

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta stavební  
Katedra mechaniky



## **Stabilitní analýza pružnoplastického prutu**

*Michal Šmejkal*

Vedoucí práce: prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Konzultant: Ing. Martin Horák, Ph.D.

Praha, 2019

*Název práce:*

## **Stabilitní analýza pružnoplastického prutu**

*Autor:* Michal Šmejkal

*Obor:* Konstrukce a dopravní stavby

*Vedoucí práce:* prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

*Konzultant:* Ing. Martin Horák, Ph.D.

*Abstrakt:*

Předmětem práce je zavedení plastického chování materiálu do stabilitního výpočtu konstrukce. Hlavní náplní je vytvoření algoritmu v programu MATLAB, který metodou konečných diferencí určí body zatěžovací křivky a hodnotu kritického zatížení.

*Klíčová slova:* stabilita, plasticita, metoda konečných diferencí  
metoda konečných prvků, metoda střelby

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod do stability pružnoplastického prutu</b>	<b>3</b>
1.1	Stabilitní a zatěžovací křivka . . . . .	3
1.2	Odhady chování pro obdélníkový průřez . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Řešení problému metodou střelby</b>	<b>15</b>
2.1	Definice problému . . . . .	15
2.2	Princip řešení . . . . .	15
2.3	Metoda střelby a Diskretizace . . . . .	17
2.4	Výpočet neutrálních os a momentů únosnosti . . . . .	18
2.5	Algoritmus . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Příklad</b>	<b>33</b>
3.1	Metoda konečných prvků . . . . .	33
3.2	Výsledky vypočítané metodou střelby . . . . .	38
3.3	Vliv parametrů . . . . .	41



# Seznam obrázků

1.1	Schéma problému . . . . .	6
1.2	Zatěžovací a materiálové křivky . . . . .	6
1.3	Stabilitní křivka . . . . .	8
1.4	Interakční diagram pružný . . . . .	13
1.5	Interakční diagram plastický . . . . .	13
1.6	Graf závislosti $p = \frac{P}{P_{cr}}$ na $\Lambda$ . . . . .	13
2.1	Schéma problému . . . . .	16
2.2	Pracovní diagram pro ideálně pružnoplastický model . . . . .	16
2.3	Rozdělení intervalu . . . . .	20
2.4	Deformovaný prut . . . . .	20
2.5	Rozložení napětí po průřezu . . . . .	20
2.6	Rozložení napětí po průřezu pro případ, kdy plastizují pouze spodní vlákna . . . . .	23
2.7	Rozložení napětí pro $\kappa = \kappa_{el}$ . . . . .	23
2.8	Rozložení napětí pro $\kappa = \kappa_{ep}$ . . . . .	26
2.9	Rozložení napětí po průřezu pro případ, kdy plastizují jak horní tak spodní vlákna . . . . .	26
2.10	Vztah ohybového momentu a tlakové síly . . . . .	28
3.1	Schéma s využitím symetrie . . . . .	35
3.2	Porovnání analytického řešení s řešením metodou konečných prvků . . . . .	36
3.3	Detail grafu na Obr. 3.2 . . . . .	37
3.4	Porovnání pružnoplastického řešení MKP pro různé sítě . . . . .	37
3.5	Pružnoplastické řešení MKP pro síť 3 s význačnými body . . . . .	38
3.6	Průběh napětí $\sigma_x$ a naznačení deformovaného tvaru v různých časech . . . . .	39
3.7	Vykreslení plastické deformace v různých časech . . . . .	40
3.8	Závislost $\frac{P}{P_{cr}}$ na průhybu uprostřed prutu . . . . .	42
3.9	Porovnání pružnoplastického výpočtu . . . . .	42
3.10	Interakční diagram . . . . .	43

3.11	Detail Obr. 3.9 . . . . .	43
3.12	Porovnání pro různé průřezy . . . . .	44
3.13	Interakční diagram pro různé výšky průřezu . . . . .	46
3.14	Porovnání pro různé délky prutu . . . . .	46
3.15	Interakční diagram pro různé délky prutu . . . . .	47
3.16	Porovnání pro různé počáteční excentricity . . . . .	47
3.17	Interakční diagram pro různé počáteční excentricity . . . . .	48
3.18	Závislost $\frac{P_{max}}{P_0}$ na počáteční excentricitě pro $\frac{P_{cr}}{P_0} < 1$ . . . . .	48
3.19	Závislost $\frac{P_{max}}{P_0}$ na počáteční excentricitě pro $\frac{P_{cr}}{P_0} > 1$ . . . . .	50
3.20	Závislost $\frac{P_{max}}{P_0}$ na štíhlosti . . . . .	50
3.21	Závislost $\frac{P_{max}}{P_{crit}}$ na štíhlosti . . . . .	51

# Seznam tabulek

3.1	Hodnoty parametrů pro konkrétní příklad . . . . .	35
3.2	Sítě konečných prvků . . . . .	35
3.3	Konvergence k přesnému řešení . . . . .	35
3.4	Porovnání výsledků podle programu OOFEM a podle metody střelby . . . . .	44





# Úvod

Kolaps konstrukce může být zapříčiněn mnohými jevy. Může dojít k vyčerpání únosnosti materiálu nebo pro štíhlé tlačené prvky může být kritická ztráta stability, která je ovlivněna geometrií prutu. V mnohých případech může být fatální právě kombinace obou zmíněných příčin. Obecně lze říci, že pro velmi štíhlý prut vyrobený z materiálu s vysokou mezí kluzu nebude mít vliv plasticity příliš velký význam, stabilitní výpočet podle pružnosti bude dostatečně přesný. Na druhou stranu o něco méně štíhlý prut vyrobený z horšího materiálu může vykazovat výrazně odlišné chování.

V dnešní době by se pro praktické účely provedl výpočet metodou konečných prvků se zahrnutím geometrické nelinearity a použitím vhodného materiálového modelu. Je to však poměrně náročný výpočet. Aby byly výsledky přesné, je potřeba hustá síť prvků. Pro některé typy úloh je možné použít alternativní přístup, a to metodu konečných diferencí. V práci se zabývám především touto metodou, hlavní náplní bylo vytvoření algoritmu pro stabilitní analýzu pružnoplastického prutu. Všechny výpočty jsou současně kontrolovány konečně-prvkovým softwarem OOFEM.

Práce je strukturovaná do tří kapitol. V první jsou zmíněny základní poznatky k tématu a očekávané změny v chování prvku oproti lineárně pružnému materiálu. Druhá kapitola je věnována popisu vytvořeného algoritmu. Třetí kapitola je zaměřená na porovnání výsledků několika případů s řešením metodou konečných prvků a na parametrickou studii, tedy vyhodnocení vlivu různých geometrických parametrů na odezvu prutu.



# Kapitola 1

## Úvod do stability pružnoplastického prutu

### 1.1 Stabilitní a zatěžovací křivka

Pro představu, jak změna materiálových vlastností ovlivní chování prvku při stabilitní analýze, bude názorné sestavit odhad závislosti působícího zatížení na příčném posunu nejnamáhanějšího průřezu (zatěžovací křivka) a odhad stabilitní křivky, neboli závislosti maximálního napětí v průřezu na štíhlosti prutu.

Je dán prostě podepřený prut délky  $L$ , s počáteční sinusovou excentricitou o maximální výchylce  $\delta_0$ . Na konci prutu působí osová zatížení  $P$ , které se rovnoměrně zvětšuje. Prut je vyroben z homogenního, ideálně pružnoplastického materiálu s Youngovým modulem pružnosti  $E$  a mezí kluzu  $\sigma_0$ .

Pro jednoduchost budou potřebné vztahy odvozeny pro tzv. *ideální průřez*. Schéma prutu a průřezu je znázorněno na Obr. 2.1. Jde vlastně o průřez tvaru I, pro který zanedbáváme příspěvek k vnitřním silám pocházející od napětí ve stojině. Navíc předpokládáme, že jakmile dosáhne napětí v jedné z pásnic meze kluzu  $\sigma_0$ , tato pásnice okamžitě celá zplastizuje.

Diferenciální rovnice pro vzpěr prostě podepřeného prutu s počáteční excentricitou vypadá následovně:

$$Pw(x) = -EI \left( \frac{d^2w(x)}{dx^2} + \kappa_0(x) \right)$$
$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI}w(x) = -\kappa_0(x), \quad (1.1)$$

kde  $\kappa_0 = -\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \delta_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$ .

Řešení homogenní diferenciální rovnice

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI} w(x) = 0 \quad (1.2)$$

bude mít tvar

$$w_h(x) = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x. \quad (1.3)$$

Uplatněním okrajových podmínek  $w_h(0) = w_h(L) = 0$  se ukáže, že konstanta  $C_2 = 0$ . Z OP  $w_h(L) = 0$  platí:

$$C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0. \quad (1.4)$$

Abyste existovalo netriviální řešení, musí platit, že

$$\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0 \quad (1.5)$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n\pi, \quad (1.6)$$

kde  $n = 1, 2, 3, \dots$

Vyjádřením síly  $P$  z poslední rovnice se získá vzorec  $P = \frac{nEI\pi^2}{L^2}$ , který určuje hodnoty tlakové síly, pro které dojde k vybočení prutu. Vlastní tvary vybočení mají pak předpis  $w_h(x) = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L}$ .

Eulerovo kritické břemeno bude nejmenší síla, pro kterou prut vybočí, platí tedy, že  $n = 1$  a  $P_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2}$ . První vlastní tvar vybočení bude dán rovnicí

$$w_h(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (1.7)$$

$C_1$  je libovolná konstanta, je tedy určen pouze tvar vybočení, ale maximální výchylka může být jakákoli. Toto řešení je platné pro dokonale rovný prut bez imperfekce.

Pro prut s počáteční imperfekcí je třeba vyřešit i partikulární řešení rovnice (1.1). To bude hledáno ve tvaru

$$w_p(x) = A \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (1.8)$$

Dosazením  $w_p(x)$  do rovnice (1.1) se získá následující rovnost:

$$A \left( \frac{P}{EI} - \frac{\pi^2}{L^2} \right) \sin \frac{\pi x}{L} = -\delta_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (1.9)$$

Musí platit, že  $A \left( \frac{P}{EI} - \frac{\pi^2}{L^2} \right) = -\delta_0 \frac{\pi^2}{L^2}$ . Konstanta  $A$  má hodnotu  $\delta_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$ .

Partikulární řešení se přepíše na

$$w_p(x) = \delta_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (1.10)$$

Průhyb uprostřed prutu bude dán vztahem:

$$w_p \left( \frac{L}{2} \right) = \delta_0 \frac{1}{1 - p}, \quad (1.11)$$

kde  $p = \frac{P}{P_{cr}}$ . Průhyb  $w_p \left( \frac{L}{2} \right)$  bude dále značen jako  $w$ .

Vyjádřením napětí v tlačných vláknech stejného průřezu se dostane vztah

$$\sigma_{neg} = -\frac{P}{A} - \frac{M}{W} = -\frac{P}{A} - \frac{Pw}{2c \frac{A}{2}} = -\frac{P}{A} \left( 1 + \frac{w}{c} \right) \quad (1.12)$$

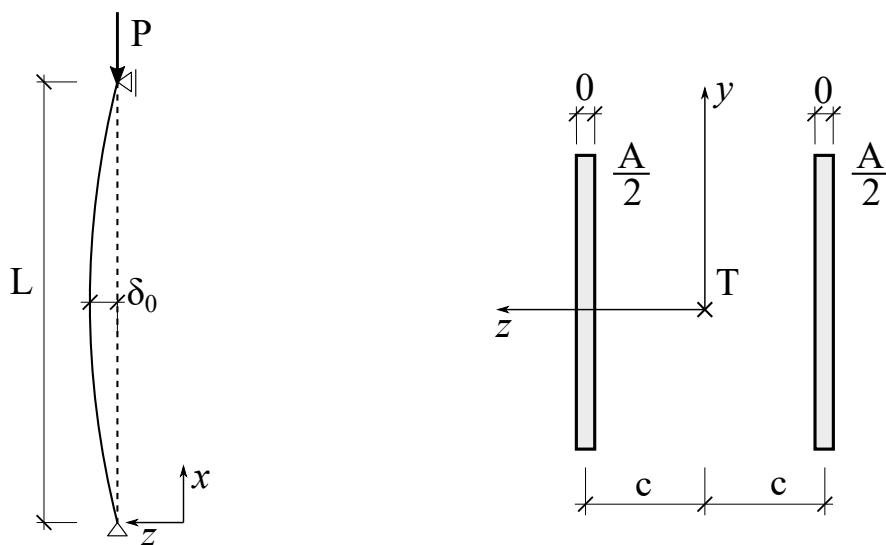
V případě největšího namáhání dosáhne toto napětí meze kluzu v tlaku, platí tedy

$$\sigma_{neg} = -\sigma_0 = -\frac{P}{A} \left( 1 + \frac{w}{c} \right) \quad (1.13)$$

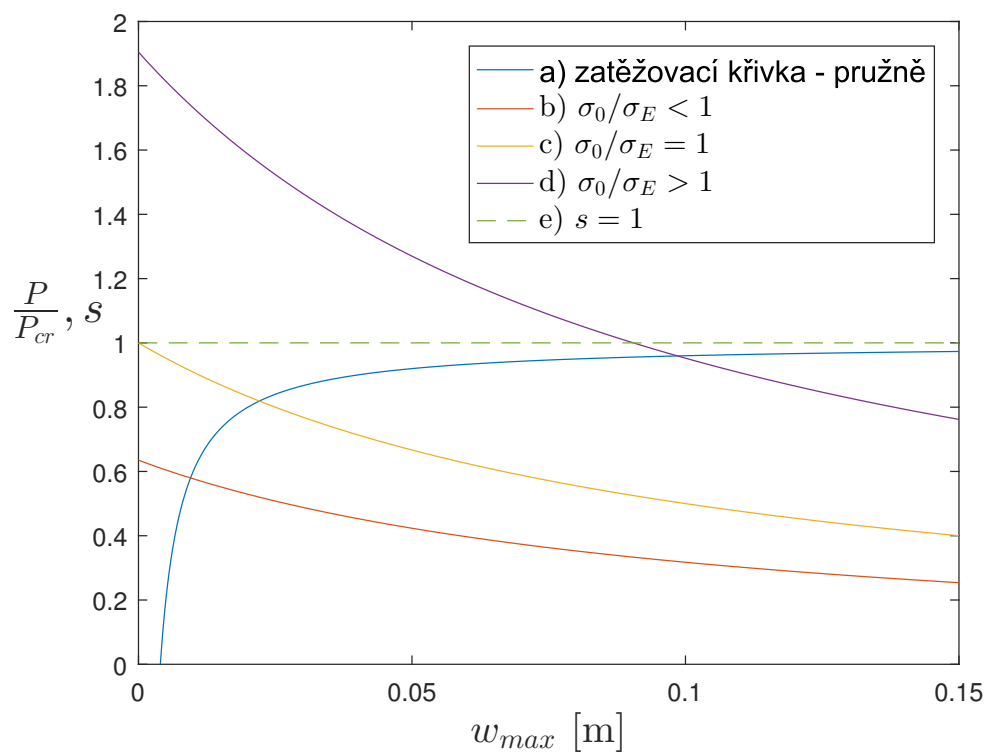
Ze vztahu (1.13) lze bezrozměrnou sílu  $s = \frac{P}{\sigma_0 A}$  vyjádřit jako

$$s = \frac{1}{\left( 1 + \frac{w}{c} \right)} \quad (1.14)$$

Veličina  $s$  vyjadřuje míru namáhání ve srovnání s průřezem úplně zplastizovaným v osovém tlaku. Nyní je názorně sestrojil graf ilustrující vztahy (1.11) a (1.14). Na Obr. 1.2 je zobrazena zatěžovací křivka pro pružný materiál a křivky vyjadřující vyčerpání únosnosti materiálu v závislosti na velikosti posunu, a to pro tři různé materiály. Pro ideální průřez by zatěžovací zkouška probíhala následovně: Při zvětšující se síle by průhyb narůstal podle křivky a), dané předpisem (1.11). Jakmile by síla dosáhla hodnoty, kde se křivka protíná s materiálovou křivkou, průhyb by narůstal i za zmenšující se síly a byl by řízen rovnicí (1.14). V bodě, kde se křivky protínají, průřez okamžitě přejde do mezního plastického stavu a dojde ke vzniku plastického kloubu. Ten bude lokalizovaný pouze do jednoho nejnamáhanějšího průřezu a zbytek prutu bude v pružném stavu. Toto chování by nastalo pouze pro ideální průřez, pro který



Obr. 1.1: Schéma problému a ideální průřez



Obr. 1.2: Zatěžovací a materiálové křivky

je mezní pružný stav shodný s mezním plastickým stavem. Pro reálné průřezy bude plastická zóna rozšířena i do okolí nejnamáhanějšího průřezu.

Tři různé křivky vyčerpání materiálu se liší hodnotou meze kluzu  $\sigma_0$ . Poměr  $\sigma_0/\sigma_E$  určuje vliv materiálu na stabilitu prvku.  $\sigma_E$  značí kritické napětí, tedy napětí v průřezu při centrickém působení kritické síly  $P_{cr}$ . Z grafu je patrné, že pro materiál typu b) bude mít plasticita velký dopad. Na druhou stranu pro prvek d) je průnik křivek v bodě, kde se zatížení blíží kritické síle, proto lze vliv chování materiálu oproti pružnému stavu zanedbat.

K rozlišení, zda bude mít materiálové chování velký vliv na kolaps prvku, dobře poslouží stabilitní křivka. Ta vyjadřuje závislost mezi napětím v nejnamáhanějším průřezu a štíhlostí prvku. Z teorie pružnosti je stabilitní křivka pro prostě podepřený prvek popsána vztahem

$$\sigma_E = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{EI\pi^2}{AL^2} = \frac{E\pi^2}{\lambda^2}, \quad (1.15)$$

kde

$$\lambda = \frac{L}{d} = \frac{L}{\sqrt{\frac{I}{A}}} \quad (1.16)$$

je štíhlost prutu, tedy poměr mezi vzpěrnou délkou  $L$  a poloměrem setrvačnosti průřezu (minimálním). Na Obr. 1.3 jsou vyobrazeny stabilitní křivky pro několik různých prvků. Pro případ lineárně pružného chování by závislost napětí na štíhlosti byla podle křivky e). Kdyby se materiál změnil na ideálně pružnoplastický, avšak prvek by byl dokonalé přímý bez excentricity, v nízkých štíhlostech by napětí bylo omezeno mezí kluzu a od hodnoty  $\lambda = 0$  až do hodnoty, kde se protínají křivky e) a f), by byl vztah řízen křivkou f). Pro větší štíhlosti by se pak řídil předpisem funkce e). Hodnota štíhlosti, kde se protínají křivky e) a f), se nazývá mezní štíhlost  $\bar{\lambda}$ . Dopočítá se z rovnosti kritického napětí a meze kluzu, tedy na základě vztahu

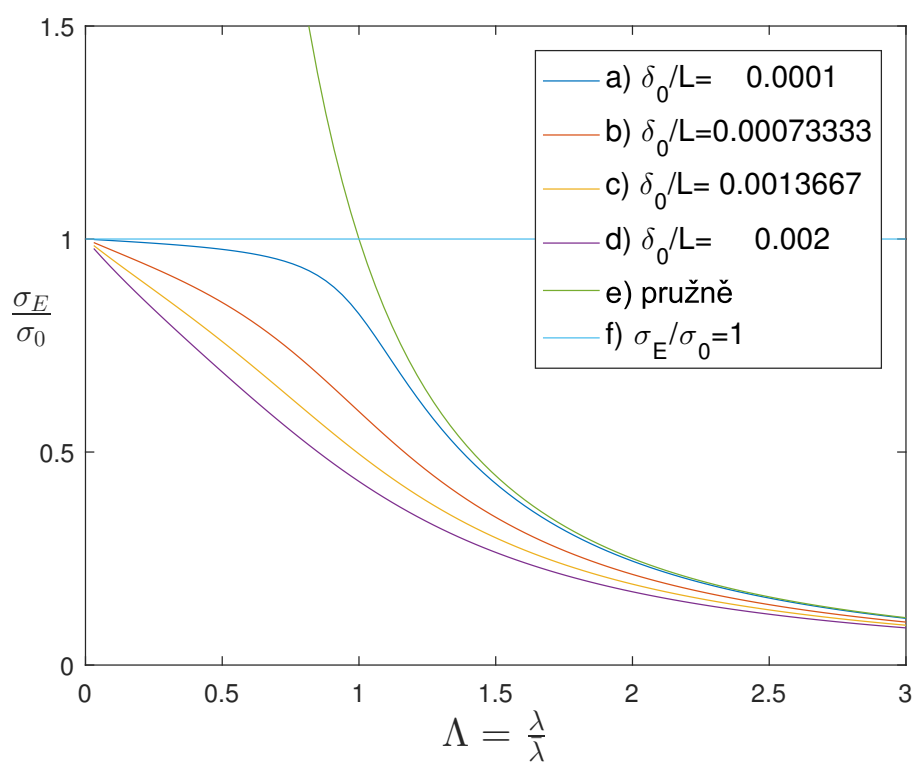
$$\sigma_E = \frac{E\pi^2}{\lambda^2} = \sigma_0 \quad (1.17)$$

z něhož plyne mezní štíhlost

$$\bar{\lambda} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad (1.18)$$

kde  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$  je mezní pružná deformace.

Nyní je cílem získat popis stabilitní křivky pro prut s počáteční excentricitou. Budou uplatněny následující vzorce, aby výsledný vztah obsahoval pokud



Obr. 1.3: Stabilitní křivka



možno pouze bezrozměrné veličiny:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \quad (1.19)$$

$$s = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\sigma}{\sigma_E} \frac{\sigma_E}{\sigma_0} = p \frac{\sigma_E}{\sigma_0} \quad (1.20)$$

$$\frac{\sigma_E}{\sigma_0} = \frac{\frac{E\pi^2}{\lambda^2}}{\frac{E\pi^2}{\bar{\lambda}^2}} = \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right)^2 \quad (1.21)$$

$$s = p \frac{\sigma_E}{\sigma_0} = p \left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right)^2 = \frac{p}{\Lambda^2}, \quad (1.22)$$

kde  $\Lambda$  je poměrná štíhlost. Vztahy (1.11) a (1.14) se pak přepíší na

$$s = \frac{1}{\left(1 + \frac{w}{c}\right)} \quad (1.23)$$

$$w = \delta_0 \frac{1}{1 - s\Lambda^2}. \quad (1.24)$$

Dosazením rovnice (1.24) do rovnice (1.23) se dostane vztah

$$s = \frac{1}{1 + \frac{\delta_0}{c} \frac{1}{1 - s\Lambda^2}} \quad (1.25)$$

Pro případ ideálního průřezu platí  $\lambda = \frac{L}{c}$  a užitím vzorce

$$\frac{\delta_0}{c} = \frac{\delta_0}{c} \frac{L}{L} = \lambda \frac{\delta_0}{L} = \Lambda \bar{\lambda} \frac{\delta_0}{L} \quad (1.26)$$

lze napsat výsledný vztah jako

$$s = \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_0}{L} \frac{\Lambda \bar{\lambda}}{1 - s\Lambda^2}\right)}. \quad (1.27)$$

Na Obr. 1.3 jsou pak vidět grafy pro různé počáteční excentricity. Jedná se o křivky a), b), c) a d). Je vidět, že bude-li se počáteční excentricita  $\delta_0$  blížit nule, průběh stabilitní křivky se bude přibližovat průběhu pro dokonale přímý prut. Z grafu je také patrné, že pro velmi štíhlé prvky se chování plastického prutu proti pružnému příliš nezmění.

## 1.2 Odhady chování pro obdélníkový průřez

Prozatím byly pro představu uvedeny výsledky pro ideální průřez. Následující sekce bude už zaměřena na prut obdélníkového průřezu o výšce  $h$  a šířce  $b$ .

V případě pružnoplastické stabilitní analýzy prutu bude materiál namáhán kombinací ohybu a normálové síly. Využitím interakčních diagramů s uvážením pružného a pružnoplastického chování je možné získat dolní a horní odhad stavu, v jakém se materiál bude nacházet. Tento odhad může sloužit jako jedna z kontrol později zmíněné metody.

Jako dolní odhad lze využít řešení z teorie pružnosti. Chová-li se materiál ideálně pružnoplasticky, zaručeně povede výpočet podle pružnosti k dolnímu odhadu. Na druhou stranu použitím jakési kombinace pružného a plastického chování lze získat i horní odhad řešení. Skutečné chování materiálu bude někde mezi těmito odhady.

### Pružná oblast

Z teorie pružnosti je známý následující vzorec, vyjadřující závislost ohybového a normálového namáhání v mezním pružném stavu, kdy je právě vyčerpána pružná kapacita materiálu.

$$\frac{|M|}{M_{el}} + \frac{|N|}{N_{pl}} = 1 \quad (1.28)$$

Na Obr. 1.4 je znázorněn geometrický význam. Bude užitečné vzorec upravit a využít bezrozměrné veličiny, aby výsledný vztah nezávisel na jednotkách. Pro úpravu se využijí následující vztahy:

$$M = P\delta, \quad \delta = \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}, \quad M_{el} = \frac{\sigma_0 hb^2}{6}, \quad N_{pl} = A\sigma_0. \quad (1.29)$$

Následně lze podmínku (1.28) přepsat do tvaru

$$\frac{P\delta}{\frac{\sigma_0 hb^2}{6}} + \frac{|-P|}{A\sigma_0} = 1 \quad (1.30)$$

$$P \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \frac{6}{\sigma_0 hb^2} + \frac{P}{A\sigma_0} = 1. \quad (1.31)$$

Oba zlomky se nyní rozšíří výrazem  $\frac{P_{cr}}{P_{cr}} = \frac{EI\pi^2}{P_{cr}L^2}$  a zlomek  $\frac{P}{P_{cr}}$  bude označen  $p$ .

$$\frac{P}{P_{cr}} \frac{EI\pi^2}{L^2} \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \frac{6}{\sigma_0 hb^2} + \frac{P}{P_{cr}} \frac{EI\pi^2}{L^2} \frac{1}{A\sigma_0} = 1 \quad (1.32)$$

$$p \frac{\delta_0}{1-p} E\pi^2 \frac{I}{L^2 A} \frac{6}{\sigma_0 b} + p E\pi^2 \frac{I}{L^2 A} \frac{1}{\sigma_0} = 1 \quad (1.33)$$

S využitím vzorců

$$\lambda^2 = \frac{L^2}{I}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{I}{A}}}{L} = \frac{\sqrt{\frac{hb^3}{12hb}}}{L} = \frac{b}{\sqrt{12}L} \quad (1.34)$$

je možné rovnici upravit na

$$p \frac{\delta_0}{1-p} E\pi^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{6}{\sigma_0 b} + p E\pi^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sigma_0} = 1 \quad (1.35)$$

$$p \frac{\delta_0}{1-p} E\pi^2 \frac{1}{\lambda} \frac{6}{\sqrt{12}\sigma_0 L} + p E\pi^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sigma_0} = 1 \quad (1.36)$$

$$\sqrt{3}p \frac{1}{1-p} \frac{E}{\sigma_0} \pi^2 \frac{1}{\lambda} \frac{\delta_0}{L} + p \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \sigma_0} = 1. \quad (1.37)$$

## Plastická oblast

V případě, kdy je materiál v mezním plastickém stavu, je vztah mezi normálovou silou a ohybovým momentem vyjádřen rovnicí

$$\frac{|M|}{M_{pl}} + \left( \frac{N}{N_{pl}} \right)^2 = 1 \quad (1.38)$$

Na Obr. 1.5 je zobrazen interakční diagram. Nyní budou provedeny obdobné úpravy jako pro pružný případ. Je nutné zmínit, že vztah

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (1.39)$$

platí pouze pro lineárně pružné chování. Nicméně při jeho použití i v případě plastického chování výsledný vztah nebude přesný, ale bude horním odhadem přesného řešení.

$$\frac{P\delta}{\sigma_0 hb^2} + \left( \frac{-P}{A\sigma_0} \right)^2 = 1 \quad (1.40)$$

$$P \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \frac{4}{\sigma_0 h b^2} + \frac{P^2}{A^2 \sigma_0^2} = 1 \quad (1.41)$$

$$\frac{P}{P_{cr}} \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} E \pi^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{4}{\sigma_0 b} + \left( \frac{P}{P_{cr}} E \pi^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sigma_0} \right)^2 = 1. \quad (1.42)$$

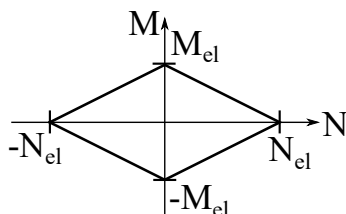
S využitím vzorce

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{I}{A}}}{L} = \frac{\sqrt{\frac{h b^3}{12 h b}}}{L} = \frac{b}{\sqrt{12} L} \quad (1.43)$$

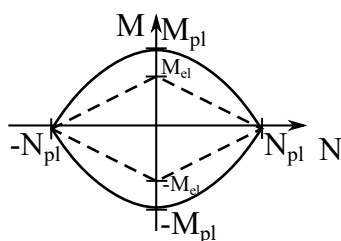
je možné rovnici upravit na

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} p \frac{1}{1 - p} \frac{E}{\sigma_0} \pi^2 \frac{1}{\lambda} \frac{\delta_0}{L} + \left( p \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 \sigma_0} \right)^2 = 1. \quad (1.44)$$

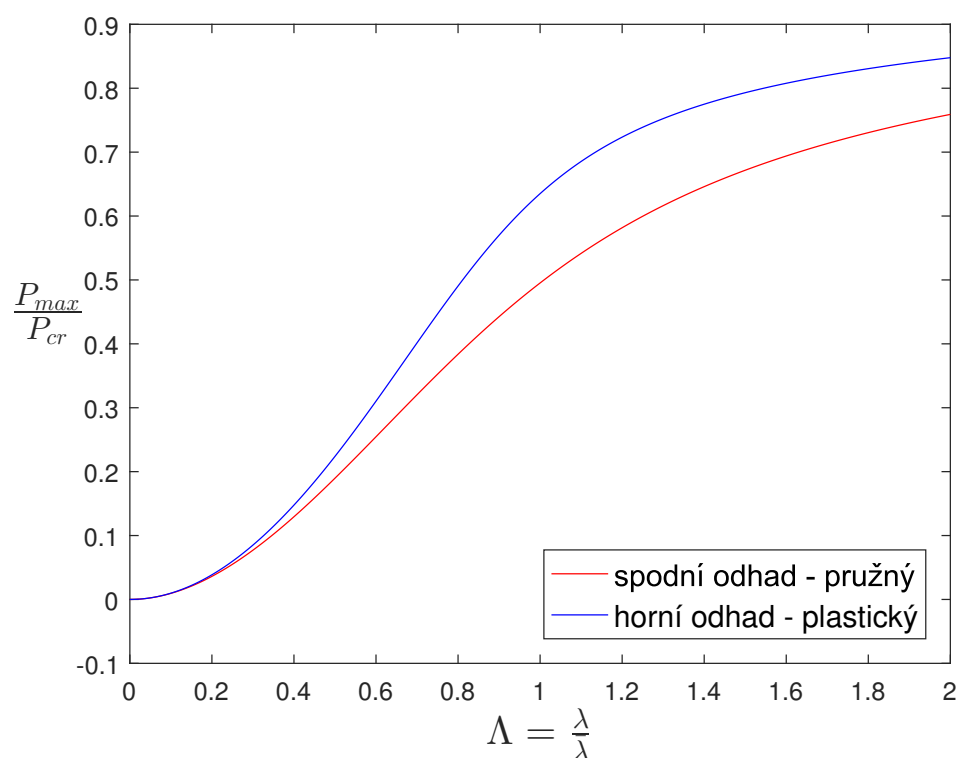
Může být užitečné ze vztahů (1.37) a (1.44) vyjádřit závislost  $p$  na  $\Lambda = \lambda/\bar{\lambda}$  a sestavit příslušný graf. Pro parametry  $E = 210$  GPa,  $\sigma_0 = 235$  MPa a  $\frac{\delta_0}{L} = 0.001$  je tento graf vykreslen na Obr. 1.6. Pro každou hodnotu štíhlosti je dán dolní a horní odhad maximálního zatížení, které je prut schopen přenést. Skutečná hodnota bude někde mezi těmito limity.



Obr. 1.4: Interakční diagram pružný



Obr. 1.5: Interakční diagram plastický

Obr. 1.6: Graf závislosti  $p = \frac{P}{P_{cr}}$  na  $\Lambda$



# Kapitola 2

## Řešení problému metodou střelby

V této kapitole bude popsáno řešení pomocí metody střelby a vysvětlen algoritmus vytvořeného programu.

### 2.1 Definice problému

Je dán prostě podepřený prut délky  $L$ , s počáteční sinusovou excentricitou o maximální výchylce  $\delta_0$ . Na konci prutu působí osová zatížení  $P$ , které se rovnoměrně zvětšuje. Prut je vyroben z homogenního, ideálně pružnoplastického materiálu s Youngovým modulem pružnosti  $E$  a mezí kluzu  $\sigma_0$ . Pracovní diagram je vyobrazen na Obr. 2.2.

Pro jednoduchost je uvažován obdélníkový průřez šířky  $b$  a výšky  $h$ . Základní neznámou veličinou dané úlohy je funkce průhybu  $w(x)$ .

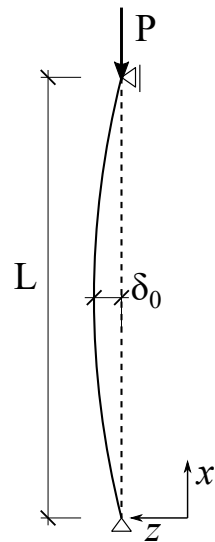
### 2.2 Princip řešení

Jeden z možných přístupů k řešení stabilitních problémů vychází z rovnováhy. V každém bodě  $x$  na ose prutu je možné napsat podmínky rovnováhy, tedy rovnost mezi vnitřními a vnějšími silami. Takové rovnice jsou pro daný případ dvě: silová podmínka rovnováhy ve směru osy prutu a momentová podmínka rovnováhy. Momentová podmínka rovnováhy se zapíše jako

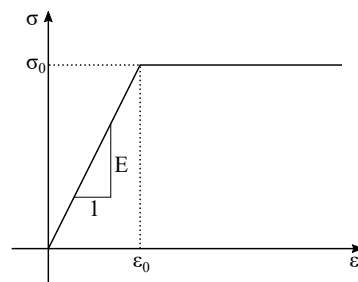
$$M_{ext} = M_{int} \quad (2.1)$$

$$Pw(x) = f(P, \kappa), \quad (2.2)$$

kde  $f$  je funkce udávající ohybový moment v závislosti na normálové síle  $N = -P$  a křivosti  $\kappa$ .



Obr. 2.1: Schéma problému



Obr. 2.2: Pracovní diagram pro ideálně pružnoplastický model



S předpokladem malých deformací a posunů a Navierovy-Bernoulliovy hypotézy o zachování rovinnosti a kolmosti průřezu lze křivost vyjádřit jako druhou derivaci průhybu, platí tedy vztah

$$\kappa_{def} = -\frac{d^2w(x)}{dx^2}. \quad (2.3)$$

Křivost  $\kappa$ , která souvisí s ohybovým momentem, je pak dána rozdílem křivosti od deformace a počáteční křivosti od imperfekce. Rovnici (2.2) lze přepsat jako

$$Pw(x) = f\left(P, -\frac{d^2w(x)}{dx^2} - \kappa_0(x)\right). \quad (2.4)$$

Předepsaná počáteční excentricita má tvar  $w_0(x) = \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}$ . Počáteční křivost bude záporně vzatou druhou derivací počáteční excentricity:

$$\kappa_0 = -\frac{d^2w_0(x)}{dx^2} = \delta_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (2.5)$$

Rovnice (2.4) je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu, k jejímu řešení jsou potřeba dvě okrajové podmínky. Pro prostě podepřený prut se použijí podmínky  $w(0) = w(L) = 0$ . Konkrétní tvar funkce  $f$  v rovnici (2.4) závisí na průřezu a na chování materiálu a bude odvozen později.

V případě lineárně pružného materiálu by mohla být rovnice (2.4) přepsána na

$$Pw(x) = -EI \left( \frac{d^2w(x)}{dx^2} + \kappa_0(x) \right). \quad (2.6)$$

Jde tedy o lineární rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty, kterou je možné pro danou funkci  $\kappa_0$  analyticky vyřešit. Avšak již pro nejjednodušší plastický model je rovnice (2.4) nelineární a lze ji vyřešit pouze pomocí numerických metod.

## 2.3 Metoda střelby a Diskretizace

Metoda střelby je numerická metoda pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic, která převádí okrajovou úlohu na úlohu s počátečními podmínkami. Takovou úlohu pak můžeme efektivně řešit metodou konečných diferencí, nejlépe explicitního typu. Prvním krokem je diskretizace dané oblasti. Jelikož se jedná o prutovou úlohu, tedy 1-D, bude osa prutu pokryta dostatečným množstvím bodů. Rozdělení na jednotlivé dílky je znázorněno na Obr. 2.3. Vzdálenost mezi uzly je označena  $\Delta x$ ,  $N$  označuje počet dílků a  $k$  značí číslo uzlu.

V našem případě se řeší obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a pro druhou derivaci lze použít diferenční náhradu

$$\frac{d^2(\cdot)}{dx^2} = \frac{(\cdot)_{k+1} - 2(\cdot)_k + (\cdot)_{k-1}}{\Delta x^2}. \quad (2.7)$$

V každém bodě se zapíše momentová podmínka rovnováhy, tedy

$$Pw_k = f(P, \kappa_k), \quad (2.8)$$

kde  $w_k$  je průhyb v bodě  $x_k$  a  $\kappa_k$  je křivost v bodě  $x_k$ . Ukáže se, že v každém bodě bude  $w_k$  známou veličinou. Rovnice (2.8) bude mít pouze jednu neznámou, a to křivost  $\kappa_k$ . Jakmile se vyjádří hodnota křivosti, využije se aproximace druhé derivace diferenční náhradou. Platí

$$\kappa_k = -\frac{d^2w_k}{dx^2} - \kappa_0(x_k) = -\frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} - \delta_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x_k}{L} \quad (2.9)$$

Z této rovnice se vyjádří průhyb  $w_{k+1}$  v následujícím bodě dělení,  $x_{k+1}$ . Výpočet pro první bod bude trochu odlišný. Zapiše-li se diferenční náhrada pro bod  $k = 0$ , objeví se ve vzorci kromě předpokládané neznámé  $w_1$  i veličiny  $w_{-1}$  a  $w_0$ . Průhyb  $w_0$  je dán okrajovou podmínkou a pro prostě podepřený prut platí  $w_0 = 0$ . Průhyb  $w_{-1}$  však není předepsán, což by znamenalo, že rovnice v prvním bodě by obsahovala dvě neznámé. Tento problém řeší metoda střelby předepsáním fiktivní okrajové podmínky, kterou je potřeba zvolit tak, aby numericky spočítané řešení splnilo skutečnou okrajovou podmínku na opačném konci prutu, tedy  $w(L) = 0$ . Fiktivní okrajová podmínka předepíše v bodě 0 první derivaci neznámé funkce, tedy v našem případě pootočení levého konce prutu,  $\phi_0$ . V podmínce  $w'(0) = \phi_0$  se derivace se nahradí diferenčním schématem, což bude druhá rovnice obsahující neznámé  $w_{-1}$  a  $w_1$ . Díky tomu je pak možné rovnici pro bod  $k = 0$  vyřešit.

Na začátku výpočtu vyjdeme ze vhodného odhadu pootočení  $\phi_0$ , například na základě analytického řešení pro pružný prut. Až se výpočet dostane k rovnici pro bod  $k = N - 1$ , ze které dopočítá průhyb na konci intervalu, tedy  $w_N$ , porovná se tato hodnota s okrajovou podmínkou, která má pro daný typ uložení tvar  $w_N = 0$ . Na základě rozdílu těchto hodnot bude opraven odhad počátečního úhlu  $\phi_0$  a výpočet se bude opakovat tak dlouho, dokud rozdíl mezi vypočteným průhybem  $w_N$  a předepsanou hodnotou 0 nebude splňovat požadovanou toleranci.

## 2.4 Výpočet neutrálních os a momentů únosnosti

Doposud byl naznačen pouze princip metody, avšak nebylo zmíněno, jak se dostane přesný tvar funkce  $f$ , udávající ohybový moment v závislosti na normálové síle a křivosti. V následující části budou ukázány výpočty ohybových momentů pro tři možné případy rozložení napětí, které mohou nastat. Pro jednoduchost se přitom omezíme na obdélníkový tvar průřezu.

Jelikož se při použití metody střelby bude aproximovat křivost  $\kappa$ , je vhodné vyjadřovat průběhy napětí v závislosti právě na křivosti, která spolu s polohou neutrální osy určuje rozložení poměrného protažení, z nějž pak lze podle

konstitutivního vztahu určit i rozložení napětí. Na Obr. 2.4 je naznačen deformovaný prut se souřadnicovými osami  $x$  a  $z$ .

Ohybový moment závisí na poloze neutrální osy, tudíž nejdříve je potřeba ze silové podmínky rovnováhy ve směru osy prutu získat polohu neutrální osy, a následně se vyjádří vztah pro ohybový moment.

### Případ pružného chování (Možnost 1)

Nejprve bude uvažováno pouze lineárně pružné chování. Na Obr. 2.5 je znázorněno rozložení napětí po průřezu. Normálová síla v průřezu může být vyjádřena jako

$$N = N_1 - N_2 = \frac{1}{2}E\kappa b h^2 - \frac{1}{2}E\kappa b (h - h^+)^2 = \frac{1}{2}E\kappa b (-h^2 + 2hh^+) = -P, \quad (2.10)$$

kde  $E$  je modul pružnosti,  $\kappa$  křivost,  $h$  výška průřezu,  $b$  šířka průřezu,  $h^+$  je vzdálenost neutrální osy od horních vláken a  $P$  je vnější tlaková osová síla. Z rovnosti (2.10) lze vyjádřit vztah pro vzdálenost neutrální osy od horních vláken

$$h^+ = \left( -\frac{2P}{bE\kappa} + h^2 \right) \frac{1}{2h} = -\frac{P}{hbE\kappa} + \frac{h}{2}. \quad (2.11)$$

Následně pak lze vyjádřit ohybový moment závisející na poloze neutrální osy. Zde je ohybový moment počítán okolo neutrální osy, nesmí se však opomenout působení tlakové síly  $P$  v těžišti průřezu:

$$\begin{aligned} M &= N_1 e_1 + N_2 e_2 - P \left( \frac{h}{2} - h^+ \right) = \\ &= \frac{1}{3}Eb\kappa \left( h^3 + (h - h^+)^3 \right) - P \left( \frac{h}{2} - h^+ \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dosazením vzdálenosti neutrální osy od horních vláken se výraz upraví na

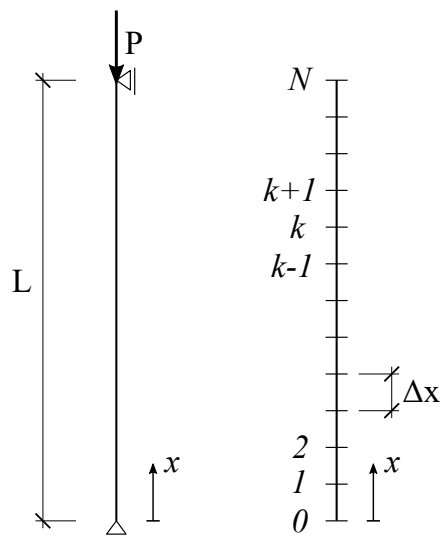
$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{3}Eb\kappa \left( h^3 + h^3 - 3h^2h^+ + 3hh^{+2} - h^{+3} \right) - \frac{P}{2} \left( h + \frac{2P}{hbE\kappa} - h \right) = \\ &= \frac{1}{3}Eb\kappa \left( h^3 + \frac{3hP}{bE\kappa} - \frac{3h^3}{2} + \frac{3P^2}{hb^2E^2\kappa^2} + \frac{3h^3}{4} - \frac{3hP}{bE\kappa} \right) - \frac{P^2}{hbE\kappa} = \\ &= \frac{1}{3}Eb\kappa \left( \frac{h^3}{4} + \frac{3P^2}{hb^2E^2\kappa^2} \right) - \frac{P^2}{hbE\kappa} = \frac{bh^3}{12}E\kappa. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Podle očekávání se výsledný vztah zjednodušil na známý vzorec

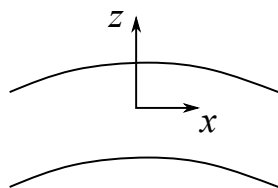
$$M = EI\kappa. \quad (2.14)$$

Jak je vidět, v případě pružného chování není vztah mezi momentem a křivostí nijak ovlivněn normálovou silou. Tento vztah lze snadno invertovat a vyjádřit

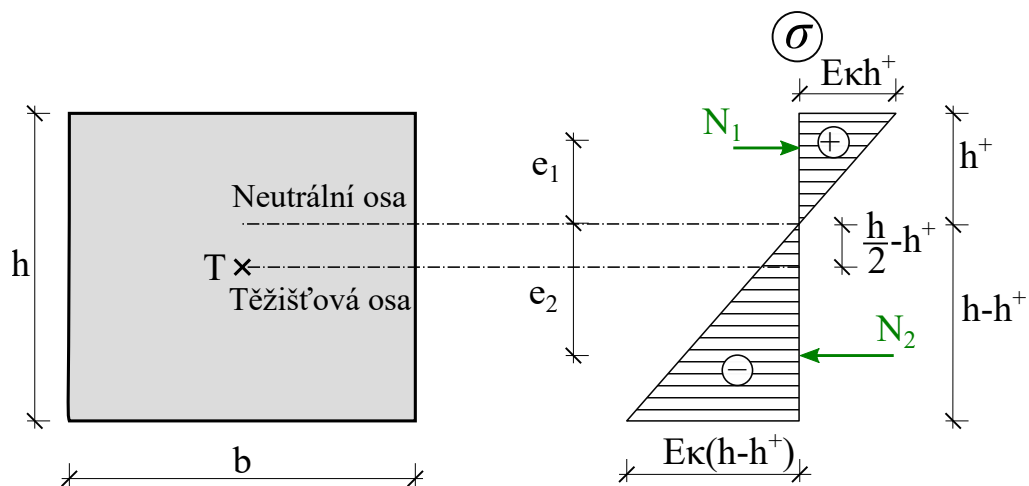
křivost jako  $\kappa = \frac{M}{EI}$ .



Obr. 2.3: Rozdělení intervalu



Obr. 2.4: Deformovaný prut



Obr. 2.5: Rozložení napětí po průřezu

## Případ plastického přetváření tlačných vláken (Možnost 2)

Na Obr. 2.6 je znázorněno rozložení napětí pro případ ideálně pružnoplastického chování. Předpokládá se, že průřez plastizuje v tlaku, avšak v tahu se materiál chová stále pružně. Normálová síla v daném průřezu se vyjádří jako

$$N = N_1 - N_2 - N_3 = \frac{1}{2}E\kappa bh^{+2} - \frac{1}{2}b \frac{\sigma_0^2}{E\kappa} - \sigma_0 \left( h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) b = -P \quad (2.15)$$

Řešením rovnice (2.15) pro  $h^+$  lze dostat dva kořeny

$$h_{1,2}^+ = -\frac{b\sigma_0 \pm \sqrt{-2Eb\kappa(P - bh\sigma_0)}}{Eb\kappa} = -\frac{\sigma_0}{E\kappa} \pm \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}}, \quad (2.16)$$

kde  $P_0 = bh\sigma_0$ . Ohybový moment je pak možné vyjádřit vztahem

$$\begin{aligned} M = N_1e_1 + N_2e_2 + N_3e_3 - P \left( \frac{h}{2} - h_{1,2}^+ \right) &= \frac{1}{3}Eb\kappa h_{1,2}^{+3} + \frac{1}{3} \frac{\sigma_0^3}{E^2\kappa^2} b + \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_0 \left( h - h_{1,2}^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) b \left( \frac{\sigma_0}{E\kappa} + h - h_{1,2}^+ \right) - P \left( \frac{h}{2} - h_{1,2}^+ \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dosazením jednoho ze dvou výrazů pro vzdálenost neutrální osy od horních vláken  $h_1^+$  do rovnice pro moment dostaneme

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{3}Eb\kappa \left( -\frac{\sigma_0}{E\kappa} + \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right)^3 + \frac{1}{3} \frac{\sigma_0^3}{E^2\kappa^2} b + \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_0 b \left( (h - h_{1,2}^+)^2 - \left( \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) - P \left( \frac{h}{2} + \frac{\sigma_0}{E\kappa} - \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right) = \\ &= \frac{1}{3}Eb\kappa \left( -\left( \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^3 + 3 \left( \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} - 6\sigma_0 \frac{(P_0 - P)}{E^2b\kappa^2} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa} \right) + \frac{1}{3} \frac{\sigma_0^3}{E^2\kappa^2} b + \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_0 b \left( \left( h + \frac{\sigma_0}{E\kappa} - \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) + \\ &- P \left( \frac{h}{2} + \frac{\sigma_0}{E\kappa} - \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pro druhý kořen budou úpravy obdobné, jediná změna se týká znaménka. Algebraickými úpravami se odvozený výraz pro moment zjednoduší na

$$M = (P_0 - P) \left( \frac{h}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right). \quad (2.19)$$

Pro lepší představu o názorném významu vzorce (2.19) bude užitečné zavést dvě limitní křivosti. Křivost  $\kappa_{el}$  bude křivost pro takové rozložení napětí, při kterém je materiál stále v pružném stavu, avšak napětí v tlačných vláknech je na mezi kluzu. Odpovídající rozložení napětí je znázorněno na Obr. 2.7. Křivost v mezním pružném stavu se vyjádří jako

$$\kappa_{el} = \frac{\frac{\sigma_0}{E} - \frac{P}{EA}}{\frac{h}{2}} = \frac{2}{Eh} \left( \sigma_0 - \frac{P}{A} \right) = \frac{2\sigma_0}{Eh} \left( 1 - \frac{P}{A\sigma_0} \right) = \frac{2\sigma_0}{Eh} (1 - p_0), \quad (2.20)$$

kde  $p_0 = P/P_0$  je bezrozměrná veličina vyjadřující velikost působící síly ve vztahu k maximální možné síle, kterou může průřez přenést.

Druhá mezní křivost bude označena  $\kappa_{ep}$ . Bude dosažena v případě, kdy tlačná vlákna již plastizují a napětí v tažených vláknech bude právě rovno  $\sigma_0$ . Vyjádří se jako

$$\kappa_{ep} = \frac{\sigma_0}{\frac{1}{2} \left( h - \frac{P}{b\sigma_0} \right) E} = \frac{2\sigma_0}{Eh \left( 1 - \frac{P}{bh\sigma_0} \right)} = \frac{2\sigma_0}{Eh} \frac{1}{1 - p_0}. \quad (2.21)$$

Upravením výrazu pro ohybový moment (2.19) s využitím vzorce (2.20) dostaneme

$$M = (P_0 - P) \left( \frac{h}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{Eb\kappa}} \right) = (P_0 - P) \left( \frac{h}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\sigma_0(1 - p_0)h^2}{Eh\kappa}} \right)$$

$$M = (P_0 - P)h \left( \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} \right). \quad (2.22)$$

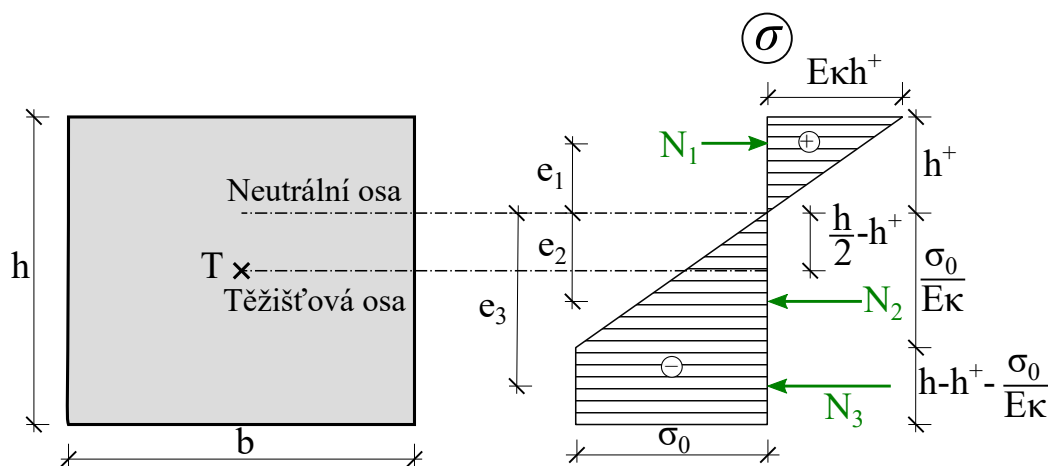
Nyní bude užitečné zobrazit zmíněné limitní stavy v rovině osové síly  $P$  a ohybového momentu  $M$ . Bude praktické využít bezrozměrné veličiny  $p_0 = P/P_0$  a  $m = M/M_{el}$  kde  $M_{el} = bh^2\sigma_0/6$  je mezní pružný moment. Nejprve bude prověřen mezní pružný stav, tedy případ, kdy  $\kappa = \kappa_{el}$ .

$$M = (P_0 - P)h \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa_{el}}} \right)$$

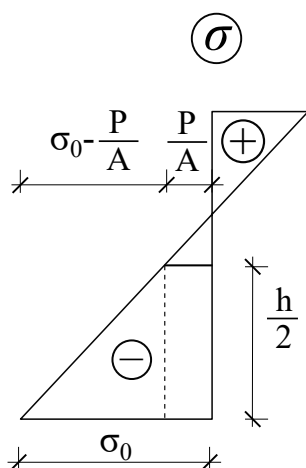
$$\frac{M}{P_0h} = (1 - p_0) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{M}{\sigma_0bh^2} = (1 - p_0) \frac{1}{6}$$

$$m = (1 - p_0) \quad (2.23)$$



Obr. 2.6: Rozložení napětí po průřezu pro případ, kdy plastizují pouze spodní vlákna



Obr. 2.7: Rozložení napětí pro  $\kappa = \kappa_{el}$

Rovnice (2.23) odpovídá známému vzorci pro vztah normálové síly a ohybového momentu pro mezní pružný stav z teorie pružnosti. Nyní se vyjádří obdobný vztah pro druhý limit, tedy případ, kdy  $\kappa = \kappa_{ep}$ .

$$\begin{aligned}
 M &= (P_0 - P)h \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa_{ep}}} \right) \\
 \frac{M}{P_0 h} &= (1 - p_0) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{(1 - p_0)^2} \right) \\
 \frac{M}{\frac{bh^2}{6}} &= (1 - p_0) (3 - 2(1 - p_0)) \\
 m &= 1 + p_0 - 2p_0^2. \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Tento vzorec vyjadřuje závislost ohybového momentu a tlakové síly pro případ, kdy tlačena vlákna plastizují a napětí v tažených vláknech právě dosáhlo meze kluzu.

Z rovnice (2.22) lze vyjádřit křivost  $\kappa$  pomocí následujících úprav:

$$\begin{aligned}
 M &= (P_0 - P)h \left( \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} \right) \\
 M &= \sigma_0 b h^2 \left(1 - \frac{P}{P_0}\right) \left( \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} \right) \\
 M &= \frac{\sigma_0 b h^2}{6} \left(1 - \frac{P}{P_0}\right) \left( 3 \pm 2 \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} \right) \\
 \frac{M}{M_{el} \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)} - 3 &= \pm 2 \sqrt{\frac{\kappa_{el}}{\kappa}} \\
 4 \frac{\kappa_{el}}{\kappa} &= \left( \frac{M}{M_{el} \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)} - 3 \right)^2 \\
 \kappa &= \frac{4\kappa_{el}}{\left( \frac{M}{M_{el} \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)} - 3 \right)^2} \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

Ve výsledném vzorci pro křivost se nakonec umocněním vyřešil problém s dvojným výrazem pro vzdálenost neutrální osy od horních vláken.



### Případ plastického přetváření tlačných i tažených vláken (Možnost 3)

Poslední případ, který může nastat, je ukázán na Obr. 2.9. Dochází k plastizaci jak v tahu, tak i v tlaku. Obdobně jako pro předešlé případy, normálová síla v průřezu se vyjádří jako

$$N = N_1 + N_2 - N_3 - N_4 = N_1 - N_4 = \left(h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa}\right) \sigma_0 b + \left(h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa}\right) \sigma_0 b = \sigma_0 b (2h^+ - h) = -P. \quad (2.26)$$

V tomto případě má rovnice (2.26) pouze jeden kořen

$$h^+ = \frac{1}{2} \left( -\frac{P}{\sigma_0 b} + h \right) = \frac{P_0 - P}{2\sigma_0 b}. \quad (2.27)$$

Ohybový moment bude následně vyjádřen obdobně předchozím případům jako

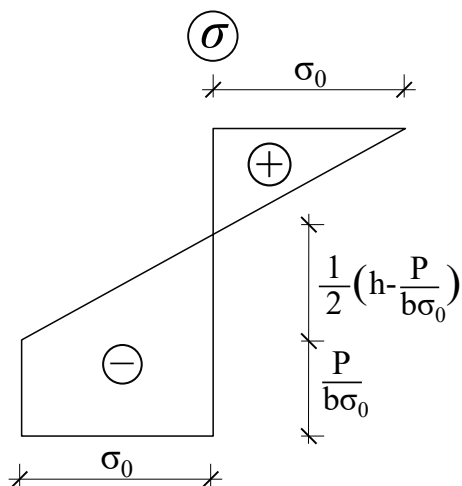
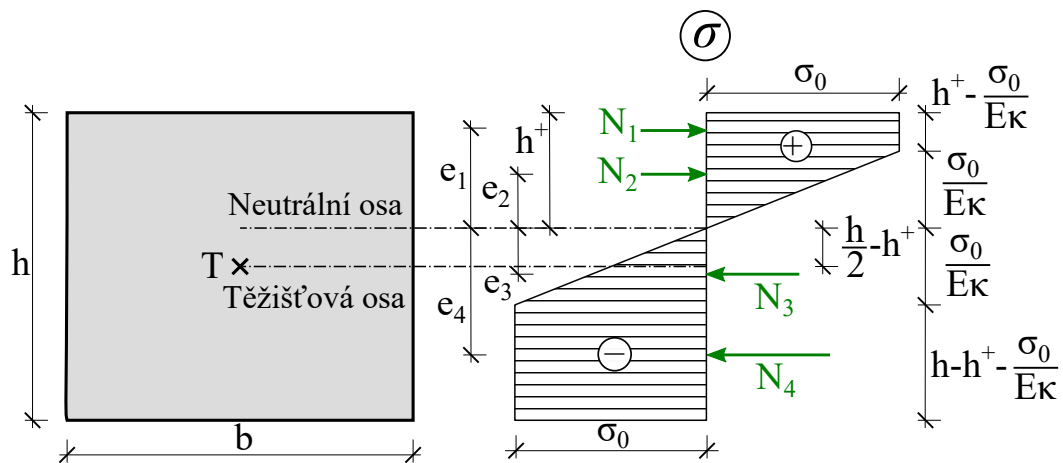
$$M = N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3 + N_4 e_4 - P \left( \frac{h}{2} - h^+ \right) = \quad (2.28)$$

$$= \frac{2\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \frac{1}{2} \left( h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) \sigma_0 b \left( h^+ + \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) + \quad (2.29)$$

$$+ \frac{1}{2} \left( h - h^+ - \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) \sigma_0 b \left( h - h^+ + \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right) - P \left( \frac{h}{2} - h^+ \right). \quad (2.30)$$

Dosazením  $h^+$  do výrazu pro moment dostaneme

$$\begin{aligned} M &= \frac{2\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \frac{1}{2} \sigma_0 b \left( h^{+2} - \left( \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \sigma_0 b \left( (h - h^+)^2 - \left( \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) + \\ &\quad - P \left( \frac{h}{2} + \frac{P}{2\sigma_0 b} - \frac{h}{2} \right) = \\ &= \frac{2\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \frac{1}{2} \sigma_0 b \left( \left( -\frac{P}{2\sigma_0 b} + \frac{h}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma_0 b \left( \left( \frac{P}{2\sigma_0 b} + \frac{h}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) - \frac{P^2}{2\sigma_0 b} = \\ &= \frac{2\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \sigma_0 b \left( \frac{P^2}{4\sigma_0^2 b^2} + \frac{h^2}{4} - \left( \frac{\sigma_0}{E\kappa} \right)^2 \right) - \frac{P^2}{2\sigma_0 b} = \\ &= -\frac{\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \frac{\sigma_0 b h^2}{4} - \frac{P^2}{4\sigma_0 b} = -\frac{\sigma_0^3}{3E^2\kappa^2} b + \frac{P_0^2 - P^2}{4\sigma_0 b} = \\ &= \left( 1 - \frac{P^2}{P_0^2} \right) \frac{\sigma_0 b h^2}{4} - \frac{4\sigma_0^2}{3h^2 E^2 \kappa^2} \frac{\sigma_0 b h^2}{4} = \left( 1 - \frac{P^2}{P_0^2} \right) M_{pl} - \frac{4\sigma_0^2}{3h^2 E^2 \kappa^2} M_{pl} = \\ &= \left( 1 - \frac{P^2}{P_0^2} \right) M_{pl} - \frac{1}{3} \frac{\kappa_{ep}^2}{\kappa^2} \left( 1 - \frac{P}{P_0} \right)^2 M_{pl} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Obr. 2.8: Rozložení napětí pro  $\kappa = \kappa_{ep}$ 

Obr. 2.9: Rozložení napětí po průřezu pro případ, kdy plastizují jak horní tak spodní vlákna

Opět bude názorné prozkoumat limitní varianty vztahu (2.31). V případě úplně zplastizovaného průřezu se bude křivost  $\kappa$  blížit nekonečnu. S použitím bezrozměrných veličin  $m = \frac{M}{M_{el}}$ ,  $M_{el} = \frac{2}{3}M_{pl}$ ,  $p_0 = \frac{P}{P_0}$  se vztah (2.31) přepíše na

$$m = (1 - p_0^2) \frac{3}{2}. \quad (2.32)$$

To je známý vzorec pro vztah normálové síly a ohybového momentu s uvážením plně zplastizovaného průřezu. Druhým limitem je případ, kdy je křivost rovna mezní křivosti  $\kappa_{ep}$ , a z rovnice (2.31) pak plyne

$$\begin{aligned} m &= \frac{3}{2} (1 - p_0^2) - \frac{1}{2} (1 - p_0)^2 \\ m &= 1 + p_0 - 2p_0^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Výsledný výraz je podle očekávání shodný se vzorcem (2.24). Sestrojený graf pro vzorce (2.23), (2.24) a (2.32) je na Obr. 2.10.

Ze vztahu pro ohybový moment (2.31) lze přímo vyjádřit hodnotu křivosti  $\kappa$  pomocí následujících úprav:

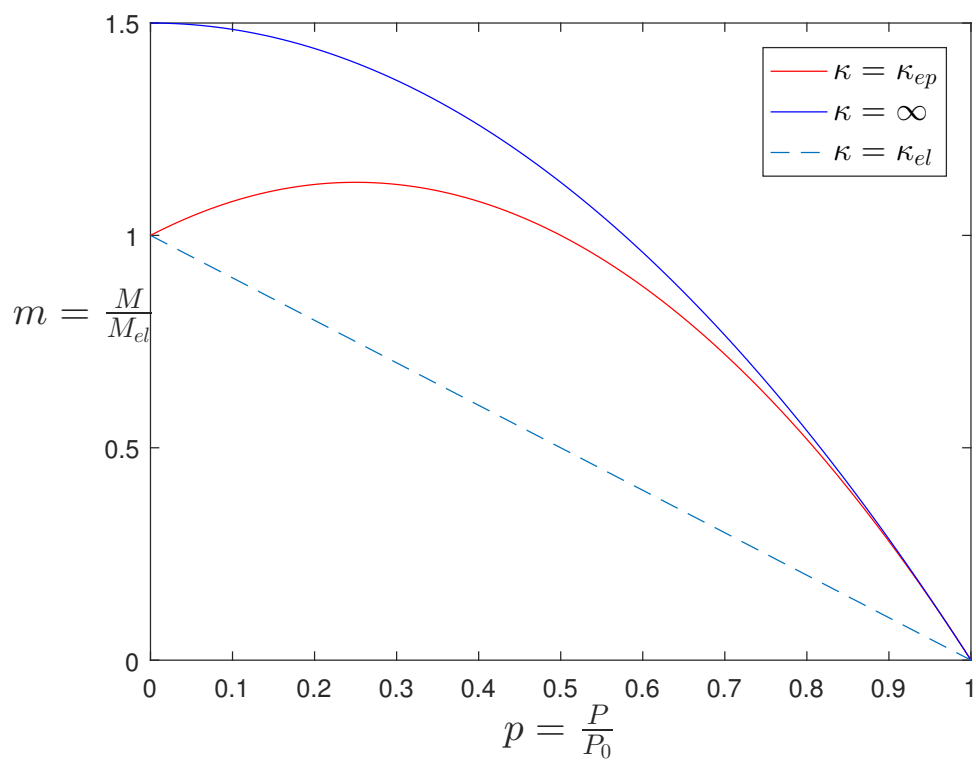
$$\begin{aligned} \frac{M}{M_{pl}} &= 1 - p_0^2 - \frac{1}{3} \frac{\kappa_{ep}^2}{\kappa^2} (1 - p_0)^2 \\ \kappa^2 &= \frac{1}{3} \frac{\kappa_{ep}^2 (1 - p_0)^2}{1 - p_0^2 - \frac{M}{M_{pl}}} \\ \kappa &= \pm \frac{\kappa_{ep}}{\sqrt{3}} \frac{1 - p_0}{\sqrt{1 - p_0^2 - \frac{M}{M_{pl}}}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Jelikož platí, že  $1 - p_0 > 0$ ,  $\kappa_{ep} > 0$  a křivost  $\kappa$  musí být po celé délce prutu kladná, dvojí znaménko není třeba uvažovat. Výsledný výraz je tedy

$$\kappa = \frac{\kappa_{ep}}{\sqrt{3}} \frac{1 - p_0}{\sqrt{1 - p_0^2 - \frac{M}{M_{pl}}}}. \quad (2.35)$$

## 2.5 Algoritmus

Již v sekci 2.3 byl hrubě naznačen algoritmus, který je v kódu naprogramován. V této části bude detailně popsán. Cílem výpočtu je zjistit body zatěžovací křivky a kritickou hodnotu zatížení. Výpočet je řízen zatížením, osová síla  $P$



Obr. 2.10: Vztah ohybového momentu a tlakové síly

se tedy postupně zvětšuje a v každém zatěžovacím kroku algoritmus spočítá funkci průhybu  $w$ .

Základní rovnicí je momentová rovnováha vnějších a vnitřních sil

$$Pw_k = M_{int}(\kappa, P), \quad (2.36)$$

kde  $M_{int}$  bude jeden ze tří výrazů pro moment odvozených v předchozí části práce. Nakonec se ukázalo, že pro všechny tři možnosti se výrazy pro moment výrazně zjednodušily. Pro všechny možnosti lze explicitně vyjádřit křivost  $\kappa$  závisující na velikosti tlakové síly  $P$  a hodnotě ohybového momentu  $M$ . Pro přehlednost jsou připomenuty jednotlivé možnosti:

Možnost 1:

$$\kappa = \frac{M}{EI} \quad (2.37)$$

Možnost 2:

$$\kappa = \frac{4\kappa_{el}}{\left(\frac{M}{M_{el}(1-p_0)} - 3\right)^2} \quad (2.38)$$

Možnost 3:

$$\kappa = \frac{\kappa_{ep}}{\sqrt{3}} \frac{1-p_0}{\sqrt{1-p_0^2 - \frac{M}{M_{pl}}}}, \quad (2.39)$$

V předchozí části kapitoly byly odvozeny vztahy ohybového momentu a tlakové síly pro různé limitní případy. Díky znalosti těchto hranic lze pro každý zatěžovací krok stanovit hodnotu mezních ohybových momentů.

a)  $\kappa = \kappa_{el}$ :

$$m_{el} = (1-p_0) \quad (2.40)$$

b)  $\kappa = \kappa_{ep}$ :

$$m_{ep} = 1 + p_0 - 2p_0^2 \quad (2.41)$$

c)  $\kappa = \infty$ :

$$m_{pl} = (1-p_0^2) \frac{3}{2} \quad (2.42)$$

kde  $m_{el}$ ,  $m_{ep}$  a  $m_{pl}$  jsou poměry ohybového momentu a momentu v mezním pružném stavu  $\frac{M}{M_{el}}$ .

Graf je zobrazen na Obr. 2.10. Pro každý dílek na ose  $x$  se pak tyto výrazy porovnají s hodnotou působícího ohybového momentu  $m_{ext} = \frac{M_{ext}}{M_{el}} = \frac{Pw_k}{M_{el}}$ .

Pokud je  $m_{ext} < m_{el}$ , zůstává materiál v pružném stavu a hodnota křivosti se

určí podle rovnice (2.37). Bude-li externí moment v rozmezí  $m_{el} < m_{ext} < m_{ep}$ , výpočet křivosti se provede podle rovnice (2.38). V případě, že  $m_{ep} < m_{ext} < m_{pl}$ , využije se rovnice (2.39). Hodnota  $m_{pl}$  je horní limit, materiál nemůže přenést vyšší namáhání.

Tímto se výpočet výrazně zjednodušil. Algoritmus obsahuje dva hlavní cykly. Cyklus přes zvětšující se sílu a do něj vnořený cyklus přes body na podélné ose  $x$ . Číslo bodu dělení osy bude označeno  $k$ .

V každém zatěžovacím kroku se postupuje následovně: Z okrajové podmínky je dána hodnota průhybu v počátku  $w(k=0) = 0$ . Tím jsou určeny vnitřní síly v bodě  $k=0$  a platí  $M_{ext}(k=0) = Pw_0 = 0$ . Ověření podmínky pro rozložení napětí po průřezu pro bod  $k=0$  je zbytečné, vždy bude uvažováno lineárně pružné chování, jelikož průřez není ohybově namáhán. Ze vztahu (2.37) je patrné, že  $\kappa = 0$ . Jakmile je známá křivost, lze dopočítat odhad průhybu v následujícím bodě  $k=1$ . Výsledná křivost je dána rozdílem křivosti od deformace a počáteční křivosti dané počáteční imperfekcí. Platí

$$\kappa = \kappa_{def} - \kappa_0 = -\frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} - \delta_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{k\pi}{L} \quad (2.43)$$

Přepsáním této rovnice pro bod  $k=0$  a s využitím okrajové podmínky  $w_k = 0$  dostaneme

$$\kappa = \frac{w_1 - 2w_0 + w_{-1}}{\Delta x^2} - \delta_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{0}{L} = -\frac{w_1 + w_{-1}}{\Delta x^2} \quad (2.44)$$

Metoda střelby odhaduje počáteční úhel průhybu  $\phi_0$ , který v případě malých deformací lze zaměnit s derivací průhybové funkce v počátku, platí tedy  $w'_0 = \phi_0$ . Možné diferenční schéma pro náhradu první derivace v bodě 0 je

$$\phi_0 = w'_0 = \frac{w_1 - w_{-1}}{2\Delta x}. \quad (2.45)$$

Z rovnice (2.45) lze vyjádřit

$$w_{-1} = w_1 - 2\Delta x \phi_0. \quad (2.46)$$

Dobrou volbou úhlu  $\phi_0$  je derivace v počátku z analytického pružného řešení. Dosazením předešlého výrazu do rovnice (2.44) dostaneme

$$\kappa = -\frac{w_1 + w_1 - 2\Delta x \phi_0}{\Delta x^2} = -\frac{2w_1 - 2\Delta x \phi_0}{\Delta x^2} \quad (2.47)$$

Jedinou neznámou v rovnici (2.47) je  $w_1$ , jelikož počáteční úhel  $\phi_0$  byl odhadnut. Neznámou  $w_1$  lze snadno explicitně vyjádřit jako

$$w_1 = -\frac{1}{2}\kappa\Delta x^2 + \Delta x\phi_0. \quad (2.48)$$

Tím je výpočet pro bod  $k = 1$  hotov a kód může postoupit k dalšímu bodu. Princip bude obdobný, spočítá se  $m_{ext} = \frac{Pw_k}{M_{el}}$ , tato hodnota se porovná s mezními hodnotami a určí se, o jakou možnost rozložení napětí se jedná. Pak se z příslušného vzorce vypočítá hodnota křivosti. Následně je z rovnice (2.43) vyjádřena jediná neznámá

$$w_{k+1} = 2w_k - w_{k-1} - (\kappa + \kappa_0)\Delta x^2. \quad (2.49)$$

Takto se dopočítají hodnoty až k bodu  $k = N - 1$ , hodnota  $w_N$  by měla být podle okrajových podmínek rovna 0. Pokud v zatěžovacím kroku nedošlo k žádné plastizaci, jako počáteční úhel  $\phi_0$  byla použita derivace v počátku z analytického pružného řešení a bylo použito dostatečně jemné dělení, hodnota  $w_N$  by měla být téměř 0. Pokud k plastizaci v daném kroku došlo, hodnota na konci intervalu se od 0 bude lišit. Pomocí vhodné iterativní metody se najde lepší odhad počátečního úhlu  $\phi_0$ .

Jednou z možných variant je metoda půlení intervalu. Předpokládejme, že v zatěžovacím kroku došlo k plastizaci a dopočítaná hodnota na konci intervalu se od nuly lišila. V případě, že  $w_N > 0$ , bude počáteční úhel nazván  $\phi_{0,A}$ . Pokud  $w_N < 0$ , úhel se pojmenuje  $\phi_{0,B}$ . Ve stejném zatěžovacím kroku se zopakuje výpočet s použitím jiného počátečního úhlu. Pokud je hodnota průhybu na konci intervalu opačného znaménka než pro první případ, hodnotě se přiřadí název  $\phi_{0,A}$  pokud je průhyb kladný, nebo  $\phi_{0,B}$  pokud je záporný. Pokud hodnota průhybu má stejné znaménko jako z prvního odhadu, je potřeba krok opakovat, dokud nebude hodnota průhybu na konci opačného znaménka. Jakmile je toho docíleno, kód může začít algoritmus metody. Dopocítá se úhel  $\phi_{0,NEW}$  který bude v polovině intervalu mezi úhly  $\phi_{0,A}$  a  $\phi_{0,B}$ , platí  $\phi_{0,NEW} = \phi_{0,A} + \frac{1}{2}(\phi_{0,B} - \phi_{0,A})$ . Následně se s použitím tohoto počátečního úhlu vypočítá nový průhyb  $w_{N,NEW}$ . Pokud bude kladný, přepíše se na  $\phi_{0,A}$ . Pokud bude průhyb  $w_{N,NEW}$  záporný, přepíše se na  $\phi_{0,B}$ . Tímto způsobem se bude zkracovat interval mezi úhly  $\phi_{0,A}$  a  $\phi_{0,B}$  dokud hodnota  $w_{N,NEW}$  nebude dostatečně blízko nule. V tom případě je aktuální zatěžovací krok dopočítán a kód může přejít k dalšímu.

### Shrnutí algoritmu:

1. cyklus přes zvětšující se zatížení: *for*  $P = P_{start} : P_{konec}$
2. výpočet  $\kappa_{el}$  a  $\kappa_{ep}$
3. určení počátečního úhlu  $\phi_0$   
pokud se jedná o první iteraci

$\phi_0$  z analytického pružného řešení

pokud se nejedná o první iteraci

$\phi_0$  dopočteno pomocí metody půlení intervalu

4. cyklus přes rozdělení prutu po délce: *for*  $k = 0 : (N - 1)$

5. určení  $m_{ext}$  a porovnání s  $m_{el}$  a  $m_{ep}$

ze vzorce pro příslušnou možnost se dopočte  $\kappa$

pokud  $k = 0$

$$w_{k+1} = -\frac{1}{2}\kappa\Delta x^2 + \Delta x\phi_0$$

pokud  $k = 1 : N - 1$

$$w_{k+1} = 2w_k - w_{k-1} - (\kappa + \kappa_0)\Delta x^2$$

6. kontrola  $w_N = 0$ ,

pokud  $w_N \neq 0$

vrátit se k bodu 3

pokud  $w_N = 0$

zatěžovací krok dopočítán, přejít k bodu 1



# Kapitola 3

## Příklad

V následující kapitole budou ukázány výsledky pro konkrétní příklad. Bude se jednat o prostě podepřený prut vyrobený z oceli. Pracovní diagram bude uvažován jako ideálně pružnoplastický s mezí kluzu  $\sigma_0$  a modulem pružnosti  $E$ . Prut bude obdélníkového průřezu o výšce  $h$  a šířce  $b$ , délka prutu je  $L$  s počáteční excentricitou ve tvaru sinusoidy s maximální amplitudou  $\delta_0$ . Konkrétní hodnoty jsou zobrazeny v Tab. 3.1.

### 3.1 Metoda konečných prvků

Ověření správnosti bylo provedeno pomocí konečněprvkového softwaru OO-FEM. Úlohu je možné zjednodušit s využitím symetrie průhybové funkce, lze tedy vymodelovat pouze polovinu prutu a tím zpřesnit a zrychlit řešení. Uprostřed prutu je derivace průhybové funkce rovna nule, tuto podmínku je zapotřebí vynutit vhodnou podporou. Ta musí splňovat nulové natočení průřezu a musí umožňovat příčný posun  $w$ . Taková podpora se nazývá posuvné vetknutí. Na Obr. 3.1 je znázorněno statické schéma zjednodušeného problému.

Prut byl vymodelován jako rovinná úloha. Pro výpočet byly použity čtyřuzlové konečné prvky. Všechny prvky mají stejnou šířku. V každém uzlu jsou dva neznámé stupně volnosti, tedy posuny  $u$  a  $w$ . Uvažuje se bilineární aproximace pole posunutí. Hodnoty napětí se integrují ve čtyřech Gaussových integračních bodech.

Okrajové podmínky byly modelovány následovně. Pro kloubové podepření je vynuceno, aby příčný posun prostředního uzlu v krajním průřezu byl nulový. Zbýlé krajní uzly se mohou pohybovat libovolně, tak bude umožněna příčná roztažnost materiálu. U posuvného vetknutí je uzlům v krajním průřezu umožněn pouze pohyb v kolmém směru na osu prutu, tedy ve směru posunu  $w$ . Zamezením posunu  $u$  ve všech krajních uzlech se docílí nulového natočení

průřezu.

Osově zatížení je modelováno jako bodové zatížení v krajních uzlech. V případě, že je na šířku prutu použito  $M$  uzlů, celkové zatížení  $F$  bude rozděleno následovně. Síla působící na rohové uzly bude velikosti  $\frac{F}{2M}$  a síla předepsaná v ostatních uzlech bude hodnoty  $\frac{F}{M}$ . Tímto bude docíleno rovnoměrného rozmístění zatížení po šířce prutu.

## Sít' a konvergence

Nejprve byl proveden stabilitní výpočet pro prut s lineárně pružným materiálem. Takto je možné odhadnout, jak hustá sít' prvků je potřeba k dostatečně přesnému řešení. Byly použity tři různě husté sítě. V Tab. 3.2 jsou vypsané parametry sítí. Na Obr. 3.2 je vykreslen graf závislosti  $\frac{P}{P_{cr}}$  na průhybu uprostřed prutu pro analytické řešení a řešení metodou konečných prvků pro tři zmíněné sítě. Na Obr. 3.3 je zobrazen detail grafu v oblasti, kde se poměr sil  $\frac{P}{P_{cr}}$  blíží jedné. V Tab. 3.3 jsou zaznamenány hodnoty  $\frac{P}{P_{cr}}$ ,  $\frac{P_{an}}{P_{cr}}$  ( $P_{an}$  je hodnota síly z analytického řešení) a odchylka numerického řešení od analytického řešení v bodech, ve kterých je hodnota průhybu  $w$  nejbližší hodnotě 0.05 m. Tyto body jsou na Obr. 3.3 znázorněny kroužkem. Odchylka od přesného řešení pro bod sítě 3 je menší než 0.1 %. Taková přesnost je pro účely práce dostačující a sít' 3 lze považovat za dostatečně hustou.

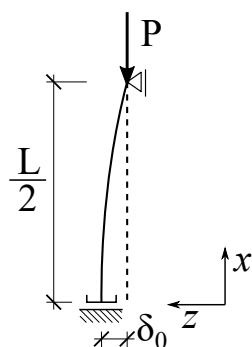
## Plastický výpočet

Ukázalo se, že výpočet pružného řešení je věrohodný až při použití alespoň 8 konečných prvků na šířku prutu (sít' 3). Je jasné, že zkoumat plastický výpočet s hrubší sítí je nesmyslné, nicméně pro informaci jsou výsledky i pro tyto sítě uvedeny v grafu na Obr. 3.4. Na Obr. 3.4 je zobrazena jen část zatěžovací křivky, kompletní křivka s použitím sítě 3 je zobrazena na Obr. 3.5.

Z grafů je vidět, jak se mění průběh zatěžovací křivky oproti pružnému řešení. Ze začátku je řešení shodné s pružným, to je zatížení ještě dostatečně nízké a napětí v žádném průřezu nepřesáhne mez kluzu  $\sigma_0$ . Pak se začne křivka oddalovat od pružného řešení (bod A). V tomto bodě bylo právě dosaženo meze kluzu v tlačené části v nejnamáhanějším průřezu, tedy průřezu uprostřed. Následně se bude v průběhu zatěžování plastická zóna zvětšovat a tím klesat tuhost celého systému. V bodě, kdy klesne na nulu, bude dosaženo maximálního zatížení, které dokáže prut přenést (bod B). Poté bude tuhost systému záporná,

$h$ [m]	$b$ [m]	$\delta_0$ [m]	$L$ [m]	$E$ [Pa]	$\sigma_0$ [Pa]
0.1	0.15	0.004	4	$210 \cdot 10^9$	$235 \cdot 10^6$

Tab. 3.1: Hodnoty parametrů pro konkrétní příklad



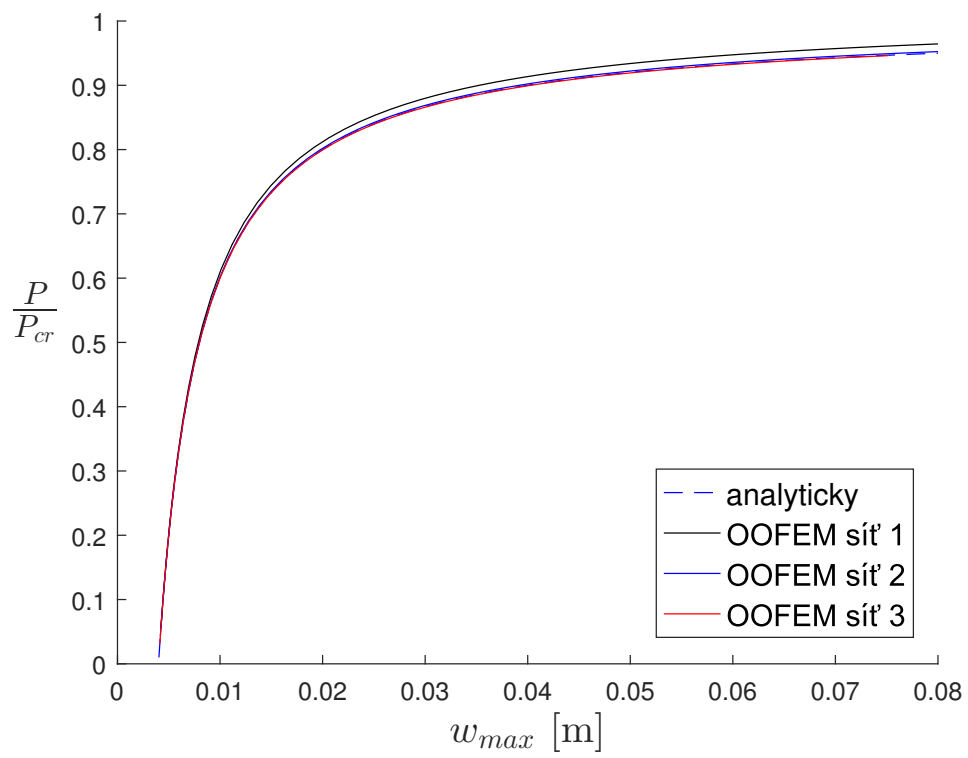
Obr. 3.1: Schéma s využitím symetrie

	velikost hrany [m]	počet prvků na šířku	počet prvků celkem
Síť 1	0.05	2	80
Síť 2	0.025	4	320
Síť 3	0.0125	8	1280

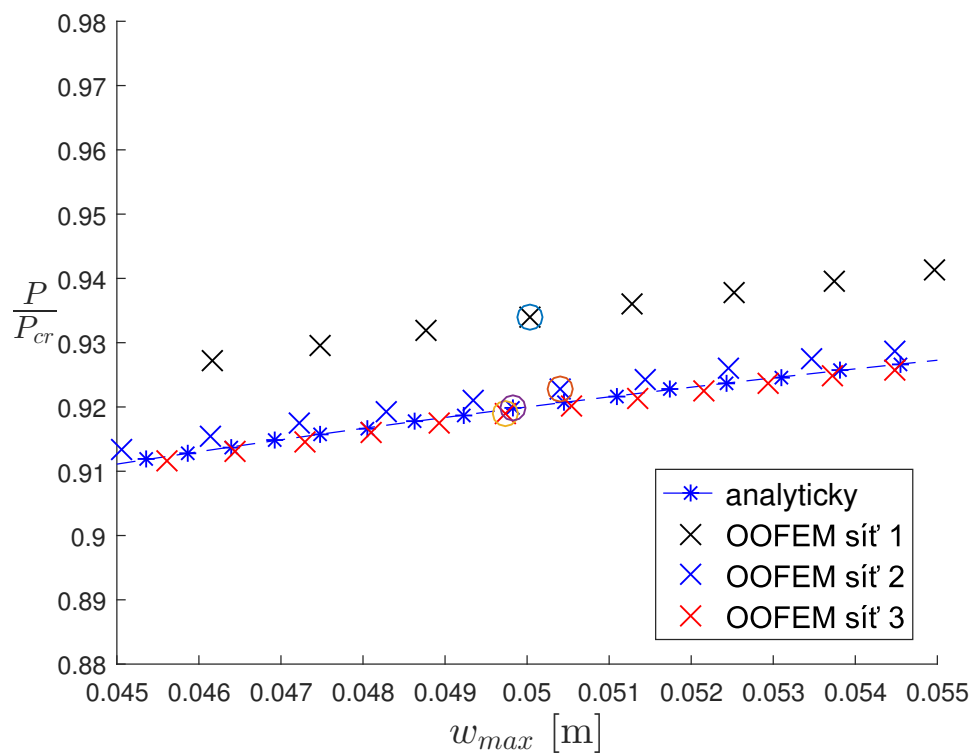
Tab. 3.2: Síť konečných prvků

	$\frac{P}{P_{cr}}$	$\frac{P_{an}}{P_{cr}}$	$\frac{P - P_{an}}{P_{an}} \cdot 100$ [%]
Síť 1	0.9339	0.9197	1.5431
Síť 2	0.9228	0.9197	0.3344
Síť 3	0.9188	0.9197	-0.0980

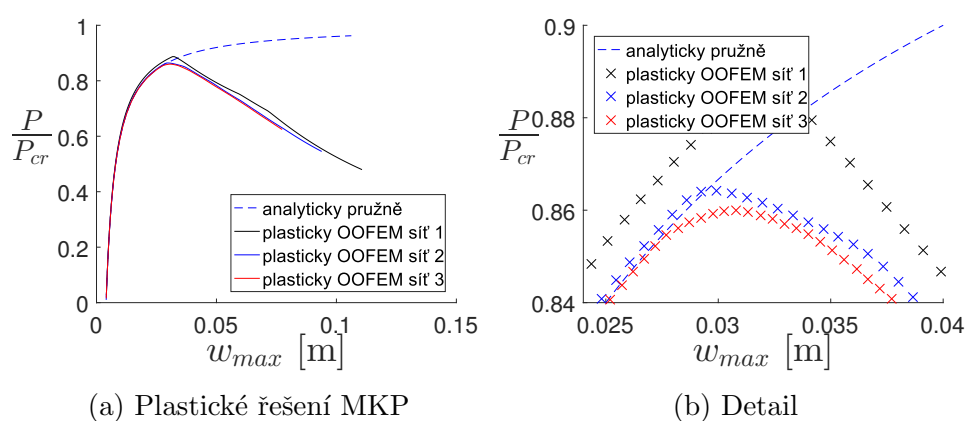
Tab. 3.3: Konvergence k přesnému řešení



Obr. 3.2: Porovnání analytického řešení s řešením metodou konečných prvků



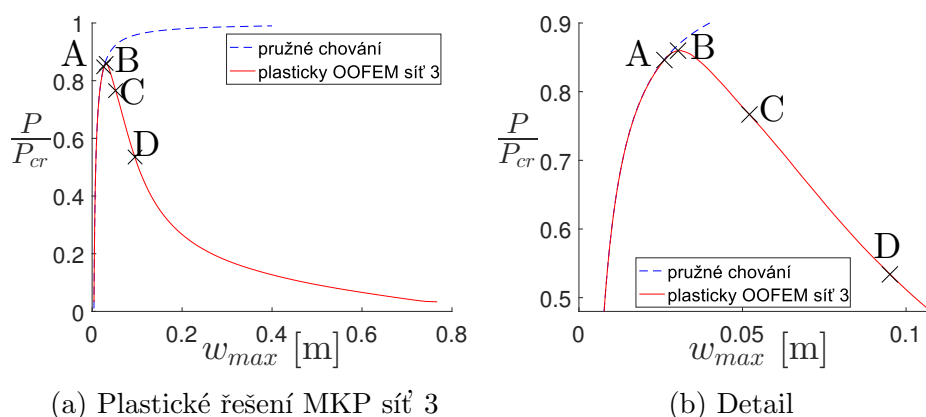
Obr. 3.3: Detail grafu na Obr. 3.2



(a) Plastické řešení MKP

(b) Detail

Obr. 3.4: Porovnání pružnoplastického řešení MKP pro různé sítě



Obr. 3.5: Pružnoplastické řešení MKP pro síť 3 s význačnými body

neboli průhyb bude narůstat i za snižující se tlakové síly. To však ještě neznamená kolaps konstrukce. Ten nastane až v momentě, kdy nejnamáhanější průřez dosáhne mezního plastického stavu (bod D). Někde mezi tímto stavem a bodem, kdy bylo poprvé dosaženo meze kluzu v tlačných krajních vláknech (bod A), nastane situace, kdy i napětí v tažených vláknech bude právě rovno mezi kluzu. Zda se bude tento bod nacházet před dosažením maximálního zatížení, nebo po dosažení maximálního zatížení, záleží na kombinaci geometrických a materiálových parametrů. Pro tento konkrétní případ je dosaženo meze kluzu v tahu až v klesající části křivky (bod C).

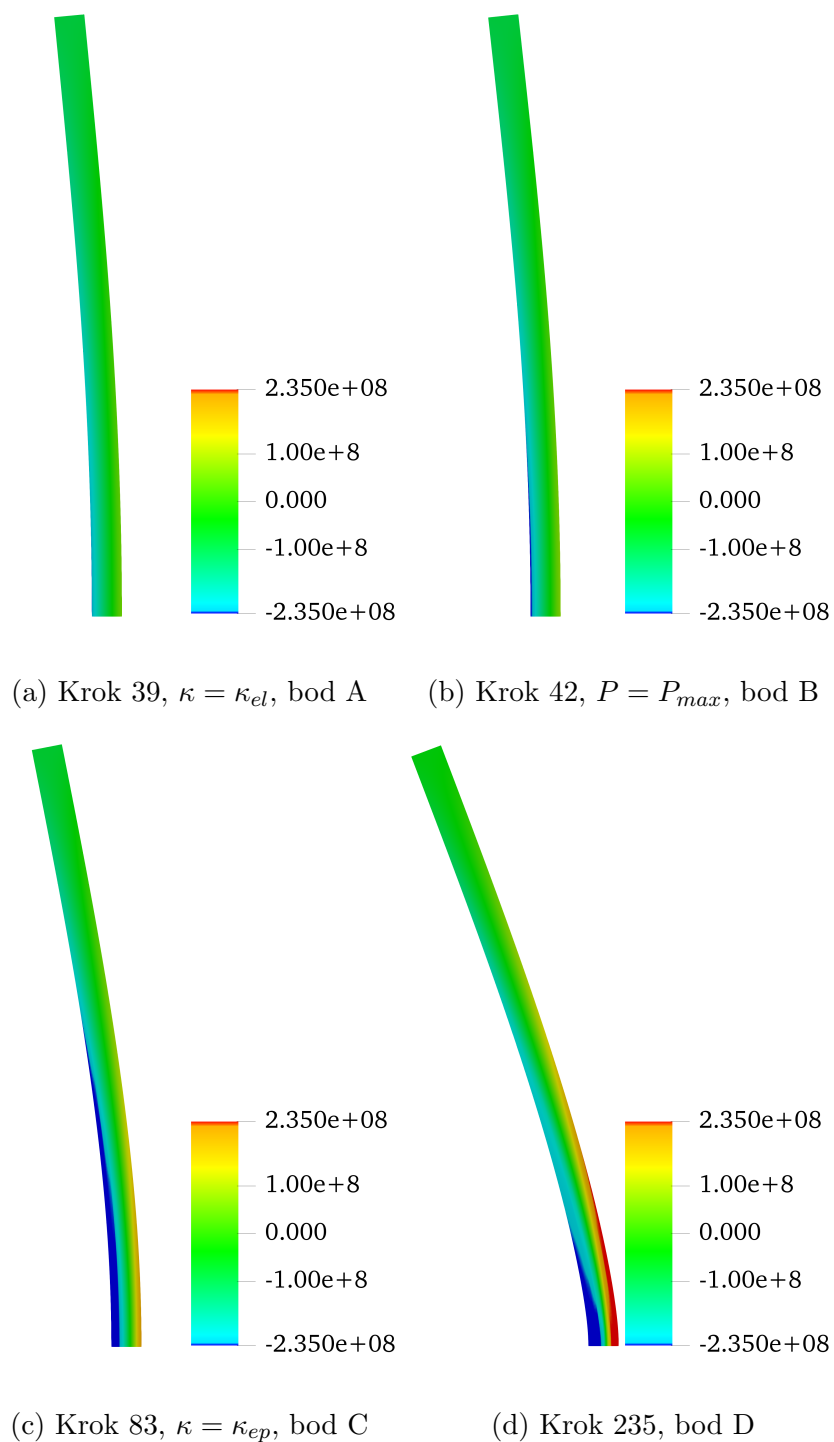
Bylo zmíněno, že kolaps konstrukce nastane v bodě D, kdy dojde ke vzniku plastického kloubu. V tomto bodě je v prostředním průřezu poprvé dosaženo mezního plastického stavu, ve kterém bude průřez setrvávat i pro větší průhyby.

Na Obr. 3.6 je vykresleno napětí  $\sigma_x$  [Pa] a deformovaný tvar pro zmíněné význačné body. Na Obr. 3.6a je zatížení na takové úrovni, že právě dochází k plastizaci tlačných vláken. Zbytek prutu je v pružném stavu. Ve stavu zobrazeném na Obr. 3.6b je dosaženo maximálního zatížení. Na Obr. 3.6c je právě dosaženo meze kluzu v tažených vláknech. Na Obr. 3.6d dochází ke kolapsu.

Na Obr. 3.7 je vykreslena norma vektoru plastické deformace pro čtyři zmíněné zatěžovací kroky. Je vidět, jak se v průběhu zatěžování plastická zóna rozšiřuje.

## 3.2 Výsledky vypočítané metodou střelby

Nyní bude proveden výpočet metodou střelby. Na Obr. 3.8 je zobrazena závislost zatížení na maximálním průhybu uprostřed prutu s uvážením pružnoplastického

Obr. 3.6: Průběh napětí  $\sigma_x$  a naznačení deformovaného tvaru v různých časech