132YKPJ – Projekt K

132PRPM – Přetváření a porušování materiálů

OOFEM: Implementace plasticitního materiálového modelu Cam-Clay

Vypracoval: Ondřej Faltus

Vyučující: Ing. Martin Horák, PhD.

ZS 2017/2018

1. Cíl práce

Cílem je implementovat modifikovaný materiálový model Cam-Clay do programu pro výpočty metodou konečných prvků OOFEM.

2. Modifikovaný materiálový model Cam-Clay

Modifikovaný materiálový model Cam-Clay byl vyvinut v 60. a 70. letech 20. století na univerzitě v Cambridge prací profesorů K. H. Roscoea a J. Burlanda. Je nástupcem původního, asi o deset let staršího modelu Cam-Clay. Na rozdíl od svého předchůdce má jeho funkce plasticity tvar elipsy a vykazuje vysokou numerickou stabilitu. Model je tedy vhodný pro numerické výpočty. Používá se pro popis chování některých zemin.

2.1. *Základní předpoklady*

Model pracuje s několika základními předpoklady:

- Nelineární elastická část zatěžovací křivky, tj.

$$\boldsymbol{D}_e = \boldsymbol{D}_{et}(\boldsymbol{\sigma})$$

- Při plastizaci dochází ke zpevnění či změkčení až do dosažení kritického stavu. Po tomto okamžiku se funkce plasticity nadále nemění a zároveň všechna další plastická deformace je ryze deviatorická.
- Pro jednoduchost se napětí zobrazuje pomocí invariantů *p* a *q*, které vyjadřují hydrostatickou, resp. deviatorickou část napětí, kde

$$p = -\sigma_m \text{ a } q = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{s}\| = \sqrt{3J_2}$$

2.2. *Funkce plasticity*

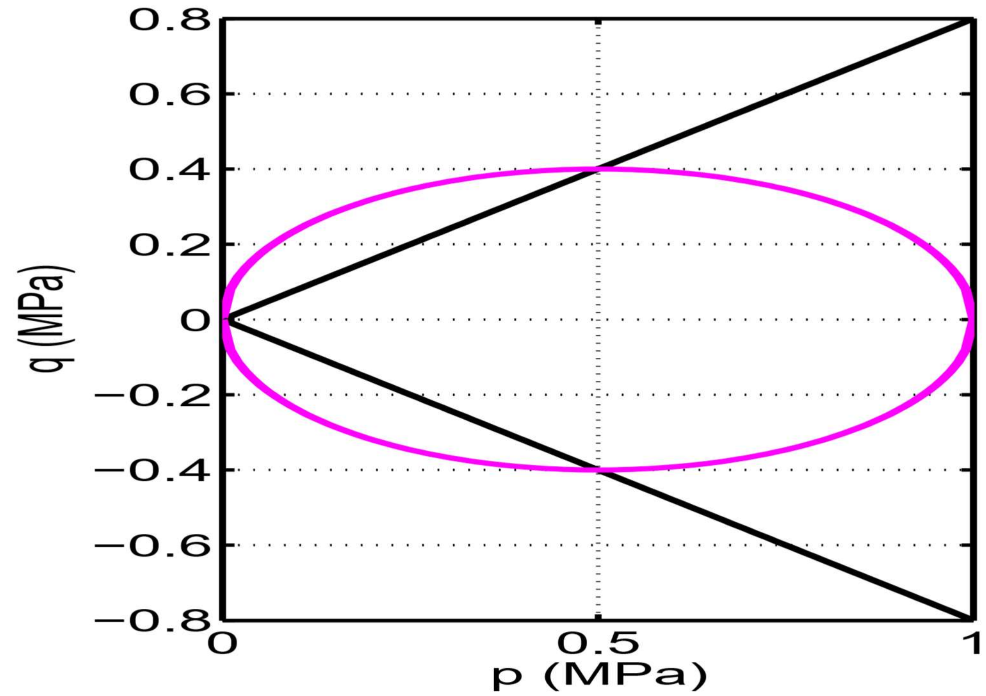
Funkce plasticity materiálového modelu Cam-Clay má tvar elipsy v prostoru *p,q* (viz obrázek 1). Její předpis zní:

$$f(p, q, p_c) = q^2 - M^2 p(p_c - p)$$

,kde

p_c je prekonsolidační tlak v zemině. Tento parametr se mění se zpevněním.

M je materiálový parametr udávající poměr délky os elipsy plasticity a zároveň i sklon přímky kritického stavu



Obr. 1. Funkce plasticity modifikovaného modelu Cam-Clay v prostoru p,q

Na obrázku 1 je znázorněna kromě elipsy plasticity i tzv. „přímka kritického stavu“. Povšimněme si, že tato přímka protíná elipsu v bodě, ve kterém gradient funkce plasticity je rovnoběžný s osou p (tj. v jejím „nejvyšším“ bodě). Přímka vyjadřuje trajektorii, po které se tento bod bude pohybovat při zpevňování/změkčování, když se bude velikost elipsy měnit. Sklon této přímky je M.

2.3. Gradient funkce plasticity

Model používá sdružený zákon plastického přetváření, tj. plastický gradient je přímo gradientem funkce plasticity – její první derivací podle napětí. Lze tedy odvodit:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = M^2(2p - p_c)\left(-\frac{1}{3}\right)\boldsymbol{\delta} + 2q\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}}\boldsymbol{s}$$

$$= \frac{M^2}{3}(2\sigma_m + p_c)\boldsymbol{\delta} + 3\boldsymbol{s}$$

Pro implementaci algoritmu projekce na nejbližší bod (popsán v části 3.2) je potřeba stanovit i druhou derivaci funkce plasticity podle napětí, tedy:

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} = 3\boldsymbol{S} + \frac{2}{3}M^2\Delta$$

,kde

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix} & \emptyset \\ \emptyset & \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$ a

$$\Delta = \frac{\partial(\sigma_m \boldsymbol{\delta})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

Zajímavé je, že tato hodnota už není závislá na napětí a zůstává tedy stále konstantní.

2.4. Současná omezení

V současné fázi implementace je model Cam-Clay zjednodušen ve dvou směrech. Pro elastickou část zatěžování se neuvažuje nelinearita a pro plastickou část se neuvažuje zpevnění. Model je tak v zásadě převeden do stavu dokonalého pružnoplastického modelu.

3. Používané algoritmy

3.1. Elastická predikce a plastická korekce

Algoritmus pracuje s deformací předepisovanou v pseudočasových krocích. Na začátku je tedy již známa celková deformace na konci kroku. Z předchozích kroků přitom již známe jak dosavadní celkovou deformaci, tak její rozdělení na elastickou a plastickou část. V každém kroku se provede fáze výpočtu zvaná *elastická predikce*. Zavede se předpoklad, že veškerá nová deformace se projeví jako deformace elastická. Lze tedy stanovit tzv. zkušební napětí:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1,tr} = \boldsymbol{D}_e\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{p,n}\right)$$

Nyní je třeba ověřit, zda byl předpoklad správný. Pokud platí

$$f\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1,tr}\right) \leq 0$$

, předpoklad byl splněn. Uloží se

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1,tr}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{p,n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{p,n}$$

a krok skončí. V opačném případě je třeba přistoupit k tzv. *plastické korekci*. Ta vychází ze dvou základních rovnic:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{p,n+1} \neq 0 \to \Delta\lambda_{n+1} \neq 0 \to f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{D}_e\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{p,n} - \Delta\lambda_{n+1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})\right)$$

Neznámými hodnotami v těchto rovnicích jsou $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ a $\Delta\lambda_{n+1}$. Řešitelnost soustavy rovnic závisí na jednom každém materiálovém modelu (a tedy tvaru funkce plasticity).

3.2. Projekce na nejbližší bod

Metoda projekce na nejbližší bod slouží k numerickému řešení problému plastické korekce. Jedná se o aplikaci Newton-Raphsonovy metody na základní soustavu rovnic, která přejde na následující vyjádření:

$$\boldsymbol{R}_{n+1,k} + \boldsymbol{H}_{n+1,k}{}^{-1}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1,k} + \Delta\Delta\lambda_{n+1,k}\boldsymbol{g}_{n+1,k} = 0$$

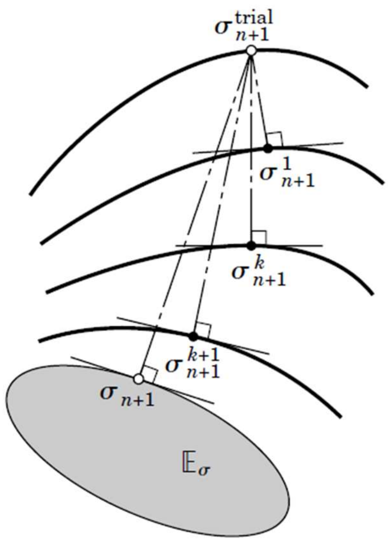
$$f_{n+1,k} + \boldsymbol{g}_{n+1,k}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1,k} = 0$$

,kde

$\boldsymbol{R}_{n+1,k} = -\boldsymbol{\varepsilon}_{p,n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{p,n} + \Delta\lambda\boldsymbol{g}_{n+1}$ a

$\boldsymbol{H}_{n+1,k} = (\boldsymbol{D}_e{}^{-1} + \Delta\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial\boldsymbol{\sigma}^2})^{-1}$

Tento linearizovaný problém lze vyřešit v několika krocích, dokud $\boldsymbol{R}$ (reziduál plastické deformace) a hodnota funkce plasticity nejsou nulové (resp. jejich odchylky se pohybují v přijatelných mezích).



Obr. 2. Geometrická ilustrace algoritmu projekce na nejbližší bod

(převzatá z SIMO, J. C. a Thomas J. R. HUGHES. Computational inelasticity. New York: Springer, c1998. ISBN 0-387-97520-9)

4. Popis kódu

Veškerý nový kód v programu OOFEM se nachází ve dvou třídách, a to *CamClayMat* a *CamClayMatStatus*. Obě jsou obsažené ve dvou nových zdrojových souborech *camclaymat.c* a *camcalymat.h*. Níže následuje popis úseků kódu, které jsou nově napsány a liší se od kódu popisujícího jiné materiálové modely.

4.1. *performPlasticityReturn()*

Metoda provádí hlavní část práce programu. Na základě zadané hodnoty koncové deformace provede elastickou predikci, zkontroluje splnění předpokladu a v případě potřeby provede i plastickou korekci pomocí metody projekce na nejbližší bod. Na konci aktualizuje vypočtenými hodnotami stav materiálového bodu v paměti programu. Metoda přeruší iteraci a varuje, pokud počet kroků v projekci na nejbližší bod překročí vnitřně nastavenou hranici.
Argumenty:

- *GaussPoint *gp* – materiálový bod, v němž algoritmus probíhá a v němž jsou uloženy dosavadní hodnoty deformací.
- *const FloatArray &totalStrain* – sloupcová matice deformace na konci kroku
- *TimeStep *tStep* – časový skok

4.2. *giveYieldValueAtStress()*

Metoda slouží k výpočtu hodnoty funkce plasticity pro dané napětí. Metoda ohlásí chybu, pokud zadaná sloupcová matice napětí nemá správnou velikost.
Argumenty:

- *FloatArray &stress* – sloupcová matice napětí
- *double &pc* – aktuální hodnota parametru p_c

Návratová hodnota: číselná hodnota funkce plasticity

4.3. *givePlasticityGradientAtStress()*

Metoda vyhodnotí hodnotu plastického gradientu pro dané napětí. Metoda ohlásí chybu, pokud zadaná sloupcová matice napětí nemá správnou velikost.
Argumenty:

- *FloatArray &answer*– sloupcová matice, do nějž bude uložena odpověď

- *FloatArray &stress* – sloupcová matice napětí
- *double &pc* – aktuální hodnota parametru p_c

4.4. giveYieldFunctionDoubleDerivative()

Metoda vyhodnotí druhou derivaci funkce plasticity pro daný materiál. Tato hodnota není závislá ani na napětí ani na p_c.

Argumenty:

- *FloatArray &answer*– sloupcová matice, do nějž bude uložena odpověď