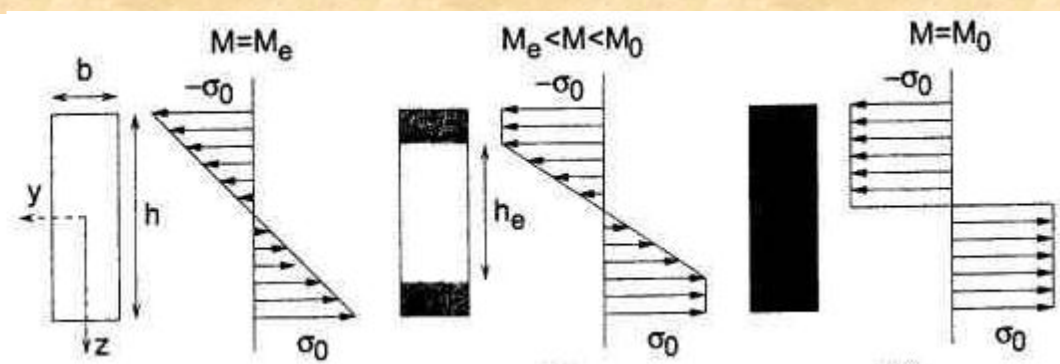
Obsah

Úvod

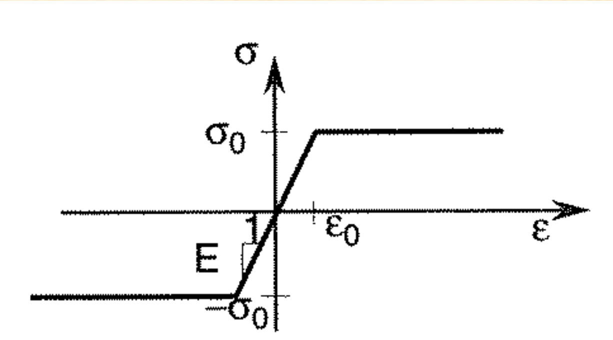
Princip maxima plastické disipace (PMPD)

- Teoretický základ **mezní plastické analýzy**
  - Vyšetřování **mezního plastického stavu**
    - Dosažení max. úrovně zatížení
    - Únosnost konstrukce je zcela vyčerpána
    - Pro ideláně pružnoplastický materiál





1.1 Jednoosá napjatost & PMPD



Ideálně pružnoplastický model

- Jednoosé napětí (σ) působí na objem dV → ↑ deformace $d\varepsilon$

Vykonaná práce ($\boldsymbol{\sigma}$d$\boldsymbol{\varepsilon}$) na jednotku objemu

- $d\varepsilon_\mathrm{e}$ - elastický přírůstek deformace (↑ potenciální energie pružné deformace)
- $d\varepsilon_\mathrm{p}$ - plastický přírůstek deformace (disipace vykonané práce v plastických přetvárných procesech; pot.en. pružné def. je konstantní)
- Plastické namáhání: $\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{e} + \varepsilon_\mathrm{p}$; $\sigma = E\varepsilon_\mathrm{e} = E(\varepsilon - \varepsilon_\mathrm{p})$

1.1 Jednoosá napjatost & PMPD

Plastická disipace $\mathcal{D}$ (disipační výkon, hustota plastické disipace) na jednotku objemu

- Výkon = práce / čas
- $\mathcal{D}(\dot{\varepsilon}_\mathrm{p}) = \frac{\sigma d\varepsilon_\mathrm{p}}{dt} = \sigma\dot{\varepsilon}_\mathrm{p} = \sigma_0|\dot{\varepsilon}_\mathrm{p}|$
  - $\sigma = \sigma_0 \leftrightarrow \dot{\varepsilon}_\mathrm{p} > 0 \quad ; \sigma = -\sigma_0 \leftrightarrow \dot{\varepsilon}_\mathrm{p} < 0$

PMPD: $\boxed{\max_{\sigma^* \in \bar{\varepsilon}} \sigma^* \dot{\varepsilon}_\mathrm{p} = \sigma\dot{\varepsilon}_\mathrm{p} = \sigma_0|\dot{\varepsilon}_\mathrm{p}| = \mathcal{D}(\dot{\varepsilon}_\mathrm{p})}$

- $\bar{\varepsilon} =< -\sigma_0, \sigma_0 >$ plasticky přípustná oblast
- $(\sigma^*\dot{\varepsilon}_\mathrm{p})$ = fiktivní výkon na jednotku objemu, který by napětí σ^* vykonalo na rychlosti plastické disipace $\dot{\varepsilon}_\mathrm{p}$
- $(\sigma\dot{\varepsilon}_\mathrm{p})$=skutečné napětí σ maximalizuje plastickou disipaci

1.1 Jednoosá napjatost & PMPD

Plastická disipace D_{int} pro prut namáhaný osovou silou N

- $D_{\mathrm{int}} = \int_V \mathcal{D} dV = \mathcal{D}V = \sigma\dot{\varepsilon}_{\mathrm{p}}AL = \sigma A\dot{\varepsilon}_{\mathrm{p}}L = N\Delta\dot{L}_{\mathrm{p}}$
- $D_{\mathrm{int}} = N\left|\Delta\dot{L}_{\mathrm{p}}\right|$
  - $\Delta\dot{L}_{\mathrm{p}}$ - rychlost (časová derivace) plastického protažení ΔL_{p}
- Součet příspěvků prutů
  - $D_{\mathrm{int}} = \sum_{i=1}^{n} N_{\mathrm{i}}\Delta\dot{L}_{\mathrm{p,i}} = \sum_{i=1}^{n} N_{0,\mathrm{i}}\left|\Delta\dot{L}_{\mathrm{p,i}}\right|$
    - $N_{0,\mathrm{i}}$ - mezní plastická síla
    - N_{i} - skutečná osová síla

1.2 Ohýbaný prut & PMPD

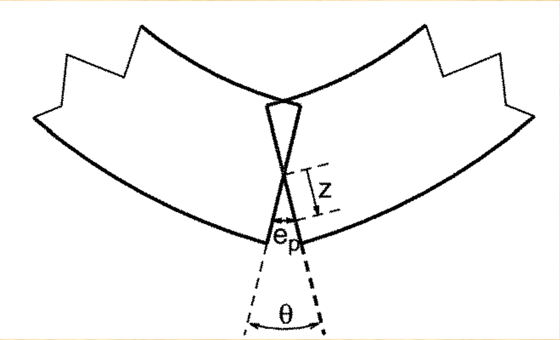
Plastická disipace D_{int} pro prut namáhaný momentem M

- Součet příspěvků kritických průřezů (příp. plast. klouby)
  - $D_{\mathrm{int}} = \sum_{i=1}^{n} M_{\mathrm{i}}\dot{\theta}_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{n} M_{0,\mathrm{i}}\left|\dot{\theta}_{\mathrm{i}}\right|$
    - $M_{0,\mathrm{i}}$ - mezní plastický moment
    - M_{i} - skutečný plastický moment

1.2 Ohýbaný prut & PMPD

Odvození D_{int} pro prut namáhaný momentem M

- Plastický kloub je uvažovaný pouze v 1 průřezu
- Celková plastická deformace je nahrazena rotací θ ideálního kloubu
- Plastická deformace v lib. bodě průřezu:
  - $e_{\text{p}}(z) = \theta z$
  - Plastická def. v z integrovaná po délce plastického koubu



- Energie disipovaná plastickým kloubem:

$$D_{\text{int}} = \int_V \mathcal{D} dV = \int_V \sigma \dot{\varepsilon}_{\text{p}} dV = \int_A \sigma(z) \dot{e}_{\text{p}}(z) dA =$$

$$D_{\text{int}} = \int_A \sigma(z) \dot{\theta} z dA = D_{\text{int}} = \dot{\theta} \int_A \sigma(z) z \, dA = M\dot{\theta}$$

2. Základní věta mezní analýzy pro diskrétní modely

Úvod

- Předepsané zatížení ~ referenční zatížení (vektor) $\bar{\boldsymbol{f}}$
- Vektor vnějších sil $\boldsymbol{f} = \mu\bar{\boldsymbol{f}}$
  - μ – součinitel zatížení, hledá se jeho mezní hodnota μ_0 tak, aby bylo dosažené mezního plastického stavu (plastic. kolaps)
- **Mezní plastický stav**
  - Stav statické rovnováhy, staticky i kinematicky přípustný

1. Staticky přípustný stav

- μ_s - staticky přípustný součinitel zatížení (odpovídá staticky přípustnému stavu kce)
- Vnitř. (pl. přípustné) síly $\boldsymbol{s}_s$ v rovnováze s vnějšími silami $\mu_s\bar{\boldsymbol{f}}$

$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{s}_s = \mu_s\bar{\boldsymbol{f}}$; $\boldsymbol{B}^T$ - statická matice

- Stav splňuje podm. plastické přípustnosti

2. Základní věta mezní analýzy pro diskrétní modely

Úvod

- **Mezní plastický stav**
  - Staticky i kinematicky přípustný

2. Kinematicky přípustný stav

- μ_k - kinematicky přípustný součinitel zatížení (odpovídá kinematicky přípustnému procesu)
- Vznik mechanismu kolapsu
- Plastické přetváření ve zplastizovaných prutech

$\mu_k \bar{\boldsymbol{f}}^T \dot{\boldsymbol{u}}_k = D(\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{pk}})$

$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{pk}}$ - rychlost platic. protažení

$\dot{\boldsymbol{u}}_k$ - rychlost styčníkových posunů

$\mu_k \bar{\boldsymbol{f}}^T \dot{\boldsymbol{u}}_k$ - výkon vnějších sil na rychlosti styčníkových posunů

2. Základní věta mezní analýzy pro diskrétní modely

Úvod

- **Mezní plastický stav**
  - Staticky i kinematicky přípustný

  2. Kinematicky přípustný stav

  $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{pk}} = \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{u}}_k$

  $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{pk}}$ - rychlost plastic. protažení

  $\dot{\boldsymbol{u}}_k$ - rychlost styčníkových posunů, voleny tak aby $\bar{\boldsymbol{f}}^T \dot{\boldsymbol{u}}_k > 0$

2. Základní věta mezní analýzy pro diskrétní modely

Základní věta mezní analýzy

$\boxed{\mu_s \le \mu_k \quad \to \quad \mu_s \le \mu_0 \le \mu_k}$; μ_0 - součinitel bezpečnosti

1. **Věta o dolním odhadu:** $\mu_s \le \mu_0$
2. **Věta o horním odhadu:** $\mu_0 \le \mu_k$

Důkaz základní věty mezní analýzy

$\boldsymbol{s}_s^T \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{pk}} \le D(\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{pk}})$

$\boldsymbol{s}_s$ - vnitřní (pl. přípustné) síly

$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{pk}}$ - rychlost plastic. Protažení

$$\boldsymbol{s}_s^T \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{pk}} = \boldsymbol{s}_s^T \boldsymbol{B} \dot{\boldsymbol{u}}_k = (\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{s}_s)^T \dot{\boldsymbol{u}}_k = \mu_s \bar{\boldsymbol{f}}^T \dot{\boldsymbol{u}}_k \quad \le \quad D(\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{pk}}) = \mu_k \bar{\boldsymbol{f}}^T \dot{\boldsymbol{u}}_k$$

$$\mu_s \le \mu_k$$

3. PMPD pro víceosou napjatost

PMPD (maticový zápis)

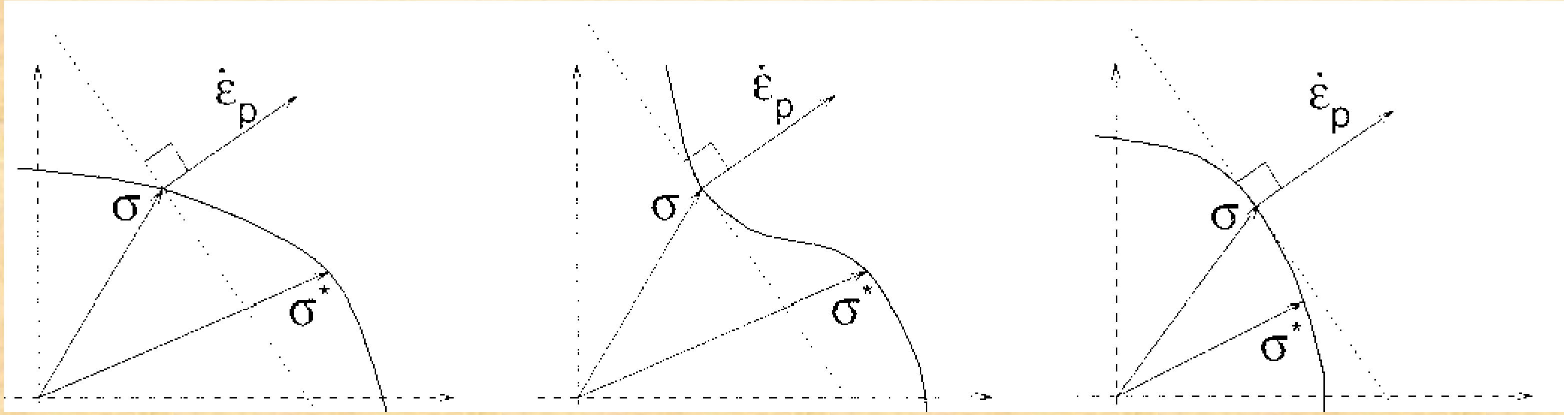
$$\boxed{\mathcal{D}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}}\right) = \max_{\sigma^* \in \bar{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}^{*T}\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}}}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ – skutečné napětí (sloupcová matice)

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}}$ - skutečná rychlost plastické deformace (sloupcová matice)

$\boldsymbol{\sigma}^*$ - plasticky přípustný stav napětí

- Platný pokud je splněna podmínka **normality** a **konvexity**

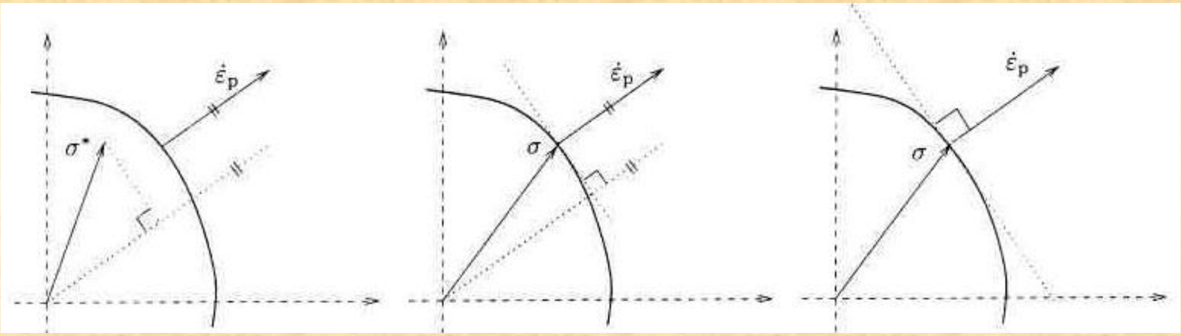


3. PMPD pro víceosou napjatost

Význam PMPD

$$\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mathrm{p}) = \max_{\sigma^* \in \bar{\mathcal{E}}} \boldsymbol{\sigma}^{*T}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mathrm{p} = \boldsymbol{\sigma}^T\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mathrm{p}$$

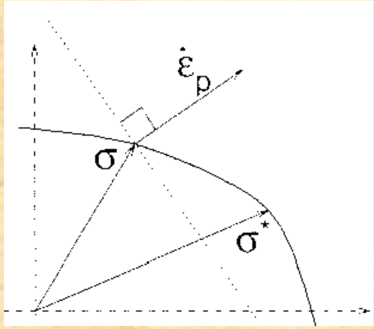
- Promítnutí všech plasticky přípustných stavů napětí (dle funkce plasticity) na rovnoběžku s $\dot{\varepsilon}_\mathrm{p}$ procházící počátkem
  → interval jehož krajní + bod je průmětem skutečného napětí $\boldsymbol{\sigma}$
- $\boldsymbol{\sigma}$ má max. průmět do směru $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mathrm{p}$
- $\boldsymbol{\sigma}^T\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mathrm{p} = |\boldsymbol{\sigma}||\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mathrm{p}|\cos\alpha$; skalární součin

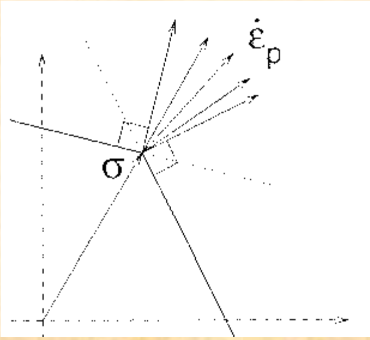


3. PMPD pro víceosou napjatost

PMPD & normalita

- Odchylka $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}}$ od normality:
- $\boldsymbol{\sigma}^{*T}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} > \boldsymbol{\sigma}^{T}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} \quad \rightarrow$ narušení podmínky PMPD
- Směr přírůstku plastic. def. je kolmý k ploše plasticity $f(x, y, z) = 0$
  - Výpočet jako gradient funkce f v daném bodě plochy plasticity
- $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\right); \dot{\lambda} \geq 0$
- $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ sdružený zákon plastického přetváření
- Singularita v bodě plochy plasticity





4. Základní věta mezní analýzy pro spojité modely

Základní věta mezní analýzy

$$\boxed{\mu_s \leq \mu_k \quad \rightarrow \quad \mu_s \leq \mu_0 \leq \mu_k}$$

1. **Staticky přípustný stav**

$f\left(\sigma_{ij}^s\right) \leq 0$ ve V (podm. plastic. přípustnosti)

$\frac{-\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j} = \mu_s \bar{b}_i$ ve V (podm. rovnováhy)

$\sigma_{ij}^s n_j = \mu_s \bar{t}_i$ na S_t (statická podm.)

$\boldsymbol{\sigma}_s \in \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_V \quad ; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_V = \{\boldsymbol{\sigma} | f(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})) \leq 0 \ \forall \ \boldsymbol{x} \in V\}$

4. Základní věta mezní analýzy pro spojité modely

Základní věta mezní analýzy

$$\boxed{\mu_s \leq \mu_k \quad \rightarrow \quad \mu_s \leq \mu_0 \leq \mu_k}$$

2. **Kinematicky přípustný stav**

$\dot{\varepsilon}_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i}\right)$ ve V (vztah def. – přemístění)

$\dot{u}_i^k = 0$ na S_u (kinematická podmínka)

$\int_V \bar{b}_i \dot{u}_i^k dV + \int_{S_t} \bar{t}_i \dot{u}_i^k dS > 0$ na S_t (podm. pro + vnější en.)

$$\mu_k = \frac{\int_V \mathcal{D}(\dot{\varepsilon}_{ij}^k) dV}{\int_V \bar{b}_i \dot{u}_i^k dV + \int_{S_t} \bar{t}_i \dot{u}_i^k dS}$$

4. Základní věta mezní analýzy pro spojité modely

Základní věta mezní analýzy

$$\boxed{\mu_s \leq \mu_k \quad \rightarrow \quad \mu_s \leq \mu_0 \leq \mu_k}$$

Důkaz základní věty mezní analýzy

PMPD: $D_{int} = \int_V \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p dV = \max\limits_{\boldsymbol{\sigma}^* \in \bar{\varepsilon}_V} \boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} dV$

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}_s : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k dV \leq \int_V \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k) dV$$

Clapeyronův teorém: $\int_V \boldsymbol{\sigma}_s : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k dV = \mu_s \left(\int_V \bar{\boldsymbol{b}} \dot{\boldsymbol{u}}_k dV + \int_{S_t} \bar{\boldsymbol{t}} \dot{\boldsymbol{u}}_k dS \right)$

$$\mu_s \leq \frac{\int_V \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k) dV}{\left(\int_V \bar{\boldsymbol{b}} \dot{\boldsymbol{u}}_k dV + \int_{S_t} \bar{\boldsymbol{t}} \dot{\boldsymbol{u}}_k dS \right)} = \mu_k$$

Děkuji Vám za pozornost.