Elastica

Zadal Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

1

Karel Mikeš

ZADÁNÍ

Předmětem práce bylo analyzovat, jak se bude chovat prizmatický, ideálně přímý prut, který je kolmo vetknutý do vodorovného podkladu a na jehož volný konec působí svisle dolů síla F.

Známe:

- materiálové a průřezové charakteristiky prutu (E,I)
- délku prutu L
- velikost působící síly F

Vybočení prutu uvažujeme libovolně velké.

Gravitační pole uvažujme homogenní.

Vlastní hmotnost prutu zanedbejme.

Osnova

- Rovnice
  - Odvození pro vetknutý prut
  - Odvození pro kyvadlo
    - Pomocí silové rovnováhy
    - Pomocí energetické bilance
  - Analogie rovnic
- Řešení
  - Zjednodušení rovnice – analytické řešení
  - Program pro numerické řešení
  - Kategorie řešení
  - Přehled kategorií řešení
  - Závěr

Odvození rovnice pro ohýbaný prut

Vycházeli jsme z definice derivace:

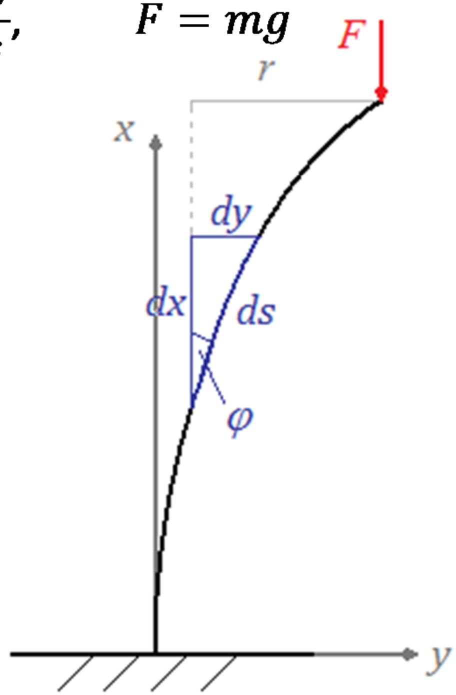
$$\frac{\partial M(s)}{\partial s} = \frac{M(s+ds)-M(s)}{ds} = \frac{F.(r-dy)-Fr}{ds} = -F\frac{\partial y}{\partial s}$$

Kde moment a sílu lze vyjádřit jako: $M = EI\kappa = EI\frac{\partial \varphi}{\partial s}$, $F = mg$

A z geometrie situace $\frac{\partial y}{\partial s} = \sin(\varphi)$

Dostáváme rovnici: $\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + c_1 \sin(\varphi) = 0}$

kde $c_1 = \frac{mg}{EI} = konst.$



Podmínky:

$\varphi(0) = 0$ ve vetknutí je nulové pootočení

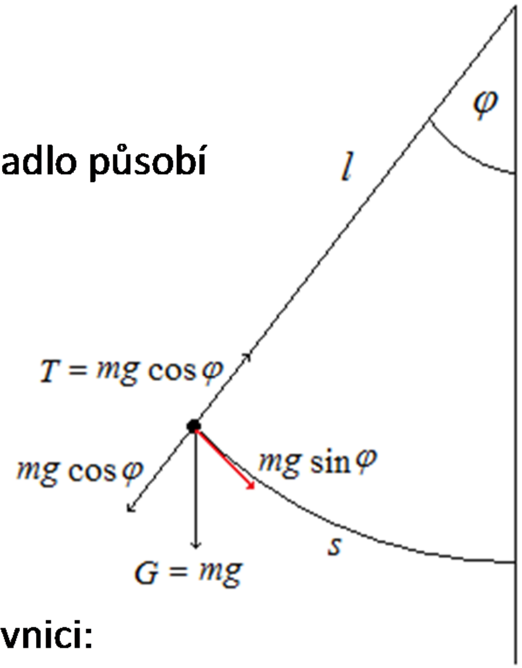
$M(L) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right|_{(L)} = 0$ na volném konci je nulový moment

Úlohu budeme řešit jako počáteční, bude tedy potřebovat počáteční podmínky, proto zavedeme novou podmínku, tedy zvolíme počáteční hodnotu derivace $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right|_{(0)} = \varphi'_0 = \kappa_0$, která odpovídá křivosti ve vetknutí.

ODVOZENÍ ROVNICE PRO MATEMATICKÉ KYVADLO POMOCÍ SILOVÉ ROVNOVÁHY·

Na hmotný bod představující matematické kyvadlo působí gravitační síla G a tahová síla vlákna T

Výslednou sílu lze vyjádřit: $F = mg\sin(\varphi)$



Dále platí: $s = l\varphi$

$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\varphi}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Z 2. Newtonova zákona $F = ma$ dostáváme rovnici:

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c_2\sin(\varphi) = 0}$$

kde $c_2 = \frac{g}{l} = konst.$

Počáteční podmínky:

Známe počáteční polohu kyvadla $\varphi(0) = \varphi_0 = 0$

A počáteční rychlost $v(0) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{(0)} = v_0$

ODVOZENÍ ROVNICE PRO MATEMATICKÉ KYVADLO POMOCÍ ENERGETICKÉ BILANCE:

Předpokládejme, že nedochází k disipacím energie, pak je vnitřní energie ΔU systému konstantní.

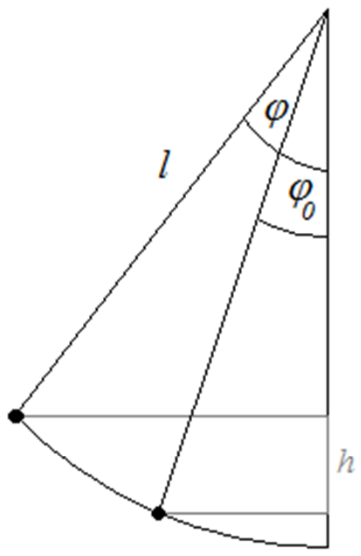
$\Delta U = E_{k\,max} = E_{p\,max}$ tedy $\frac{1}{2} m v_{max} = mgh$

$$\Rightarrow l\frac{d\varphi}{dt} = v = \pm\sqrt{2gh}\,, \qquad h = l(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}$$ derivováním dostaneme

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{-\frac{2g}{l}\sin\varphi}{2\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$ po vykrácení dostaneme

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$



$h = l(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$

Stejné počáteční podmínky:

$$\varphi(0) = \varphi_0 = 0$$

$$v(0) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{(0)} = v_0$$

Analogie rovnic:

Prut:	Kyvadlo:
Rovnice: $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} + c_1 \sin(\varphi) = 0$	Rovnice: $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + c_2 \sin(\varphi) = 0$
Konstanta: $c_1 = \dfrac{mg}{EI} \quad [m^{-2}]$	Konstanta: $c_2 = \dfrac{g}{l} \quad [s^{-2}]$
Počáteční podmínky: $\varphi(0) = 0$	Počáteční podmínky: $\varphi(0) = 0$
$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}\right\|_{(0)} = \kappa_0$	$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_{(0)} = v_0$

ŘEŠENÍ:

Zjednodušení rovnice pro malé úhly φ

$$\sin(\varphi) \cong \varphi \qquad \rightarrow \qquad \varphi'' + c\varphi = 0$$

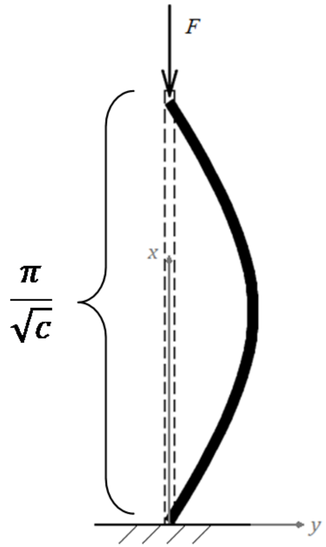
rovnice pro harmonický oscilátor

Analytické řešení: funkce ve tvaru $\varphi(x) = A_1 \cos(\sqrt{c}\, x) + A_2 \sin(\sqrt{c}\, x)$.

U kyvadla toto řešení představuje

harmonické kmity s úhlovou frekvencí $\sqrt{c}$.

Prut se prohne do tvaru funkce sinus.



Numerické řešení:

$\varphi'' + c\sin(\varphi) = 0$ analyticky řešit nelze $\Longrightarrow$ numerické řešení

Cíl:

charakteristiky prutu (E, I, L)

zatížení (F)

$\Downarrow$

PROGRAM

$\Downarrow$

funkce φ na intervalu $\langle 0, L \rangle$

(tvar prutu, obrázek)

PROGRAM

Interval $\langle 0, L\rangle$ rozdělíme na menší intervaly velikosti Δ na kterých funkci φ po částech nahradíme kvadratickou funkcí pomocí Taylorova rozvoje.

φ, φ' na počátku známe

$\varphi''(0) = -c \sin\big(\varphi(0)\big)$

Hodnoty pro dalším interval:

$$\varphi(s+\Delta) \;= \varphi(s) + \varphi'(s).\Delta + \frac{1}{2}\varphi''(s).\Delta^2$$

$$\varphi'(s+\Delta) \;= \varphi'(s) + \frac{1}{2}\varphi''(s).\Delta$$

$$\varphi''(s+\Delta) = -c \sin\big(\varphi(s+\Delta)\big)$$

Souřadnice v jednotlivých intervalech lze spočítat ze vzorců:

$$s_n = s_{n-1} + \Delta$$

$$x(s+\Delta) = x(s) + \Delta.\cos\big(\varphi(s)\big)$$

$$y(s+\Delta) = y(s) + \Delta.\sin\big(\varphi(s)\big)$$

Pokud nastane $\varphi' = 0$, potom platí $s_n = L \;\rightarrow$ Konec.

Přesnost programu:

Přesnost takto sestaveného programu lze vyjádřit následovně:

Chyba daná Taylorovým rozvojem je $O(\Delta^3) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Na intervalu $\langle 0, L \rangle$ se vyskytne chyba n-krát.

Celková chyba je tedy $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ a pro rostoucí n výsledek rychle konverguje.

Problémem je, že do takto sestaveného programu je potřeba zadat κ_0.

→ iterační algoritmus (metoda půlení intervalu)

→ pro dané L, c zjistí odpovídající κ_0.

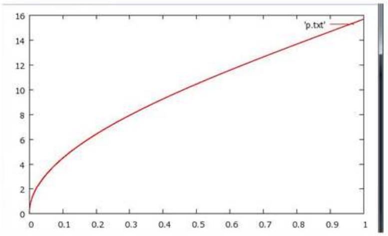
→ výrazné zvýšení časové náročnosti programu.

KATEGORIE ŘEŠENÍ

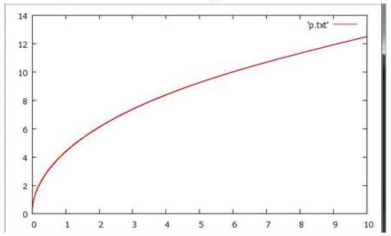
Pro ocelový prut ($E = 210\ GPa$) o průměru $d = 3$ cm a sílu $F = 100\ N$ dostáváme

$$c = \frac{mg}{EI} = \frac{F}{E\frac{\pi d^4}{64}} = 1{,}2\ 10^{-2} m^{-2} \cong 0{,}01\ m^{-2}$$

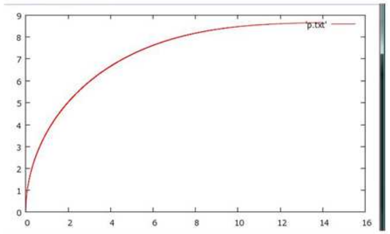
1. Kategorie



$\kappa_0 = 0{,}01$

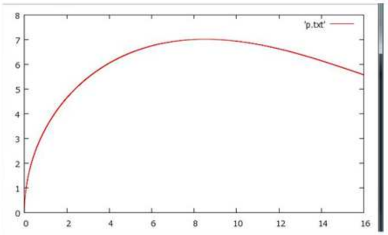


$\kappa_0 = 0{,}1$

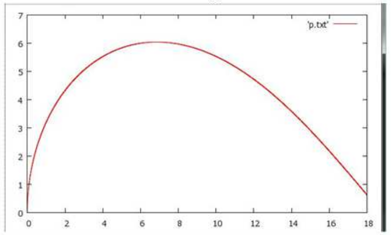


$\kappa_0 = 0{,}14$

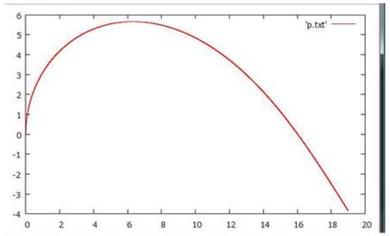
2. Kategorie



$\kappa_0 = 0{,}16$

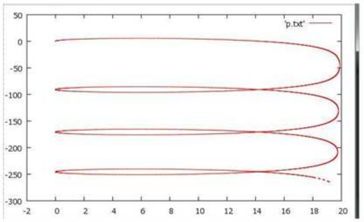


$\kappa_0 = 0{,}18$

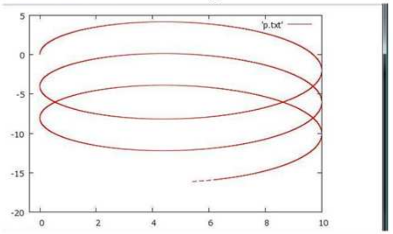


$\kappa_0 = 0{,}19$

3. Kategorie



$\kappa_0 = 0{,}201$



$\kappa_0 = 0{,}25$

Při větších κ_0 nikdy nebude splněno $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right|_{(s_n)} = 0$.

Pruty v řešení 3. kategorie nejsou konečné. Jde tedy jen o teoretická řešení a nelze je očekávat v praxi.

Pro záporné počáteční křivosti dostáváme řešení symetrická podle osy y. To plyne z faktu, že znaménko křivosti se mění s orientací osy x. Totéž pro kyvadlo kde záporná počáteční rychlost znamená opačnou orientaci osy x.

Prut se ohne tak, že $\varphi(L) = \alpha$.
Pro kyvadlo platí $\varphi \in (-\alpha, \alpha)$.

Porovnáním $E_k = E_p$ dostaneme $\frac{1}{2} m {v_0}^2 = mgh' = mgl(1 - \cos(\alpha))$

odkud ${v_0}^2 = 2gl(1 - \cos(\alpha))$, $\alpha = \arccos(1 - \frac{{v_0}^2}{2gh})$.

1-2: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dostáváme podmínku ${v_0}^2 = 2gl$, pro prut obdobně ${\kappa_0}^2 = 2c$.

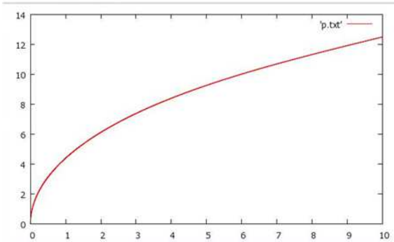
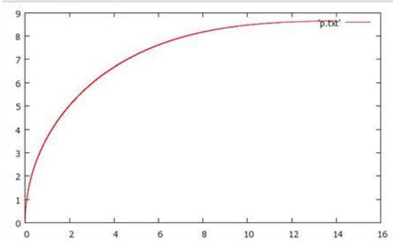
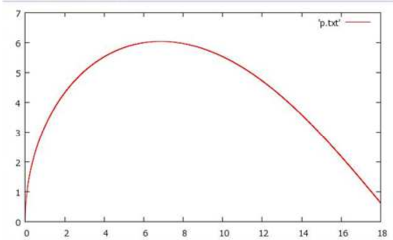
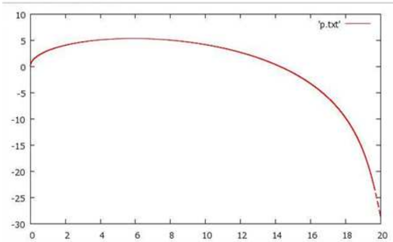
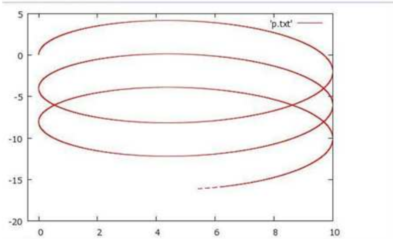
2-3: $\alpha = \pi$ dostáváme podmínku ${v_0}^2 = 4gl$, pro prut obdobně ${\kappa_0}^2 = 4c$.

Prut se bude nekonečně ohýbat se svislou asymptotou.
Kyvadlo bude mít právě tolik energie, aby dosáhlo polohy s max E_p, ale v nekonečném čase.

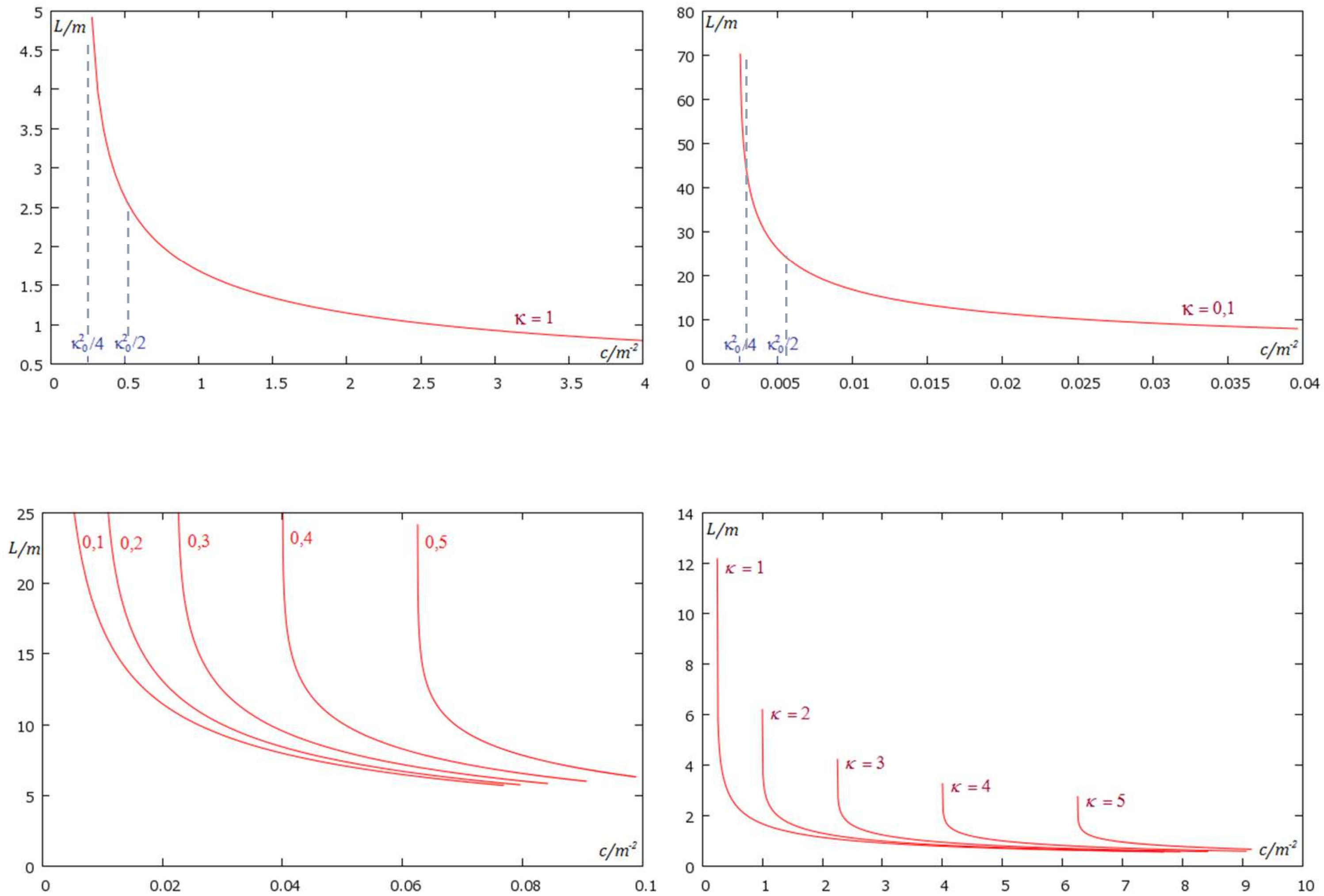
3 kategorie: nebude splněno $\varphi' = 0$.

To znamená, že neexistuje prut konečné délky, který by situaci splňoval
Pro kyvadlo to znamená, že se přehoupne přes polohu s max E_p a bude obíhat pořád dokola.

PŘEHLED KATEGORIÍ ŘEŠENÍ:

1. Kategorie $\kappa_0{}^2 < 2c$ $\varphi(L) < \frac{\pi}{2}$	
1-2: $\kappa_0{}^2 = 2c$ $\varphi(L) = \frac{\pi}{2}$	
2. Kategorie $\kappa_0{}^2 \in (2c, 4c)$ $\varphi(L) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	
2-3: $\kappa_0{}^2 = 4c$ $\varphi(L) = \pi$ Řešení pro nekonečný prut	
3. Kategorie $\kappa_0{}^2 > 4c$ Řešení pro nekonečný prut	

$L = f(c)$ při konstantní κ_0



ZÁVĚR:

- Součástí práce bylo vytvoření programu v jazyce Pascal.
- Pomocí vytvořeného programu:
  pro dané *E, I, L, F* určíme κ_0
  následně simulujeme celý prut s požadovanou přesností
- Ze získaných dat lze vytvořit obrázek např. pomocí programu Gnuplot

ZDROJE:

- Isaac Newton, The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy
- Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc., Podklady pro předmět „Pružnost a pevnost“,FSv ČVUT
- RNDr. Ladislav Hanyk, Ph.D., Podklady pro předmět „Programování pro fyziky“, MFF UK

- K tvorbě obrázků použit program Gnuplot, http://www.gnuplot.info/

Děkuji za pozornost