Smykové zamykání konečných prvků

Závěrečná práce z předmětu
Univerzální principy mechaniky

Ondřej Čížek
2013

Obsah prezentace

- Nástin problému
- Ukázka z programu Ansys
- Grafy konvergence ke správnému řešení
- Odvození obdélníkového konečného prvku pomocí Lagrangerova funkcionálu
- Numerická integrace
- Zavedení Helling-Reissnerova funkcionálu

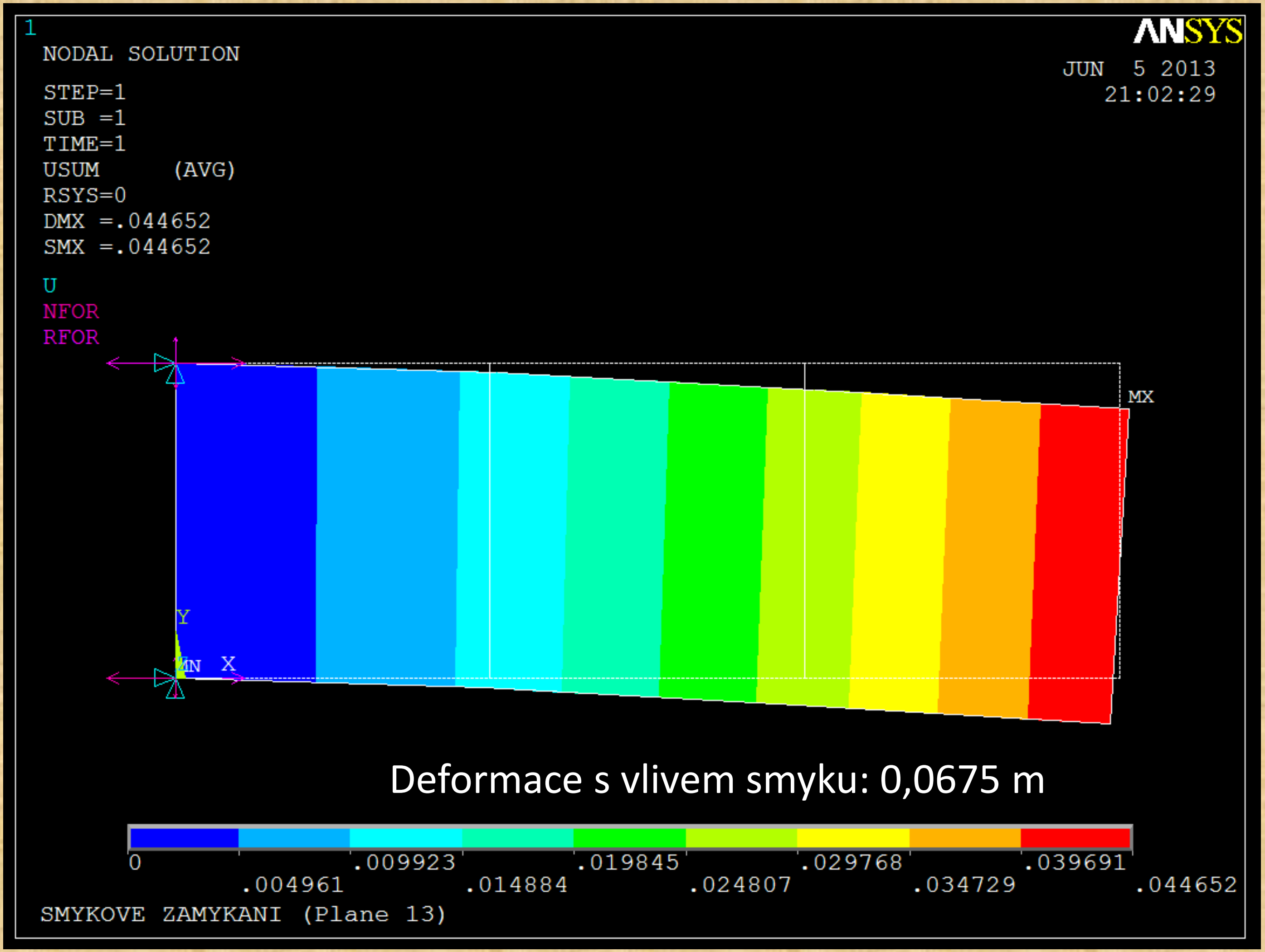
Nástin problému

- Problém hlavně pro rovinnou deformaci
- Volba lineárních funkcí -> velká tuhost pro ohyb (velký vliv smyku)

Řešení:

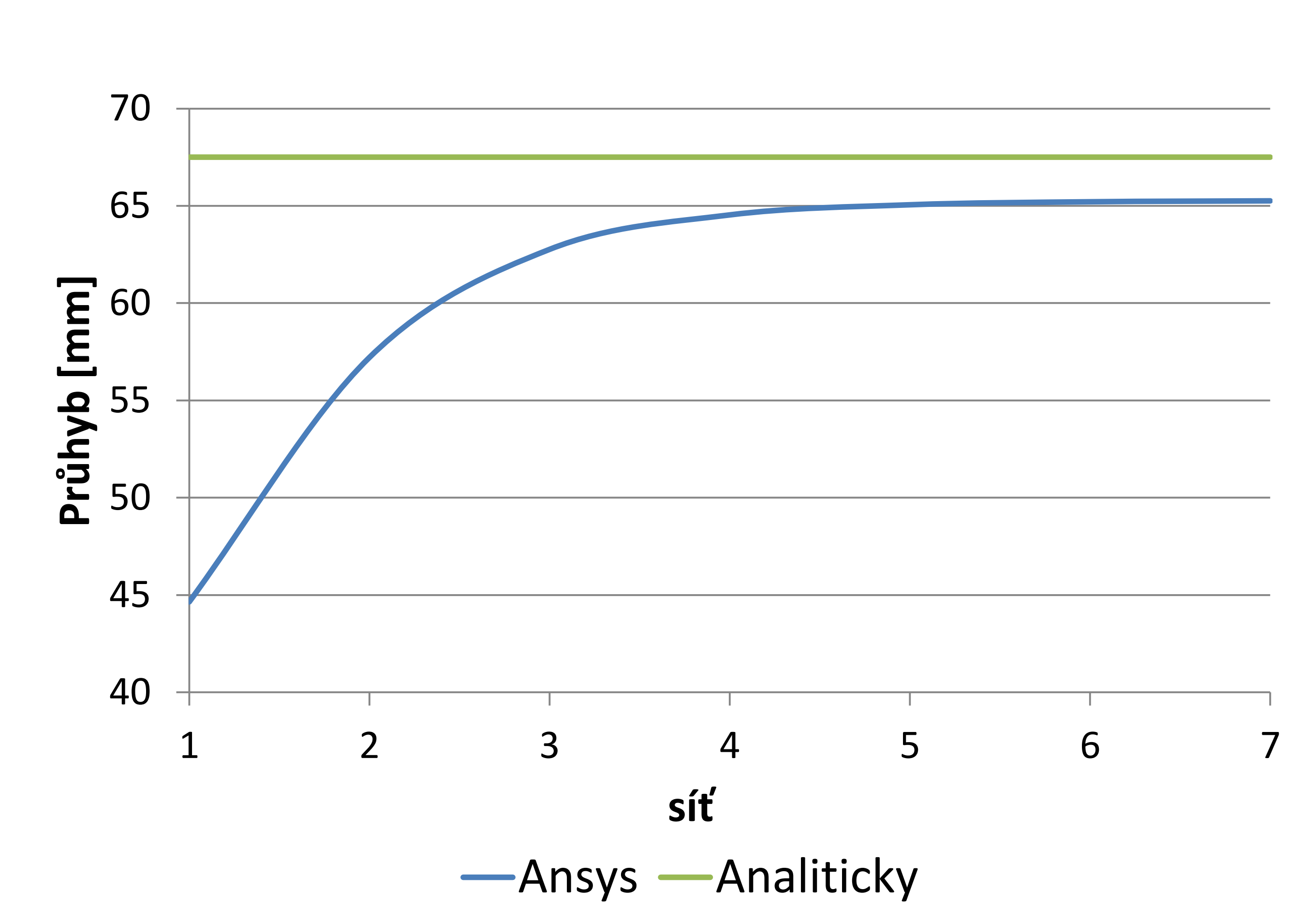
- Numerická Integracev gaussových bodech
- Přidání uzlů prvku -> rozšíření bázových funkcí
- Aproximace smyku konstantní po celém prvku

Řešení v Ansysu



3 prvky; L = 0,3 m; H = 0,1 m

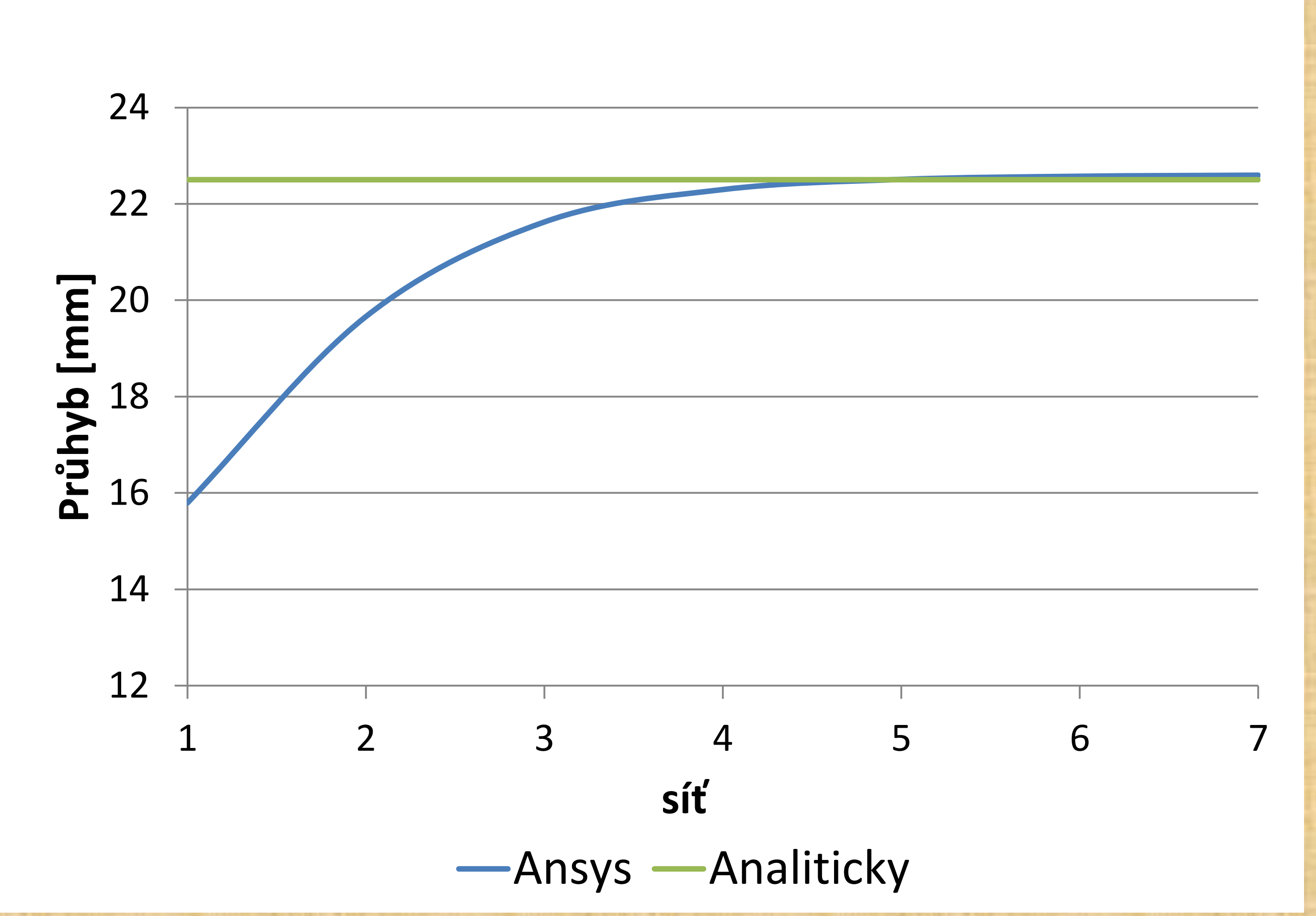
Řešení v Ansysu



Deformace s vlivem smyku: 67,5 mm

3 prvky; L = 0,3 m; H = 0,1 m

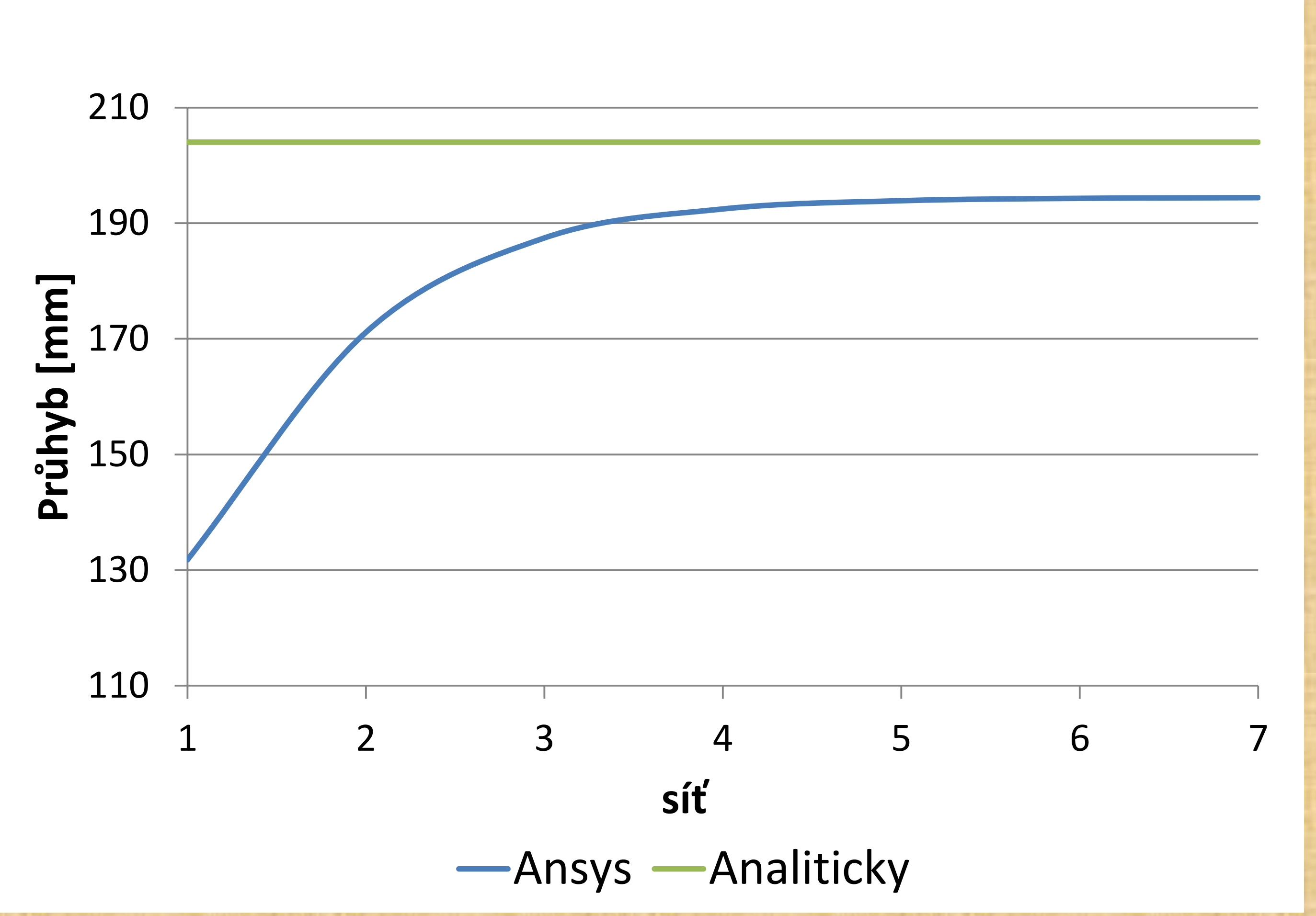
Řešení v Ansysu



Deformace s vlivem smyku: 22,5 mm

2 prvky; L = 0,3 m; H = 0,15 m

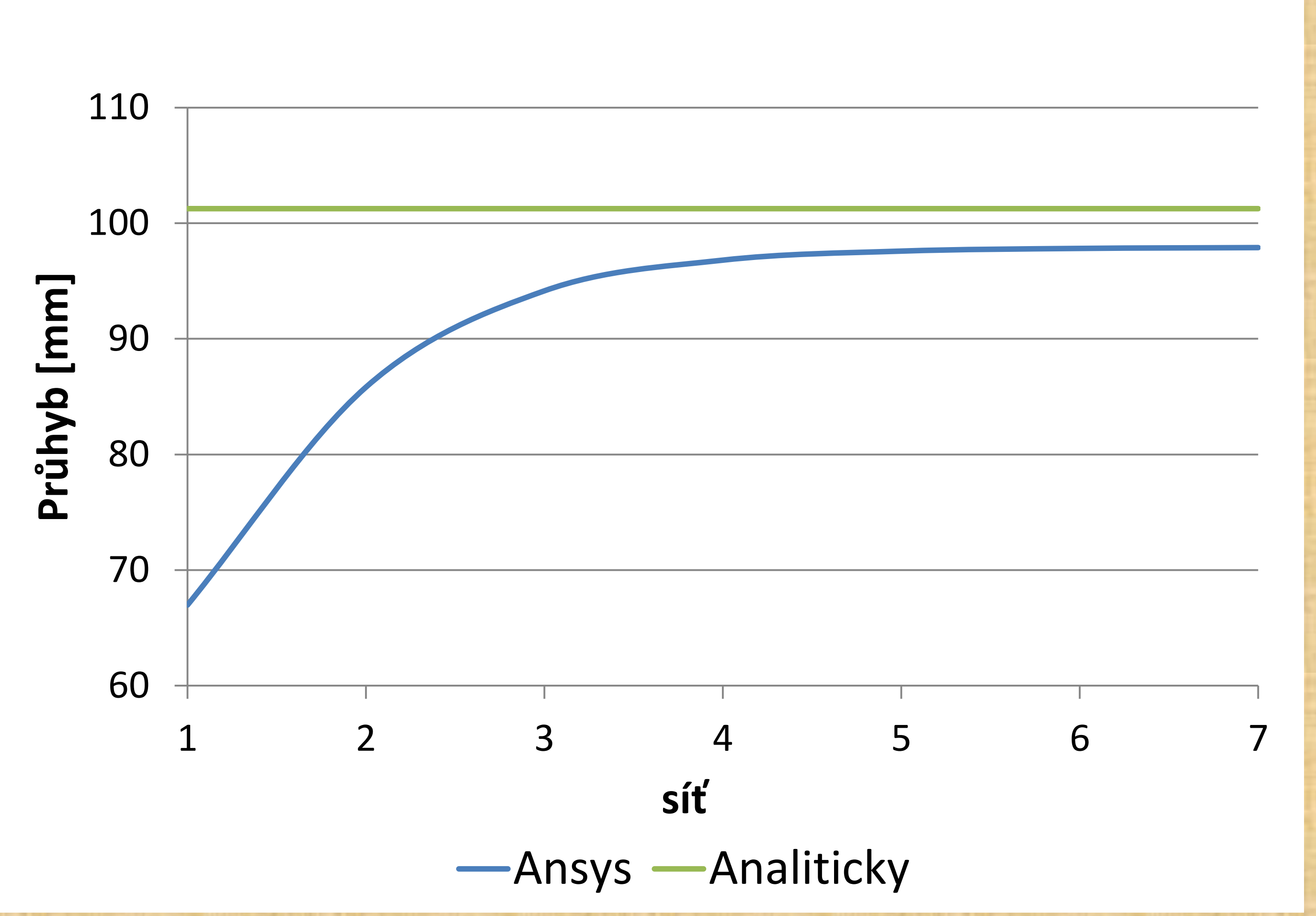
Řešení v Ansysu



Deformace s vlivem smyku: 204 mm

4 prvky; L = 0,4 m; H = 0,1 m

Řešení v Ansysu



Deformace s vlivem smyku: 101,25 mm

3 prvky; L = 0,45 m; H = 0,15 m

Odvození matice tuhosti

$$\Pi = \int_V \varepsilon : D_e : \varepsilon \, dV - \int_V b \cdot u \, dV - \int_{S_t} t \cdot u \, dS$$

Vztah poměrné deformace :

$$\varepsilon = \nabla_s \cdot u = B \cdot a = \partial \cdot N \cdot a$$

Matice tuhosti materiálu:

$$D = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\mu) \end{bmatrix}$$

Volba aproximačních funkcí:

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy$$

Matice derivací:

$$\partial = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x & 0 \\ 0 & \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y & \partial v / \partial x \end{bmatrix}$$

Škálovatelná matice:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Odvození matice tuhosti

Určení vztahů pro určení koeficientů a:

$$S \cdot a = d \rightarrow a = S^{-1} \cdot d$$

Matice S*:

$$S^{*} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}$$

Matice a:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_8 \end{bmatrix}$$

Matice S:

$$S = \begin{bmatrix} S^{*} & 0 \\ 0 & S^{*} \end{bmatrix}$$

Matice B:

$$B = \partial N = \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} u_1/\partial x & 0 & u_2/\partial x & 0 & u_3/\partial x & 0 & u_4/\partial x & 0 \\ 0 & v_1/\partial y & 0 & v_2/\partial y & 0 & v_3/\partial y & 0 & v_4/\partial y \\ u_1/\partial y & v_1/\partial x & u_2/\partial y & v_2/\partial x & u_3/\partial y & v_3/\partial x & u_4/\partial y & v_4/\partial x \end{array} \right]$$

Odvození matice tuhosti

Odvození matice tuhosti K:

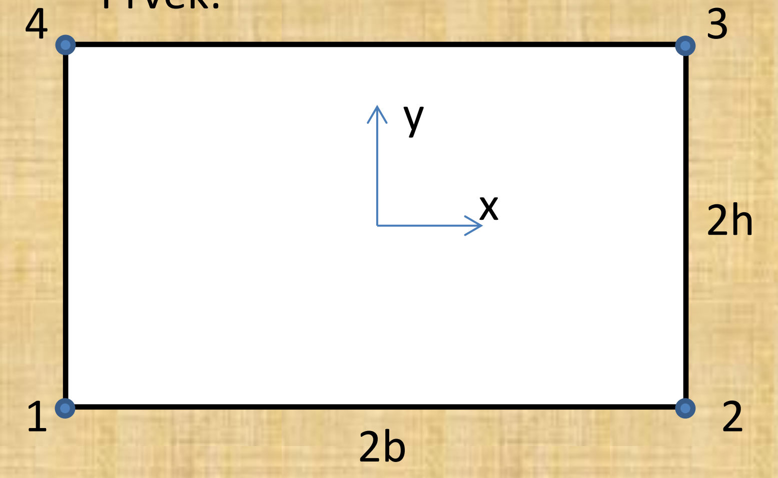
$$\frac{1}{2}\int_V \varepsilon : D_e : \varepsilon \, dV = \frac{1}{2}\int_V S^{-T} B^T d^T D_e P^{-1} B S^{-1} d \, dV = \frac{1}{2} d^T \int_V K \, dV \, d$$

Odvození matice tuhosti K:

$$K = \int_t \int_x \int_y S^{-T} B^T D_e P^{-1} B S^{-1} dy \, dx \, dt$$

$$Kd - F = 0 \quad \Rightarrow \quad d = K^{-1} F$$

Prvek:

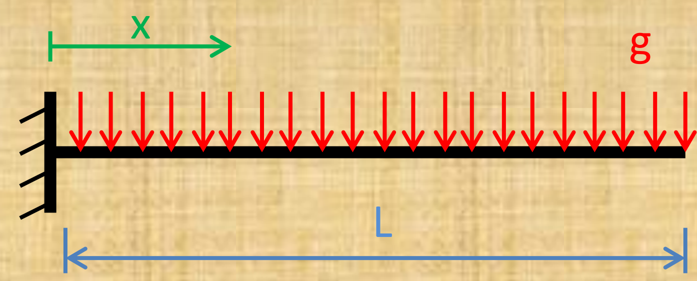


Matice B:

$$B = \frac{1}{4bh}\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} y-h & 0 & h-y & 0 & h+y & 0 & -h-y & 0 \\ 0 & x-b & 0 & -b-x & 0 & x+b & 0 & b-x \\ x-b & y-h & -b-x & h-y & x+b & h+y & b-x & -h-y \end{array}\right]$$

Zatížení

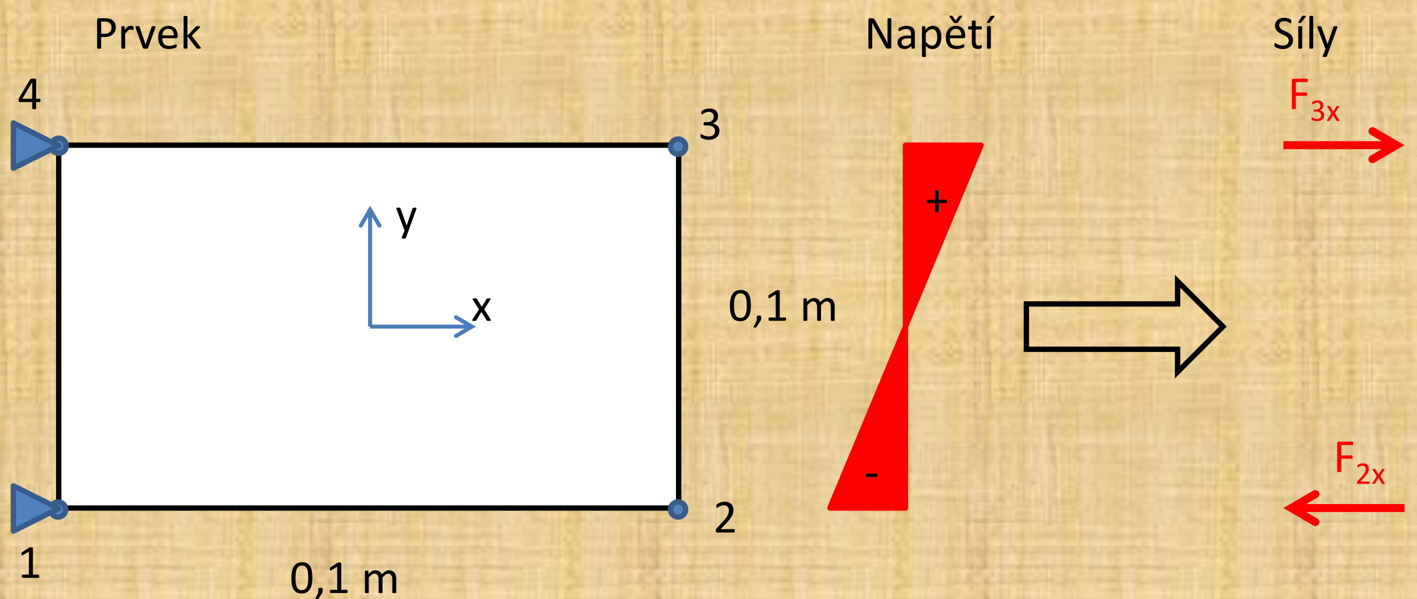
Převedení momentu na uzlová zatížení:



$$M(x) = \frac{1}{2}(L - x)^2 \cdot g$$

$$\sigma(z) = \frac{M(x)}{I_y} \cdot z$$

Síly vzniknou např. jako reakce na prostém nosníku



Výsledné matice

Matice tuhosti:

$$K = \begin{bmatrix} 4,22\cdot 10^{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4,22\cdot 10^{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4,22\cdot 10^{5} & -1,17\cdot 10^{5} & 1,11\cdot 10^{5} & 16666,67 & 0 & 0 \\ & & & 4,22\cdot 10^{5} & -16666,67 & -3,22\cdot 10^{5} & 0 & 0 \\ & & & & 4,22\cdot 10^{5} & 1,17\cdot 10^{5} & 0 & 0 \\ & & & & & 4,22\cdot 10^{5} & 0 & 0 \\ & & & & & & 4,22\cdot 10^{5} & 0 \\ & & & & & & & 4,22\cdot 10^{5} \end{bmatrix}$$

Materiálové charakteristiky:

$$E = 10^{8}\ Pa$$

$$\mu = 0,25$$

Matice posunů v uzlech:

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

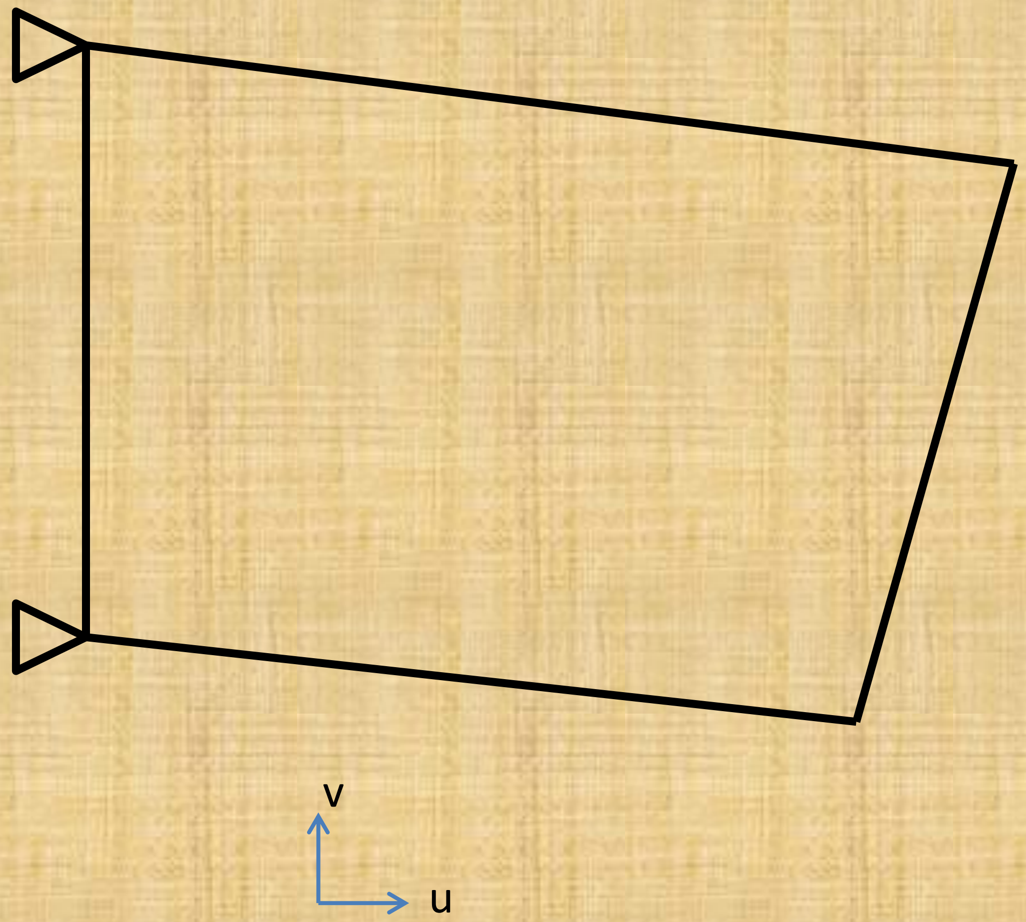
Matice zatížení:

$$F = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 2\cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deformace

Výsledky:

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 = -9{,}51 \cdot 10^{-10} \\ v_2 = -9{,}54 \cdot 10^{-10} \\ u_3 = 9{,}51 \cdot 10^{-10} \\ v_3 = -9{,}54 \cdot 10^{-10} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Poměrná přetvoření

Výpočet poměrných přetvoření:

Analytická integrace podle x a y

$$\varepsilon = BS^{-1}d$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}53251 \cdot 10^{-8} + 9{,}03174 \cdot 10^{-7} y \\ 9{,}03174 \cdot 10^{-7} - 2{,}00318 \cdot 10^{-5} x \\ -9{,}48499 \cdot 10^{-7} + 9{,}03174 \cdot 10^{-7} x - 2{,}00318 \cdot 10^{-5} y \end{bmatrix}$$

Numerická integrace v Gaussových bodech

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_i^n w_i f(x_i)$$

Pro dva body:

- váha bodu w_i = 1
- hodnota v bodě x_i = $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$
- přesná hodnota

Pro jeden bod:

- váha bodu w_i = 2
- hodnota v bodě x_i = 0

Gaussova integrace

Ve dvou Gaussových bodech:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}53 \cdot 10^{-9} \\ 9{,}03 \cdot 10^{-8} \\ -9{,}48 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix}$$

Stejné hodnoty jako u analytické integrace

Křivost: $$\kappa = \frac{\varepsilon_x}{z} = \frac{-4{,}53 \cdot 10^{-9}}{0{,}05} = 9{,}06 \cdot 10^{-8}\, m^{-1}$$

V jednom Gaussovo bodě:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9{,}07 \cdot 10^{-8} \\ 1{,}81 \cdot 10^{-6} \\ -1{,}90 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

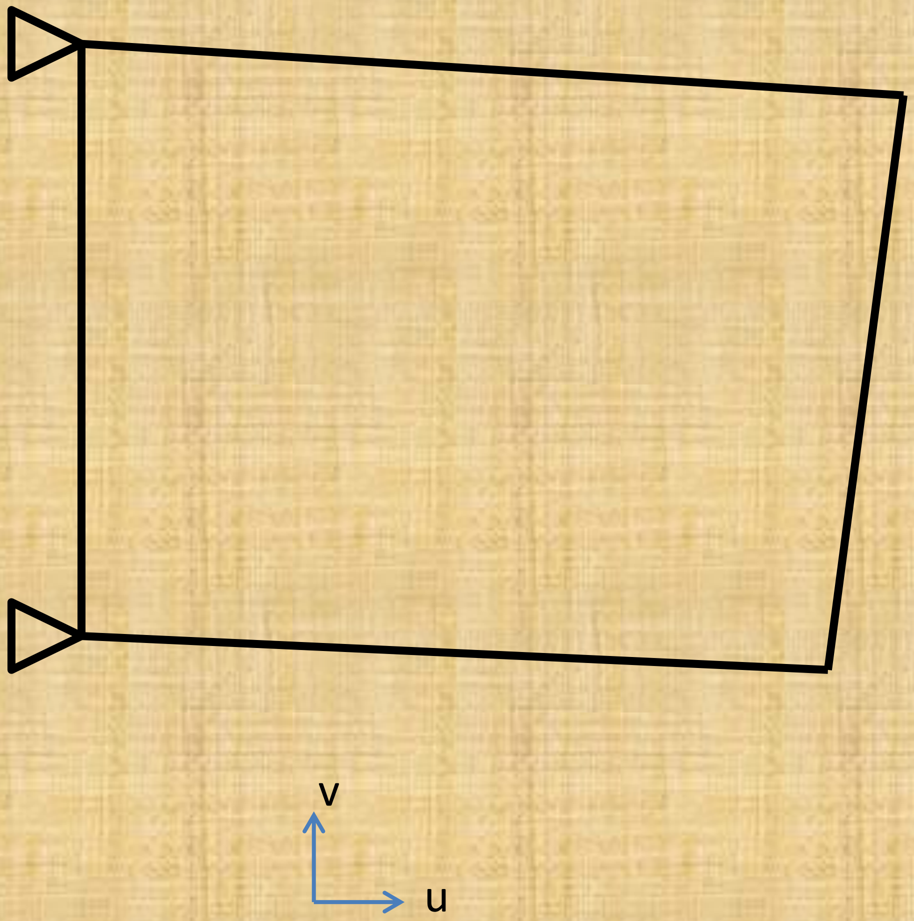
Dvojnásobné hodnoty než u analytické integrace

Křivost: $$\kappa = \frac{\varepsilon_x}{z} = \frac{-9{,}07 \cdot 10^{-8}}{0{,}05} = 1{,}814 \cdot 10^{-6}\, m^{-1}$$

Deformace – Gaussova int. v jednom bodě

Výsledky plynoucí z upravené
Matice K:

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 = 0{,}005 \\ v_2 = 0{,}005 \\ u_3 = -0{,}005 \\ v_3 = 0{,}005 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Hellingerův-Reissnerův princip

$$\Pi_{HR}(\sigma, u) = \int_V \left(\sigma : \nabla_s u - \frac{1}{2}\sigma : C_e : \sigma \right) dV - \int_V b \cdot u \, dV - \int_{S_t} t \cdot u \, dS$$

$$\Pi_{HR}(\sigma, u) = \int_V \left(\sigma^T : \nabla_s u - \frac{1}{2}\sigma^T : C_e : \sigma \right) dV - \Pi_{ext}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = N_\tau s$$

Diskretizace :

$$\nabla_s \cdot u = B \cdot d = \partial \cdot N \cdot d \qquad C = D^{-1}$$

$$N_\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{HR}(\sigma, u) = s^T \underbrace{\int_V N_\tau^T P^{-1} \partial N \, dV}_{\tilde{B}} \, d - \frac{1}{2} s^T \underbrace{\int_V N_\tau^T C_e P^{-1} N_\tau \, dV}_{\tilde{C}} \, s - \Pi_{ext}$$

Odvození matice tuhosti

Hledání bodu stacionarity:

$$\frac{\Pi_{HR}}{\partial s} = 0 = \tilde{B}\,d - \tilde{C}\,s \Rightarrow \tilde{B}\,d = \tilde{C}\,s$$

$$\frac{\Pi_{HR}}{\partial d} = 0 = s^T \tilde{B} - F_{ext} = \tilde{B}^T s - F_{ext} \Rightarrow \tilde{B}^T s = F_{ext}$$

Výsledné matice:

$$\begin{bmatrix} \tilde{C} & -\tilde{B} \\ -\tilde{B}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{ext} \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti:

$$\underbrace{-\tilde{B}^T \tilde{C}^{-1} \tilde{B}}_{K}\, d = F \Rightarrow d = K^{-1} F$$

Odvození matice tuhosti

Aproximace pomocí konstant:

$$N_\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aproximace s konstantním smykem:

$$N_\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 = 1{,}37 \cdot 10^{7} \\ v_2 = 1{,}37 \cdot 10^{7} \\ u_3 = -1{,}37 \cdot 10^{7} \\ v_3 = 1{,}37 \cdot 10^{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Někde se stala chyba …

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-9} \\ v_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-9} \\ u_3 = -1{,}2 \cdot 10^{-9} \\ v_3 = 1{,}2 \cdot 10^{-9} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Děkuji za pozornost