



**České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební**

Studentská vědecká a odborná činnost
Akademický rok 2007/2008

**Mezní únosnost železobetonových prutů
s přihlédnutím k nelineárnímu chování**

Jméno a příjmení studenta :	Petr Havlásek
Ročník, obor :	4. roč., Konstrukce a dopravní stavby
Vedoucí práce :	prof.Ing. Milan Jirásek, DrSc.
Katedra :	Katedra mechaniky

Anotace: Srovnání teoretických metod a postupů daných normou EC2 pro výpočet mezních stavů železobetonových prvků. Pozornost se soustředí zejména na pruty obdélníkového a kruhového průřezu zatížené kombinací dvouosého ohybu a tlaku nebo tahu. Uvážen přitom bude jak nelineární charakter pracovních diagramů pro beton a ocel, tak i vliv geometricky nelineárních účinků v tlačeneých prutech.

Annotation: The comparison between theoretical methods and methods given in standard EC2, used for calculation of the ultimate limit states of steel-reinforced concrete beams. Scope is set on members of rectangular and circular cross-section, subject to axial force and biaxial bending, accounting for their both material and geometrical non-linear behaviour.

Obsah:

1. Úvod	2
2. Interakční diagram – mezní analýza průřezu	2
2.1 Definice ID	2
2.2 Materiálové vlastnosti betonu a oceli	3
2.3 Konstrukční zásady	4
2.4 Obdélníkový průřez namáhaný dvojicí sil M, N	4
2.4.1 Výpočetní model	4
2.4.2 Postup výpočtu	4
2.4.3 Výpočet obálky ID	6
2.4.4 Porovnání ID při výpočtu s různými modely betonu	7
2.5 Kruhový průřez namáhaný dvojicí sil M, N	9
2.5.1 Motivace	9
2.5.2 Výpočet	9
2.5.3 Porovnání ID v závislosti na poloze k výztuže ke směru namáhání, počtu prutů a st. vyztužení	10
2.5.4 Porovnání ID kruhového a betonového průřezu se stejnou průřezovou plochou betonu	11
2.6 3D interakční diagram obdélníkového průřezu	12
2.6.1 Výpočet	12
2.6.2 Porovnání ID v závislosti na stupni a poměru vyztužení	13
3. Aplikace teorie 2. řádu na tlačeneý žb. prvek s uvážením nelin. chování betonu	14
3.1.1 Způsob porušení prvku v závislosti na jeho štíhlosti	14
3.2 Specifika výpočtu podle 2. řádu daná normou	14
3.2.1 Geometrie konstrukce	15
3.2.2 Postup výpočtu	16
3.2.3 Výpočet deformací z vnitřních sil	16
3.3 Odlišnosti návrhových hodnot při výpočtu dle teorie 1. řádu, 2. řádu a normy	17
3.4 Upravený ID pro výpočet dle teorie 2. řádu	19
4. Závěr	20

1. Úvod

Cílem první části této práce byl výpočet interakčního diagramu (ID) pro železobetonový prvek obdélníkového a kruhového průřezu a porovnání ID v závislosti na geometrii průřezu, stupni vyztužení a použitých materiálových modelech daných normou. Zkoumal jsem průřezy vystavené zatížení normálovou silou a buď jedním nebo dvěma ohybovými momenty. Jedná se o kombinace namáhání, které jsou typické pro většinu stavebních konstrukcí; pokud je zanedbána normálová síla, jde o prostý/šikmý ohyb, tedy způsob namáhání, kterému jsou nejčastěji vystaveny vodorovné nosné konstrukce – nosníky. Oproti tomu, je-li dominantní složkou namáhání síla normálová, ve většině případů se jedná o namáhání svislých nosných konstrukcí – při poměru stran do 4:1 o namáhání sloupů, při vyšším o namáhání pilířů a stěn. Pokud je významný vliv excentricity vnější síly, je konstrukce posuzována na kombinaci normálové síly a jednoho dominantního ohybového momentu (např. rámové stojky). Zatížení všemi třemi vnitřními silami může být uvažováno např. u rohových sloupů skeletových konstrukcí. Průřez vystavený kroucení a smyku jsem nezkoumal.

Druhá část je zaměřena na mezní únosnost konstrukce s přihlédnutím k účinkům 2. řádu. Výpočet jsem provedl na nejjednodušším možném prvku – kloubově podepřeném štíhlém nosníku zatíženém excentricky působící silou. Cílem bylo porovnat účinky 1. a 2. řádu se zjednodušenými výpočty danými normou.

V závěru jsem spojil výsledky 1. a 2. části, abych získal upravený ID pro přímý výpočet únosnosti štíhlých prvků bez komplikovaného výpočtu dle 2. řádu.

Při svém bádání jsem se řídil zásadami danými normou ČSN EN 1992-1-1: Navrhování betonových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby, častěji označovanou jako „Eurokód 2“. Norma nabývá účinnosti 1.12.2006 a časem plně nahradí stávající normu ČSN 73 1201. Eurokódu jsem využil především ke zjištění konstrukčních zásad betonových prvků (nemá cenu zkoumat prvky, které nelze navrhnout – například příliš silně vyztužené průřezy).

Všechny výpočty jsem prováděl v programu Matlab (části 2.4, 2.5 ve verzi 6.1, zbytek 2007a), data druhé části jsou zpracována v programu Excel.

2. Interakční diagram – mezní analýza průřezu

2.1 Definice ID

Interakční diagram je tvořen uzavřenou, téměř konvexní křivkou vymežující v rovině množinu bodů. Každý bod této roviny je určen souřadnicí: [normálová síla N ; ohybový moment M]. Pokud leží bod uvnitř této křivky, nedochází k překročení únosnosti prvku; oproti tomu body vně odpovídají kombinacím, při kterých je únosnost průřezu překročena. Proto body na hranici mezi těmito plochami odpovídají zatížení, při kterém je právě dosaženo maximální únosnosti. Tento stav se nazývá „Mezní stav únosnosti“ (MSÚ), patří do skupiny „Prvních mezních stavů“ (stabilita, únosnost...).

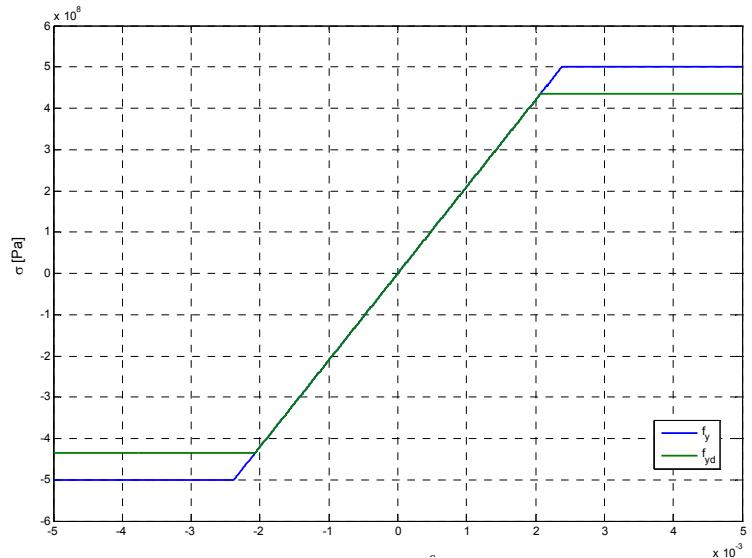
Jak z definice vyplývá, ID je velice vhodný nástroj k posuzování mnoha silových kombinací na prvky stejného průřezu.

2.2 Materiálové vlastnosti betonu a oceli

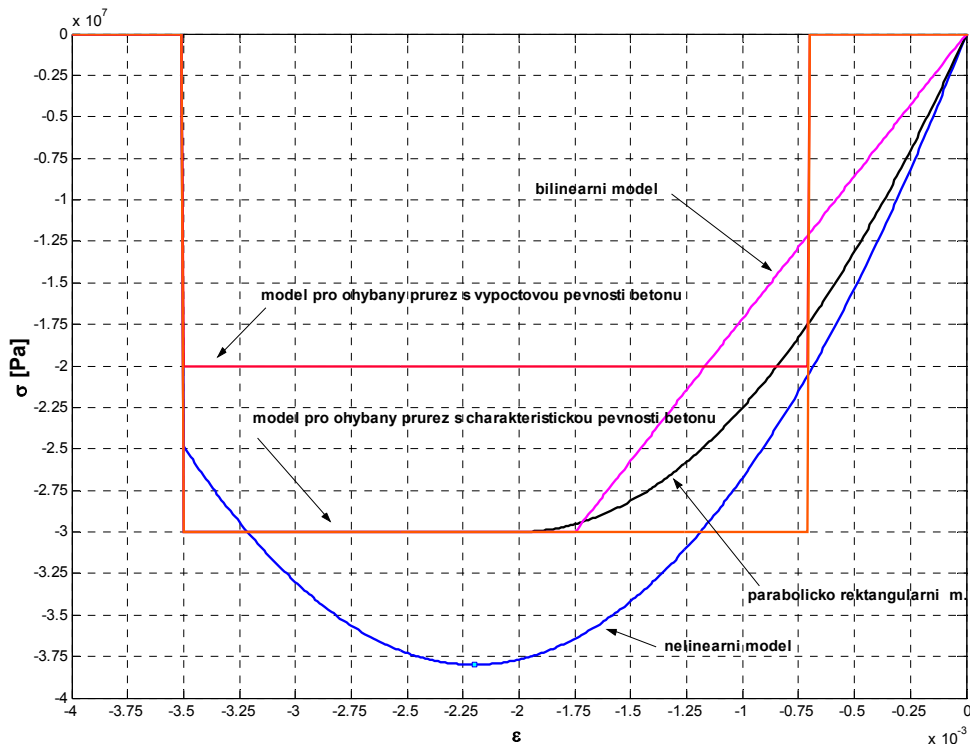
Ocel: předpokládám lineární závislost chování mezi napětím a deformací až do dosažení hodnoty napětí, při které začne ocel plastizovat - tzv. mez kluzu. Tu jsem stanovil hodnotou $f_y=500\text{MPa}$, která odpovídá běžné betonářské výztuži R 10505. Při dalším zvětšování deformace již nedochází k nárůstu napětí (tzv. zpevnění) nad (pod v případě tlaku) tuto mez.

Beton: Model chování betonu a charakteristické pevnosti byly určeny na základě EC2. Pro lepší srovnání mezi výpočtovými modely jsem použil jen jednu třídu betonu - C30/37.

Dílčí součinitele bezpečnosti materiálu: Národní aplikační dokument pro ČR předepisuje $\gamma_{MC}=1.5$ pro beton a $\gamma_{MS}=1.15$ pro ocel. Vliv těchto součinitelů jsem v části 2.4 neuvažoval, pracoval jsem tedy s charakteristickými hodnotami pevností materiálů, které jsou pro srovnání stejně vhodné jako výpočtové.



Obr. 1: Pracovní diagram oceli - charakteristická a návrhová pevnost



Vztah pro par-rect prac. diagram

$$\sigma_c = f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right]$$

pro $0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c2}$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{pro} \quad \epsilon_{c2} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu2}$$

Prac. diag. pro neline. analýzu kce.

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \quad \text{kde}$$

$$\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \quad k = \frac{1.05 \cdot E_{cm} \cdot |\epsilon_{c1}|}{f_{cm}}$$

Obr. 2: Pracovní diagramy betonu

2.3 Konstrukční zásady

EC2 definuje minimální a maximální stupeň vyztužení ŽB prvku betonářskou výztuží, tyto hodnoty se mírně liší pro nosníky a pro sloupy. Ve výpočtech jsem užíval $A_{S,min}=0,002A_C$ a $A_{S,max}=0,04A_C$, kde A_S je plocha výztuže a A_C je plocha betonu.

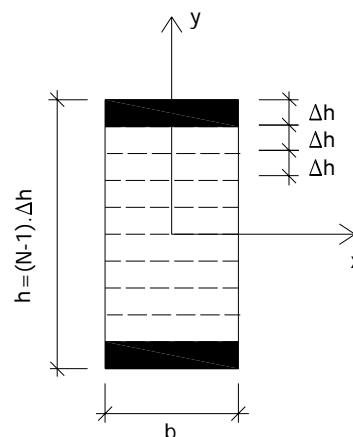
Současně musí být v průřezu umístěny minimálně 4 podélné pruty; 1 v každém rohu obdélníkového průřezu, v případě mnohoúhelníka v každém jeho rohu 1 prut. Tento požadavek plyne z požadavku zajištění správné polohy třmínek při betonování. Třmínky slouží u nosníků jako smyková výztuž, u sloupů jako výztuž zabraňující vybočení tlačných prutů. U kruhového sloupu se doporučuje navrhovat minimálně 6 podélných prutů. Nejmenší průměr výztužného prutu je 8mm.

Krytí výztuže betonem slouží k zajištění její dlouhodobé trvanlivosti a zároveň ke zlepšení spolupůsobení. Tloušťka krycí vrstvy je funkcí agresivity prostředí, délky uvažované životnosti kce, předpokládaného rozvoje trhlin atd... Stanovil jsem ji hodnotou 20mm (kromě části 2.4, kde krytí není uvažováno).

2.4 Obdélníkový průřez namáhaný dvojicí sil M, N

2.4.1 Výpočetní model

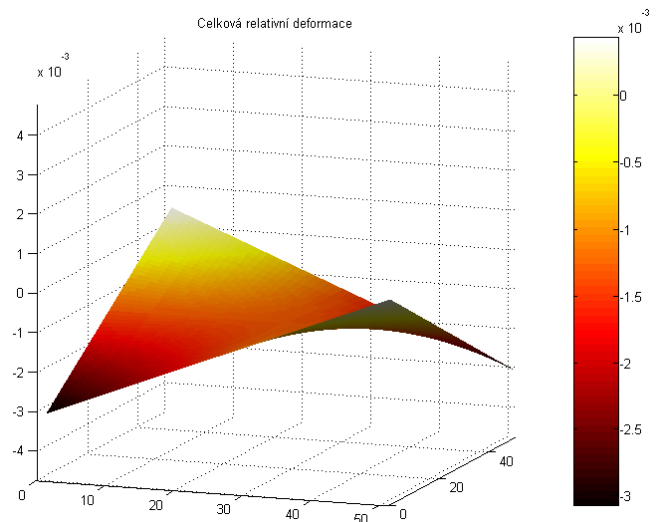
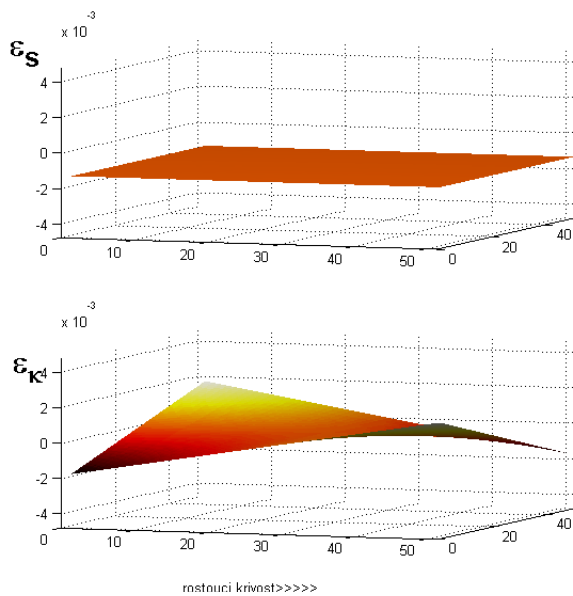
Výpočty jsem prováděl na průřezu o rozměrech 300mm x 500mm, který je v oblasti nejvíce tlačných a tažených vláken vyztužen betonářskou výztuží. Pro zjednodušení a urychlení výpočtu jsem celý průřez nahradil sloupcovou maticí, jejíž první a poslední členy představovaly výztuž, zbylé, po výšce průřezu rovnoměrně rozdělené členy betonu. Počet členů matice průřezu neměl na výsledek výpočtu příliš velký vliv, dá se říci, že od dvaceti členů výše je dosahováno téměř stejných hodnot. Výpočet jsem zformoval tak, aby stupeň vyztužení průřezu byl nezávislý na počtu členů matice.



Cílem výpočtu bylo porovnat různé pracovní diagramy betonu a také vytvořit grafické výstupy zachycující vývoj distribuce napětí po průřezu. Z tohoto důvodu jsem neuvažoval vliv krycí vrstvy.

2.4.2 Postup výpočtu

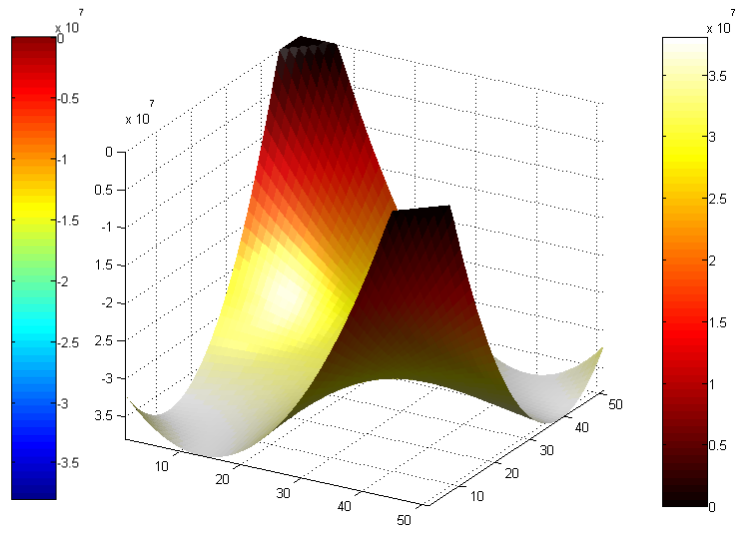
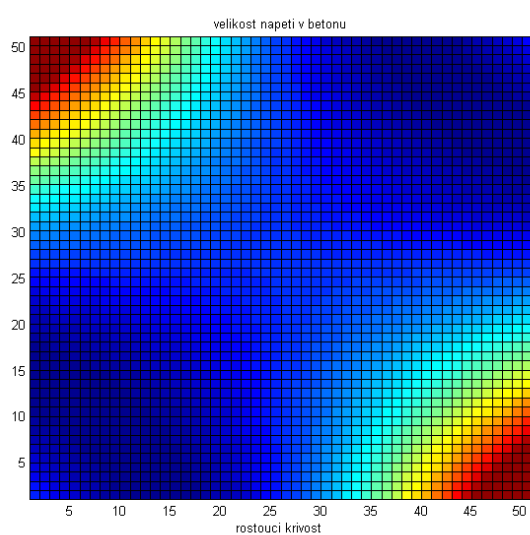
- 1) Generuje se matice relativních deformací ε_{tot} , ve které každý člen vzniká sečtením relativní deformace střednice ε_S a deformace způsobené vlivem křivosti ε_K . Matice má stejný počet řádků a sloupců jako je počet řádků v matici průřezu, každému bodu průřezu tedy přísluší jiná relativní deformace. Je pochopitelné, že celý výpočet nelze učinit najednou, proto je řešen v cyklech po krocích; s každým krokem se zvětšuje velikost relativní deformace střednice.



Obr. 3: Grafické znázornění matice relativních deformací. Obr. 4: Grafické znázornění matice celkové deformace.
- vodorovná osa x: rostoucí křivost, vodorovná osa y: výška průřezu, svislá osa z: velikost deformace.

2) Z hodnot relativních deformací se přímo vypočítají hodnoty napětí v bodech průřezu.

$$\sigma(\varepsilon) = E(\varepsilon) \cdot \varepsilon$$



Obr. 5

Obr. 6

2D a 3D graf rozložení napětí v betonu po průřezu. Zleva se zvyšuje křivost. Graf zachycuje průřez v jednom kroku, při kterém relativní deformace střednice zůstává konstantní. Svislá osa znázorňuje výšku průřezu. V tomto grafu byl použit nelineární model betonu.

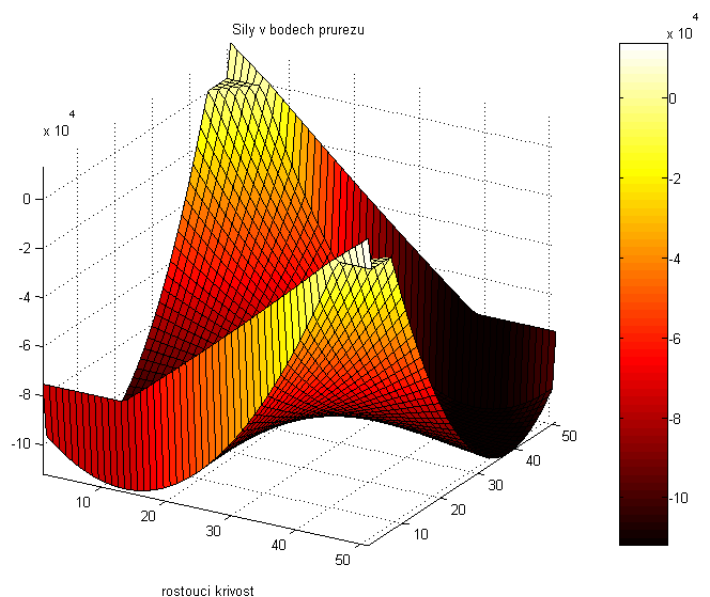
3) Výpočet sil v bodech průřezu:

$$F_S(\varepsilon) = \sigma_S(\varepsilon) \cdot b \cdot \Delta h \cdot \rho$$

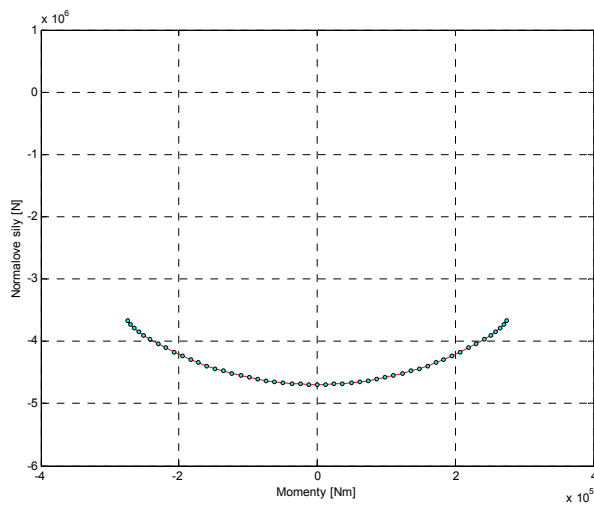
$$F_C(\varepsilon) = \sigma_C(\varepsilon) \cdot b \cdot \Delta h$$

Obr. 7:

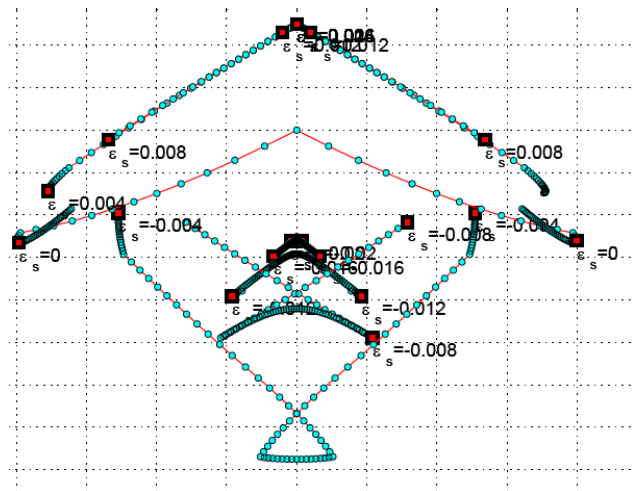
3D graf rozložení bodových sil po průřezu. Zleva roste křivost. V první a poslední řadě se nachází ocelová výztuž. Průřez je v tomto případě minimálně vyztužen, proto není téměř rozdíl mezi velikostí síly v betonovém a ocelovém elementu.



4) Výslednice N a M se zapíší do matice výsledků, každému sloupci odpovídá jedna dvojice hodnot N, M



Obr. 8: Výsledek jednoho zatěžovacího cyklu, průřez vystaven relativním křivostem při konstantním protažení střednice.

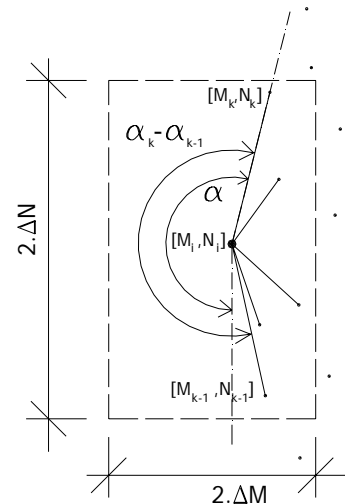


Obr. 9: „Růst interakčního diagramu“. Vybrané zatěžovací větve.

2.4.3 Výpočet obálky ID

Program pracuje se vstupními hodnotami (H), které jsou zapsány v matici o 2 sloupcích, kde každý řádek (kterých je celkem n^2) představuje dvojici $[N; M]$. Tak jako v předchozím výpočtu, i zde jde o cyklus, kdy program postupně prochází všechny body matice H ; právě proto je výpočet obálky časově nejdelší etapou výpočtu.

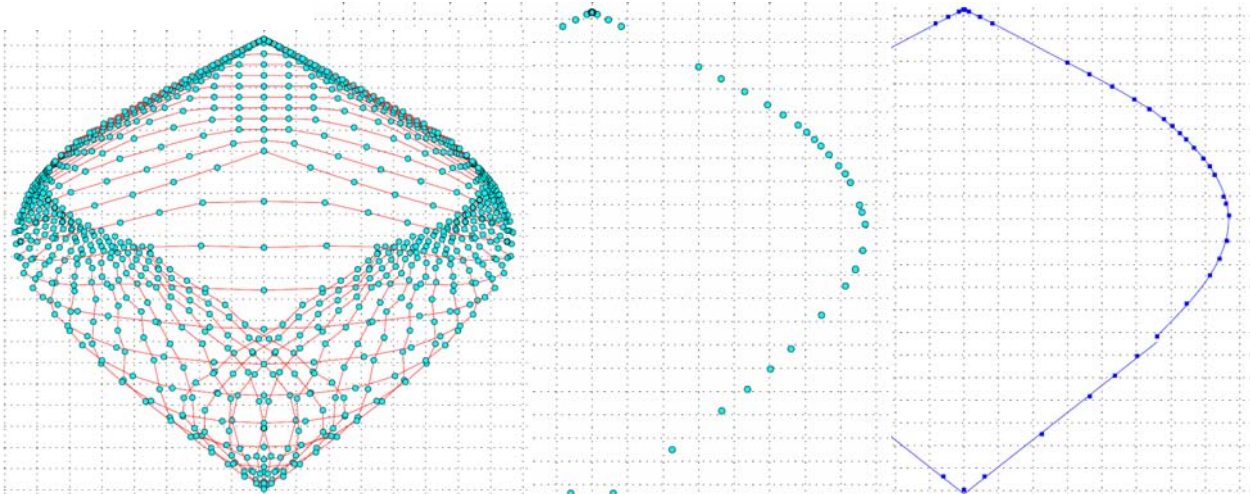
V prvním kroku se z matice H určí body, které splňují podmínku, že leží v okolí $X=[N_i; M_i]$ bodu (i =krok cyklu). V další fázi se vypočítají směrové vektory s počátky v bodě X a konci v bodech okolí. Posledním krokem je vyhodnocení, zda se bod X nachází na obálce, či nikoliv. Podmínkou je že úhel α mezi sousedními vektory musí být větší než π .



V případě velmi slabě vyztuženého průřezu jsem musel změnit podmínku s úhlem α z úhlu π na $0,98 \cdot \pi$. Kdybych tak neučinil, filtr by odstranil téměř všechny body obálky v blízkosti maximální a minimální normálové síly ID. Diagram se tak stal mírně nekonvexní křivkou. Pokud se bod skutečně nachází na obálce, je zapsán do matice obálky O .

Jak jsem zjistil, parametr velikosti okolí ΔN popř. ΔM nelze nastavit tak, aby byly testovány body z bezprostředního okolí bodu X a současně byla správně vytvořena obálka ID. Problém nastává s body, které leží blízko středu ID a mají tak málo sousedů, že je filtr vyhodnotí jako body ležící na obálce. Pracoval jsem tedy s okolím velikosti $\text{abs}(N_{\text{max}})/2$ a $M_{\text{max}}/2$. Jak je z grafických výsledků patrné, velikost a tvar interakčního diagramu jsou silně závislé na stupni a charakteru vyztužení (symetrické, nesymetrické).

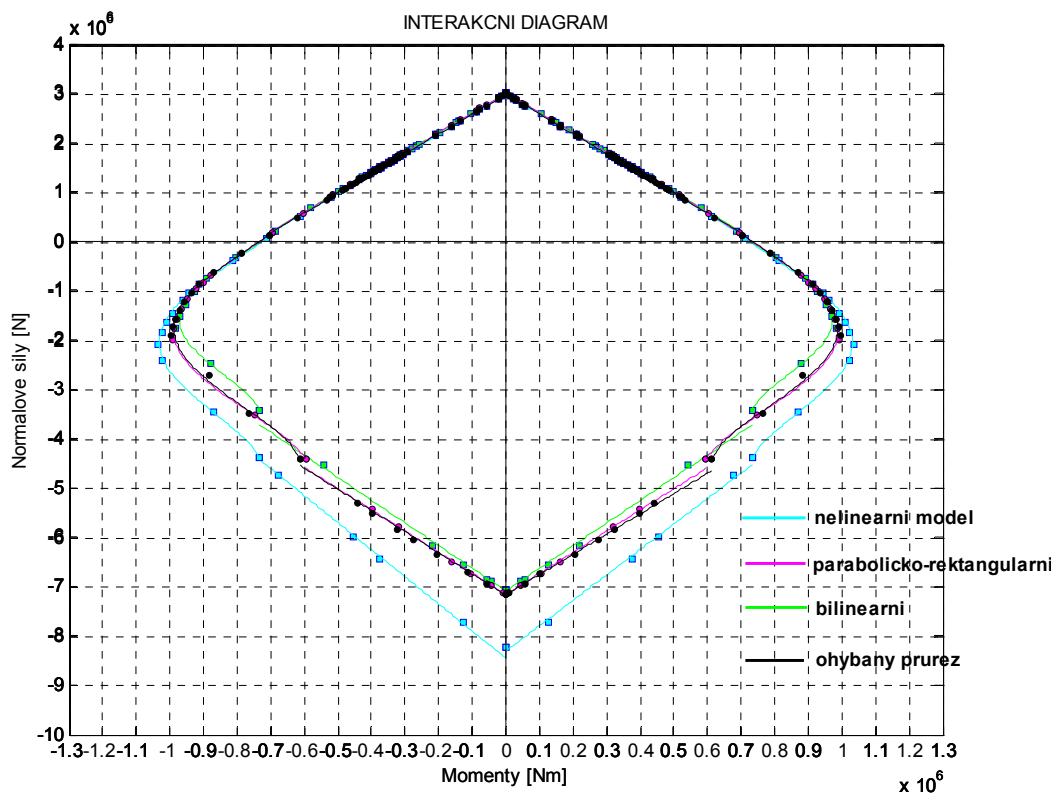
Tvar diagramu symetricky vyztuženého průřezu lze s jistou mírou nepřesnosti aproximovat v intervalu momentů $(-3M_{max}/4; 0)$ a $(0; 3M_{max}/4)$ přímkou. Zbylé krajní intervaly jsem proložil polynorem 5. stupně.



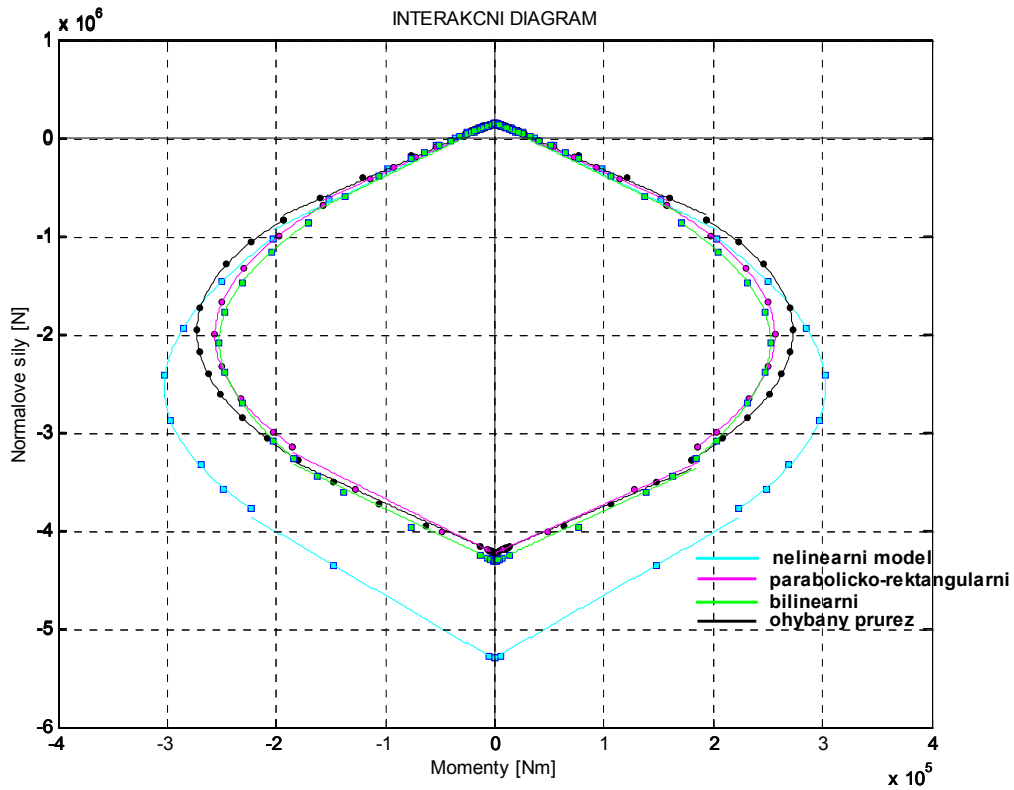
Obr. 10: Vývoj tvoření obálky ID. **FÁZE 1:** Všechny body ID. Červené křivky spojují body jednoho cyklu. **FÁZE 2:** Vyfiltrované body obálky ID. **FÁZE 3:** Proložení křivek body obálky ID.

Jak jsem později zjistil, program Matlab disponuje funkcí „convhull“, která je schopna konvexní obálku vytvořit v řádu několika vteřin. Nicméně pro slabě vyztužené průřezy ji z důvodu nekonvexnosti nelze použít.

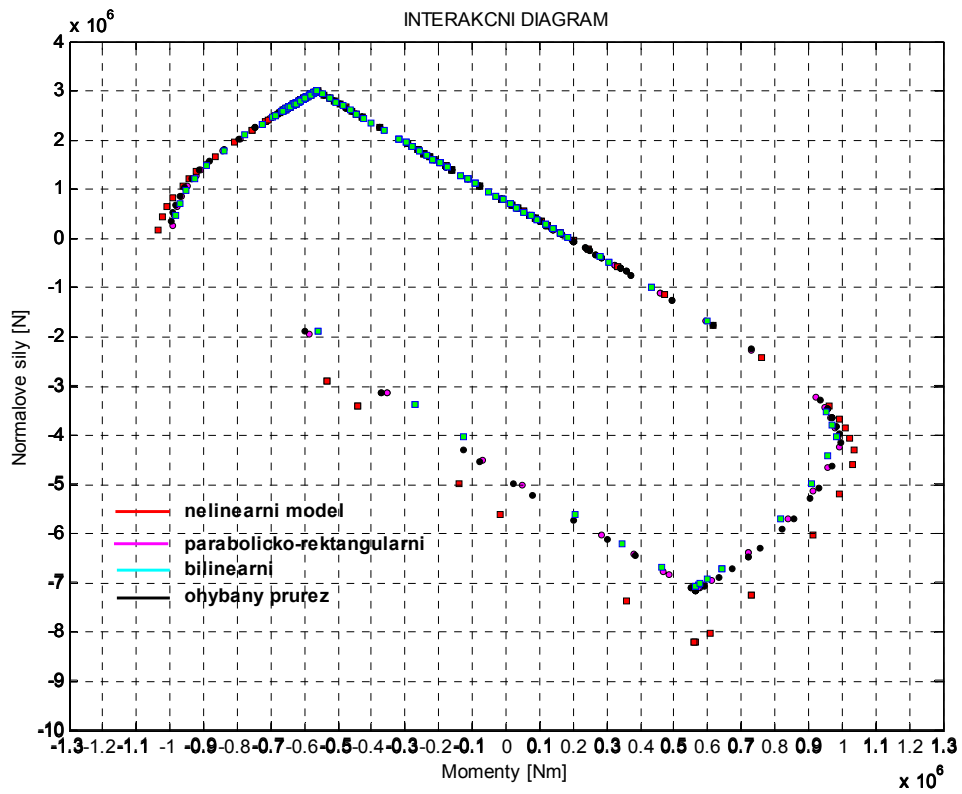
2.4.4 Porovnání ID při výpočtu s různými modely betonu



Obr. 11: $b=300\text{mm}$; $h=500\text{mm}$; stupeň vyztužení $\rho=4\%$, vyztuž umístěna symetricky; třída betonu C30/37.



Obr. 12: $b=300\text{mm}$; $h=500\text{mm}$; stupeň vyztužení $\rho=0,2\%$, výztuž umístěna symetricky; třída betonu C30/37.



Obr. 13: $b=300\text{mm}$; $h=500\text{mm}$; stupeň vyztužení $\rho=4\%$, výztuž umístěna asymetricky v poměru 1:7, třída betonu C30/37.

Jak bylo z původních předpokladů zřejmé (pracovní diagramy betonů dle EC2), nejvyšší únosnosti je dosahováno při výpočtu s užitím nelineárního pracovního diagramu betonu. Model parabolicko-rektangulární je s modelem bilineárním téměř shodný, přičemž v oblasti menších záporných relativních deformací střednice dosahuje model par.-rec. vyšší momentové únosnosti. Výpočtový model, který je v praxi díky své jednoduchosti používán nejčastěji – model rektangulární s aktivovanou plnou pevností betonu při relativních deformacích $0,2\varepsilon_{cu3}-\varepsilon_{cu3}$ - dosahuje při malých deformacích střednice (pouze u slabě vyztužených průřezů) nejvyšší momentové únosnosti. Naopak při vyšších hodnotách ε_s (větších záporných) se výsledky blíží modelu bilineárnímu nebo par.-rec. V tahové oblasti jsou všechny diagramy shodné – pevnost betonu v tahu není uvažována.

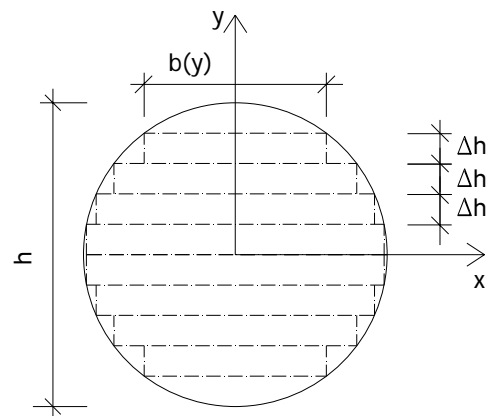
2.5 Kruhový průřez namáhaný dvojicí sil M, N

2.5.1 Motivace

Zvláště ve skeletových konstrukcích, kde je kladen důraz na vytvoření velkého, vzdušného, ničím nepřerušovaného prostoru, působí kruhové sloupy zpravidla lepším architektonickým dojmem, než sloupy klasického, pravouhelníkového průřezu. Ruční výpočet posouzení takových prvků je však o třídu těžší, než tomu bylo u obdélníkového sloupu, neboť je potřeba sestavit podmínky rovnováhy na průřezu, kde se nelineárně mění šířka tlačené oblasti betonu.

2.5.2 Výpočet

Zásadní změna oproti výpočtu 2.4 je v zavedení dvou samostatných matic průřezu – jedné „betonové“ a druhé „ocelové“. Matice betonového průřezu se od matice obdélníkového průřezu z (2.4) neliší, proměnná šířka průřezu je zohledněna až při výpočtu sil. Volba šířky segmentů, tak jak je zobrazena na schématu, je myslím v dobrém poměru výsledek/pracnost. Při dělení na více než 20 částí je rozdíl mezi obdélníkovými a lichoběžníkovými segmenty zanedbatelný.



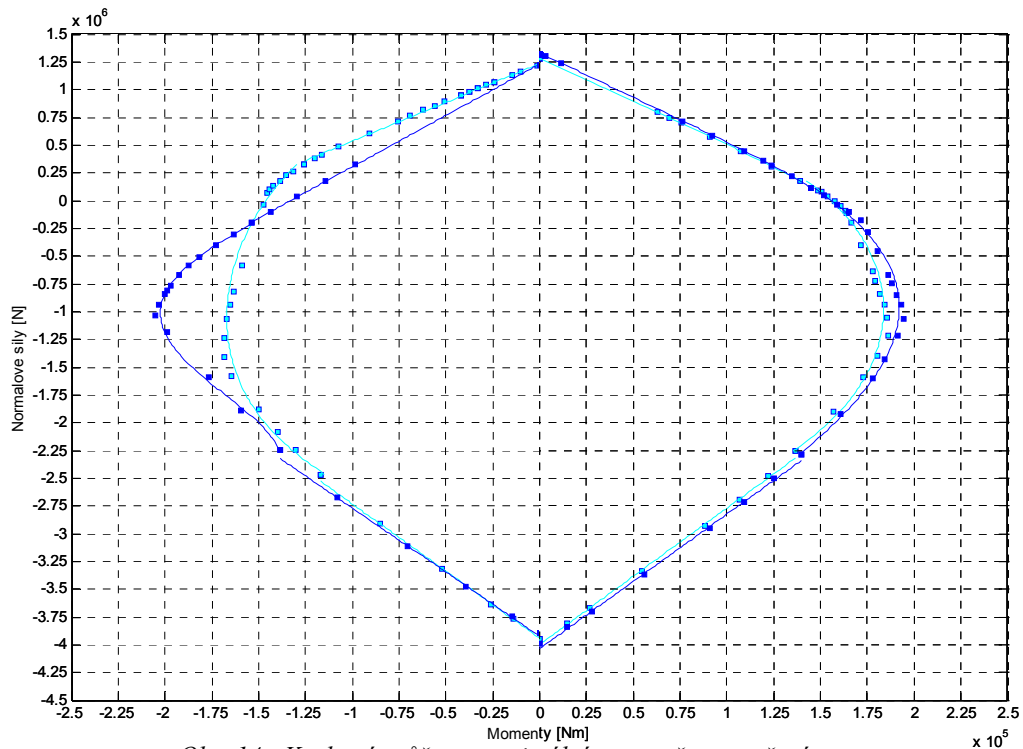
Matice ocelového průřezu má p řádků, kde p je počet prutů, a 2 sloupce – s x-ovými a y-ovými souřadnicemi prutů. Specifikem kruhových sloupů je silná závislost ve směru osy ohybu k poloze výztuže. Uvažoval jsem jen rovnoměrné rozdělení výztuže.

Oproti předchozímu modelu se tento liší v zavedení dalšího vstupní parametru – krycí vrstvy a dále v počítání s návrhovými hodnotami pevností betonu a oceli.

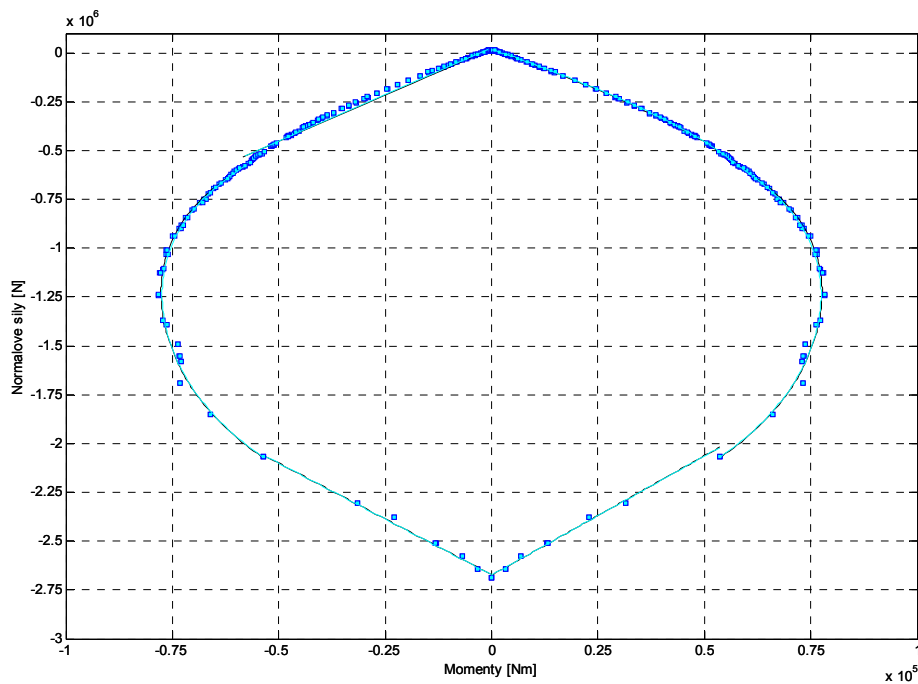
Postup výpočtu je shodný s výpočtem 2.4, pouze účinky relativních deformací se počítají zvláště pro betonovou a ocelovou část. Výsledné dvojice vnitřních sil vznikají součtem $N=N_S+N_C$; $M=M_S+M_C$

2.5.3 Porovnání ID v závislosti na poloze výztuže ke směru namáhání, počtu prutů a stupni vyztužení

Jak je z grafů vidět, závislost momentové únosnosti na natočení výztuže se zmenšuje se zvyšujícím se počtem výztužných prutů a se zmenšujícím se stupněm vyztužení.



Obr. 14: Kruhový průřez s maximálním stupněm vyztužení.
Tyrkysová: uspořádání výztuže poloha A; tmavě modrá: poloha B (viz dále).
Vlevo: $d=300\text{mm}$, výztuž $4 \varnothing 30\text{mm}$, vpravo: $d=300\text{mm}$, výztuž $6 \varnothing 25\text{mm}$.

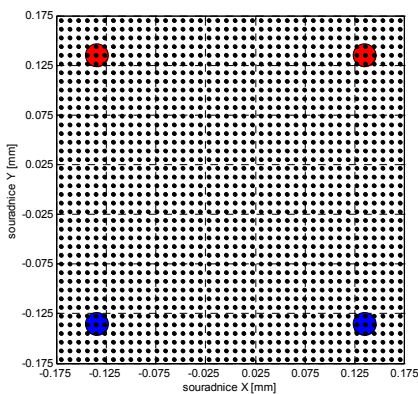


Obr. 15: Kruhový průřez s minimálním stupněm vyztužení.
Tyrkysová: uspořádání výztuže poloha A; tmavě modrá: poloha B; $d=300\text{mm}$, výztuž $4 \varnothing 8\text{mm}$.

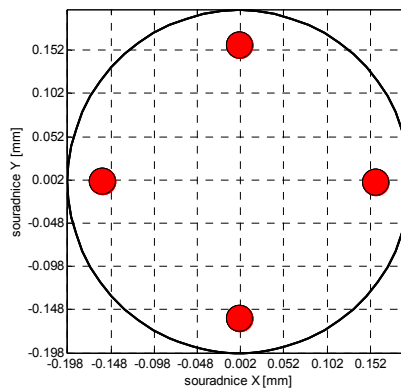
2.5.4 Porovnání ID kruhového a čtvercového průřezu se stejnou průřezovou plochou betonu

Pro porovnání ID kruhového a čtvercového průřezu se stejnou plochou betonu a stupněm vyztužení jsem pro výpočet ID čtvercového průřezu použil modifikovaný výpočet (oddělení betonové a ocelové části a zavedení krycí vrstvy).

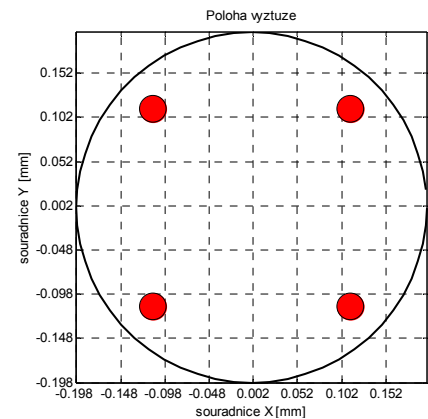
Zkoumal jsem čtvercový průřez 350 x 350mm s různými stupni vyztužení a kruhový průřez odpovídajícího průměru. Volil jsem uspořádání, kdy se nejvíce projeví rozdíly v poloze a nerovnoměrnosti výztuže – tj. 4 výztužné pruty namáhané v poloze „A“



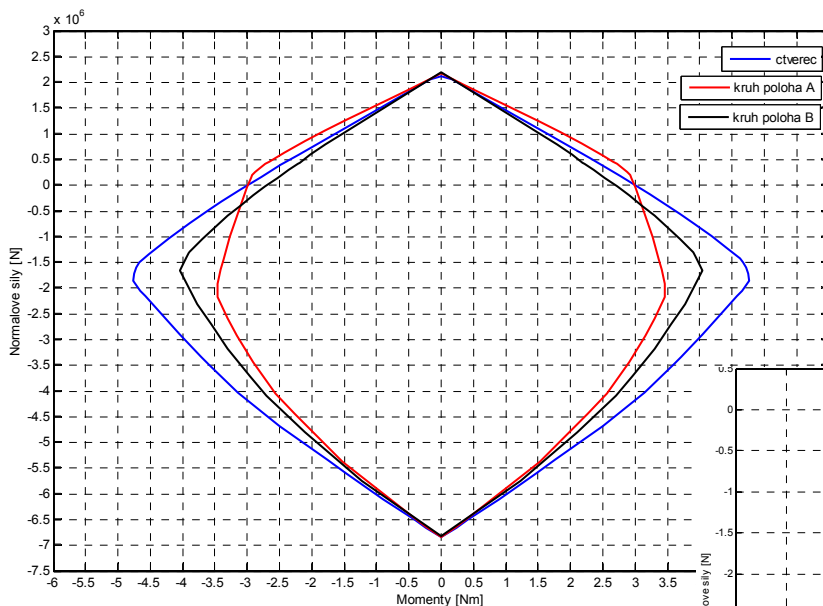
Obr. 16: Čtvercový průřez, 300x300, 4 Ø40mm.



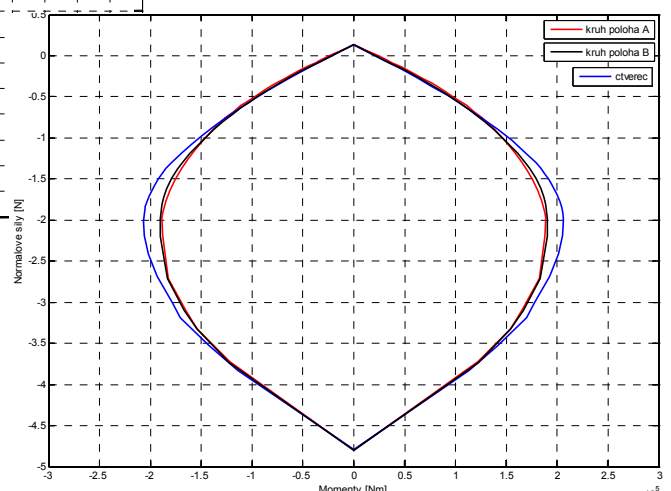
Obr. 17: Kruhový průřez, $A_c=90000\text{mm}^2$, 4 Ø40mm, POLOHA B.



Obr. 18: Kruhový průřez, $A_c=90000\text{mm}^2$, 4 Ø40mm, POLOHA A.



Obr. 19: Interakční diagramy pro případy z obr 17, 18, 19.



Obr. 20: ID pro minimální vyztužení (4 Ø10mm).

Závislost momentové únosnosti čtvercového a kruhového průřezu na stupni vyztužení

Vyztužení „min“ 4 \varnothing 10mm \rightarrow rozdíl v maximální momentové únosnosti 18%.

Vyztužení „střed“ 4 \varnothing 30mm \rightarrow rozdíl v maximální momentové únosnosti 24%.

Vyztužení „max“ 4 \varnothing 40mm \rightarrow rozdíl v maximální momentové únosnosti 26%.

Pokud je tedy potřeba navrhnout kruhový průřez, je možno použít ID pro čtvercový průřez s redukovanou momentovou únosností o 25%. Lze předpokládat, že v případě vyztužení více pruty by byla redukce momentové únosnosti menší.

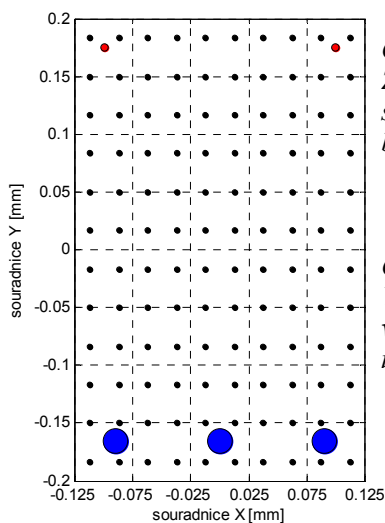
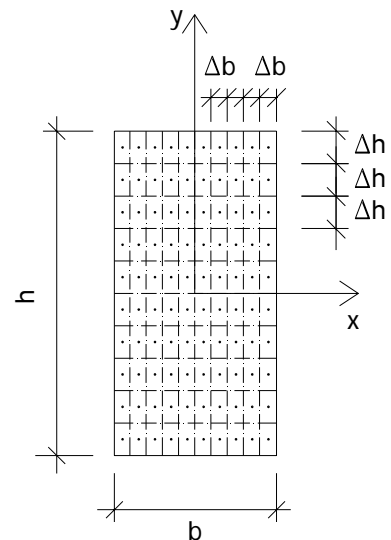
2.6 3D interakční diagram obdélníkového průřezu

Cílem bylo vytvořit jednoduché diagramy pro posuzování železobetonového obdélníkového průřezu na namáhání normálovou silou a dvěma ohybovými momenty (nebo jedním vyvolávajícím tzv. šikmý ohyb).

2.6.1 Výpočet

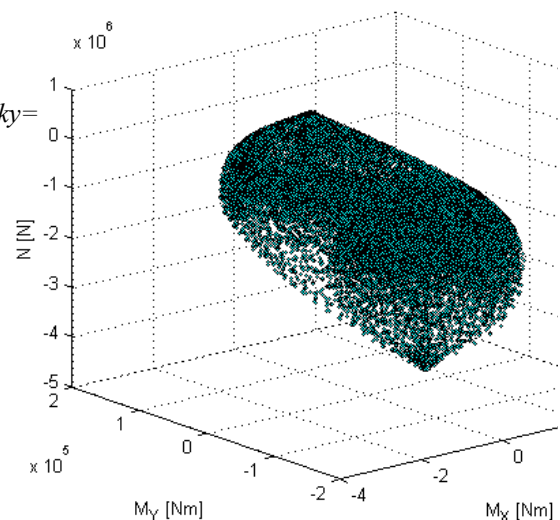
Princip je i zde obdobný; vzhledem k tomu, že průřez může být namáhán šikmým ohybem, bylo nutné jej rozdělit na segmenty ve směru obou os.

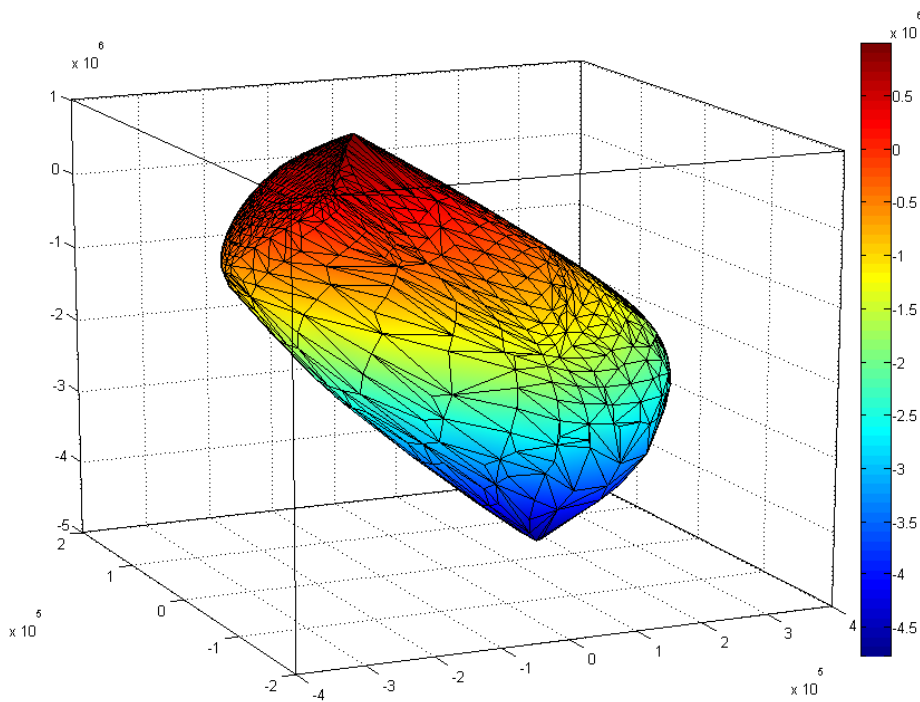
Výpočet je shodný s výpočtem 2.5.3 s tím rozdílem, že tentokrát je průřez zatěžován relativními deformacemi: relativním protažením střednice ε_s a křivostí ve směru obou hlavních os průřezu κ_x a κ_y ve třech v sobě vnořených cyklech. Pro dosažení dobré přesnosti je nezbytné vypočítat velké množství bodů v prostoru M_x , M_y , N , z nichž jenom malá část bude skutečně ležet na obálce ID. Při výpočtu jsem používal dělení intervalu $\langle \kappa_{x_min}; \kappa_{x_max} \rangle$ na 30 hodnot, κ_y na 30 hodnot a ε_s na 60 hodnot.



Obr. 21 (vlevo):
Zadání průřezu: černé tečky =
souradnice bodů matice
betonového průřezu.

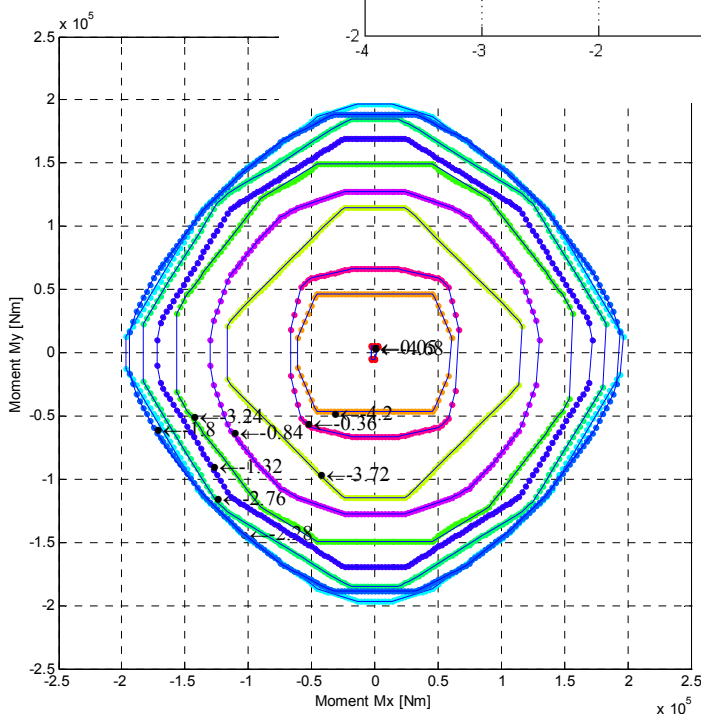
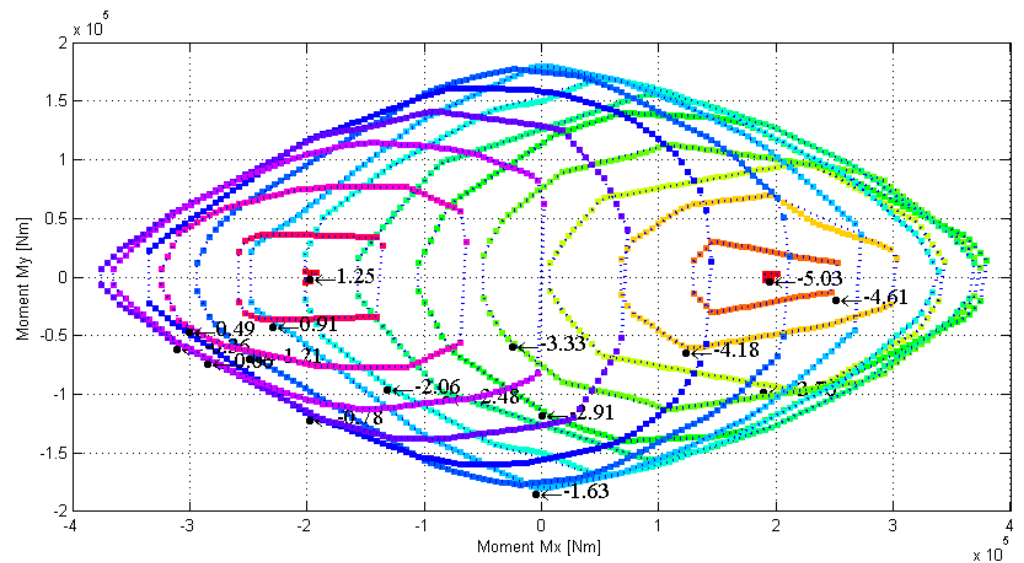
Obr. 22 (vpravo):
Všechny body $[M_x, M_y, N]$
vypočtené při zatěžování
průřezu.





Obr. 23: Aplikace funkce „convhulln“ → získání bodů ležících na povrchu ID

2.6.2 Porovnání ID v závislosti na stupni a poměru vyztužení



Obr. 24: 2D vrstevnice. Popisky u šipek představují hodnotu velikosti normálové síly a jsou v MN. Graf pro asym. průřez $b=0,25m$, $h=0,4m$, spodní výztuž 3 $\varnothing 25mm$, horní 2 $\varnothing 8mm$

Obr. 25: $b=0,35m$, $h=0,35m$
spodní výztuž 2 $\varnothing 8mm$, horní 2 $\varnothing 8mm$

3. Aplikace teorie 2. řádu na tlačенý železobetonový prvek s uvážením nelineárního chování betonu

Cílem druhé části této práce je porovnání třech různých způsobů výpočtu uvedených v EC2.

První způsob je v normě označen jako „obecný“. Jedná se, jak název napovídá, o čistě teoretický výpočet podle teorie 2. řádu. Norma nedává žádný návod, jak postupovat, jen přikazuje, jaké pracovní diagramy a součinitele použít.

Druhý způsob je označen jako „metoda založená na jmenovité tuhosti“, třetí: „metoda založená na jmenovité křivosti“; na rozdíl od obecného postupu, teoretický základ těchto teorií v normě uveden není.

3.1.1 Způsob porušení prvku v závislosti na jeho štíhlosti

Dle EC2 je štíhlost definovaná: $\lambda = l_0 / i$,

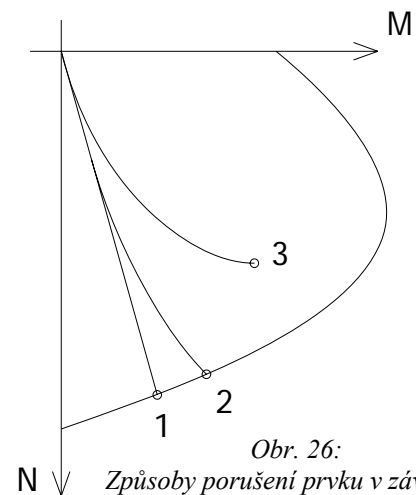
kde l_0 je vzpěrná délka

i je poloměr setrvačnosti betonového průřezu neporušeného trhlinami.

Takto definovaná štíhlost tedy nezávisí na stupni vyztužení

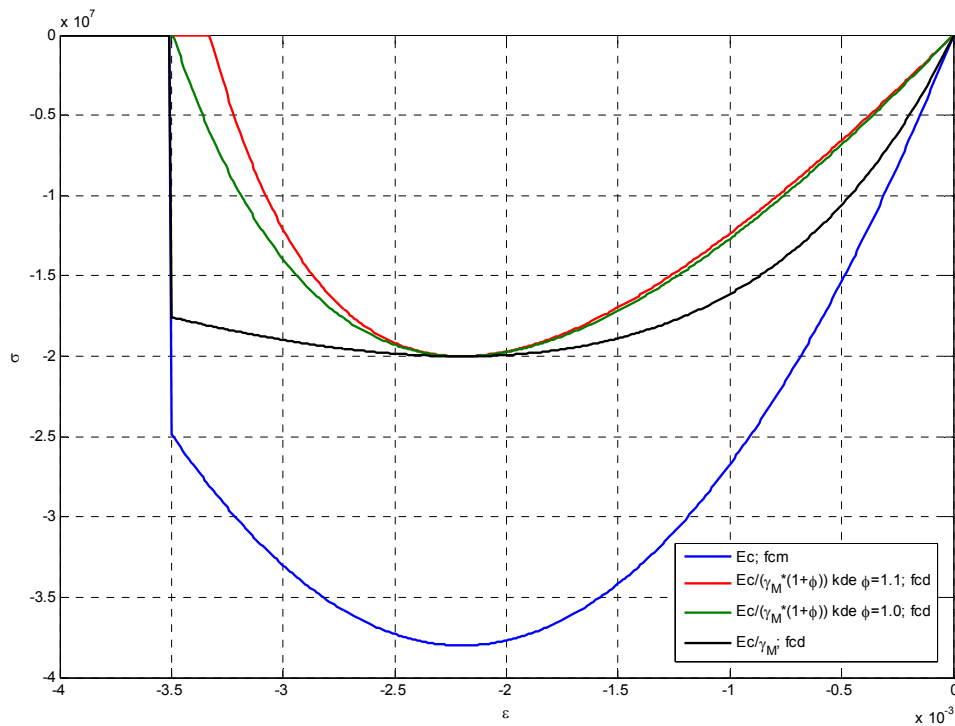
Způsoby porušení tlačенých prvků se dají rozdělit do 3 skupin.

- 1) Tento způsob odpovídá masivním prvkům s malou štíhlostí. K dosažení meze únosnosti dojde k okamžiku, kdy z počátku vedená polopřímka protne interakční diagram průřezu. Závislost mezi normálovou silou a momentem je lineární ($M=N \cdot e$).
- 2) Způsob porušení středně štíhlých prvků; závislost mezi normálovou silou a momentem je mírně nelineární. Porušení podobné jako (1), jen síla potřebná ke kolapsu je menší.
- 3) Kolaps typický pro velmi štíhlé prvky. K porušení dojde „uvnitř“ ID postupným zvyšováním momentu 2. řádu vedoucího až ke ztrátě stability tvaru tlačенého prvku.



3.2 Specifika výpočtu podle 2. řádu daná normou

- Při výpočtu podle 2. řádu se musí upravit vztah pro výpočet pracovního diagramu betonu:
 - modul pružnosti betonu vydělením součinitelem spolehlivosti materiálu $\gamma_{CE}=1.2$.
 - průměrná hodnota válcové pevnosti betonu v tlaku f_{cm} nahrazena návrhovou pevností f_{cd} .
- Norma také stanovuje 2 možnosti, kdy je možné od výpočtu dle 2.řádu upustit:
 - štíhlost prvku je menší, než λ_{lim} - účinky 1. a 2. řádu se neliší o více jak 10%
- Vliv dotvarování může být zanedbán, pokud jsou splněny následující podmínky:
 - efektivní součinitel dotvarování $\varphi_{eff} \leq 2$, štíhlost $\lambda \leq 75$
 - $M_{0Ed}/N_{Ed} \geq h$, kde M_{0Ed} = moment od 1. řádu, N_{Ed} = návrhová normálová síla, h = rozměr průřezu odpovídající směru namáhání.



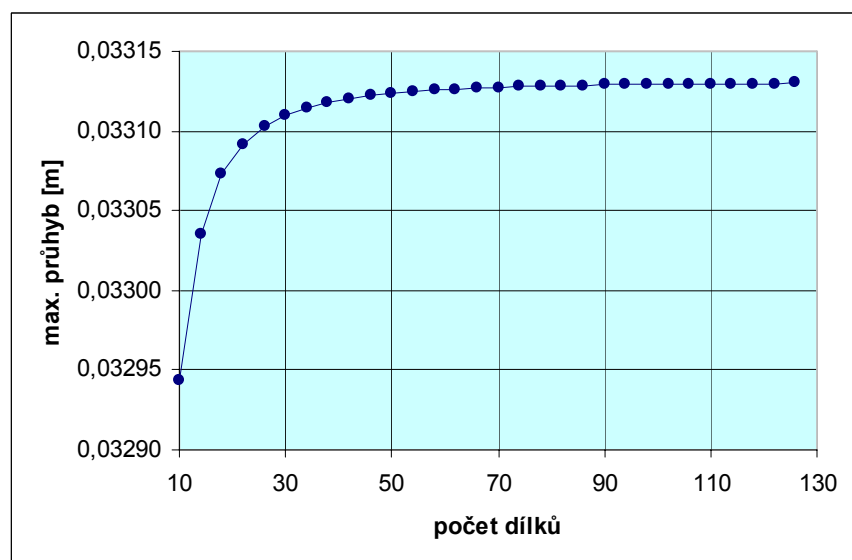
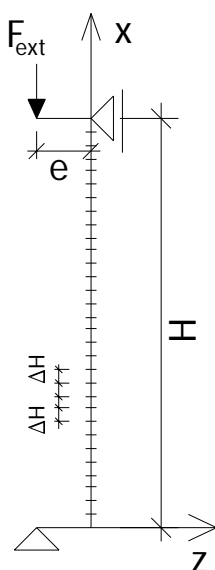
Obr. 27: Pracovní diagramy betonu:

- 1) nelineární model s průměrnou pevností betonu v tlaku
- 2) nelineární model s modulem pružnosti vyděleným součinitelem spolehlivosti materiálu γ_M a s návrhovou pevností betonu v tlaku,
- 3) + 4) nelineární model se zohledněným vlivem dotvarování a s návrhovou pevností betonu v tlaku

3.2.1 Geometrie konstrukce

Výpočty jsem prováděl na jednoduché, staticky určité konstrukci – prostém, kloubově podepřeném nosníku. Nosník je zatížen silou působící rovnoběžně se střednicí prutu na rameni o velikosti e . Minimální hodnota tohoto ramena je dána normou, a sice jako součet geometrické imperfekce prutu (závisí na délce prvku a počtu svislých prvků) a imperfekce silového působení (větší z hodnot 20mm nebo $h/30$, kde h ...výška průřezu; samozřejmě síla může působit i na rameni větším).

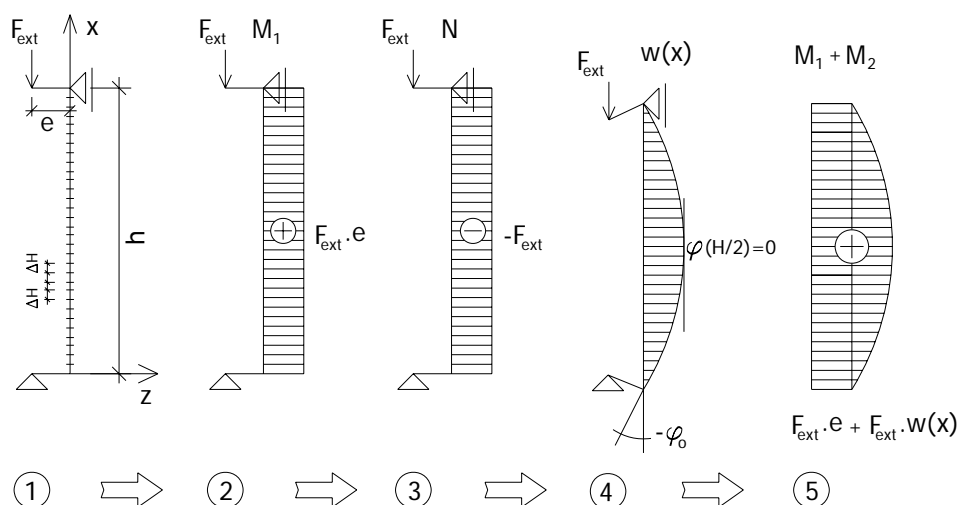
Prut je po výšce rozdělen na elementy výšky ΔH . Počet prvků jsem stanovil hodnotou 70; při vyšším počtu již není významný vzrůst přesnosti.



Obr. 28 (vlevo): Geometrie zkoumané konstrukce.

Obr. 29 (vpravo): Vliv počtu prvků ΔH na přesnost výpočtu.

3.2.2 Postup výpočtu

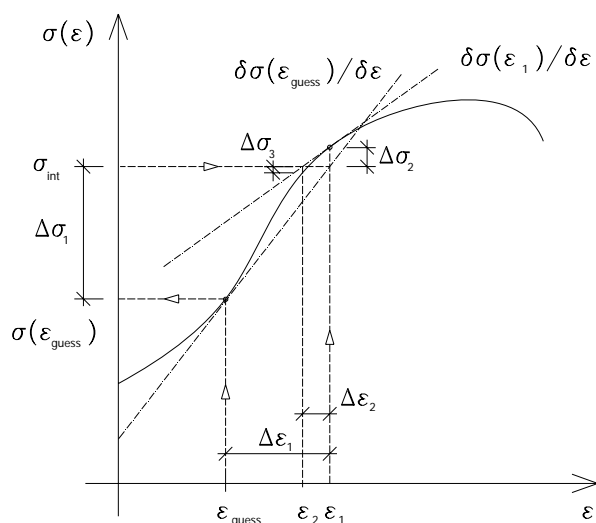


Obr. 30: (1) Geometrie konstrukce; (2), (3) vnitřní síly 1. řádu (4) zdeformovaná konstrukce – vynesení průběhu průřezu w , patrná je geometrická okrajová podmínka shodnosti pootočení na obou koncích prutu. (5) Momenty vypočtené na zdeformované konstrukci $M_{tot} = M_1 + M_2$; $M_1 = F_{ext} \cdot e$; $M_2(x) = F_{ext} \cdot w(x)$. Výpočet se pak opakuje, vypočítají se deformace od momentu M_{tot} , z nich zvětšené deformace atd... Výpočet končí, když se dvě po sobě jdoucí hodnoty maximálního momentu od sebe neliší o stanovenou přesnost.

3.2.3 Výpočet deformací z vnitřních sil

Na rozdíl od výpočtu vnitřních sil z relativních deformací κ a ε_s není možné stejně jednoduchým způsobem řešit úlohu opačným způsobem (materiálová nelinearita). K tomuto účelu se hodí jedna z iteračních metod: Eulerova, modifikovaná/plná Newton-Raphsonova a metoda BFGS.

Ve výpočtu jsem uplatnil plnou metodu Newton-Raphsonovu, která je sice nejvíce výpočetně náročná, nicméně je s ní dosahováno nejvyšší přesnosti v nejméně krocích. Postup iterativního řešení je zřejmý z obr. 31.



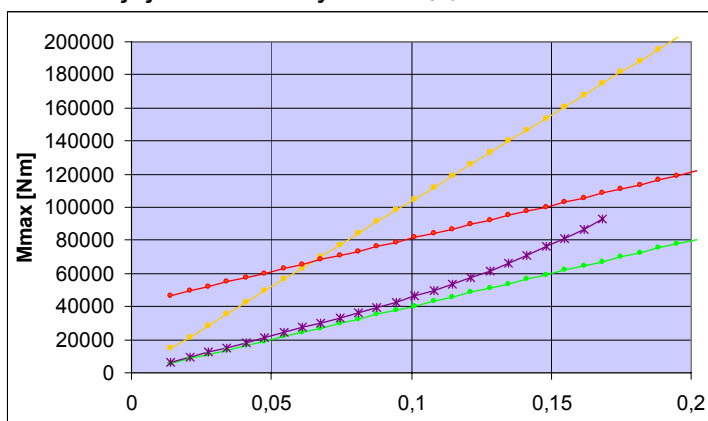
Obr. 31

σ_{int} představuje hodnotu, ke které hledáme odpovídající hodnotu ε . Výpočet začíná volbou hodnoty ε_{guess} , která je v blízkosti předpokládaného řešení. Z hodnoty ε_{guess} se přímo vypočítá hodnota $\sigma(\varepsilon_{guess})$, rozdíl $\Delta\sigma = \sigma_{int} - \sigma(\varepsilon_{guess})$ a derivace $d\sigma(\varepsilon_{guess})/d\varepsilon$. Z rovnice $\Delta\varepsilon \cdot d\sigma(\varepsilon_{guess})/d\varepsilon = \Delta\sigma$ se vypočítá $\Delta\varepsilon$, které se přičte k ε_{guess} a celý výpočetní cyklus se opakuje pro novou hodnotu relativní deformace. Výpočet končí při dosažení požadované přesnosti (malé hodnoty $\Delta\varepsilon$).

3.3 Odlišnosti návrhových hodnot při výpočtu dle teorie 1. řádu, 2. řádu s uvážením dotvarování a normy

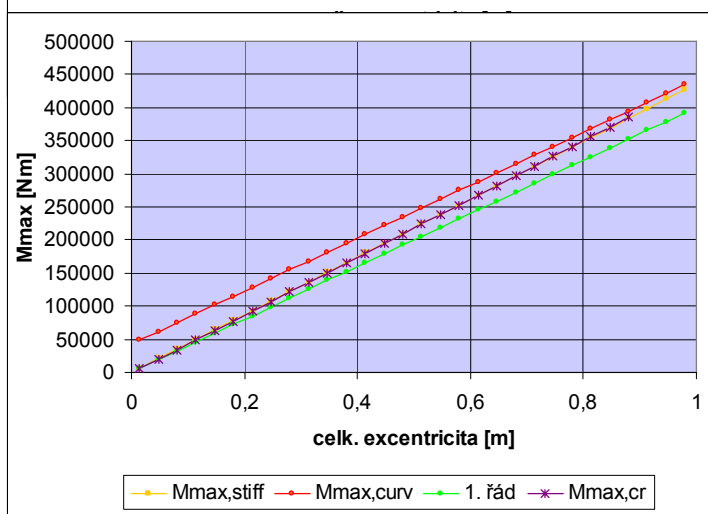
A) Závislost návrhového momentu na excentricitě působící síly a stupni vyztužení průřezu

Při tomto výpočtu byl kloubově podepřený prvek zatěžován konstantní silou se zvětšující se excentricitou až do svého porušení. Jak se dalo očekávat, výpočet obecnou metodou (obrázky 35-42) leží v intervalu omezeném shora konzervativními postupy danými normou – metodou jmenovité křivosti a metodou jmenovité tuhosti. Spodní hranici tohoto intervalu tvoří řešení se zanedbanými účinky 2. řádu, kdy návrhový moment je součinem působící síly a její excentricity. $M_1 = F_{ext} \cdot e$



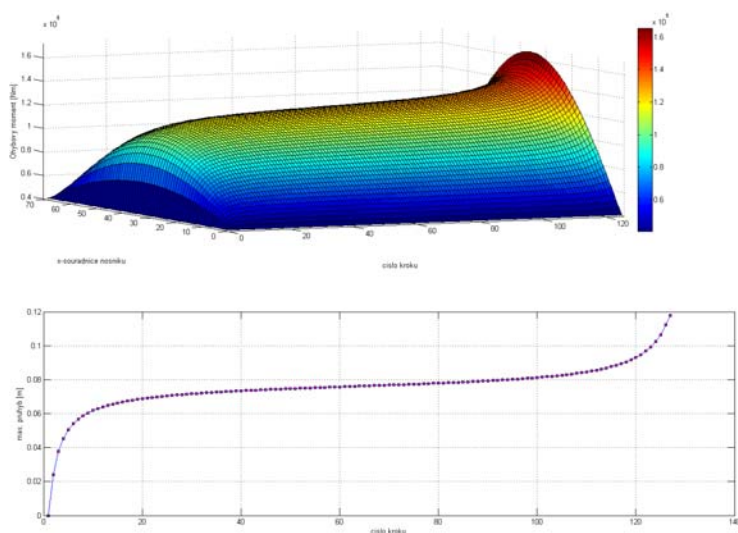
Obr. 32: $b=0.4m$; $h=0.4m$; $H=8m$, $\rho=0.2\%$; $F=400kN$

Při malém stupni vyztužení je velký rozdíl mezi použitými postupy výpočtu. Pro malé excentricity se výpočet blíží teorii 1. řádu, pro větší teorii jmenovité křivosti.



Obr. 33: $b=0.4m$; $h=0.4m$; $H=8m$, $\rho=3\%$; $F=400kN$

Pro velký stupeň vyztužení již nejsou velké rozdíly v užitém způsobu výpočtu. Křivka 2. řádu a metody jmenovité tuhosti mají téměř identický průběh.

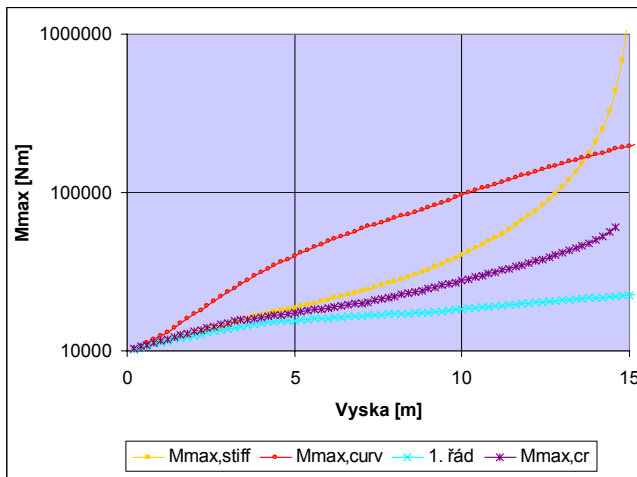


Obr. 34:

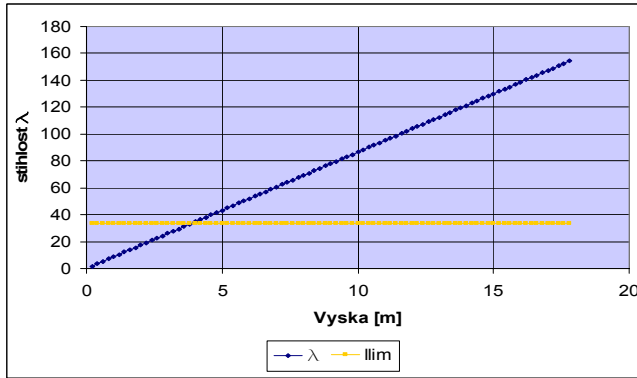
Horní část: graf závislosti dimenzačního momentu (svislá osa) na souřadnici po výšce nosníku a čísle iterace ve výpočtu dle 2. řádu.

Ve spodní části závislost maximálního průhybu téhož nosníku na čísle kroku výpočtu. Tento nosník zkolaboval při 127. kroku, kdy průřez uprostřed nosníku nebyl schopen přenést zatížení.

B) Závislost návrhového momentu na délce prvku

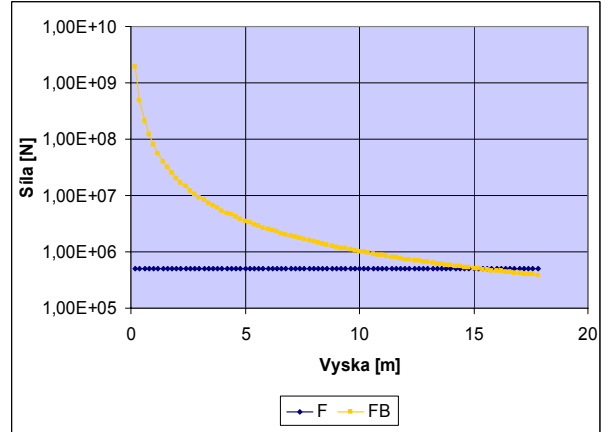


Obr. 35: $b=0.4m$; $h=0.4m$; $H=var$, $\rho=0.8\%$; $F=500kN$



Za povšimnutí při tomto výpočtu stojí závislost metody jmenovité tuhosti na výšce prvku. V tomto případě při výšce 15ti metrů se rovná velikost působícího a kritického břemene; řešení se limitně blíží k nekonečnu.

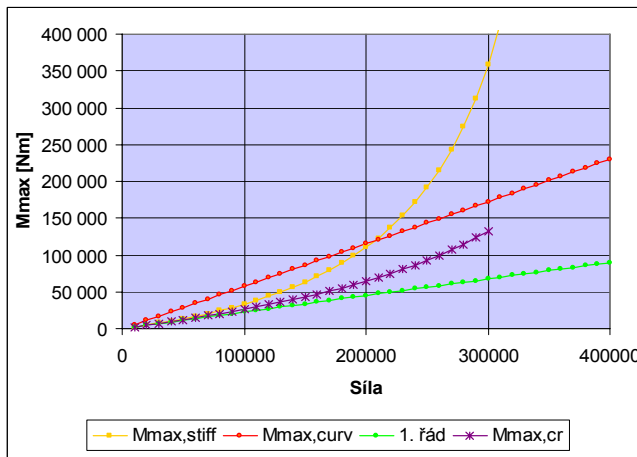
Pozn: křivka $M1$ není konstantní, protože minimální excentricita daná normou se zvětšuje s rostoucí výškou.



Obr. 36: Graf závislosti velikosti kritického břemene (FB) a působící síly (F) na výšce prvku.

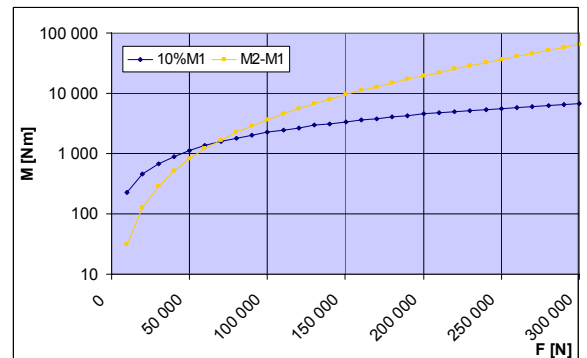
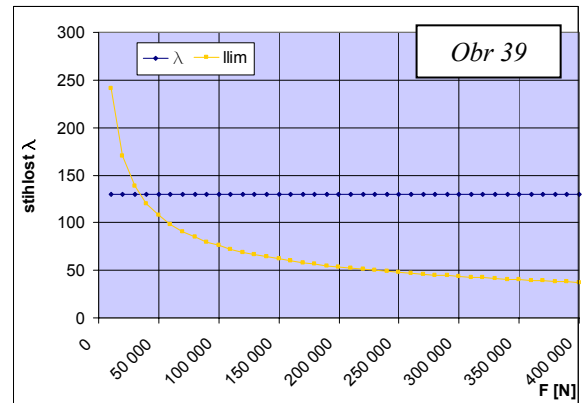
Obr. 37: Graf závislosti štíhlosti a vymezení štíhlosti na výšce prvku povinnost provádět výpočet s uvažováním vlivu 2. řádu od cca 4 metrů. Při této výšce se „odděluje“ křivka $M1$ od $M2$ (viz obr. 35).

C) Závislost návrhového momentu na velikosti návrhové síly



Obr. 38: $b=0.4m$; $h=0.4m$; $H=15m$, $\rho=0.8\%$; $F=var$

Na obrázcích 39 a 40 jsou srovnána 2 vymezení kritéria, kdy lze opustit od výpočtu podle teorie 2. řádu. Je patrné, že kritérium vymezení štíhlosti je mnohem více konzervativní (výpočet podle 2. řádu je nutné aplikovat již při menší síle nebo menší výšce prvku). Oproti druhému kritériu (10% rozdíl mezi M_1 a M_2) ho lze ale aplikovat přímo.



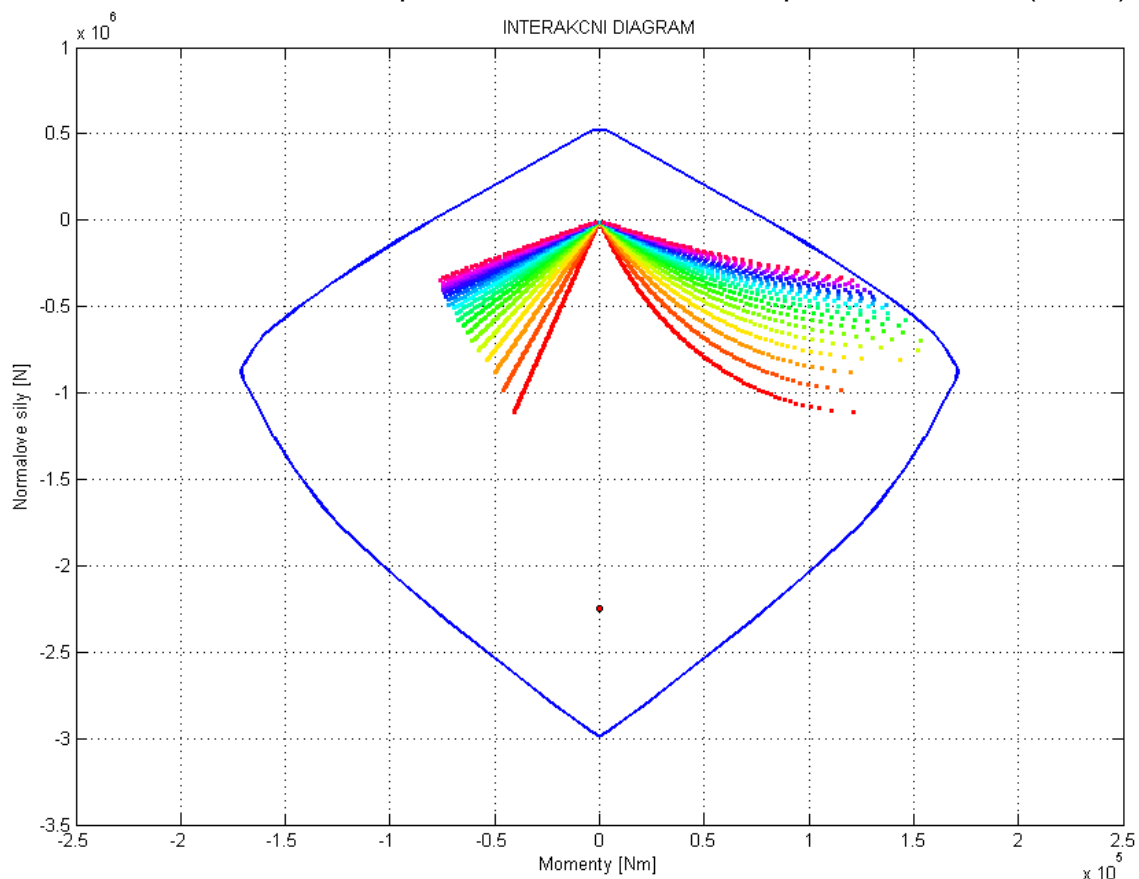
Obr. 40

3.4 Upravený ID pro výpočet dle teorie 2. řádu

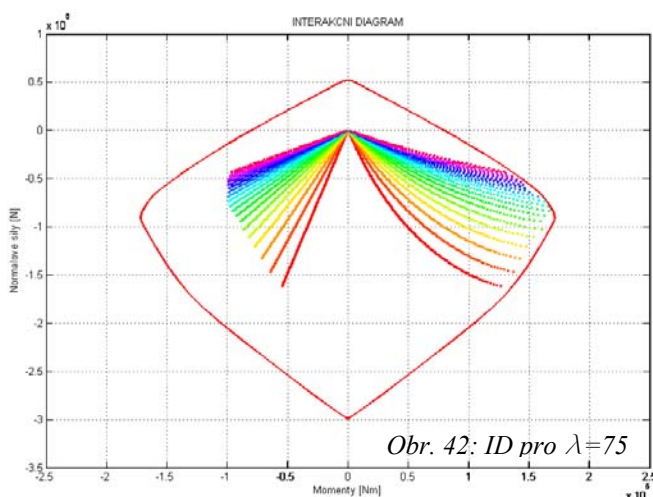
Cílem bylo propojit výsledky 1. a 2. části – tedy vytvořit modifikovaný interakční diagram, který by při znalosti předpokládané návrhové síly a její excentricity sloužil k rychlému posouzení únosnosti tláčeného železobetonového prvku daného průřezu, stupně vyztužení a výšky.

Zvolil jsem sloup průřezu 350 x 350mm, výztuž 4 \varnothing 20mm, výška 7.5m, 10m a 15m.

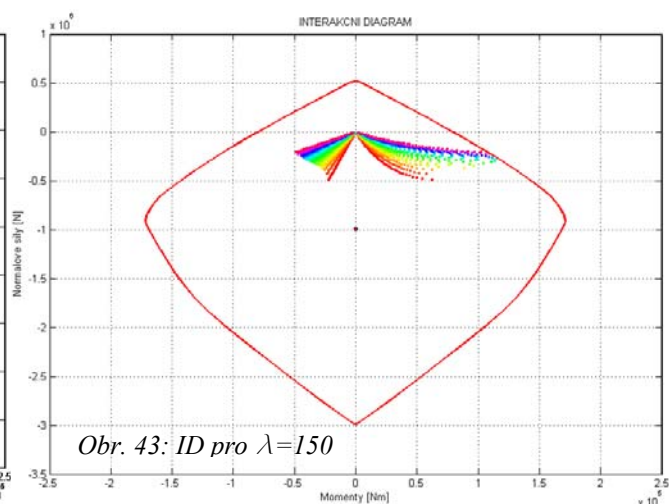
Tomu odpovídají hodnoty štíhlosti přibližně 75, 100 a 150. Ve výpočtu byl uvažován vliv dotvarování, a to úpravou sečnového modulu pružnosti $E_{cd}=E_c/(1.2+2)$.



Obr. 41: Interakční diagram pro nejvíce exponovaný průřez a štíhlost prutu $\lambda=100$. Pravá část grafu odpovídá zatěžovacím křivkám vypočítaným dle teorie 2. řádu. K přerušení zatěžování (krokovému zvětšování normálové síly) dojde v okamžiku protnutí obálky ID, kdy je dosaženo mezní únosnosti průřezu. Každé 2 sousední křivky se od sebe liší zvětšenou excentricitou o malý přírůstek. Levá část diagramu slouží pro rychlé posouzení prvku na účinky 2. řádu bez výpočtu. Jedná se o polopřímky s rovnicí $M=N \cdot e$, kde e je excentricita a N je normálová síla. Maximální normálová síla je stejná jako N_{Max} v pravé části grafu u křivky příslušné excentricity. Bodem je označeno kritické břemeno.

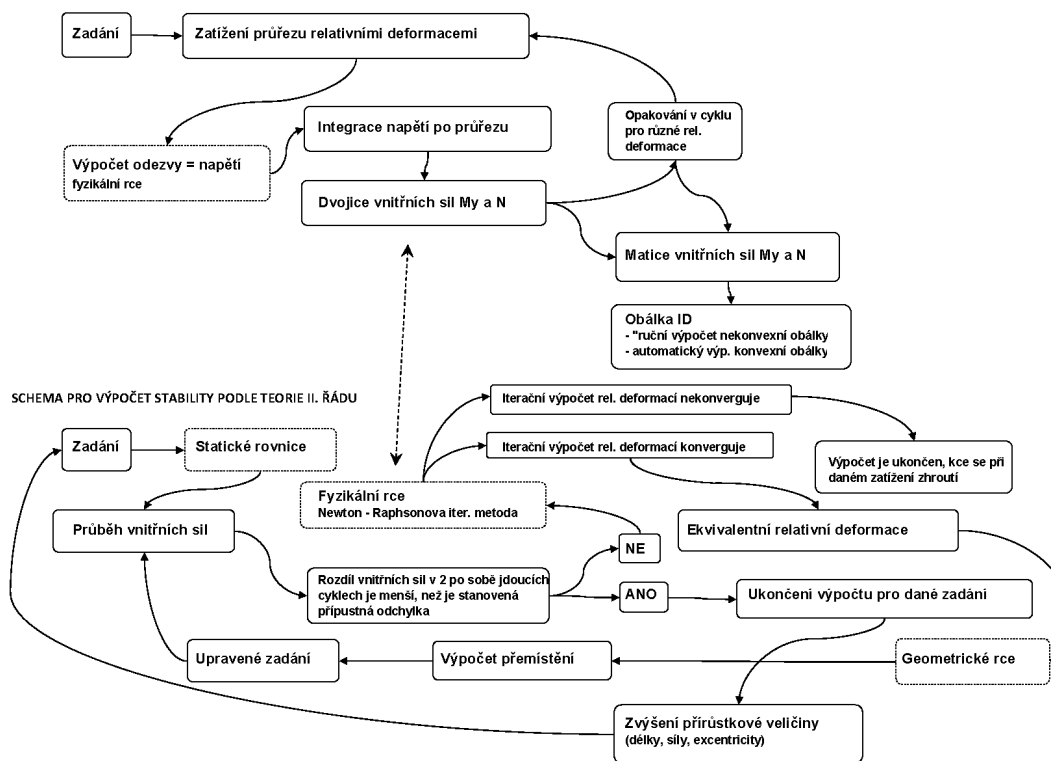


Obr. 42: ID pro $\lambda=75$



Obr. 43: ID pro $\lambda=150$

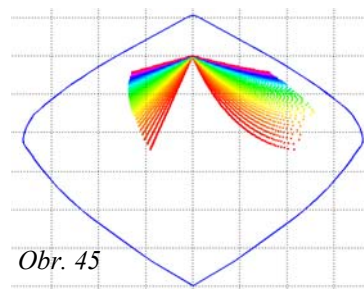
SCHEMA PRO VÝPOČET INTERAKČNÍHO DIAGRAMU



Obr. 44: Globální schéma výpočtu

4. Závěr

Předmětů dalšího zkoumání je mnoho. V první řadě bych uvedl zpřesnění výpočtu relativních deformací z vnitřních sil /část 3.2.3/. Užitím plné Newton-Raphsonovy iterační metody je sice dosaženo výsledku velmi rychle – řádově v 10-15 krocích s přesností 10^{-6} , nicméně jen pro body neležící v blízkosti hraniční obálky ID. Ještě horších výsledků je dosahováno u modelu betonu bez uvážení dotvarování, kde výpočet nekonverguje v celém prstenci (viz obr 45).



Obr. 45

Druhým cílem by mohl být výpočet interakčního diagramu při uvážení všech kombinací namáhání, tzn. i s uvážením smyku a kroucení průřezu. Výpočet ID pro další tvary průřezu je myslím zbytečný, jediná změna oproti stávajícímu výpočtu by byla v modifikaci matice průřezu.

Třetím a posledním cílem je zrychlit a optimalizovat všechny výpočty. Pro představu uvádím časovou náročnost výpočtů použitých v této práci.

Výpočet 2rozměrného ID	podle metody a přesnosti dělení průřezu 10s až 30s
Matematický popis obálky ID	1 min
Výpočet 3D ID	1-2 min
Výpočet stability tlačeného prvku pro jednu kombinaci zatížení	30s - 5min
Modifikovaný ID (obr 41-43)	12hod.

Literatura:

- ČSN EN 1992-1-1 Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby (Český normalizační institut, 2006)
- Procházka a kol.: Navrhování betonových konstrukcí 1. Prvky z prostého a železového betonu. (Česká betonářská společnost, 2005)
- Jirásek, M. Zeman, J.: Přetváření a porušování materiálů. (skriptum FSv ČVUT, 2006)