APOSTERIORNÍ ODHAD CHYBY ŘEŠENÍ ZÍSKANÉHO METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

SEMESTRÁLNÍ PRÁCE

Edita Dvořáková

2011

OSNOVA

- Cíl práce
- Metoda konečných prvků
  - Úloha
  - Volba konečných prvků
  - Matice tuhosti
  - Průběh řešení
- Odhad chyby
  - Teorie
  - Výsledky
- Závěr

Cíl práce

- Cílem práce bylo vyřešit metodou konečných prvků rovnici ve tvaru

$$(au'')'' = f$$

na intervalu $(0,1)$ s okrajovými podmínkami $u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0$ a pro takové a, které je po částech konstantní, v prostoru $W_0^{2,2}$ a posléze navrhnout nějaký snadno spočitatelný ukazatel chyby a posoudit jeho věrohodnost.

METODA KONEČNÝCH PRVKŮ
Úloha

- Celou rovnici můžeme vynásobit libovolnou funkcí $v(x) \in W_0^{2,2}$ a zintegrovat. Pokud dvakrát po sobě provedeme integraci per partes na levé straně rovnice, můžeme postupně vyjádřit

$$\int_0^1 (au'')'' \, v \, dx = \int_0^1 f v \, dx,$$

$$\int_0^1 (au'')' \, v' \, dx = \int_0^1 f v \, dx,$$

$$\int_0^1 au'' v'' \, dx = \int_0^1 f v \, dx.$$

- Slabou formulací úlohy je tedy nalézt $\hat{u} \in W_0^{2,2}$, aby pro libovolné $v \in W_0^{2,2}$ platilo

$$\int_0^1 au'' v'' \, dx = \int_0^1 f v \, dx.$$

METODA KONEČNÝCH PRVKŮ
Úloha

- Označíme skalární součiny

$$((u,v)) = \int_0^1 a u'' v'' \, dx$$

a

$$(f,v) = \int_0^1 f v \, dx$$

a normy

$$|||u||| = \sqrt{((u,u))}$$

a

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$$

METODA KONEČNÝCH PRVKŮ
Úloha

- Pro hledané řešení u_U musí platit

$$((u_U, v)) = (f, v),$$

$$((u_U, v)) - (f, v) = 0,$$

$$((u_U, v)) - ((\hat{u}, v)) = 0,$$

$$((u_U - \hat{u}, v)) = 0$$

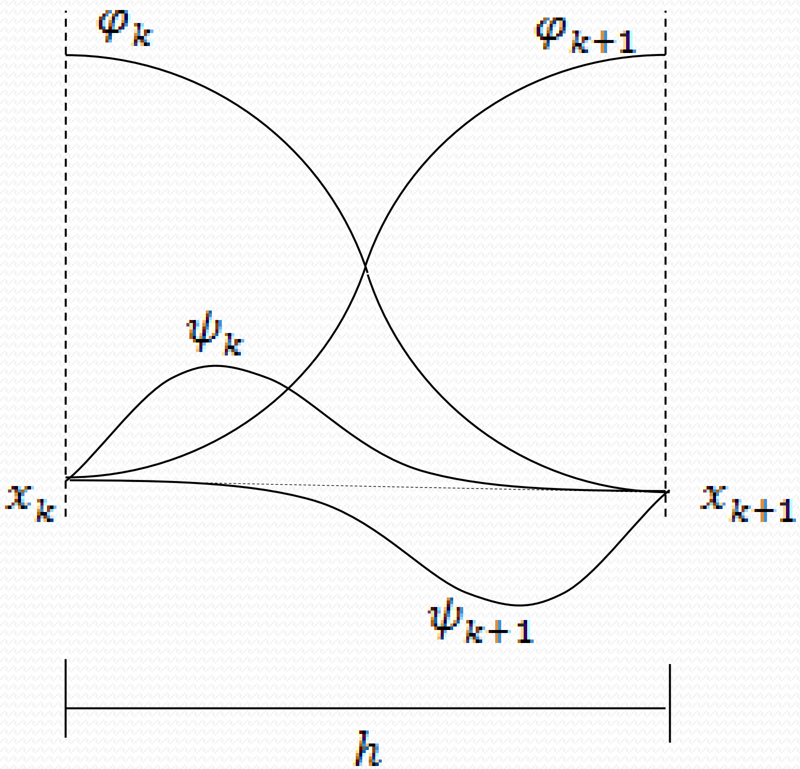
pro všechna $v \in U$. Řešení u_U je tedy kolmá projekce $\hat{u}$ do prostoru konečných prvků U ve smyslu skalárního součinu $((\cdot,\cdot))$.

METODA KONEČNÝCH PRVKŮ
Volba konečných prvků

- Naším cílem je tedy najít přibližné řešení u_U v prostoru U konečných prvků.
- Konečné prvky volíme po částech jako tzv. Hermitovy polynomy, jejichž definice se mění pouze v uzlových bodech $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$
- Na každém elementu $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ jsou dány čtyři stupně volnosti pro bázové funkce - hodnoty a derivace v krajních bodech.

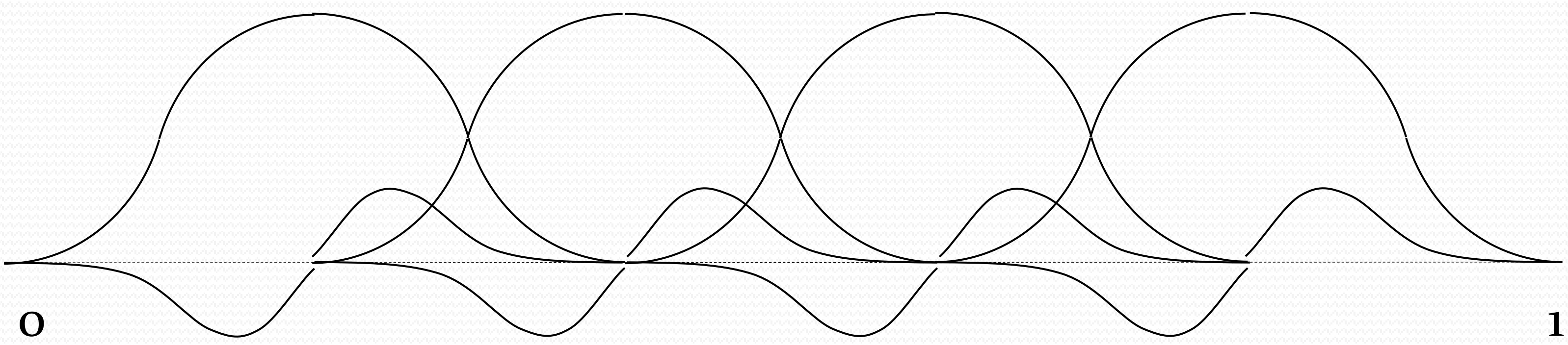
METODA KONEČNÝCH PRVKŮ
Volba konečných prvků

- Průběh funkcí na elementu délky h



METODA KONEČNÝCH PRVKŮ
Volba konečných prvků

- Průběh bázových funkcí na celém intervalu (0,1)

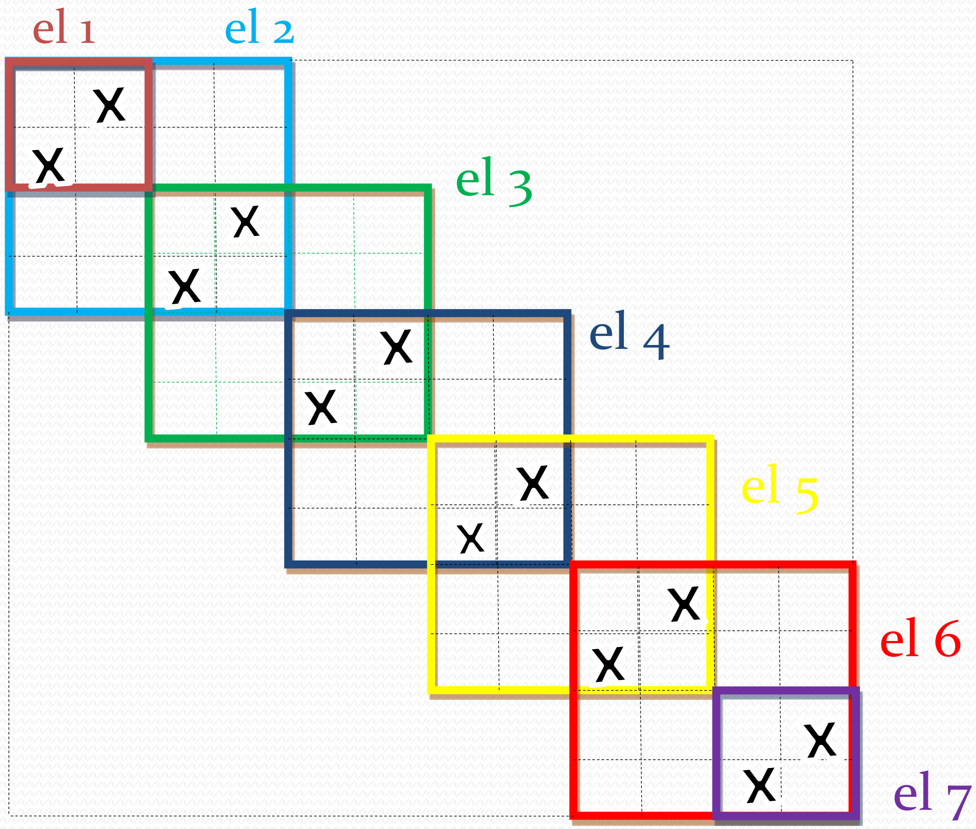


METODA KONEČNÝCH PRVKŮ
Matice tuhosti

- Využíváme tzv. matici lokálních vztahů.
- Skalární součiny $((\cdot,\cdot))$ budou nenulové pouze pro funkce na stejných nebo po sobě jdoucích intervalech.
- Integrály na pravé straně vyjadřujeme pouze přibližně.

METODA KONEČNÝCH PRVKŮ
Matice tuhosti

- Systém zapisování do matice je znázorněn na obrázku



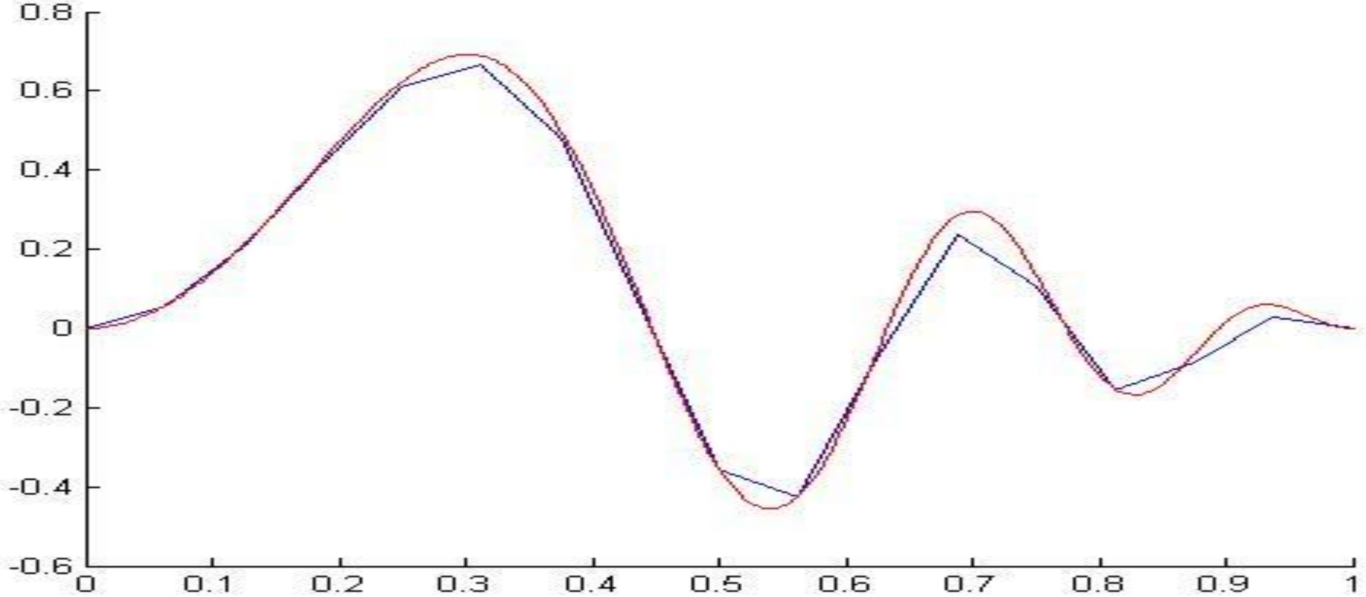
METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

Průběh řešení

- K vyřešení matice využijeme program MATLAB.
- Řešení ovlivňují pouze koeficienty připadající funkcím φ, koeficienty připadající funkcím ψ neovlivní hodnoty v uzlových bodech.
- Čím jemnější dělení použijeme, tím přesnější je řešení.

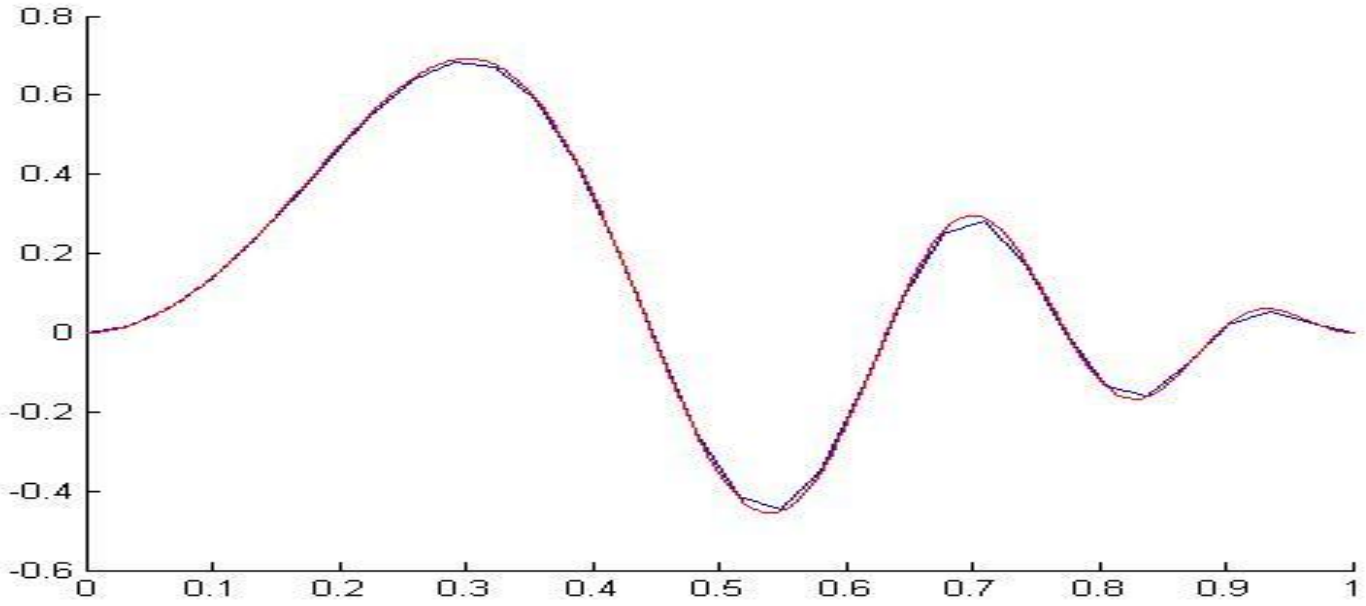
METODA KONEČNÝCH PRVKŮ
Průběh řešení

- Řešení pro funkci *f*, jejíž čtvrtá derivace $f^{IV} = (1-x)\sin k\pi x^2$, kde $k = 5$
- červená – přesné řešení
- modrá – řešení spočítané metodou konečných prvků
- Počet elementů $n = 15$



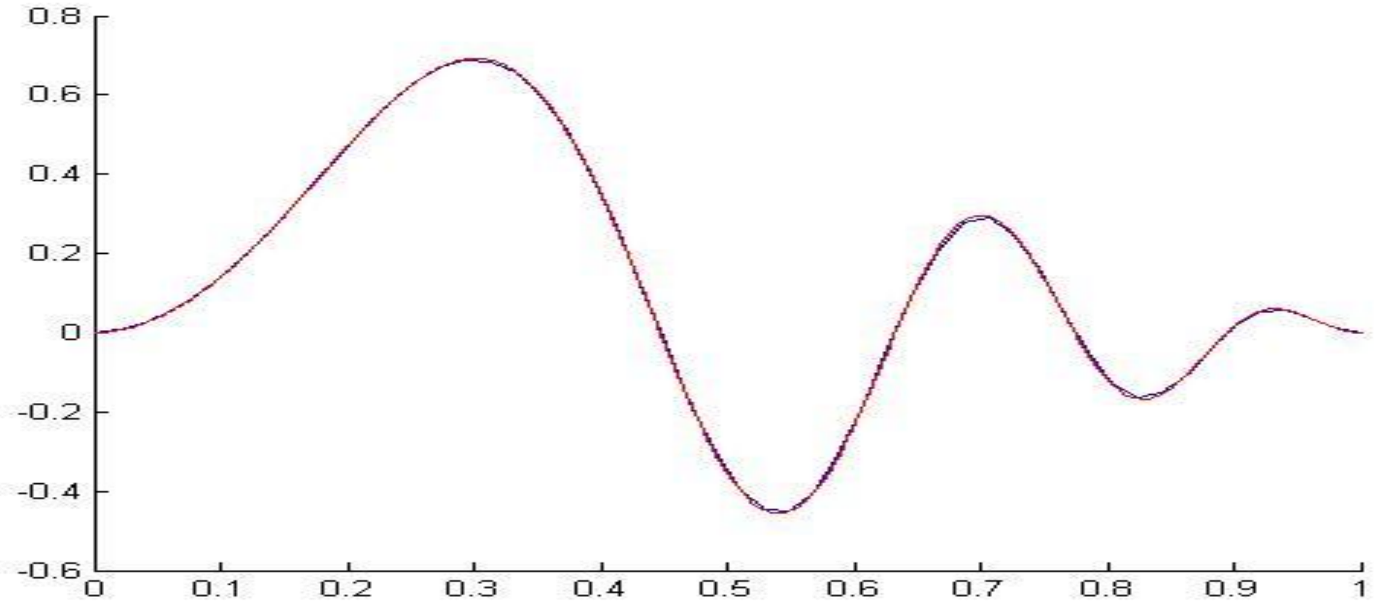
METODA KONEČNÝCH PRVKŮ
Průběh řešení

- Řešení pro funkci *f*, jejíž čtvrtá derivace $f^{IV} = (1-x)\sin k\pi x^2$, kde $k = 5$
- červená – přesné řešení
- modrá – řešení spočítané metodou konečných prvků
- Počet elementů $n = 30$



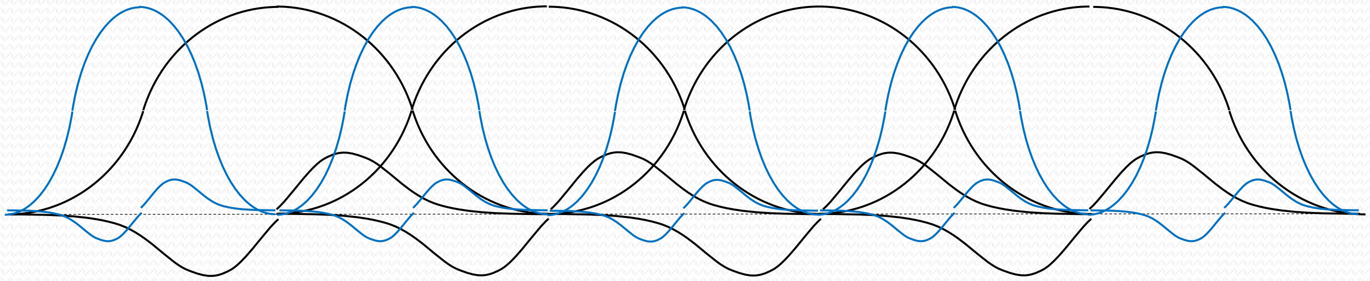
METODA KONEČNÝCH PRVKŮ
Průběh řešení

- Řešení pro funkci *f*, jejíž čtvrtá derivace $f^{IV} = (1 - x)\sin k\pi x^2$, kde $k = 5$
- červená – přesné řešení
- modrá – řešení spočítané metodou konečných prvků
- Počet elementů $n = 50$



ODHAD CHYBY
Teorie

- Pro získání ukazatele chyby budeme potřebovat zavést nový prostor W konečných prvků .
- Bázové funkce tohoto prostoru budou také tvořit po částech polynomy třetího stupně, ale délka jejich nosiče bude poloviční, tedy h.
- V následujícím obrázku jsou bázové funkce nově přidaného prostoru zobrazeny modře.



- Funkce z U a W jsou lineárně nezávislé, označíme $V = U \oplus W$.

ODHAD CHYBY
Teorie

- Počítáme odhad normy chyby $e = u_U - \hat{u}$ přibližného řešení u_U, který bude opět kolmou projekcí chyby *e* tentokrát však do rozšířeného prostoru *V*. Tuto kolmou projekci chyby nazveme . Řešíme tedy e_V

$$\big((e - e_V, v)\big) = 0,$$

$$\big((u_U - \hat{u} - e_V, v)\big) = 0,$$

$$\big((e_V, v)\big) = ((u_U - \hat{u}, v)),$$

$$\big((e_V, v)\big) = \big((u_U, v)\big) - (f, v)$$

pro všechna .
$v \epsilon V$

ODHAD CHYBY

Teorie

- Pokud porovnáme odhad chyby e_V a přesnou chybu *e* získáme

$$|||e_V|||^2 = \big((e_V, e_V)\big) = \big((e_V - e + e, e_V)\big) = \big((e, e_V)\big) \le |||e_V|||\, |||e|||,$$

tedy

$$|||e_V||| \le |||e|||$$

- Z druhé strany se dá ukázat, že

$$|||e||| \le \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} |||e_V|||,$$

kde $\beta \epsilon (0,1)$ je tzv. saturační konstanta, která je obtížně získatelná a obecně nelze její existenci zaručit.

ODHAD CHYBY
Teorie

- Odhad chyby získáme vyřešením

$$\big((e_V, v)\big) = \big((u_U, v)\big) - (f, v)$$

pro všechna $v \epsilon V$.

ODHAD CHYBY
Teorie

- V případě, že máme řešení $u_V \in V$ úlohy

$$\big((u_V, v)\big) = (f, v)$$

pro $v \in V$, a označíme-li $u_V = u_{VU} + u_{VW}$, pro které $u_{VU} \in U$ a $u_{VW} \in W$, platí

$$|||u_{VW}||| \leq |||e_V||| \leq \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} |||u_{VW}|||,$$

Kde konstanta $\gamma \in \langle 0,1)$ je dána vztahem

$$\big((u, w)\big)^2 \leq \gamma^2 |||u||| \; |||w|||$$

Pro všechna $u \in U$ a $w \in W$.

ODHAD CHYBY

Teorie

- Řešení u_ψ získáme pokud doplníme do matice tuhosti nově přidané jemnější funkce
- Levá strana matice je čistě diagonální
- Pravá strana matice je pro funkce ψ nulová – způsobeno nepřesnou integrací

ODHAD CHYBY
Výsledky

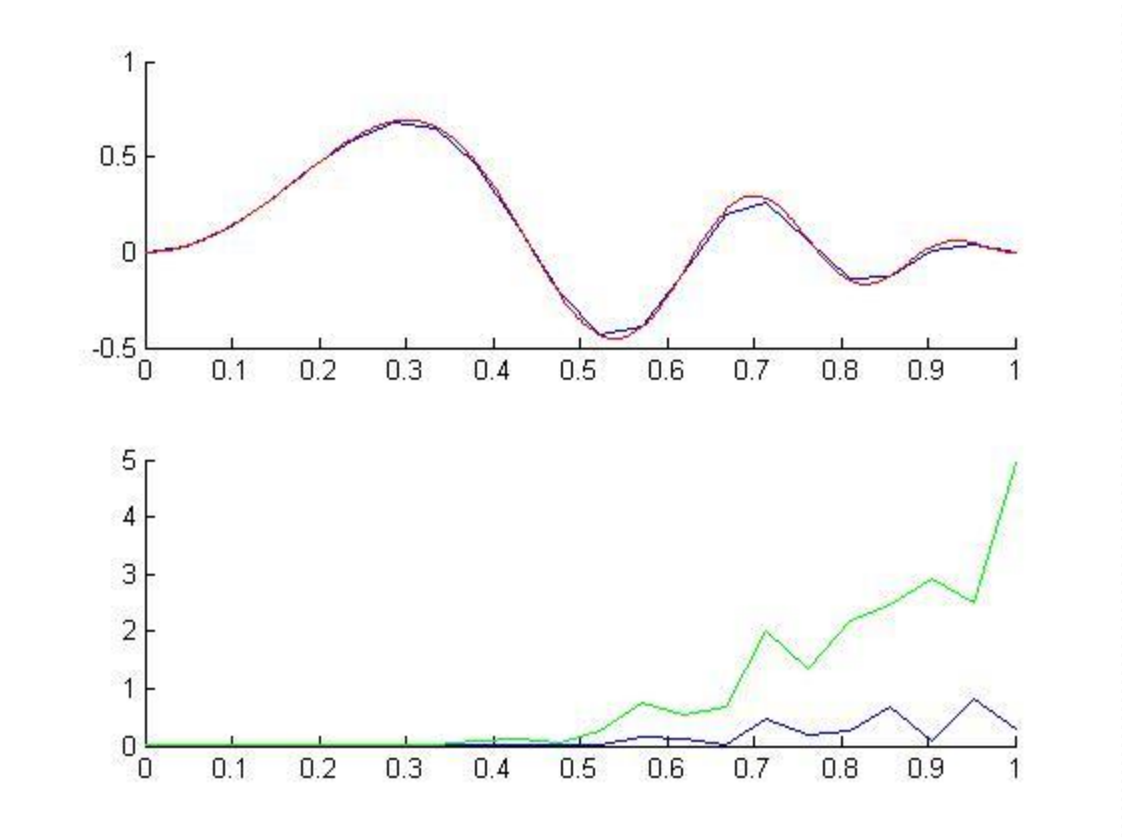
- Na následujících grafech je zobrazena opět funkce f, pro kterou platí

$$f^{IV} = (1-x)\sin k\pi x^2$$

- Dále je vykreslen průběh normy skutečné chyby *e* (zeleně) a průběh normy odhadu chyby e_V (modře)

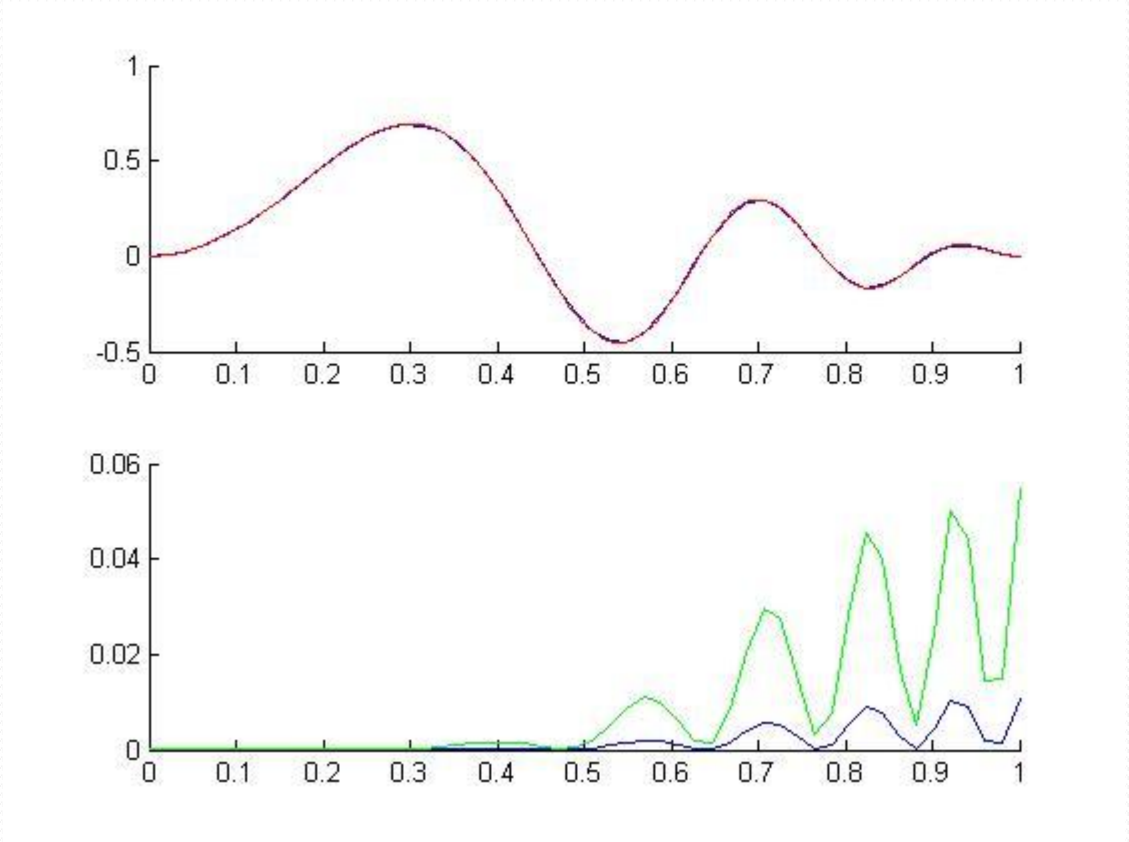
ODHAD CHYBY
Výsledky

- n=20



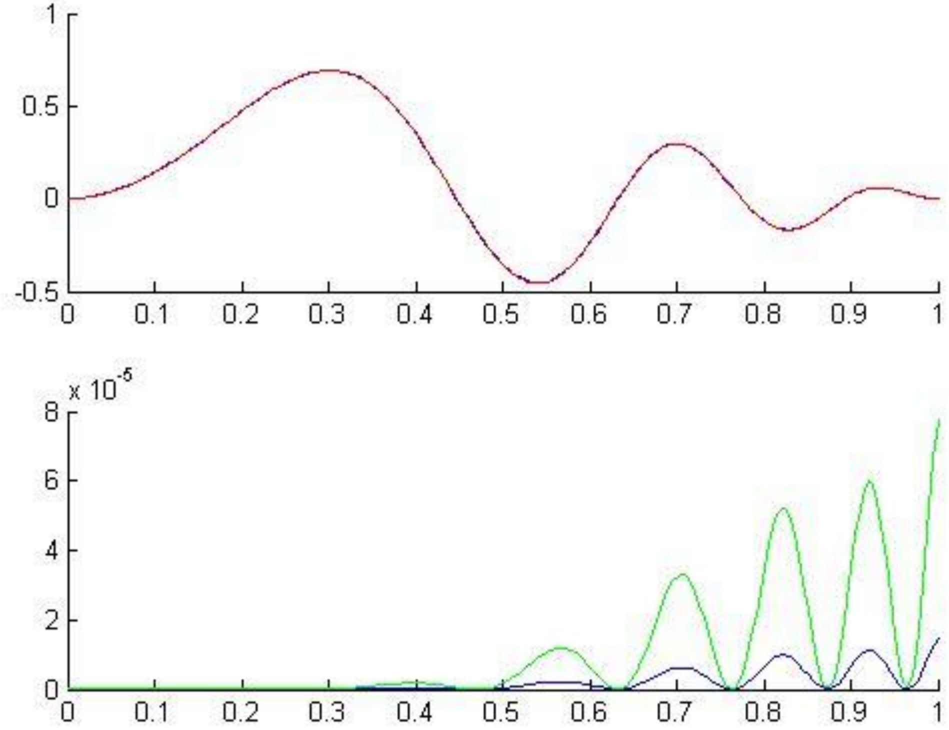
ODHAD CHYBY
Výsledky

- $n=50$



ODHAD CHYBY
Výsledky

- *n=200*



Závěr

- Vyřešili jsme zadanou rovnici metodou konečných prvků a porovnali jsme řešení se skutečným řešením
- Navrhli jsme ukazatel chyby
- Vzhledem k průběhu ukazatele chyby a skutečné chyby a vzhledem k jejich chování při zjemňování dělení můžeme považovat navržený ukazatel chyby za věrohodný

Děkuji Vám za pozornost!