

Práce pro soutěž o Cenu akademika Bažanta

Téma: Analýza LL modelu (Ladeveze-Lemaitre) pro deaktivaci poškození (ne Konzistence při přechodu středního napětí přes nulu – opačný účinek, než by se dalo čekat)

Odborné vedení: prof. Ing. Milan Jirásek DrSc.
Vypracoval: Vladimír Vančík

Obsah:

1. Model izotropního poškození	3
2. Stanovení mezí pevnosti v jednoosém tahu/tlaku	4
3. Deaktivace poškození a střední napětí	5
4. Zatěžovací zkoušky	6
5. Analýza vlastních čísel	9
6. Závěr	13

1. Model izotropního poškození

Model izotropního poškození zavádí do standardního Hookeova zákona veličinu ω , tzv poškození, která simuluje vliv porušení struktury(vzniku trhlin) při zatěžování na pevnost materiálu. Základní rovnice mají potom tuto podobu:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{E(1-\omega)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E(1-\omega)} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Poškození závisí na Mazarsově deformaci $\tilde{\varepsilon}$.

$$\omega = f(\tilde{\varepsilon})$$

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2}$$

$\langle \varepsilon_i \rangle$ Kladná část hlavní deformace

Při odtěžování zůstává hodnota poškození konstantní a při případném dalším zatěžování navazuje růst poškození v bodě, kde předtím skončil. Pokud poškození dosáhne své maximální hodnoty, dochází k trhání resp. drcení materiálu.

- $\omega_{\min} = 0$ nepoškozený materiál
- $\omega_{\max} = 1$ trhání/drcení \Rightarrow úplné porušení

Do určité meze se materiál chová lineárně pružně, poškození narůstá až po dosažení hodnoty $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_l$. Tato konstanta závisí na vlastnostech materiálu. Závislost vznikajícího poškození stanovíme pro jednoduchost lineární.

$$\tilde{\varepsilon} \in \langle 0, \tilde{\varepsilon}_l \rangle \Rightarrow \omega(\tilde{\varepsilon}) = 0$$

$$\tilde{\varepsilon} \in \langle \tilde{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_k \rangle \Rightarrow \omega(\tilde{\varepsilon}) = k(\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}_l)$$

$$\omega(\tilde{\varepsilon}_k) = 1 \Rightarrow k(\tilde{\varepsilon}_k - \tilde{\varepsilon}_l) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_k - \tilde{\varepsilon}_l}$$

Dále je třeba stanovit hodnoty materiálových konstant pro materiál, na kterém budeme zkoumat chování modelu v různých zatěžovacích stavech.

$$\nu = 0,2 \quad E = 20GPa \quad \tilde{\varepsilon}_l = 10^{-4} \quad \tilde{\varepsilon}_k = 8 \times 10^{-3}$$

$$k = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_k - \tilde{\varepsilon}_l} = \frac{1}{79} \times 10^4$$

$$\omega(\tilde{\varepsilon}) = \frac{10^4}{79} \times (\tilde{\varepsilon} - 10^{-4})$$

2. Stanovení mezí pevnosti v jednoosém tahu/tlaku

Pro daný materiál stanovíme meze pevnosti v jednoosém tahu a tlaku.

$$\sigma_x = \left(1 - \omega(\tilde{\varepsilon})\right) \times \frac{E}{(1 - 2\nu) \times (1 + \nu)} \times \left((1 - \nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z\right)$$

$$\text{jednoosý tahu} \Rightarrow \varepsilon_x > 0, \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \Rightarrow \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_x, \omega(\tilde{\varepsilon}) = \omega(\varepsilon_x)$$

$$\sigma_x = \left(1 - \omega(\varepsilon_x)\right) \times \frac{E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} (1 - \nu - 2\nu^2)\varepsilon_x$$

$$\sigma_x = E \times \left(1 - \omega(\varepsilon_x)\right) \times \varepsilon_x$$

$$\frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x} = E \times \left(\left(1 - \omega(\varepsilon_x)\right) - \omega'(\varepsilon_x)\varepsilon_x\right)$$

$$\text{stanovujeme mez pevnosti v tahu} \Rightarrow \text{maximum} \Rightarrow \frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x} = 0$$

$$1 - \omega(\varepsilon_x) - \omega'(\varepsilon_x)\varepsilon_x = 0$$

$$1 - k\varepsilon_x + k\varepsilon_l - k\varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1 + k\varepsilon_l}{2k} = 4 \times 10^{-3}$$

$$\text{mez pevnosti } \sigma_{x_{\max}} \approx 40,5 \text{ MPa}$$

$$\omega \approx 0,494$$

$$\sigma_x = \left(1 - \omega(\tilde{\varepsilon})\right) \times \frac{E}{(1 - 2\nu) \times (1 + \nu)} \times \left((1 - \nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z\right)$$

$$\text{jednoosý tlak} \Rightarrow \varepsilon_x < 0, \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x, \tilde{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{2\nu^2\varepsilon_x^2}$$

$$E \times \left(\left(1 - \omega(\varepsilon_x)\right) - \omega'(\varepsilon_x)\varepsilon_x\right) = 0$$

$$1 - k\sqrt{2}\nu\varepsilon_x + k\varepsilon_l - k\sqrt{2}\nu\varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1 + k\varepsilon_l}{2k\sqrt{2}\nu} \approx 0,0141$$

$$\text{mez pevnosti } \sigma_{x_{\min}} \approx 142,7 \text{ MPa}$$

Zjišťujeme, že mez pevnosti v tlaku pro materiál s poškozením, je přibližně 3,5x větší (koeficient $\frac{1}{\sqrt{2}\nu}$), než jeho mez pevnosti v tahu. Stejný poměr platí rovněž pro mez úměrnosti daného materiálu.

3. Deaktivace poškození a střední napětí

LL model (autoři: Ladevèze a Lemaitre) popisuje deaktivaci poškození (zavírání trhlin) pomocí hlavního a středního napětí. Proto je třeba vyjádřit jednotlivé deformace pouze pomocí těchto veličin.

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \times (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

σ_m ... střední napětí $\sigma_{1,2,3}$... hlavní napětí

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E(1-\nu)} (\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E(1-\nu)} \left(\sigma_1 - 3\nu \times \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \nu\sigma_1 \right)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E(1-\nu)} ((1+\nu)\sigma_1 - 3\nu\sigma_m)$$

Stejným způsobem dostaneme rovnice všech deformací

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E(1-\nu)} \sigma_1 - \frac{3\nu}{E(1-\nu)} \sigma_m$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E(1-\nu)} \sigma_2 - \frac{3\nu}{E(1-\nu)} \sigma_m$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E(1-\nu)} \sigma_3 - \frac{3\nu}{E(1-\nu)} \sigma_m$$

Pokud je hlavní, resp. střední napětí kladné, vliv poškození přetrvává. Když je záporné, zavírají se trhliny a poškození se vypíná. Po vypnutí zůstává hodnota poškození stále stejná, ale nemá vliv na danou fázi zatěžování. Poškození se opět zapne v případě, že příslušné napětí znovu přejde do kladných hodnot.

$$\sigma_m > 0, \sigma_i > 0 \Rightarrow \varepsilon_i = \frac{1+\nu}{E(1-\nu)} \sigma_i - \frac{3\nu}{E(1-\nu)} \sigma_m$$

$$\sigma_m > 0, \sigma_i < 0 \Rightarrow \varepsilon_i = \frac{1+\nu}{E} \sigma_i - \frac{3\nu}{E(1-\nu)} \sigma_m$$

$$\sigma_m < 0, \sigma_i > 0 \Rightarrow \varepsilon_i = \frac{1+\nu}{E(1-\nu)} \sigma_i - \frac{3\nu}{E} \sigma_m$$

$$\sigma_m < 0, \sigma_i < 0 \Rightarrow \varepsilon_i = \frac{1+\nu}{E} \sigma_i - \frac{3\nu}{E} \sigma_m$$

Jak je vidět, v případě, že jsou obě napětí záporná, je poškození zcela vypnuté. Materiál se tedy chová jako nepoškozený.

Při jednoosém tahu/tlaku dochází k přechodu středního a hlavního napětí přes nulu zároveň. V pracovním diagramu potom nevznikají žádné zvláštnosti, ani při poškození blížícím se jedné. Jednoosý tah/tlak s velkým poškozením znázorníme na jednoduchém příkladu.

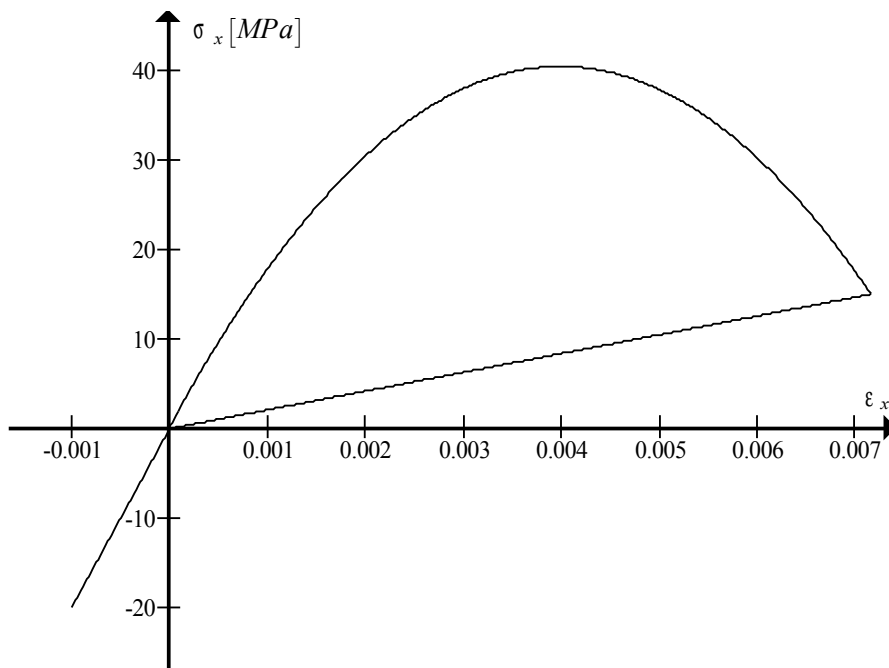
Příklad:

$$\sigma_x = 15 \text{ MPa} \text{ překračujeme mez pevnosti} \Rightarrow \varepsilon_x = 7,17 \times 10^{-3} \quad \omega = 0,895$$

Odtěžování:

$$\sigma_x \in \langle 0, 15 \rangle; \varepsilon_x = \frac{1}{E(1-\omega)} \left((1+\nu)\sigma_x - 3\nu\sigma_m \right) \quad \text{poškození je zapnuté u obou členů}$$

$$\sigma_x \in \langle -20, 0 \rangle; \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left((1+\nu)\sigma_x - 3\nu\sigma_m \right) \quad \text{poškození je vypnuté u obou členů}$$



4. Zatěžovací zkoušky

Nyní budeme provádět různé dvojosé zatěžovací zkoušky za použití LL modelu pro deaktivaci poškození. To nám umožní zjistit, jak se model chová v různých situacích. Především se zaměříme na to, jestli se s postupným vypínáním poškození zvyšuje tuhost materiálu.

Pro zatěžovací zkoušky předpokládáme, že všechna smyková napětí jsou nulová. Normálová napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ jsou tedy zároveň hlavní napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$\sigma_x = 5 \text{ MPa}, \sigma_y = 0, \sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E(1 - \omega(\varepsilon_x))} \sigma_x$$

$$\varepsilon_x (1 - \omega(\varepsilon_x)) - \frac{\sigma_x}{E} = 0$$

$$-k\varepsilon_x^2 + (k\varepsilon_l + 1)\varepsilon_x - \frac{\sigma_x}{E} = 0 \Rightarrow \varepsilon_x = 2,55 \times 10^{-4}, \varepsilon_z = -0,51 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_x = 5 \text{ MPa}, \sigma_y = 0, \sigma_z = 15 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E(1 - \omega(\tilde{\varepsilon}))} (\sigma_x - \nu \sigma_z)$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \frac{1}{7} \Rightarrow \tilde{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_x^2 + (7\varepsilon_x)^2} = \sqrt{50} \times \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E(1 - \omega(\tilde{\varepsilon}))} (\sigma_z - \nu \sigma_x)$$

$$\omega(\tilde{\varepsilon}) = k(\sqrt{50} \varepsilon_x - 10^{-4})$$

Vynásobíme $(1 - \omega)$ a převedeme na jednu stranu

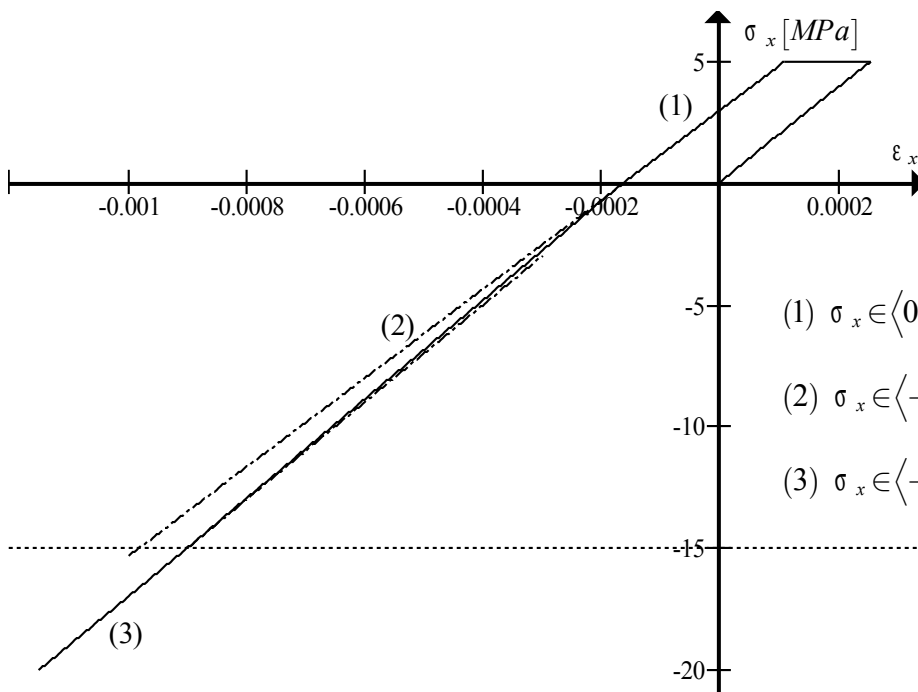
$$\varepsilon_x - \varepsilon_x \omega(\tilde{\varepsilon}) - \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_z) = 0$$

$$-k\sqrt{50} \varepsilon_x^2 + (k\varepsilon_l + 1)\varepsilon_x - \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_z) = 0$$

$$\varepsilon_x = 1,0931 \times 10^{-4} \Rightarrow \varepsilon_z = 7,6517 \times 10^{-4}$$

$$\omega = 0,0852$$

Nyní v σ_x přejdeme do tlaku, $\sigma_x \rightarrow -20 \text{ MPa}$, zde musíme aplikovat postupné vypínání poškození podle LL modelu. Odtižení proběhne ve třech fázích s různou tuhostí. Budeme se nadále soustředit pouze na deformaci ε_x , protože se mění jí příslušné hlavní napětí.



$$(1) \sigma_x \in \langle 0; 5 \rangle \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E(1 - \omega)} ((1 + \nu)\sigma_x - 3\nu\sigma_m)$$

$$(2) \sigma_x \in \langle -15; 0 \rangle \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_x - \frac{3\nu}{E(1 - \omega)} \sigma_m$$

$$(3) \sigma_x \in \langle -20; -15 \rangle \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E} ((1 + \nu)\sigma_x - 3\nu\sigma_m)$$

Analýzou pracovního diagramu zjišťujeme, že tuhost ve fázi (3) je větší než ve fázi (1), což odpovídá předpokladu, že tuhost by se měla při vypínání poškození postupně zvyšovat. Ve fázi (2) je ale tuhost největší a to naznačuje, že LL model nefunguje ideálně. Zopakujeme tedy zatěžovací zkoušku s větším poškozením a uvidíme, jak se budou dále vyvíjet rozdíly v jednotlivých tuhostech.

Pro zajištění vysoké hodnoty poškození předepíšeme dvě kladné deformace stejné velikosti.

$$\sigma_y = 0, \sigma_x = \sigma_z > 0 \Rightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_z > 0 \Rightarrow \omega = k \left(\sqrt{2\varepsilon_x^2} - \tilde{\varepsilon}_l \right)$$

$$\omega \rightarrow 1 \Rightarrow \varepsilon_x \rightarrow 5,66 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = 5 \times 10^{-3} \Rightarrow \omega = 0,8824$$

Ze stanovených hodnot dopočítáme hodnoty napětí.

$$\sigma_y = \frac{E(1-\omega)}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z)$$

$$\sigma_y = 0 \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{-\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)}{1-\nu} = -2,5 \times 10^{-3}$$

$$\sigma_x = \frac{E(1-\omega)}{(1-2\nu)(1+\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z)$$

$$\sigma_x = \sigma_z = 14,7 \text{ MPa}$$

V σ_x přejdeme do tlaku, $\sigma_x \rightarrow -30 \text{ MPa}$

$$(1) \sigma_x \in \langle 0; 14,7 \rangle \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E(1-\omega)} ((1+\nu)\sigma_x - 3\nu\sigma_m)$$

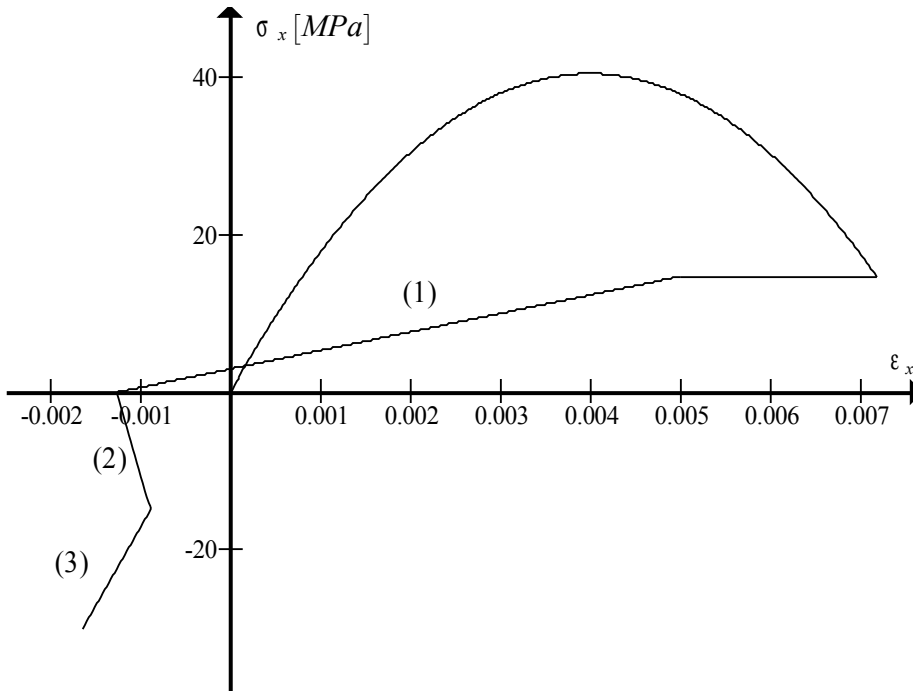
$$(2) \sigma_x \in \langle -14,7; 0 \rangle \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{3\nu}{E(1-\omega)}\sigma_m$$

$$(3) \sigma_x \in \langle -30; -14,7 \rangle \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E} ((1+\nu)\sigma_x - 3\nu\sigma_m)$$

$$\sigma_x = 0 \Rightarrow \varepsilon_x = -1,25 \times 10^{-3}$$

$$\sigma_x = -14,7 \text{ MPa} \Rightarrow \varepsilon_x = -0,882 \times 10^{-3}$$

$$\sigma_x = -30 \text{ MPa} \Rightarrow \varepsilon_x = -1,647 \times 10^{-3}$$



Z pracovního diagramu zjišťujeme, že ve fázi (2) by měl materiál podle LL modelu zápornou tuhost. To se může stát pouze při rostoucím poškození, ale v dané fázi je poškození konstantní. To znamená, že LL model bude pro určité konfigurace napětí a hodnoty přetvoření odporovat Hookeovu zákonu (tlakové napětí vyvolá příslušnou kladnou deformaci).

5. Analýza vlastních čísel

Pro obecnou analýzu LL modelu musíme zkoumat jeho chování pro všechny možné konfigurace napětí. Následnou analýzou vlastních čísel matic poddajnosti odhalíme případy, kdy materiál podle LL modelu nabývá záporné tuhosti (jedno z vlastních čísel bude záporné). Případ, kdy jsou všechna hlavní napětí a tím i střední napětí zároveň kladná nebo záporná, nemusíme analyzovat, protože mají poškození buď zcela aktivní, nebo zcela vypnuté. Zajímají nás tedy tyto případy:

$$a) \sigma_x > 0, \sigma_y < 0, \sigma_z < 0, \sigma_m > 0$$

$$b) \sigma_x > 0, \sigma_y < 0, \sigma_z < 0, \sigma_m < 0$$

$$c) \sigma_x < 0, \sigma_y > 0, \sigma_z > 0, \sigma_m > 0$$

$$d) \sigma_x < 0, \sigma_y > 0, \sigma_z > 0, \sigma_m < 0$$

a)

$$\varepsilon_x = \frac{1 + \nu}{E(1 - \omega)} \sigma_x - \frac{3\nu}{E(1 - \omega)} \sigma_m$$

$$\varepsilon_y = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_y - \frac{3\nu}{E(1 - \omega)} \sigma_m$$

$$\varepsilon_z = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_z - \frac{3\nu}{E(1 - \omega)} \sigma_m$$

Maticový tvar po roznásobení σ_m :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\omega} & \frac{-\nu}{1-\omega} & \frac{-\nu}{1-\omega} \\ \frac{-\nu}{1-\omega} & 1 + \nu - \frac{\nu}{1-\omega} & \frac{-\nu}{1-\omega} \\ \frac{-\nu}{1-\omega} & \frac{-\nu}{1-\omega} & 1 + \nu - \frac{\nu}{1-\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Pro hledání a vyhodnocení vlastních čísel použijeme program Wolfram Mathematica.

$$\lambda_1 = 1 + \nu$$

$$\lambda_2 = \frac{2 - \nu - 3\omega + \omega^2 + \nu\omega^2 - (-1 + \omega) \sqrt{9\nu^2 + 2\nu\omega + 2\nu^2\omega + \omega^2 + 2\nu\omega^2 + \nu^2\omega^2}}{2(1 - 2\omega + \omega^2)}$$

$$\lambda_3 = \frac{2 - \nu - 3\omega + \omega^2 + \nu\omega^2 + (-1 + \omega) \sqrt{9\nu^2 + 2\nu\omega + 2\nu^2\omega + \omega^2 + 2\nu\omega^2 + \nu^2\omega^2}}{2(1 - 2\omega + \omega^2)}$$

λ_1, λ_2 jsou pro přípustné hodnoty z definic ν, ω vždy kladná.

$$\lambda_3 < 0 \Rightarrow \omega > 1 - 2\nu$$

Pokud pro danou konfiguraci napětí překročí poškození hodnotu $(1 - 2\nu)$, LL model je naprosto nepoužitelný, byl by totiž v rozporu se zákony termodynamiky. Může dojít k méně zásadnímu rozporu, pokud $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nepatří do intervalu ohraničeného nejmenším a největším z vlastních čísel matic poddajnosti se zcela aktivovaným a zcela deaktivovaným poškozením. Meze tohoto intervalu označíme $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ a stanovíme je dosazením $\omega = 0$ do $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (vyjdou vlastní čísla matice bez poškození, dvě z nich stejná) a následným vydělením největšího z nich $(1 - \omega)$.

$$\lambda_{\min} = 1 - 2\nu \quad \lambda_{\max} = \frac{1 + \nu}{1 - \omega}$$

Zjišťujeme, že $\lambda_3 < \lambda_{\min}$ pro $\omega > \frac{8\nu - 1}{6\nu - 3}$, tehdy bude poddajnost za dané konfigurace napětí menší než pro zcela vypnuté poškození.

b)

$$\varepsilon_x = \frac{1 + \nu}{E(1 - \omega)} \sigma_x - \frac{3\nu}{E} \sigma_m$$

$$\varepsilon_y = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_y - \frac{3\nu}{E} \sigma_m$$

$$\varepsilon_z = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_z - \frac{3\nu}{E} \sigma_m$$

Maticový tvar po roznásobení σ_m :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \frac{1 + \nu}{1 - \omega} - \nu & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice poddajnosti:

$$\lambda_1 = 1 + \nu$$

$$\lambda_2 = \frac{-2 + \nu + \omega - 2\nu\omega - \sqrt{9\nu^2 + 2\nu\omega - 16\nu^2\omega + \omega^2 + 8\nu^2\omega^2}}{2(-1 + \omega)}$$

$$\lambda_3 = \frac{-2 + \nu + \omega - 2\nu\omega + \sqrt{9\nu^2 + 2\nu\omega - 16\nu^2\omega + \omega^2 + 8\nu^2\omega^2}}{2(-1 + \omega)}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou pro přípustné hodnoty z definic ν, ω vždy kladná.

Po porovnání $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ s mezemi $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ žádný rozpor nevychází.

c)

$$\varepsilon_x = \frac{1 + \nu}{E(1 - \omega)} \sigma_x - \frac{3\nu}{E(1 - \omega)} \sigma_m$$

$$\varepsilon_y = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_y - \frac{3\nu}{E(1 - \omega)} \sigma_m$$

$$\varepsilon_z = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_z - \frac{3\nu}{E(1 - \omega)} \sigma_m$$

Maticový tvar po roznásobení σ_m :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 + \nu - \frac{\nu}{1 - \omega} & \frac{-\nu}{1 - \omega} & \frac{-\nu}{1 - \omega} \\ \frac{-\nu}{1 - \omega} & 1 & \frac{-\nu}{1 - \omega} \\ \frac{-\nu}{1 - \omega} & \frac{-\nu}{1 - \omega} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice poddajnosti:

$$\lambda_1 = \frac{-1 - \nu}{-1 + \omega}$$

$$\lambda_2 = \frac{2 - \nu - 3\omega + \omega^2 + \nu\omega^2 - (-1 + \omega)\sqrt{9\nu^2 - 2\nu\omega - 2\nu^2\omega + \omega^2 + 2\nu\omega^2 + \nu^2\omega^2}}{2(1 - 2\omega + \omega^2)}$$

$$\lambda_3 = \frac{2 - \nu - 3\omega + \omega^2 + \nu\omega^2 + (-1 + \omega)\sqrt{9\nu^2 - 2\nu\omega - 2\nu^2\omega + \omega^2 + 2\nu\omega^2 + \nu^2\omega^2}}{2(1 - 2\omega + \omega^2)}$$

λ_1, λ_2 jsou pro přípustné hodnoty z definic ν, ω vždy kladná.

$$\lambda_3 < 0 \text{ pro } \omega > \frac{2\nu - 1}{\nu - 1} \quad \lambda_3 < \lambda_{\min} \text{ pro } \omega > \frac{7\nu - 2}{6\nu - 3}$$

Pokud pro tuto konfiguraci napětí překročí poškození hodnotu $(\frac{2\nu - 1}{\nu - 1})$, LL model je naprosto nepoužitelný, byl by totiž v rozporu se zákony termodynamiky.

d)

$$\varepsilon_x = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_x - \frac{3\nu}{E} \sigma_m$$

$$\varepsilon_y = \frac{1 + \nu}{E(1 - \omega)} \sigma_y - \frac{3\nu}{E} \sigma_m$$

$$\varepsilon_z = \frac{1 + \nu}{E(1 - \omega)} \sigma_z - \frac{3\nu}{E} \sigma_m$$

Maticový tvar po roznásobení σ_m :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & \frac{1 + \nu}{1 - \omega} & -\nu \\ -\nu & -\nu & \frac{1 + \nu}{1 - \omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice poddajnosti:

$$\lambda_1 = \frac{-1 - \nu}{-1 + \omega}$$

$$\lambda_2 = \frac{-2 + \nu + \omega - 2\nu\omega - \sqrt{9\nu^2 - 2\nu\omega - 20\nu^2\omega + \omega^2 + 4\nu\omega^2 + 12\nu^2\omega^2}}{2(-1 + \omega)}$$

$$\lambda_3 = \frac{-2 + \nu + \omega - 2\nu\omega + \sqrt{9\nu^2 - 2\nu\omega - 20\nu^2\omega + \omega^2 + 4\nu\omega^2 + 12\nu^2\omega^2}}{2(-1 + \omega)}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou pro přípustné hodnoty ν, ω vždy kladná.

Po porovnání $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ s mezemi $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ žádný rozpor nevychází.

6. Závěr

Podrobná analýza vlastních čísel ukazuje, že LL model může v některých případech fungovat, jindy ale bude v různé míře odporovat fyzikálním zákonům.

Model funguje bez problémů:

- 1) $\sigma_x > 0, \sigma_y < 0, \sigma_z < 0, \sigma_m < 0$
- 2) $\sigma_x < 0, \sigma_y > 0, \sigma_z > 0, \sigma_m < 0$
- 3) $\sigma_x > 0, \sigma_y < 0, \sigma_z < 0, \sigma_m > 0, \omega < \frac{8\nu - 1}{6\nu - 3}$
- 4) $\sigma_x < 0, \sigma_y > 0, \sigma_z > 0, \sigma_m > 0, \omega < \frac{7\nu - 2}{6\nu - 3}$

V modelu se objevuje menší poddajnost, než je teoreticky možná:

- 1) $\sigma_x > 0, \sigma_y < 0, \sigma_z < 0, \sigma_m > 0, \frac{8\nu - 1}{6\nu - 3} < \omega < 1 - 2\nu$
- 2) $\sigma_x < 0, \sigma_y > 0, \sigma_z > 0, \sigma_m > 0, \frac{7\nu - 2}{6\nu - 3} < \omega < \frac{2\nu - 1}{\nu - 1}$

Model je v rozporu se zákony termodynamiky:

- 1) $\sigma_x > 0, \sigma_y < 0, \sigma_z < 0, \sigma_m > 0, \omega > 1 - 2\nu$
- 2) $\sigma_x < 0, \sigma_y > 0, \sigma_z > 0, \sigma_m > 0, \omega > \frac{2\nu - 1}{\nu - 1}$