Řešení roštů deformační metodou

Semestrální práce ze Stavební mechaniky 3

Tomáš Medřický
Vedoucí práce: Ing. Martin Doškář Ph.D.

Červen 2020

1 Úvod

Seminární práce se především věnuje řešení roštových konstrukcí obecnou deformační metodou. Hlavním cílem práce je vytvořit s pomocí výpočetního programu MATLAB®obecný skript na řešení roštů pomocí ODM. Dalším úlohou práce je vyšetření vlivu kroucení na jednoduchém balkonovém nosníku v zaávislosti na jeho mechanických a geometrických parametrech a dále optimalizace rozmístění prutů plošně zatíženého roštu s danými rozměry.

2 Rošty a balkonové nosníky

Definice: Rošt je rovinná konstrukce sestávající zpravidla ze dvou soustav křížících se prutů zatížená kolmo ke své rovině.
Pro standardní souřadný systém v roštu tedy vzniká posouvající síla V_z a dva momenty - kroutící T_x a ohybový M_y.

3 Rošty v ODM

Cílem programu je z dodaných materiálových a geometrických informací konstrukce automaticky vypočítat vnitřní síly, neznámé posuny a vykreslit deformovaný tvar konstrukce. Obecná deformační metoda je k tomuto účelu navýsost vhodná, neboť je velmi jednoduše algoritmizovatelná.

3.1 Nastínění principu řešení

Podstata řešení je analogická té u rámových konstrukcí, rozdíl je jen v nahrazení normálové síly N momentem T_x, respektive posunem u pootočením φ_x. Závislosti průběhu jsou obdobné - síla/moment závisí na koncových deformacích a po délce prutu je rozložen rovnoměrně.

$$N^l = \frac{EA}{L}(u_2^l - u_1^l)$$

$$T_x = \frac{GI_k}{L}(\varphi_2^x - \varphi_1^x)$$

Do struktury styčníků se zadefinují globální souřadnice jednotlivých styčníků a informace o tom, jestli je příslušným pootočením φ_x , φ_y a posunu w bráněno vazbami, respektive jestli mají být považovány za neznámé ve výpočtu pro případy s kloubovým spojením. Struktura prutů nese informace o koncových styčnících, materiálu (E, ν/G, α_T) , průřezu (tvar, rozměry) a typu uložení. Každému zatížení se přiřadí subjekt, na který působí (prut, styčník) a příslušné pořadové číslo, způsob zatížení (osamělá síla, spojité zat., nesilové zatížení atd.) a intenzita v odpovídajících jednotkách.
Prvním krokem ve výpočtu je sestavení matic tuhostí Ke_i všech prutů v závislosti na globálních posunech a globálnímu zatížení a s pomocí techniky kódových čísel sestavení globální matice K. Pro názornost uvádím maticový zápis.

$$K^l \boldsymbol{u^l} = \boldsymbol{F^l}$$

S využitím standardní transformační matice v globálním SS a v závislosti na neznámých globálních posunech a globálním vektoru zatížení tedy

$$K^l T \boldsymbol{u^g} = T \boldsymbol{F^g}$$

$$T' K^l T \boldsymbol{u^g} = \boldsymbol{F^g},$$

kde člen $T'K^lT$ odpovídá zmíněné matici tuhosti Ke prutu v globálním SS.

Pro neznámé řazené v pořadí φ^x φ^y w v rozepsané formě

$$T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \boldsymbol{u^l} = \begin{bmatrix} \varphi^x_{ab} \\ \varphi^y_{ab} \\ w_{ab} \\ \varphi^x_{ba} \\ \varphi^y_{ba} \\ w_{ba} \end{bmatrix}$$

$$K^l = \begin{bmatrix} \frac{GIp}{L} & 0 & 0 & \frac{-GIp}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} \\ \frac{-GIp}{L} & 0 & 0 & \frac{GIp}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

Nápodobně sestavíme vektor pravé strany. Pro účinky prutového zatížení platí

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{g}} = T' \tilde{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{l}},$$

přičemž $\tilde{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{l}}$ je vektor koncových sil prutu určený z podmínek rovnováhy pro dané prutové zatížení

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{l}} = \begin{bmatrix} \tilde{T}^x_{ab} & \tilde{M}^y_{ab} & \tilde{Z}_{ab} & \tilde{T}^x_{ba} & \tilde{M}^y_{ba} & \tilde{Z}_{ba} \end{bmatrix}^T$$

a k sestavení potřebného vektoru zatížení odpovídajícímu matici K a vektoru neznámých u opět využijeme kódových čísel a lokalizace. Vlnka odlišuje, že původem sil/deformací je zatížení na prutu.

Neboť každý sloupec v matici tuhosti K odpovídá síle/momentu od jednotkových koncových deformací a každý řádek reflektuje konkrétní příslušnou silovou/momentovou podmínku rovnováhy na styčníku, do vektoru zatížení $\boldsymbol{F}$ vstupují ve znaménkové konvenci ODM v kladném smyslu účinky vnějšího styčníkového zatížení a v záporném smyslu koncové síly od prutového zatížení.

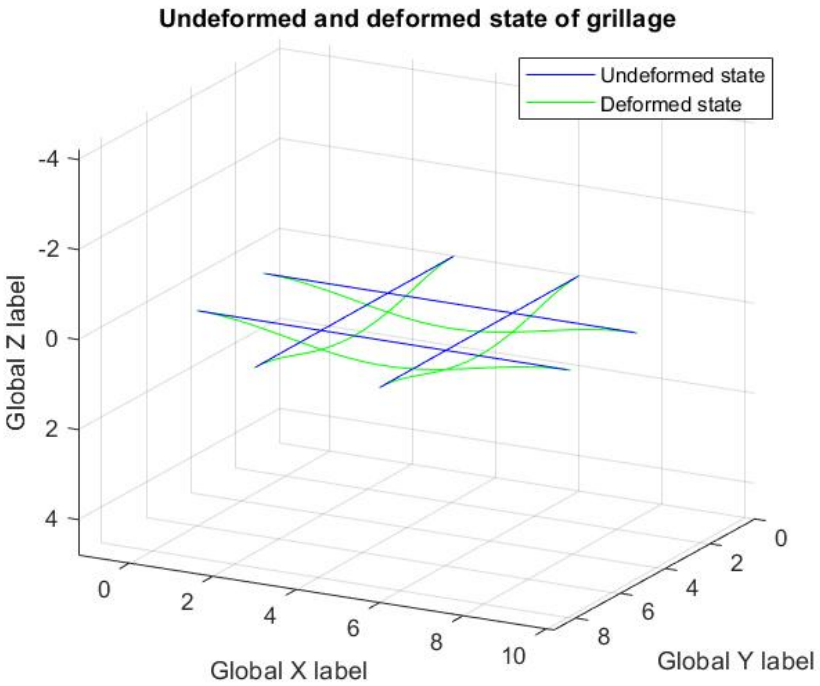
Skript 1: Příklad lokalizace koncových sil od rovnoměrného zatížení do $\boldsymbol{F}$

```
if strcmp(loading(iL).entityType , 'element')
      switch loading(iL).loadType

          case 'uniform'
                Fe{iL} = give_load_vector_for_uniform_distributed_force( beams(loading(iL).entityId), nodes, loading(iL).loadValue);
      end

      % Localization
        locN = [ nodes( beams(loading(iL).entityId).nodeIds(1) ).codeNumber, nodes( beams(loading(iL).entityId).nodeIds(2) ).codeNumber ];
        for j = 1:6
            if (locN(j)~=0)
                F(locN(j)) = F(locN(j)) - Fe{iL}(j);
            end
```

V tuto chvíli je možné vyřešit soustavu lineárních rovnic $K\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}$ a stanovit hodnoty globálních posunů a pootočení $\boldsymbol{u}$ a následně dopočítat koncové vnitřní síly všech prutů. Transformací účinků od koncových deformací a nestyčníkového zatížení zpět do lokálních souřadnic prutu a získáme síly odpovídající konvenci DM. Skutečné vnitřní síly jsou na koncovém uzlu prutu orientovány totožně, na vstupním opačně než v DM. Skutečné vnitřní síly dostaneme

$$\begin{bmatrix} T^x_{ab} \\ M^y_{ab} \\ Z_{ab} \\ T^x_{ba} \\ M^y_{ba} \\ Z_{ba} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T(K\boldsymbol{u^g} + \tilde{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{g}})$$

A lze vykreslit deformovaný tvar. Celkový průhyb v jakémkoli bodě na konstrukci získáme lineární superpozicí průhybů od koncových pootočení a posunů w a prutového zatížení. Pro odvození průběhu průhybu od nestandardních typů zatížení si můžeme pomoci symbolickými výpočtu v programu MATLAB®.

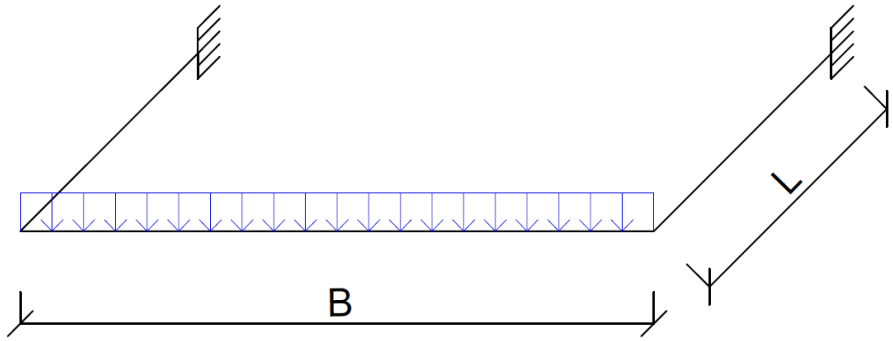


Obrázek 1: Vykreslení roštu s pruty vetknutými na koncích. Průhyby 100x přehnány

4 Parametrická studie balkonového nosníku

4.1 Úvod

Cílem parametrické studie je vyšetřit vliv kroucení na průhyb uprostřed vyložené části balkonového nosníku v závislosti na vstupních parametrech.



Obrázek 2: Balkonový nosník

4.2 Využití silové metody a redukční věty

Zadaný symetrický staticky neurčitý nosník převedeme na základní soustavu přerušením v polovině čelní části. Na základní soustavě vyřešíme průběhy vnitřních sil od skutečného zatížení a dvojic jednotkových sil X_1, torzních momentů X_2 a ohybových momentů X_3.
Soustava rovnic má standardní podobu:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{21} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \\ -\delta_{30} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Uvážíme-li vlivy kroucení, matice poddajnosti má tvar

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{B^3}{12EI} + \frac{2L^3}{3EI} + \frac{B^2L}{2GI_k} & \frac{L^2}{EI} & 0 \\ \frac{L^2}{EI} & \frac{2L}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B}{EI} + \frac{2L}{GI_k} \end{bmatrix}$$

a řešením je

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{fB^2\left(BGI_k + 6EIL\right)}{24\left(BGI_k + 2EIL\right)} \end{bmatrix}$$

Pokud se rozhodneme účinky kroucení zanedbat, dostaneme matici podadajnosti v podobě

$$C_2 = \begin{bmatrix} \frac{B^3}{12EI} + \frac{2L^3}{3EI} & \frac{L^2}{EI} & 0 \\ \frac{L^2}{EI} & \frac{2L}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B}{EI} \end{bmatrix}$$

a příslušný ohybový moment $X_3 = \dfrac{fB^2}{24}$.
S využitím PVs a redukční věty nyní již můžeme zkoumat vliv kroucení na průhyby. Se symbolickými výpočty si opět můžeme pomoci programem MATLAB®.

Pro průhyb se započítaným vlivem kroucení platí:

$$\mathrm{w}_1 = \frac{1}{GIk}\left[L\left(\frac{-B}{2}\right)\left(\frac{B^2 f}{24}\left(1+\frac{4EIL}{BGIk+2EIL}\right)-\frac{fB^2}{8}\right)\right]+\frac{\left(\frac{fB}{2}\right)L^3}{3EI}$$
$$+\frac{1}{2EI}\left[-\left(\frac{B}{2}\right)^2\left(\frac{fB^2}{24}\left(1+\frac{4EIL}{BGI_k+2EIL}\right)\right)\right]+\frac{f\left(\frac{B}{2}\right)^4}{8EI}$$

, kde názorný význam jednotlivých sčítanců odpovídá postupně průhybu uprostřed vyložené části od vzájemného pootočení rohových konců na obousměrně vetknutém nosníku, průhybu na konci konzoli zatížené osamělou silou, průhybu od momentu v reakci získaném z podmínky kompatibility pří řešení SM na konci konzoli a průhybu na konci konzoli zatížené rovnoměrným zatížením.

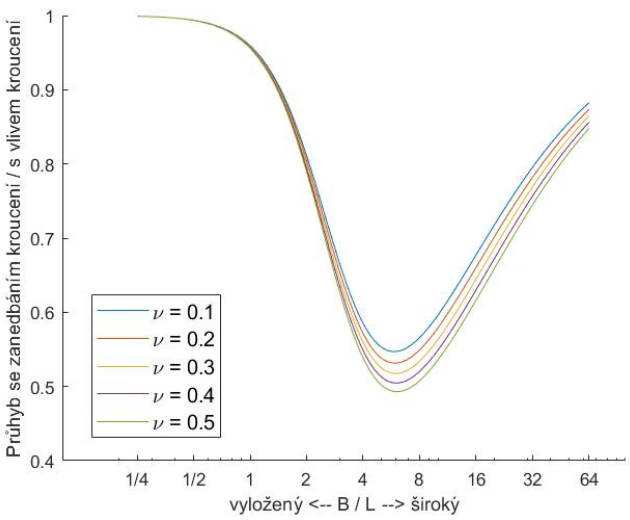
V případě zanedbání kroucení bychom dostali

$$w_2 = \frac{\left(\frac{fB}{2}\right)L^3}{3EI} - \frac{\left(\frac{B}{2}\right)^2\frac{fB^2}{24}}{2EI} + \frac{f\left(\frac{B}{2}\right)^4}{8EI}, \tag{2}$$

kde se logicky neuplatní člen od zkroucení bočních prutů.

Sledujme nyní podobnost vyjádřených hodnot $\dfrac{w_2}{w_1}$ v závislosti na poměru B/L a torzní tuhosti. Bezrozměrný relativní podíl průhybů je pro rotačně symetrické průřezy v upravené podobě roven

$$\frac{w_2}{w_1} = 1 - \frac{8B^3L(1+\nu)}{B^4+64BL^3+(10B^3L+128L^4)(1+\nu)}$$



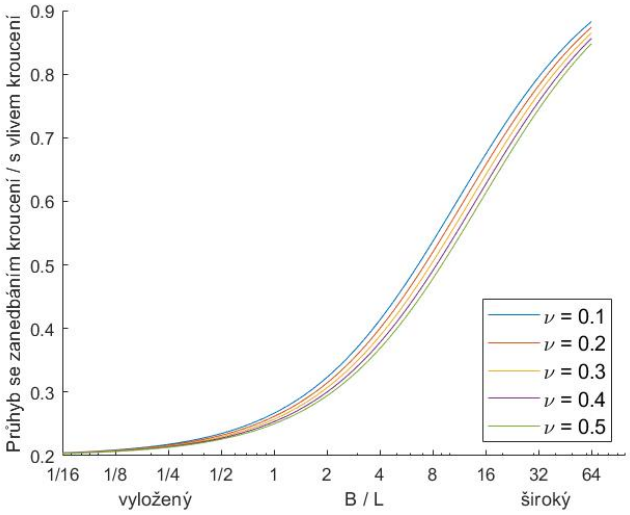
Obrázek 3: Závislost poměru B/L a G/E na chybu ve výpočtu průhybu vlivem zanedbání kroucení

Dominantní roli tedy hraje geometrie konstrukce, vlivy tuhosti kroucení jsou ale také výrazné a pro běžné případy je nelze unifikovat. Přesnost řešení konverguje ke 100 % jen v extrémních případech. Malých chyb bychom se dopouštěli jen pro velmi vyložené nosníky, kde je celkový průhyb silně ovlivněn samotnými průhyby bočních prutů společných pro oba případy, nebo u velmi širokých nosníků, kde převládá vliv průhybu od spojitého zatížení rostoucí se čvtrou mocninou B. U běžných balkonových nosníků bychom se při zanedbání kroucení dostali až pod 60% hranici věrnosti hledaného průhybu, je třeba jej tedy uvažovat.

Jelikož ke kroucení dochází pouze u bočních prutů, můžeme tutéž závislost vyšetřit na čelním prutu "očištěném"o průhyby prutů bočních.
Pro rotačně symetrické průřezy je pak podíl $\frac{w_2}{w_1}$ roven

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{B + 2L(1+\nu)}{B + 10L(1+\nu)}$$

Uspokojící přesnosti dosáhneme jen u mimořádně nízkého poměru B/L, vliv zkroucení hraje silnou roli.

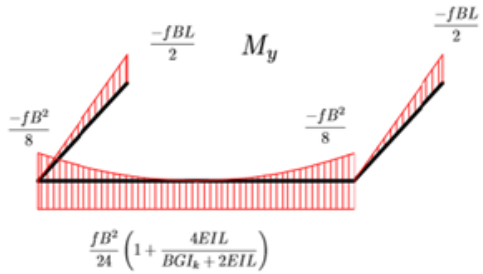


Obrázek 4: Závislost chyby vypočteného průhybu na poměru B/L a G/E při zanedbání kroucení, pouze čelní prut

Jelikož poměr $\frac{w_2}{w_1}$ v grafu 4 konverguje k 1 pro $\frac{B}{L} \to \infty$, čemuž z rovnice 2 oproštěné o průhyby od bočních prutů odpovídá známý výraz pro průhyb na oboustranně vetknutém spojitě zatíženém nosníku

$$w_2 = -\frac{\left(\frac{B}{2}\right)^2 \frac{fB^2}{24}}{2EI} + \frac{f\left(\frac{B}{2}\right)^4}{8EI} = \frac{1}{384}\frac{fB^4}{EI},$$

sledujeme, že rohové uzly se na čelním prutu v tomto případě chovají jako vetknuté.



Obrázek 5: Působící ohybové momenty

Toto chování lze dokázat i limitními přechody pro průběh ohybových momentů na čelním prutu. Pro složky průběhu momentu M_y působící na čelní prut zobrazené v obrázku 5 získané z řešení silovou metodou v rovnici 1 při fixovaném B a $L \to 0$ platí pro

krajní moment

$$\lim_{L\to 0}\left(\frac{-fB^2}{8}+\frac{fB^2}{24}\left(1+\frac{4EIL}{BGI_k+2EIL}\right)\right)=-\frac{1}{12}fB^2$$

a moment uprostřed rozpětí

$$\lim_{L\to 0}\left(\frac{fB^2}{24}\left(1+\frac{4EIL}{BGI_k+2EIL}\right)\right)=-\frac{fB^2}{24},$$

což podle očekávání odpovídá momentům na oboustranně vetknutém nosníku.

Pro limitní přechod $L \to \infty$
pro krajní moment:

$$\lim_{L\to \infty}\left(\frac{-fB^2}{8}+\frac{fB^2}{24}\left(1+\frac{4EIL}{BGI_k+2EIL}\right)\right)=0$$

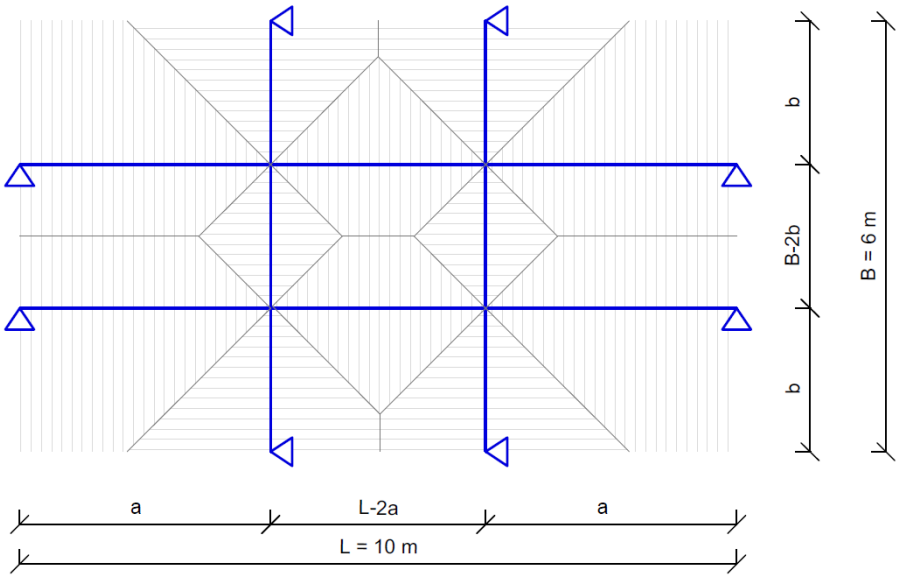
pro moment uprostřed

$$\lim_{L\to \infty}\left(\frac{fB^2}{24}\left(1+\frac{4EIL}{BGI_k+2EIL}\right)\right)=\frac{1}{8}fB^2$$

což odpovídá momentům na prostě podepřeném nosníku.

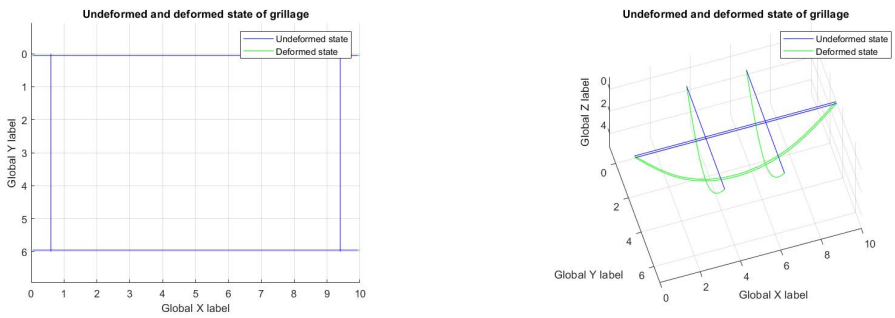
5 Optimalizace roštu s využitím funkcí programu Matlab®

Úkolem optimalizace bylo nalezení co nejefektivnějšího rozmístění jednotlivých vzájemně kolmých prutů na plošně zatížené kosntrukci tak, aby byly minimalizovány průhyby. Rošt se skládal z dvou sad prutů v každém směru kloubově podepřených na všech koncích. Úloha se numericky řešila na konstrukci o rozměrech 10 a 6 m s působením rovnoměrného plošného zatížení intenzity 10 kN/m^2. Pro zjednodušení výpočtu byla zavedena řada zjednodušujích předpokladů. Zatížení je mezi jednotlivé pruty rozloženo striktně pod úhlem 45°a dále uvažováno jako rovnoměrně spojité prostým podělením působící síly délkou zatěžovaného prutu. S ohledem na zabránění zanášení výpočetní chyby vlivy deplanace byly pro pruty zvoleny kruhové profily s mechanickými vlastnostmi odpovídajícími oceli.
Konstrukce je zadána záměrně jako dvojose symetrická. Tento fakt nám při numerickém výpočtu zásadně sníží výpočetní náročnost. U roštů symetrických podle osy x platí symetrie průhybů w a pootočení φ_x a antisymetrie pootočení φ_y, u symetrie podle osy y platí rovnost průhybů w pootočení φ_y a antisymetrie pootočení φ_x.



Obrázek 6: Schéma optimalizovaného roštu

Globálního minima pro uvedený postup dosáhne pro $a = 0,6004m$ a $b = 0.0501m$, případně podle okrajových podmínek. Druhé významné lokální minimum úlohy se dosáhne při $a = 3,5156m$ a $b = 2.95m$



(a) (b)

Obrázek 7: a) Globální minimum úlohy, b) Druhé lokální minimum

6 Závěr

Díky semestrální práci jsem si více osvojil používání programu MATLAB®, seznámil jsem se s jeho optimalizačním balíkem a naučil se jej částečně používat. Prohloubil jsem si své znalosti o roštech a naučil se je efektivně řešit deformační metodou. Seznámil jsem se navíc s webovými git repozitáři a sázecím programem LaTeX.

Děkuji vedoucímu své práce a výbornému učiteli Ing. Martinu Doškářovi, PhD. za veškeré rady a čas strávený u konzultací.