



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

---

Fakulta stavební  
Katedra mechaniky

**Bayesovská identifikace parametrů výpočetních modelů**

**Bayesian identification of computational model parameters**

Diplomová práce

Studijní program: Stavební inženýrství  
Studijní obor: Konstrukce pozemních staveb

Vedoucí práce: Ing. Anna Kučerová, Ph.D.

**Eliška Janouchová**

---

Praha 2013



## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

studijní program: Stavební inženýrství  
studijní obor: Konstrukce pozemních staveb  
akademický rok: 2013/2014

Jméno a příjmení diplomanta: Bc. Eliška Janouchová

Zadávací katedra: K 132 - Katedra mechaniky

Vedoucí diplomové práce: Ing. Anna Kučerová, Ph.D.

Název diplomové práce: Bayesovská identifikace parametrů výpočetních modelů

Název diplomové práce  
v anglickém jazyce: Bayesian identification of computational model parameters

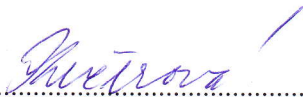
Rámcový obsah diplomové práce: Studie a srovnání metod pro efektivní propagování nejistot numerickým modelem. Srovnání těchto metod při jejich použití pro identifikaci parametrů výpočetních modelů z měření se zahrnutím nejistot v naměřených datech či v údajích poskytnutých expertem.

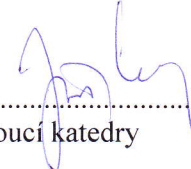
Datum zadání diplomové práce: 27.9.2013 Termín odevzdání: 20.12.2013  
(vyplňte poslední den výuky přísl. semestru)

Diplomovou práci lze zapsat, kromě oboru A, v letním i zimním semestru.


Pokud student neodevzdal diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodnil a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat diplomovou práci podruhé. Studentovi, který při opakovaném zápisu diplomovou práci neodevzdal v určeném termínu a tuto skutečnost řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, se ukončuje studium podle § 56 zákona o VŠ č.111/1998 (SZŘ ČVUT čl 21, odst. 4).

*Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.*

  
.....  
vedoucí diplomové práce

  
.....  
vedoucí katedry

Zadání diplomové práce převzal dne: 30.9.2013

  
.....  
diplomant

Formulář nutno vyhotovit ve 3 výtiscích – 1x katedra, 1x diplomant, 1x studijní odd. (zašle katedra)

Nejpozději do konce 2. týdne výuky v semestru odešle katedra 1 kopii zadání DP na studijní oddělení a provede zápis údajů týkajících se DP do databáze KOS.

DP zadává katedra nejpozději 1. týden semestru, v němž má student DP zapsanou.

(Směrnice děkana pro realizaci stud. programů a SZZ na FSv ČVUT čl. 5, odst. 7)



# SPECIFIKACE ZADÁNÍ

Jméno diplomanta: Bc. Eliška Janouchová

Název diplomové práce: Bayesovská identifikace parametrů výpočetních modelů

Základní část: Stavební mechanika podíl: 100 %

Formulace úkolů: Efektivní propagování nejistot numerickým modelem pomocí aproximace založené na polynomiálním rozvoji. Studie a srovnání různých metod pro výpočet koeficientů polynomiálního rozvoje. Využití polynomiálních aproximací při identifikaci parametrů výpočetních modelů z měření se zahrnutím nejistot v naměřených datech či v údajích poskytnutých expertem. Analýza vlastností Bayesovské identifikace parametrů se zahrnutím nejistot. Citlivostní analýza založená na polynomiálním rozvoji.

Podpis vedoucího DP: 

Datum: 27.9.2013

Případné další části diplomové práce (části a jejich podíl určí vedoucí DP):

2. Část: \_\_\_\_\_ podíl: \_\_\_\_\_ %

Konzultant (jméno, katedra): \_\_\_\_\_

Formulace úkolů: \_\_\_\_\_

Podpis konzultanta: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

3. Část: \_\_\_\_\_ podíl: \_\_\_\_\_ %

Konzultant (jméno, katedra): \_\_\_\_\_

Formulace úkolů: \_\_\_\_\_

Podpis konzultanta: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

4. Část: \_\_\_\_\_ podíl: \_\_\_\_\_ %

Konzultant (jméno, katedra): \_\_\_\_\_

Formulace úkolů: \_\_\_\_\_

Podpis konzultanta: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

Poznámka: Zadání včetně vyplněných specifikací je nedílnou součástí diplomové práce a musí být přiloženo k odevzdané práci (vyplněné specifikace není nutné odevzdat na studijní oddělení spolu s 1.stranou zadání již ve 2.týdnu semestru)

# Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedených podkladů a za odborného vedení vedoucí diplomové práce Ing. Anny Kučerové, Ph.D.

V Praze dne 20. prosince 2013

.....  
Podpis

# Poděkování

Na tomto místě upřímně děkuji Ing. Anně Kučerové, Ph.D., vedoucí mé diplomové práce, za její drahocenný čas strávený konzultacemi, hodnotné rady, motivující přístup a trpělivost. Dále děkuji své rodině za jejich podporu v průběhu mého studia.

Tato diplomová práce vznikla za podpory projektu Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS13/034/OHK1/1T/11 (Pokročilé algoritmy pro numerické simulace a modelování ve stavebním inženýrství) a projektů Grantové agentury ČR č. P105/12/1146 (Metody paralelizace inženýrských úloh využívající cenově dostupné technologie) a P105/11/0411 (Výpočetní a teoretické metody pro nelineární materiálové modely s nejistými parametry).

# Abstrakt

Z hlediska spolehlivosti se musí při návrhu konstrukcí zohlednit mnoho důležitých faktorů. Náležitá analýza spolehlivosti vyžaduje určit nejistoty, které se těchto faktorů týkají, ať se jedná o podmínky okolního prostředí či o materiálové vlastnosti. Značný vývoj efektivních metod pro stochastické modelování umožnil propagaci nejistot u složitých modelů. Cílem této diplomové práce je shrnout a porovnat několik přístupů používaných pro analýzu nejistot a identifikaci parametrů výpočetních modelů se zahrnutím nejistot. Společným znakem všech zkoumaných metod je nahrazení plného numerického modelu jeho polynomiální aproximací pro snížení výpočetní náročnosti. Vyšetřované metody pro sestavení polynomiálního chaosu jsou polynomiální regrese založená na metodě Latin Hypercube Sampling, stochastická kolokační metoda a stochastická Galerkinova metoda. Vytvořený náhradní model může být následně použit v kombinaci s metodou Monte Carlo nebo Monte Carlo s Markovovými řetězci pro určení nejistoty v odezvě modelu, vyhodnocení pravděpodobnosti poruchy konstrukce nebo upřesnění nejistot ve vstupních parametrech modelu založených na experimentálně naměřených datech. Výhody a nevýhody těchto metod jsou demonstrovány v porovnání s tradiční metodou Monte Carlo na jednoduchém ilustrativním příkladu rámové konstrukce.

## Klíčová slova

propagace nejistot, analýza spolehlivosti, stochastické modelování, lineární regrese, stochastická kolokační metoda, stochastická Galerkinova metoda, bayesovská identifikace, Monte Carlo pro Markovovy řetězce

# Abstract

Regarding the structural reliability many important factors have to be taken account in designing of structures. An appropriate reliability analysis requires propagation of the uncertainties in these factors such as the environmental conditions as well as structural properties. An extensive development of efficient methods for stochastic modelling enabled uncertainty propagation through complex models. The aim of this diploma thesis is to review and compare several approaches for uncertainty analysis and parameter identification involving uncertainties. The common attribute of all the methods under the study is replacement of the full numerical model by its polynomial approximation in order to reduce the computational effort. The investigated methods for construction of polynomial chaos expansion are polynomial regression based on Latin Hypercube Sampling, stochastic collocation method and stochastic Galerkin method. The obtained surrogate model can be then used within Monte Carlo or Markov chain Monte Carlo sampling so as to quantify the uncertainty in model output, to evaluate the structural failure probability or to update the uncertainty in model inputs based on experimental data. The advantages and disadvantages of these methods are demonstrated within the comparison with the traditional Monte Carlo method on a simple illustrative example of a frame structure.

## Keywords

uncertainty propagation, reliability analysis, stochastic modelling, polynomial chaos expansion, linear regression, stochastic collocation method, stochastic Galerkin method, Bayesian identification, Markov chain Monte Carlo

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>16</b>
<b>I</b>	<b>Analýza nejistot a výpočet spolehlivosti konstrukcí</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>Analýza nejistot</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>Polynomiální chaos</b>	<b>21</b>
3.1	Hermiteovy polynomy a normální rozdělení . . . . .	22
3.2	Legendreovy polynomy a rovnoměrné rozdělení . . . . .	23
3.3	Výpočet koeficientů polynomiálního chaosu . . . . .	24
3.3.1	Lineární regrese . . . . .	24
3.3.2	Stochastická kolokace . . . . .	25
3.3.3	Stochastická Galerkinova metoda . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Porovnání metod na inženýrské konstrukci</b>	<b>27</b>
4.1	Výsledky . . . . .	30
4.1.1	Hermiteovy polynomy . . . . .	31
4.1.2	Legendreovy polynomy . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Shrnutí</b>	<b>45</b>
<b>II</b>	<b>Bayesovská identifikace parametrů</b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>Bayesovský přístup</b>	<b>48</b>
<b>7</b>	<b>Monte Carlo pro Markovovy řetězce</b>	<b>51</b>
<b>8</b>	<b>Citlivostní analýza</b>	<b>55</b>
8.1	Korelace . . . . .	56
8.2	Indexy citlivosti a ANOVA dekompozice . . . . .	56
<b>9</b>	<b>Aplikace na inženýrské konstrukci</b>	<b>59</b>
9.1	Apriorní rozdělení . . . . .	59



9.2	Citlivostní analýza . . . . .	60
9.3	Věrohodnostní funkce . . . . .	62
9.4	Posterioerní rozdělení . . . . .	67
9.5	Víceparametrický model . . . . .	72
<b>10</b>	<b>Shrnutí</b>	<b>74</b>
<b>11</b>	<b>Závěr</b>	<b>76</b>
<b>A</b>	<b>Implementace metod</b>	<b>81</b>

# Seznam tabulek

4.1	Materiálové a geometrické parametry a jejich nejisté odchylky. . . . .	28
4.2	Zatížení a odchylky. . . . .	29
4.3	Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky složek vektoru přemístění pro případ <b>předepsaných histogramů</b> pro parametry modelu $m$ . . . . .	32
4.4	Časová náročnost, chyby v odhadech rezervy spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy pro případ <b>předepsaných histogramů</b> pro parametry modelu $m$ . . . . .	33
4.5	Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky složek vektoru přemístění pro případ <b>nových histogramů</b> pro parametry modelu $m$ . . . . .	35
4.6	Časová náročnost, chyby v odhadech rezervy spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy pro případ <b>nových histogramů</b> pro parametry modelu $m$ . . . . .	36
4.7	Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky složek vektoru přemístění pro případ <b>normálního rozdělení</b> parametrů modelu $m$ . . . . .	38
4.8	Časová náročnost, chyby v odhadech rezervy spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy pro případ <b>normálního rozdělení</b> parametrů modelu $m$ . . . . .	40
4.9	Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky složek vektoru přemístění pro případ <b>předepsaných histogramů</b> pro parametry modelu $m$ při aplikaci Legendreových polynomů. . . . .	41
4.10	Časová náročnost, chyby v odhadech rezervy spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy pro případ <b>předepsaných histogramů</b> pro parametry modelu $m$ při aplikaci Legendreových polynomů. . . . .	42
4.11	Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky složek vektoru přemístění pro případ <b>rovnoměrného rozdělení</b> parametrů modelu $m$ . . . . .	43
4.12	Časová náročnost, chyby v odhadech rezervy spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy pro případ <b>rovnoměrného rozdělení</b> parametrů modelu $m$ . . . . .	44
9.1	Rozptyly jednotlivých přemístění. . . . .	60
9.2	Výsledky citlivostní analýzy provedené pomocí Spearmanova koeficientu pořadové korelace. . . . .	61
9.3	Výsledky citlivostní analýzy při uvažování chyb měření provedené pomocí Spearmanova koeficientu pořadové korelace. . . . .	61

9.4	Výsledky citlivostní analýzy modelu <b>B</b> provedené pomocí metody ANOVA s použitím polynomiálního chaosu (PCE) a metody Monte Carlo (MC). . . .	62
9.5	Parametry obdržných Markovových řetězců: počet vzorků $s$ , míra přijetí AR, časová náročnost, průměr $\mu_{\mathbf{X}}$ a směrodatná odchylka $\sigma_{\mathbf{X}}$ odpovídajícího navzorkovaného posteriorního rozdělení. . . . .	70

# Seznam obrázků

4.1	Schéma rámové konstrukce. . . . .	27
4.2	Histogramy nejistých materiálových a geometrických parametrů a odpovídající kumulativní distribuční funkce. . . . .	28
4.3	Histogramy nejistých parametrů zatížení a odpovídající kumulativní distribuční funkce. . . . .	29
4.4	Funkce hustoty pravděpodobnosti posunu $u_A$ pro případ <b>předepsaných histogramů</b> pro parametry modelu $m$ . . . . .	32
4.5	Funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti $Z$ pro případ <b>předepsaných histogramů</b> pro parametry modelu $m$ . . . . .	34
4.6	Transformační vztahy pro předepsané histogramy. . . . .	34
4.7	Nové histogramy parametrů modelu s odpovídajícími kumulativními distribučními funkcemi a transformačními vztahy. . . . .	35
4.8	Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu $u_A$ pro případ <b>nových histogramů</b> pro parametry modelu $m$ . . . . .	36
4.9	Funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti $Z$ pro případ <b>nových histogramů</b> pro parametry modelu $m$ . . . . .	37
4.10	Funkční závislost $Z$ na parametrech modelu $m$ (a), na standardních proměnných $\xi$ v případě předepsaných histogramů (b), nových histogramů (c) a normálního rozdělení (d). . . . .	38
4.11	Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu $u_A$ pro případ <b>normálního rozdělení</b> parametrů modelu $m$ . . . . .	38
4.12	Porovnání odhadů průměru posunu $u_A$ pomocí PCE a MC s různým počtem simulací v případě <b>předepsaných histogramů</b> (a), <b>nových histogramů</b> (b) a <b>normálního rozdělení</b> (c). . . . .	39
4.13	Funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti $Z$ pro případ <b>normálního rozdělení</b> parametrů modelu $m$ . . . . .	40
4.14	Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu $u_A$ pro případ <b>předepsaných histogramů</b> pro parametry modelu $m$ při aplikaci Legendreových polynomů. . . . .	41
4.15	Funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti $Z$ pro případ <b>předepsaných histogramů</b> pro parametry modelu $m$ při aplikaci Legendreových polynomů. . . . .	42

4.16	Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu $u_A$ pro případ <b>rovnoměrného rozdělení</b> parametrů modelu $\mathbf{m}$ . . . . .	43
4.17	Funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti $Z$ pro případ <b>rovnoměrného rozdělení</b> parametrů modelu $\mathbf{m}$ . . . . .	44
6.1	Princip bayesovské identifikace nejistých parametrů. . . . .	49
6.2	Kombinace apriorního normálního rozdělení s normálně rozdělenými měřeními za vzniku normálně rozděleného posterioru. . . . .	50
7.1	Princip Metropolisova algoritmu náhodné procházky. Inspirace v [22]. . . . .	53
7.2	Příklady MCMC se špatným (a,b) a dobrým (c) směřováním a odpovídající míry přijetí $AR$ v závislosti na změně $\sigma_q$ . . . . .	53
7.3	Původní Markovův řetězec (a) a Markovův řetězec upravený odstraněním rozhořivací periody (b). . . . .	54
9.1	Hustoty pravděpodobností posunu $u_A$ pro variantu Bayesovského přístupu při měření jednoho materiálu (a) a více materiálů (b). . . . .	64
9.2	Hustoty pravděpodobností parametru aktualizované pomocí 10 experimentů, při nichž je měřen posun $u_A$ a pootočení $\varphi_A$ . . . . .	65
9.3	Podoba věrohodnostních funkcí vzhledem k uvažovaným přemístěním. . . . .	67
9.4	Konvergence autokorelace v závislosti na směrodatné odchylce návrhového rozdělení pro variantu s měřením jednoho posunu $u_A$ (a) a celého vektoru přemístění $\mathbf{r}$ (b). . . . .	68
9.5	Posteriorní rozdělení Youngova modulu pružnosti získané pomocí plného modelu (FM) a polynomiální aproximace $p$ -tého stupně pro variantu s uvažováním jednoho posunu $u_A$ (a) a celého vektoru přemístění $\mathbf{r}$ (b). . . . .	69
9.6	Posteriorní rozdělení Youngova modulu pružnosti získané pomocí plného modelu (FM) a polynomiální aproximace $p$ -tého stupně sestavené stochastickou kolokací (KPN, GQN) a Galerkinovou metodou (GM KPN) pro variantu s použitím jednoho posunu $u_A$ . . . . .	69
9.7	Posteriorní rozdělení Youngova modulu pružnosti získané pomocí nejméně informativního přemístění $w_A$ a nejvíce informativního přemístění $u_A$ . . . . .	70
9.8	Posteriorní rozdělení Youngova modulu pružnosti získané na základě jedné až všech pěti složek vektoru přemístění postupně od nejméně po nejvíce informativní složku. . . . .	71
9.9	Posteriorní rozdělení Youngova modulu pružnosti získané pomocí odezvy $u_A$ při různých počtech provedených experimentů, které mají stejný výsledek (a), respektive různé výsledky vycházející z chyb měření (b). . . . .	72
9.10	Prior, věrohodnost a posteriorní rozdělení jednotlivých nejistých parametrů. . . . .	73

# Seznam použitých zkratk a symbolů

ANOVA	Analýza rozptylu ( <i>ANalysis Of VAriance</i> )
AR	Míra přijetí ( <i>Acceptance Rate</i> )
DoE	Návrh experimentů ( <i>Design of Experiments</i> )
FM	Plný numerický model ( <i>Full Model</i> )
GM	Galerkinova metoda ( <i>Galerkin Method</i> )
GQN	Gaussova kvadratura pro normální rozdělení
GQU	Gaussova kvadratura pro rovnoměrné rozdělení
KPN	Kronrod-Pattersonova kvadratura pro normální rozdělení
KPU	Kronrod-Pattersonova kvadratura pro rovnoměrné rozdělení
LHS	Latin Hypercube Sampling
MC	Metoda Monte Carlo
MCMC	Monte Carlo pro Markovovy řetězce ( <i>Markov Chain Monte Carlo</i> )
PCE	Polynomiální chaos ( <i>Polynomial Chaos Expansion</i> )
PDF	Hustota pravděpodobnosti ( <i>Probability Density Function</i> )
SFEM	Stochastická metoda konečných prvků ( <i>Stochastic Finite Element Methods</i> )
SRCC	Spearmanův koeficient pořadové korelace ( <i>Spearman's Rank Correlation Coeff.</i> )
$\beta$	Koeficient polynomu
$\psi$	Polynom z ortogonální báze
$\xi$	Standardní proměnná s požadovaným rozdělením
$E$	Youngův modul pružnosti
$\mathbf{f}$	Vektor zatížení
$\mathbf{K}$	Matice tuhosti
$m$	Parametr modelu
$\Pr(F)$	Pravděpodobnost poruchy

$p(m)$	Apriorní rozdělení, prior
$p(m z)$	Posteriorní rozdělení, posterior
$p(z m), L$	Věrohodnostní funkce, věrohodnost
$\mathbf{r}$	Vektor přemístění
$\tilde{\mathbf{r}}$	Polynomiální aproximace vektoru posunutí
$S$	Index citlivosti
$S^T$	Totální index citlivosti
$\mathbf{X}$	Markovův řetězec
$Z$	Rezerva spolehlivosti
$z$	Experimentální měření

Zkratky a symboly s méně častým výskytem jsou vysvětleny pouze v textu.



# Kapitola 1

## Úvod

Při analýze spolehlivosti, určování životnosti či navrhování konstrukcí jako takovém je nutné brát v úvahu všechny relevantní informace stejně jako přirozené nejistoty obsažené v přírodních podmínkách, zatížení nebo materiálových vlastnostech. Vývoj nových technologií a s ním spjaté zvyšování výkonu výpočetní techniky umožnily aplikovat nedávno vyvinuté postupy v oblasti stochastické mechaniky na reálné inženýrské problémy.

Jednou z metod vyhodnocující nejistoty, na kterou se zaměřuje tato diplomová práce, je stochastická metoda konečných prvků (SFEM z ang. *Stochastic Finite Element Method*) [26, 34]. SFEM patří mezi metody analýzy nejistot založené na vyhodnocování vyšších statistických momentů odezvy konstrukce.

Pro efektivní propagaci nejistot je vhodné použít SFEM v kombinaci s polynomiálním chaosem (PCE z angl. *Polynomial Chaos Expansion*) [39], který poskytuje aproximaci odezvy modelu ve stochastickém prostoru. Výhodou polynomiální aproximace není jen nižší časová náročnost, ale také její uspořádání, které umožňuje vyjádřit nejistotu v odezvě modelu analyticky přímo z koeficientů polynomů.

Existuje několik možných přístupů pro vytvoření aproximace odezvy modelu pomocí PCE. Tato práce se zabývá konkrétně lineární regresí [4], stochastickou kolokační metodou [1, 37] a stochastickou Galerkinovou metodou [2, 27]. Mezi jednotlivými metodami jsou následující základní rozdíly.

Lineární regrese se sestavuje pomocí sady simulací provedené na základě návrhu experimentů, který se obvykle získává pomocí metody Latin Hypercube Sampling. Koeficienty PCE se poté obdrží regresí výstupů modelu v návrhových bodech, která vede na řešení soustavy rovnic.

Další dvě metody jsou deterministické. Stochastická kolokace používá sadu simulací modelu provedenou pro řídkou mřížku (z angl. *sparse grid*), jež se sestaví pro zvolenou úroveň přesnosti. Výpočet koeficientů PCE je pak založen na explicitním vzorci. Stochastická Galerkinova metoda se především odlišuje od předchozích dvou tím, že vyžaduje modifikaci samotného numerického modelu. Další její nevýhodou je řešení velké soustavy rovnic pro získání koeficientů PCE.

Prvním cílem diplomové práce je studie a srovnání těchto metod pro efektivní propagování nejistot numerickým modelem z hlediska výpočetní náročnosti a výsledné přesnosti. Na tuto problematiku se zaměřuje první část předložené práce, v níž jsou jednotlivé metody nejprve představeny a následně aplikovány na ilustrativním inženýrském příkladu jednoduché rámové konstrukce. V této části se numerické metody využijí pro analýzu nejistot v odezvě modelu a také pro výpočet spolehlivosti konstrukce.

Navazující část práce se soustředí na identifikaci nejistých vstupních parametrů, pro níž je zvolen bayesovský přístup [7]. Jedná se o inverzní postup, při němž je počáteční nejistota v parametrech modelu redukována pomocí naměřených dat. Základní myšlenkou bayesovské identifikace je zahrnutí všech dostupných informací do výsledného pravděpodobnostního popisu zkoumaného parametru.

Formulace hledaného pravděpodobnostního rozdělení nejistého parametru nebývá jednoduchá, a proto je pro jeho obdržení vhodné použít Markovův řetězec vytvořený metodou Monte Carlo [9], který poskytuje vzorky z jakéhokoliv pravděpodobnostního rozdělení. Nevýhodou této metody jsou vysoké výpočetní nároky vyplývající z požadovaného velkého počtu vzorků pro dosažení dostatečné přesnosti.

Dalším cílem diplomové práce je aplikace polynomiálního chaosu představeného v první části práce pro snížení výpočetní náročnosti tohoto postupu. Bayesovský přístup v kombinaci s využitím polynomiální aproximace odezvy modelu umožňuje efektivním způsobem identifikovat parametry výpočetních modelů se zahrnutím nejistot v naměřených datech či v údajích poskytnutých expertem. V této části práce se numerické metody využijí pro bayesovskou identifikaci parametrů na příkladu rámové konstrukce z první části s různými variantami naměřených dat a nejistých parametrů.

# Část I

## Analýza nejistot a výpočet spolehlivosti konstrukcí

# Kapitola 2

## Analýza nejistot

V dnešní době se mnohé fyzikální experimenty nahrazují časově a finančně méně náročnými počítačovými simulacemi. Je samozřejmé, že od těchto simulací se požaduje co nejvyšší míra přesnosti vzhledem k vystihnutí reálných dějů, které jsou ale ve většině případů ovlivňovány náhodnými vlivy různého charakteru. Například u stavebních konstrukcí mohou být náhodné materiálové vlastnosti, geometrie, zatížení a podobně. V těchto případech je pro popsání reality nutné kromě samotné přesnosti matematického výpočetního modelu brát v úvahu i vliv náhodnosti působících faktorů na výsledek sledovaného děje.

Pro určení vlivu náhodných faktorů slouží analýza nejistot [23], při níž se klasický deterministický model, jehož vstupní parametry jsou definovány pouze jako určité hodnoty, rozšíří na stochastický model

$$\mathbf{r} = M(\mathbf{m}), \quad (2.1)$$

jehož vstupní parametry  $\mathbf{m}$  mají pravděpodobnostní rozdělení. K vyhodnocování nejistot v odezvě stochastického modelu je možné přistupovat dvěma přístupy. V případě pravděpodobnostní analýzy je výstupem spolehlivost, která udává s jakou pravděpodobností se výsledek shoduje s realitou. Při statistické analýze se vyhodnocují statistické momenty odezvy či se modeluje její pravděpodobnostní rozdělení.

Metody vyhodnocující nejistoty mohou být tedy rozděleny do dvou základních skupin:

- i metody analýzy spolehlivosti, jako je spolehlivostní analýza prvního či druhého řádu (FORM/SORM z angl. *First (Second) Order Reliability Method*) určující pravděpodobnost poruchy na základě mezních stavů [6],
- ii metody zaměřené na vyhodnocování vyšších statistických momentů odezvy konstrukce, do této skupiny patří i stochastická metoda konečných prvků, o níž pojednávají práce [26, 34].

SFEM je výkonný nástroj ve výpočetní stochastické mechanice rozšiřující klasickou metodu konečných prvků (FEM) do stochastického systému obsahujícího konečné prvky, jejichž vlastnosti jsou náhodné [10].

Tato práce se zaměřuje na SFEM založený na polynomiálním chaosu použitým pro aproximaci odezvy modelu ve stochastickém prostoru. Po získání aproximace může být nejistota odezvy modelu spočtena analyticky přímo z koeficientů polynomů nebo pomocí metody Monte Carlo (MC) využitě pro vzorkování parametrů modelu a vyhodnocení PCE místo plného numerického modelu. Účinnost této metody závisí na výpočetních požadavcích sestavení PCE a z nich vyplývající přesnosti aproximace.

# Kapitola 3

## Polynomiální chaos

Pro urychlení procesu vzorkování při analýze nejistot může být vyhodnocování plného numerického modelu, které může být v případě složitých modelů velmi časově náročné, nahrazeno vyhodnocováním tzv. náhradního modelu (z angl. *surrogate model*). V této práci se konkrétně jedná o hledání aproximace odezvy modelu  $\mathbf{r}$  pomocí rozvoje polynomiálního chaosu (PCE) [26, 34].

Pojem polynomiální chaos zavedl Norbert Wiener v roce 1938 [36] pro označení sady ortogonálních polynomů  $\psi$  tvořících bázové funkce. Promítnutím náhodných proměnných  $\mathbf{m}$  do této báze se získá rozvoj polynomiálního chaosu. Cílem této metody je nahrazení stochastického modelu  $M(\mathbf{m})$  jeho aproximací ve stochastickém prostoru pomocí polynomiálního rozvoje náhodných proměnných definovaných svými pravděpodobnostními rozděleními:

$$\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{m}) = \sum_{\alpha} \beta_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{m}), \quad (3.1)$$

kde  $\beta_{\alpha}$  je vektor koeficientů polynomů  $\beta_{\alpha,i}$  odpovídajících jednotlivým složkám odezvy  $r_i$ .  $\psi_{\alpha}(\mathbf{m})$  jsou ortogonální polynomy více proměnných.

Polynomiální rozvoj (3.1) je obvykle ukončen na limitním počtu členů  $n_{\beta}$ , který je velmi často spjat s počtem náhodných proměnných  $n_m$  a nejvyšším stupněm polynomů  $n_p$  podle vztahu

$$n_{\beta} = \frac{(n_p + n_m)!}{n_p! n_m!}. \quad (3.2)$$

PCE může být použit pro aproximaci odezvy s ohledem na pravděpodobnostní rozdělení náhodných proměnných, kdy je aproximace odezvy vážená vzhledem k rozdělení pravděpodobnosti proměnných. Pro lepší představu to například znamená, že aproximace je přesnější v oblastech s vyšší pravděpodobností výskytu proměnné. Konvergence chyby aproximace s rostoucím počtem členů polynomu je optimální v případě užití takového typu ortogonálních polynomů, který odpovídá danému pravděpodobnostnímu rozdělení uvažovaných proměnných [39]. Používané polynomy jsou ortogonální vzhledem k hustotě pravděpodobnosti daného rozdělení, například Hermiteovy polynomy jsou svázány s normálním (Gaussovým) rozdělením, Legendreovy polynomy s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti atd.

V případě, že uvažované proměnné  $\mathbf{m}$  nemají odpovídající požadované rozdělení, je nutné zavést nové standardní náhodné proměnné  $\boldsymbol{\xi}$ . Ve chvíli, kdy jsou původní proměnné vyjádřeny funkcemi standardních proměnných  $\mathbf{m}(\boldsymbol{\xi})$ , stává se i odezva modelu  $\mathbf{r}(\mathbf{m}(\boldsymbol{\xi}))$  funkcí těchto nových proměnných. Proto může být tato funkce aproximována pomocí konkrétního typu PCE odpovídajícího danému pravděpodobnostnímu rozdělení  $\boldsymbol{\xi}$ , tzn.

$$\tilde{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha} \beta_{\alpha} \psi_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}). \quad (3.3)$$

### 3.1 Hermiteovy polynomy a normální rozdělení

Hermiteovy polynomy jsou vhodné pro aproximaci odezvy závislé na náhodných parametrech  $\boldsymbol{\xi}$ , které mají standardní normální rozdělení pravděpodobnosti. Funkce hustoty pravděpodobnosti těchto proměnných je

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}, \quad (3.4)$$

střední hodnota  $\bar{\xi} = 0$  a směrodatná odchylka  $\sigma_{\xi} = 1$ .

Hermiteův polynom  $H_{\alpha}(\xi)$  stupně  $\alpha$  může být vyjádřen pomocí Rodrigueze vzorce jako

$$H_{\alpha}(\xi) = (-1)^{\alpha} e^{\xi^2/2} \frac{d^{\alpha}}{d\xi^{\alpha}} e^{-\xi^2/2} = \left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^{\alpha} \cdot 1, \quad (3.5)$$

nebo pomocí rekurentního vzorce

$$H_{\alpha+1}(\xi) = \xi H_{\alpha}(\xi) - \alpha H_{\alpha-1}(\xi), \quad (3.6)$$

kdy  $H_0 = 1$  a  $H_1 = \xi$ .

Jedná se o ortogonální polynomy, pro které platí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} H_{\alpha}(\xi) H_{\beta}(\xi) d\xi = \alpha! \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.7)$$

kde  $\delta_{\alpha\beta}$  je Kroneckerovo delta rovno jedné, pokud platí  $\alpha = \beta$ , nebo nula v ostatních případech.

Po vytvoření aproximace odezvy modelu Hermiteovými polynomy lze vyjádřit její nejistotu pomocí střední hodnoty a směrodatné odchylky analyticky přímo z vypočtených koeficientů polynomů  $\beta_{\alpha}$  [38] jako:

$$\mu_{\tilde{\mathbf{r}}} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{r}}] = \int \sum_{|\alpha| \leq n_p} \beta_{\alpha} H_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) d\mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}) = \beta_0 \quad (3.8)$$



a

$$\sigma_{\tilde{r}} = \sqrt{\mathbb{E}[(\tilde{r} - \mu_{\tilde{r}})^2]} = \sqrt{\sum_{0 < |\alpha| \leq n_p} \mathbb{E}[H_\alpha^2(\boldsymbol{\xi})] \beta_\alpha^2}, \quad (3.9)$$

kde

$$\mathbb{E}[H_\alpha^2(\boldsymbol{\xi})] = \int H_\alpha^2(\boldsymbol{\xi}) d\mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}) = \int \cdots \int_{n_\xi} \prod_{j=1}^{n_\xi} (H_{\alpha_j}^2(\xi_j)) d\mathbb{P}(\xi_1) \cdots d\mathbb{P}(\xi_{n_\xi}) = \prod_{j=1}^{n_\xi} \alpha_{\xi_j}! \quad (3.10)$$

a  $\alpha_{\xi_j}$  je stupeň polynomu proměnné  $\xi_j$  v polynomu  $\psi_\alpha$ .

## 3.2 Legendreovy polynomy a rovnoměrné rozdělení

Aproximace pomocí Legendreových polynomů lze využít pro odezvy modelů závislé na náhodných parametrech  $\boldsymbol{\xi}$ , které mají rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na intervalu  $\langle -1; 1 \rangle$ . Funkce hustoty pravděpodobnosti takové proměnné je

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}, \quad (3.11)$$

kde  $b = 1$  a  $a = -1$ , tedy hustota pravděpodobnosti tohoto rozdělení je konstantní funkce  $f(\xi) = 1/2$ .

Legendreův polynom  $P_\alpha(\xi)$  stupně  $\alpha$  může být vyjádřen pomocí Rodrigueze vzorce jako

$$P_\alpha(\xi) = \frac{1}{2^\alpha \alpha!} \frac{d^\alpha}{d\xi^\alpha} [(\xi^2 - 1)^\alpha], \quad (3.12)$$

nebo pomocí rekurentního vzorce

$$(\alpha + 1)P_{\alpha+1}(\xi) = (2\alpha + 1)\xi P_\alpha(\xi) - \alpha P_{\alpha-1}(\xi), \quad (3.13)$$

kdy  $P_0 = 1$  a  $P_1 = \xi$ .

Jedná se o ortogonální polynomy, pro které platí

$$\int_{-1}^1 P_\alpha(\xi) P_\beta(\xi) d\xi = \frac{2}{2\alpha + 1} \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.14)$$

Po vytvoření aproximace odezvy modelu Legendreovými polynomy lze vyjádřit její nejistotu pomocí střední hodnoty a směrodatné odchylky analyticky přímo z vypočtených koeficientů polynomů  $\beta_\alpha$  jako:

$$\mu_{\tilde{r}} = \mathbb{E}[\tilde{r}] = \int \sum_{|\alpha| \leq n_p} \beta_\alpha P_\alpha(\boldsymbol{\xi}) d\mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}) = \beta_0 \quad (3.15)$$

a

$$\sigma_{\tilde{r}} = \sqrt{\mathbb{E}[(\tilde{r} - \mu_{\tilde{r}})^2]} = \sqrt{\sum_{0 < |\alpha| \leq n_p} \mathbb{E}[P_\alpha^2(\boldsymbol{\xi})] \beta_\alpha^2}, \quad (3.16)$$

kde

$$\mathbb{E}[P_\alpha^2(\boldsymbol{\xi})] = \int P_\alpha^2(\boldsymbol{\xi}) d\mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}) = \int \cdots \int_{n_\xi} \prod_{j=1}^{n_\xi} (P_{\alpha,j}^2(\xi_j)) d\mathbb{P}(\xi_1) \cdots d\mathbb{P}(\xi_{n_\xi}) = \prod_{j=1}^{n_\xi} \frac{2}{2\alpha + 1} \quad (3.17)$$

a  $\alpha_{\xi_j}$  je stupeň polynomu proměnné  $\xi_j$  v polynomu  $\psi_\alpha$ .

### 3.3 Výpočet koeficientů polynomiálního chaosu

Existuje několik přístupů pro vytvoření aproximace odezvy modelu pomocí PCE. Tato práce se zabývá konkrétně lineární regresí [4], stochastickou kolokační metodou [1, 37] a stochastickou Galerkinovou metodou [2, 27].

#### 3.3.1 Lineární regrese

Základní metodou pro výpočet koeficientů PCE podle rovnice (3.1) je velmi známá lineární regrese [4]. Základním předpokladem lineární regrese je, že náhradní  $\tilde{r}$  je lineární kombinací parametrů  $\boldsymbol{\beta}$ , ale nemusí být lineární vůči nezávislým proměnným  $\boldsymbol{\xi}$ . Použití metody je založeno na třech následujících krocích:

- i příprava dat  $\boldsymbol{\Xi} \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_d}$ , které se získají jako  $n_d$  vzorků vektoru parametrů  $\boldsymbol{\xi}_i$ ,
- ii vyhodnocení modelu pro všechny vzorky  $\boldsymbol{\xi}_i$  a uspořádání získaných odezev  $\mathbf{r}_i$  do matice  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_d}$ , kde  $n_r$  je počet složek odezvy,
- iii výpočet koeficientů polynomů  $\boldsymbol{\beta}_\alpha$  uspořádaných v matici  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_\beta}$  použitím např. obyčejné metody nejmenších čtverců.

Časově nejnáročnější část této metody spočívá ve vyhodnocení modelu pro vzorky náhodných proměnných. Proto představuje volba těchto vzorků velmi důležitý krok, který zásadně ovlivňuje výpočetní náročnost celé metody. Nejjednodušší způsob jak vybrat hledané vzorky je metoda Monte Carlo, kdy se vzorky náhodně vybírají z předepsaného pravděpodobnostního rozdělení. Ovšem přesnost výsledného náhradního modelu závisí na pokrytí definičního oboru proměnných, proto musí být pro dosažení dostatečné přesnosti touto metodou zvoleno mnohem větší množství vzorků než v případě efektivnějších metod. Výběr vzorků se poté nazývá návrh experimentů (DoE z angl. *Design of Experiments*). Velmi rozšířený postup pro tvorbu DoE je metoda Latin Hypercube Sampling (LHS), která umožňuje dodržovat předepsaná pravděpodobnostní rozdělení. Existuje také mnoho různých metod, jak lze optimalizovat LHS a tím ještě zvyšovat jeho kvalitu (viz např. [16]), ale to není předmětem současného zkoumání, a proto byla pro tuto práci zvolena základní forma LHS bez jakékoliv optimalizace.

Po zvolení sady vzorků je dalším krokem výpočet příslušných odezev  $\mathbf{r}_i$ , který zahrnuje nejprve vyhodnocení transformací (3.3) a následně vyhodnocení samotného modelu (2.1).

Výpočet koeficientů PCE uložených v matici  $\mathbf{B}$  začíná vyhodnocením všech členů polynomu  $\psi_\alpha$  pro všechny vzorky  $\boldsymbol{\xi}_i$  a jejich uložení do matice  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_\beta}$ . Obyčejná metoda nejmenších čtverců poté vede na

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{B}^T = \mathbf{Z}^T \mathbf{R}^T, \quad (3.18)$$

což je  $n_r$  nezávislých soustav o  $n_\beta$  lineárních rovnicích.

### 3.3.2 Stochastická kolokace

Stochastická kolokační metoda je založena na explicitním vyjádření koeficientů PCE:

$$\beta_{\alpha,i} = \int r_i(\boldsymbol{\xi}) \psi_\alpha(\boldsymbol{\xi}) d\mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}), \quad (3.19)$$

kde se integruje přes hustotu pravděpodobnosti proměnné  $\boldsymbol{\xi}$ . Výpočet koeficientů je zde řešen numericky použitím příslušného integračního pravidla (kvadratury) na  $\mathbb{R}^{n_\epsilon}$ . Rovnice (3.19) má potom tvar

$$\beta_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^{n_d} r_i(\boldsymbol{\xi}_j) \psi_\alpha(\boldsymbol{\xi}_j) w_j, \quad (3.20)$$

kde  $\boldsymbol{\xi}_j$  představuje integrační bod a  $w_j$  je odpovídající váha. V této práci bylo použito několik forem Smolyakových kvadraturních vzorců, konkrétně kvadratury s Gaussovými kvadraturními formulami jako základ pro rovnoměrné (GQU) a normální (GQN) rozdělení a kvadratury s vnořenými Kronrod-Pattersonovými kvadraturními formulami pro rovnoměrné (KPU) a normální (KPN) rozdělení [13].

Stochastická kolokační metoda je v podstatě podobná lineární regresi, protože obě tyto metody vyžadují časově náročné vyhodnocení sady simulací modelu pro vybrané vzorky. Základní rozdíl je při volbě sady vzorků, kdy se v případě stochastické kolokace používají předem optimalizované řídké mřížky, zatímco lineární regrese je založena na stochastickém LHS.

### 3.3.3 Stochastická Galerkinova metoda

Stochastická Galerkinova metoda se principiálně liší od předchozích metod, které jsou založeny na sadě nezávislých simulací modelu. Jedná se o metodu, která rozšiřuje klasickou metodu konečných prvků danou základní rovnicí

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{f}, \quad (3.21)$$

do stochastického prostoru. V rovnici (3.21) je  $\mathbf{K}$  matice tuhosti,  $\mathbf{f}$  je vektor zatížení a  $\mathbf{r}$  je hledaný vektor přemístění. Stochastická Galerkinova metoda je intruzivní metoda, tzn. vyžaduje přeformulování této základní rovnice modelu (3.21). Za tímto účelem se převede rovnice (3.1) do následujícího tvaru v maticovém zápisu

$$\tilde{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{\beta}, \quad (3.22)$$

kde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  je jednotková matice,  $\otimes$  je Kroneckerův součin,  $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi})$  je  $n_\beta$ -dimensionální vektor polynomů a  $\boldsymbol{\beta}$  je  $(n_\beta \cdot n_r)$ -dimensionální vektor koeficientů PCE uspořádaných jako  $\boldsymbol{\beta} = (\dots, \boldsymbol{\beta}_i, \dots)^T$ , kde  $\boldsymbol{\beta}_i$  se skládá z koeficientů PCE odpovídajících  $i$ -té složce odezvy.

Náhradou odezvy modelu  $\mathbf{r}$  v rovnici (3.21) její polynomiální aproximací  $\tilde{\mathbf{r}}$  uvedenou v rovnici (3.22) a aplikováním Galerkinových podmínek se získá

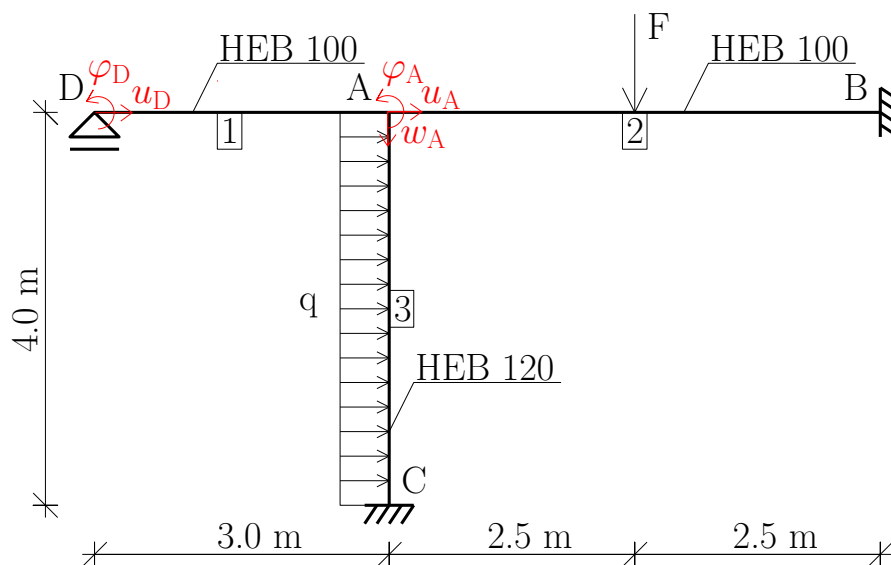
$$\int \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{K}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \boldsymbol{\psi}^T(\boldsymbol{\xi}) d\mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\beta} = \int \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}) \otimes \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) d\mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}), \quad (3.23)$$

což je soustava  $(n_\beta \cdot n_r)$  lineárních rovnic. Integrace může být provedena numericky nebo analyticky. Analytické řešení je možné za určitých podmínek jako například, pokud jsou všechny členy v matici tuhosti a vektoru zatížení polynomy vzhledem ke  $\boldsymbol{\xi}$ . V tomto případě se metoda nazývá plně intruzivní. V ostatních případech je nutné přistoupit k numerické integraci, metoda se poté nazývá semi-intruzivní.

# Kapitola 4

## Porovnání metod na inženýrské konstrukci

Za praktický příklad inženýrské konstrukce, na kterém se prozkoumají výhody a nevýhody popsaných metod, byla vybrána jednoduchá rámová konstrukce. Tato konstrukce se svými vlastnostmi a zatížením byla převzata z [24]. Geometrie, rozmístění zatížení a podpor rámu jsou patrné z Obrázku 4.1.



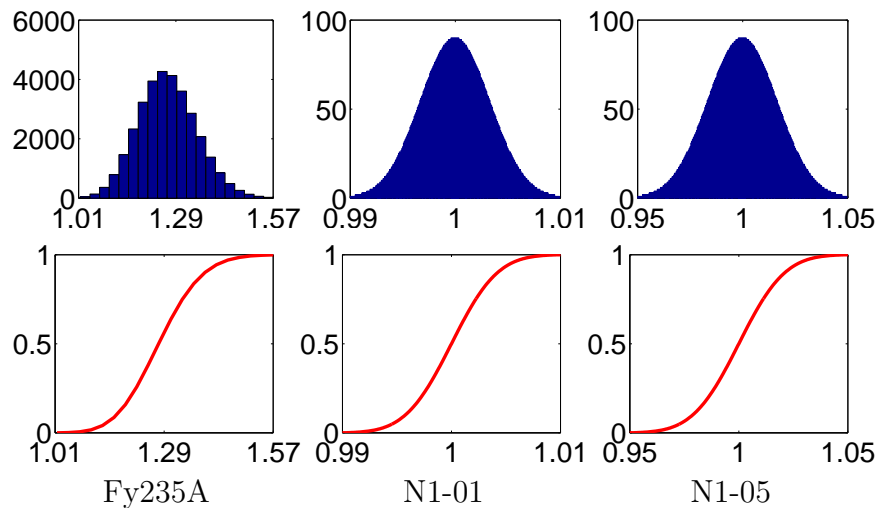
Obrázek 4.1: Schéma rámové konstrukce.

Materiál rámu je ocel s Youngovým modulem pružnosti  $E = 210$  GPa a nejistou mezí kluzu  $f_y$ , která je definována jako součin nominální hodnoty  $f_{y,\mu}$  a nejisté odchylky  $f_{y,\sigma}$ , jejíž pravděpodobnostní rozdělení je dáno pomocí předepsaného histogramu Fy235A (viz Obrázek 4.2).

Za nejisté jsou dále považovány geometrické parametry jednotlivých prutů. Jejich hodnoty se stanoví pomocí nominálních hodnot a nejistých odchylek definovaných předepsanými histogramy uvedenými v [24] a zobrazenými na Obrázku 4.2. Všechny nominální hodnoty, odpovídající náhodné proměnné a typy histogramů jsou uvedeny v Tabulce 4.1.

Parametr	Nominální hodnota	Proměnná	Histogram
Mez kluzu	$f_{y,\mu} = 235 \text{ MPa}$	$f_{y,\sigma}$	Fy235A
Moment setrvačnosti	$I_1 = 449.5 \text{ cm}^4$	$I_{\sigma 1}$	N1-05
Průřezová plocha	$A_1 = 26.04 \text{ cm}^2$		
Moment setrvačnosti	$I_2 = 449.5 \text{ cm}^4$	$I_{\sigma 2}$	N1-05
Průřezová plocha	$A_2 = 26.04 \text{ cm}^2$		
Moment setrvačnosti	$I_3 = 864.4 \text{ cm}^4$	$I_{\sigma 3}$	N1-05
Průřezová plocha	$A_3 = 34.01 \text{ cm}^2$		
Elastický průřezový modul	$W_3 = 144.1 \text{ cm}^3$		
Délka	$l_1 = 3 \text{ m}$		
Délka	$l_2 = 5 \text{ m}$	$l_{\sigma}$	N1-01
Délka	$l_3 = 4 \text{ m}$		

Tabulka 4.1: Materiálové a geometrické parametry a jejich nejisté odchylky.



Obrázek 4.2: Histogramy nejistých materiálových a geometrických parametrů a odpovídající kumulativní distribuční funkce.

Předepsaná zatížení jsou lineární kombinací vlastní tíhy, stálého a krátkodobého zatížení dle následujících vzorců:

$$q = D_1 D_{\sigma 1} + S_1 S_{\sigma 1} + L_1 L_{\sigma 1} \text{ [kN/m]}, \quad (4.1)$$

$$F = D_2 D_{\sigma 2} + S_2 S_{\sigma 2} + L_2 L_{\sigma 2} \text{ [kN]}, \quad (4.2)$$

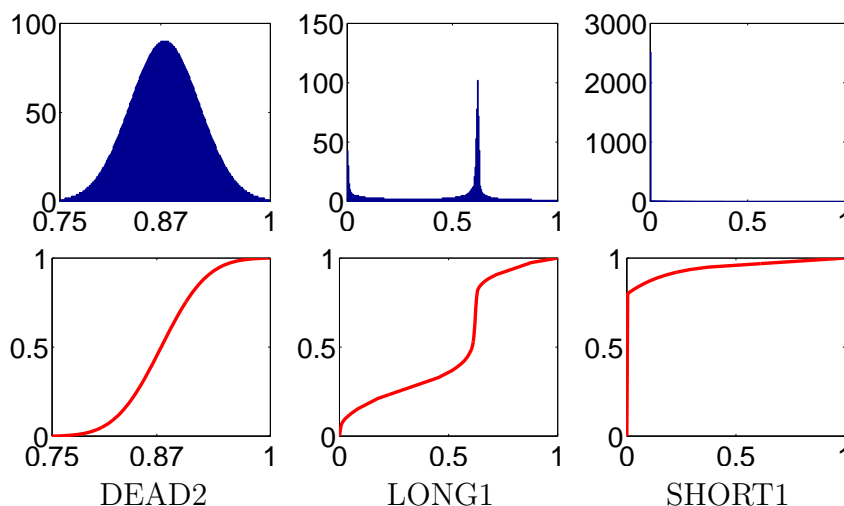
kde jednotlivá zatížení jsou statisticky nezávislá a jsou popsána náhodnými proměnnými. Všechna zatížení jsou tvořena extrémními hodnotami a proměnnými odchylkami definovanými pomocí histogramů uvedených v Tabulce 4.2 a znázorněných na Obrázku 4.3.

Seznam všech náhodných proměnných, které se vyskytují v tomto příkladu, je uveden v Tabulkách 4.1 a 4.2. Pro zjednodušení budou jednotlivé proměnné v následujícím textu označovány jako  $m_i$  a dohromady tvoří vektor

$$\mathbf{m} = (\dots, m_i, \dots)^T = (I_{\sigma 1}, I_{\sigma 2}, I_{\sigma 3}, l_{\sigma}, D_{\sigma 1}, S_{\sigma 1}, L_{\sigma 1}, D_{\sigma 2}, S_{\sigma 2}, L_{\sigma 2})^T. \quad (4.3)$$

Zatížení	Extrémní hodnota	Proměnná	Histogram
Vlastní tíha	$D_1 = 11 \text{ kN/m}$	$D_{\sigma_1}$	DEAD2
Krátkodobé zatížení	$S_1 = 9 \text{ kN/m}$	$S_{\sigma_1}$	SHORT1
Dlouhodobé zatížení	$L_1 = 5.5 \text{ kN/m}$	$L_{\sigma_1}$	LONG1
Vlastní tíha	$D_2 = 3.5 \text{ kN}$	$D_{\sigma_2}$	DEAD2
Krátkodobé zatížení	$S_2 = 2.2 \text{ kN}$	$S_{\sigma_2}$	SHORT1
Dlouhodobé zatížení	$L_2 = 1.7 \text{ kN}$	$L_{\sigma_2}$	LONG1

Tabulka 4.2: Zatížení a odchylky.



Obrázek 4.3: Histogramy nejistých parametrů zatížení a odpovídající kumulativní distribuční funkce.

Vzhledem k tomu, že žádná z těchto proměnných nemá spojitou funkci hustoty pravděpodobnosti (PDF z angl. *Probability Density Function*), ale jejich rozdělení je popsáno diskrétně pomocí histogramů, je nutné zavést nové standardní náhodné proměnné  $\boldsymbol{\xi} = (\dots, \xi_i, \dots)^T$  se spojitou PDF.

Původní proměnné  $m_i$  lze vyjádřit pomocí transformačních funkcí  $t_{jk}$  nových proměnných  $\xi_i$  vycházejících z daného histogramu  $j$  a typu  $k$  rozdělení proměnné  $\xi_i$ , tzn.

$$m_i = t_{jk}(\xi_i). \quad (4.4)$$

Z důvodu diskrétní povahy pravděpodobnostního rozdělení původních proměnných nejsou transformační funkce v tomto případě hladké. Konkrétní příklady transformačních funkcí jsou rozebrány jednotlivě v Kapitole 4.1, kde jsou standardní proměnné  $\boldsymbol{\xi}$  uvažovány postupně ve dvou variantách pravděpodobnostního rozdělení, a to jako normálně, resp. rovnoměrně rozdělené.

Řešená konstrukce se má podrobit analýze spolehlivosti, přičemž se uvažuje, že konstrukce bude splňovat požadavky, pokud nebude porušen sloup rámu. Jelikož normálová síla ve sloupu nedosahuje kritické velikosti ani pro nejnepříznivější hodnoty zatížení, není nutné uvažovat ztrátu jeho stability vlivem štíhlosti a porušení sloupu rámu nastává pouze jedním



způsobem, který je dán mezi kluzu materiálu.

Pro stanovení maximálního napětí vznikajícího ve sloupu je nutné stanovit přemístění ve styčnicku A. Jelikož je předpokládáno lineárně elastické chování konstrukce, mohou být neznámá přemístění  $\mathbf{r}$  spočtena metodou konečných prvků nebo deformační metodou, které jsou obě velmi dobře známé. Použitím druhé z nich lze přímo zapsat diskretizovanou formu rovnic rovnováhy:

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{f}, \quad (4.5)$$

kteřé po zavedení okrajových podmínek mají následující podobu:

$$\begin{bmatrix} \frac{A_1 I_{\sigma 1}}{12l_1} & 0 & -\frac{A_1 I_{\sigma 1}}{12l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1 I_{\sigma 1}}{3l_1} & 0 & \frac{I_1 I_{\sigma 1}}{2l_1^2 l_{\sigma}} & \frac{I_1 I_{\sigma 1}}{6l_1} \\ -\frac{A_1 I_{\sigma 1}}{12l_1} & 0 & \frac{A_1 I_{\sigma 1}}{12l_1} + \frac{A_2 I_{\sigma 2}}{12l_2} + \frac{I_3 I_{\sigma 3}}{l_3^3 l_{\sigma}^2} & 0 & \frac{I_3 I_{\sigma 3}}{2l_3^2 l_{\sigma}} \\ 0 & \frac{I_1 I_{\sigma 1}}{2l_1^2 l_{\sigma}} & 0 & \frac{I_1 I_{\sigma 1}}{l_1^3 l_{\sigma}^2} + \frac{I_2 I_{\sigma 2}}{l_2^3 l_{\sigma}^2} + \frac{A_3 I_{\sigma 3}}{12l_3} & \frac{I_1 I_{\sigma 1}}{2l_1^2 l_{\sigma}} - \frac{I_2 I_{\sigma 2}}{2l_2^2 l_{\sigma}} \\ 0 & \frac{I_1 I_{\sigma 1}}{6l_1} & \frac{I_3 I_{\sigma 3}}{2l_3^2 l_{\sigma}} & \frac{I_1 I_{\sigma 1}}{2l_1^2 l_{\sigma}} - \frac{I_2 I_{\sigma 2}}{2l_2^2 l_{\sigma}} & \frac{I_1 I_{\sigma 1}}{3l_1} + \frac{I_2 I_{\sigma 2}}{3l_2} + \frac{I_3 I_{\sigma 3}}{3l_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_D \\ \varphi_D \\ u_A \\ w_A \\ \varphi_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(D_1 D_{\sigma 1} + S_1 S_{\sigma 1} + L_1 L_{\sigma 1}) l_3 l_{\sigma}}{2} \\ \frac{D_2 D_{\sigma 2} + S_2 S_{\sigma 2} + L_2 L_{\sigma 2}}{2} \\ -\frac{(D_2 D_{\sigma 2} + S_2 S_{\sigma 2} + L_2 L_{\sigma 2}) l_2 l_{\sigma}}{8} + \frac{(D_1 D_{\sigma 1} + S_1 S_{\sigma 1} + L_1 L_{\sigma 1}) (l_3 l_{\sigma})^3}{12} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Rezerva spolehlivosti  $Z$  sloupu je definována jako rozdíl mezi mezí kluzu oceli  $f_y$  a napětím způsobeným vnějším zatížením  $\sigma$ . K porušení  $F$  dojde v případě, kdy napětí  $\sigma$  překročí hodnotu meze kluzu  $f_y$ . Pravděpodobnost poruchy  $\Pr(F)$  je poté dána jako podíl počtu případů porušení ku celkovému počtu provedených simulací  $n$ :

$$\Pr(F) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[f_y - \sigma \leq 0], \quad (4.7)$$

kde  $I[f_y - \sigma \leq 0]$  je charakteristická funkce, která nabývá hodnoty jedna pro  $f_y - \sigma \leq 0$  a nula v ostatních případech.

## 4.1 Výsledky

Cílem této kapitoly je porovnání popsaných metod pro aproximaci odezvy modelu a urychlení metody MC použité pro vyhodnocení rozdělení pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti  $Z$  a pravděpodobnosti poruchy  $\Pr(F)$  sloupu ocelového rámu. V provedené studii jsou uvažovány dvě varianty numerického modelu. V prvním případě je odezvou modelu přímo rezerva spolehlivosti  $Z$ , v druhém případě je odezvou modelu vektor přemístění  $\mathbf{r}$  a rezerva spolehlivosti je spočtena z jeho aproximace. U druhé varianty modelu lze aplikovat stochastickou Galerkinovu metodu, která je s ostatními metodami navíc porovnána v přesnosti

aproximace posunů  $u_A$ ,  $w_A$  a pootočení  $\varphi_A$ .

Výsledky náhradních modelů jsou porovnány s referenčními výsledky obdrženy pomocí metody MC s  $10^7$  simulacemi modelu. Ve variantě modelu s odezvou rovnou vektoru přemístění se vyhodnocují chyby v odhadu průměru  $\mu$  a směrodatné odchyly  $\sigma$  jednotlivých složek odezvy. Relativní chyby v odhadech průměru jsou stanoveny jako

$$\varepsilon_\mu = \frac{|\mu_{\text{PCE}} - \mu_{\text{MC}}|}{\mu_{\text{MC}}}, \quad (4.8)$$

kde  $\mu_{\text{MC}}$  je průměr odhadnutý pomocí metody MC a  $\mu_{\text{PCE}}$  je průměr získaný na základě vybraného náhradního modelu. Relativní chyby v odhadech směrodatné odchyly se stanoví stejným způsobem.

Následně je pro obě varianty modelu vyšetřena přesnost v odhadu rezervy spolehlivosti a vyhodnocena pravděpodobnost poruchy na základě náhradních modelů, obdržené výsledky jsou opět srovnány s referenčními výsledky metody MC. Pro stanovení relativní chyby v odhadu rezervy spolehlivosti je použit následující vztah:

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|Z_{\text{PCE}} - Z_{\text{MC}}|}{\max(Z_{\text{MC}}) - \min(Z_{\text{MC}})} \cdot 100, \quad (4.9)$$

kde  $Z_{\text{MC}}$  je hodnota rezervy spolehlivosti stanovená plným modelem metodou MC a  $Z_{\text{PCE}}$  je hodnota rezervy spolehlivosti obdržená vybraným náhradním modelem pro stejné vstupní parametry.

### 4.1.1 Hermiteovy polynomy

V této podkapitole jsou  $\xi$  uvažovány jako standardní normální proměnné, a proto se použijí pro tvorbu náhradního modelu Hermiteovy polynomy. Studie zahrnuje několik variant rozdělení původních parametrů modelu  $\mathbf{m}$ , které jsou nejprve rozděleny podle předepsaných histogramů a následně je studován vliv změny těchto rozdělení.

V prvním případě mají tedy původní parametry modelu  $\mathbf{m}$  diskrétní rozdělení definované předepsanými histogramy a transformace mezi těmito původními a standardními proměnnými  $\xi$  se skládá ze dvou kroků. Nejprve jsou standardně normálně rozdělené  $\xi$  převedeny pomocí kumulativní distribuční funkce standardního normálního rozdělení

$$F_{\text{SNR}}(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\xi_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad (4.10)$$

na interval  $\langle 0; 1 \rangle$ , následně se získané hodnoty převedou na požadované rozdělení odpovídající jednotlivým předepsaným histogramům pomocí inverzních po částech lineárních distribučních funkcí.

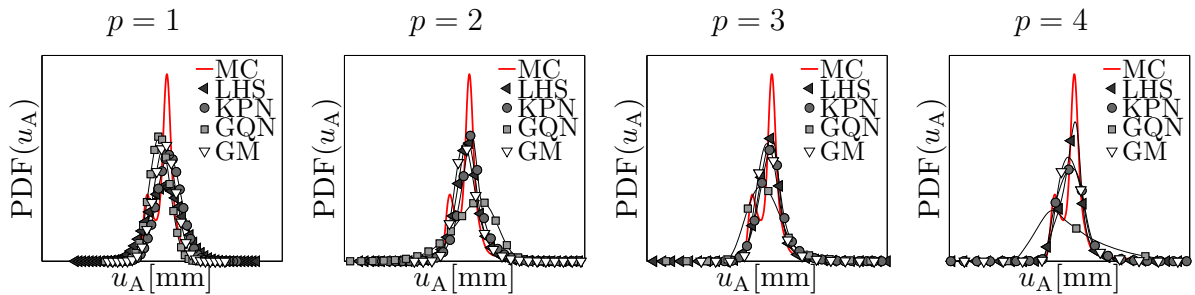
V této variantě lze aplikovat Galerkinovu metodu pouze v její semi-intruzivní formě. V řešeném příkladu lze základní rovnici (4.6) vynásobit  $l_\sigma^3$ , a tak získat polynomy parametrů

modelu  $m$ . Nejedná se ale o polynomy vzhledem k parametrům  $\xi$  kvůli transformacím (4.4) způsobeným diskrétní povahou histogramů předepsaných parametrům modelu  $m$ .

Obdržené výsledky pro tuto variantu pravděpodobnostního rozdělení parametrů  $m$  jsou rozděleny do dvou tabulek. Nejprve jsou v Tabulce 4.3 uvedeny výsledky pro variantu odezvy rovnou vektoru přemístění. Tabulka obsahuje potřebný výpočetní čas a relativní chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky jednotlivých složek odezvy stanovených lineární regresí (LHS), stochastickou kolokační metodou (KPN, GQN) a semi-intruzivní Galerkinovou metodou (GM KPN, GM GQN) pro čtyři stupně polynomu  $p$ .

Metoda	$p$	$n_d$	Čas [s]	$u_A$ [mm]		$w_A$ [mm]		$\varphi_A$ [mrad]	
				$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
MC	–	$10^7$	22191	0,207	0,033	0,009	0,002	4,090	0,795
				$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]	$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]	$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]
LHS	1	21	0	0,18	11,96	0,32	60,63	0,20	14,20
	2	201	0	0,26	4,76	0,36	2,49	0,34	4,41
	3	1201	3	0,08	1,36	0,01	0,02	0,10	1,54
	4	5301	19	0,02	1,31	0,09	0,98	0,04	1,21
KPN	1	21	0	4,81	9,34	4,26	8,42	4,90	9,38
	2	201	0	4,81	5,54	4,26	4,32	4,90	5,53
	3	1201	3	2,26	7,37	1,98	3,73	2,31	5,18
	4	5301	13	0,30	11,36	0,29	6,20	0,30	7,96
GQN	1	21	0	6,68	22,99	6,06	15,52	6,78	23,00
	2	221	0	4,81	73,94	4,25	50,93	4,90	58,21
	3	1581	4	3,11	59,73	2,81	37,07	3,16	46,92
	4	8761	21	1,13	187,92	1,10	129,41	1,14	147,83
GM KPN	1	–	1	0,30	18,98	0,29	15,66	0,30	19,02
	2	–	0	0,30	6,96	0,29	5,80	0,30	6,98
	3	–	3	0,30	4,25	0,29	3,46	0,30	4,26
	4	–	39	0,30	3,48	0,29	2,07	0,30	3,49
GM GQN	1	–	1	0,37	17,50	1,28	16,47	0,29	19,82
	2	–	0	0,37	1,81	1,28	6,67	0,29	7,90
	3	–	3	0,37	1,24	1,28	4,97	0,29	4,13
	4	–	41	0,37	6,51	1,28	5,44	0,29	1,29

Tabulka 4.3: Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky složek vektoru přemístění pro případ **předepsaných histogramů** pro parametry modelu  $m$ .



Obrázek 4.4: Funkce hustoty pravděpodobnosti posunu  $u_A$  pro případ **předepsaných histogramů** pro parametry modelu  $m$ .

Výsledky ukazují velmi dobré odhady získané lineární regresí, zatímco stochastická ko-

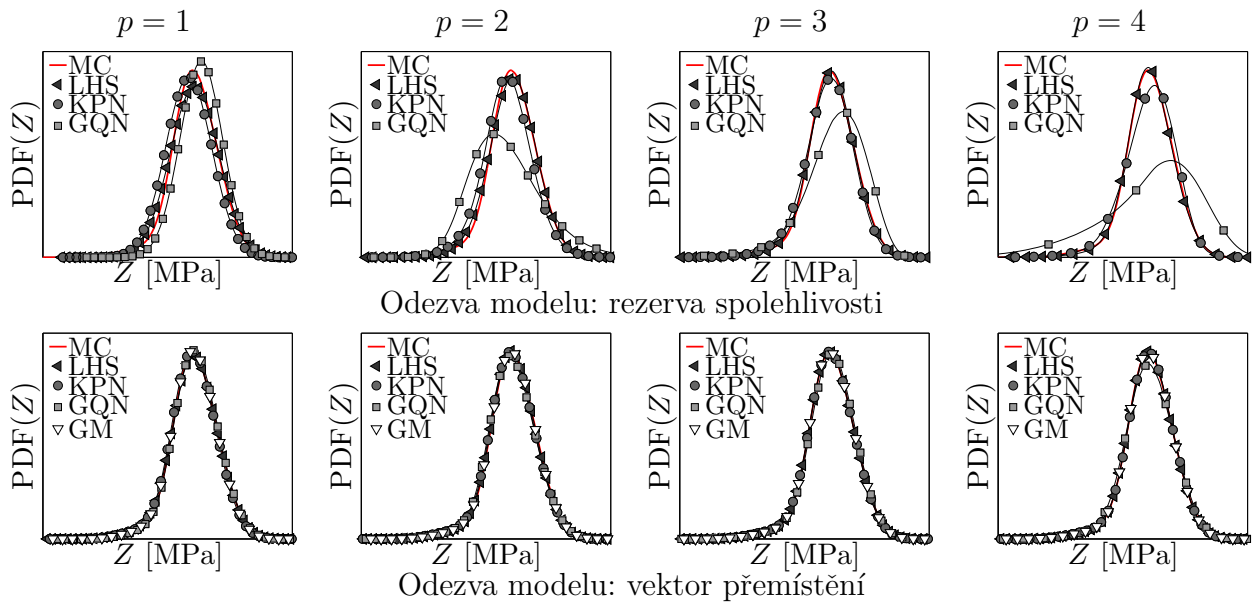
lokace založená na pravidlech KPN vede ke značným chybám v odhadu směrodatných odchylek a při použití pravidel GQN je patrné, že metoda diverguje. Stochastická Galerkinova metoda dosáhla lepších výsledků než stochastická kolokace. U varianty numerické integrace provedené na základě pravidel KPN je chyba na odhadech průměru stejná jako v případě odpovídající varianty stochastické kolokace, ale odhady směrodatných odchylek jsou přesnější. Při použití pravidel GQN jsou obdržené výsledky horší než při použití pravidel KPN, ale odhady směrodatných odchylek jsou výrazně přesnější než v případě odpovídající varianty stochastické kolokace. Z Obrázku 4.4, kde jsou zobrazeny obdržené funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$ , je patrné, že i výsledky lineární regrese nejsou uspokojivé.

Tabulka 4.4 obsahuje potřebný výpočetní čas pro vyhodnocení pravděpodobnosti poruchy, relativní chyby v aproximaci rezervy spolehlivosti a odhad pravděpodobnosti poruchy pro obě varianty odezvy modelu. Odhady rezervy spolehlivosti  $Z$  jsou relativně dobré, ale odhady pravděpodobnosti poruchy  $\Pr(F)$  jsou neuspokojivé pro všechny varianty zkoumaných metod.

Metoda	$p$	Rezerva spolehlivosti				Vektor přemístění			
		$n_d$	Čas [s]	$\Pr(F)$	$\varepsilon_Z$ [%]	$n_d$	Čas [s]	$\Pr(F)$	$\varepsilon_Z$ [%]
MC	–	$10^7$	23825	$7 \cdot 10^{-5}$	–	$10^7$	22191	$7 \cdot 10^{-5}$	–
LHS	1	23	32	$0 \cdot 10^{-5}$	4,2024	21	473	$3 \cdot 10^{-5}$	1,3289
	2	243	164	$16 \cdot 10^{-5}$	2,6572	201	549	$6 \cdot 10^{-5}$	0,6323
	3	1607	757	$157 \cdot 10^{-5}$	2,1177	1201	772	$18 \cdot 10^{-5}$	0,4434
	4	7767	2702	$138 \cdot 10^{-5}$	1,7934	5281	1416	$18 \cdot 10^{-5}$	0,3740
KPN	1	23	31	$0 \cdot 10^{-5}$	4,3112	21	487	$2 \cdot 10^{-5}$	0,8836
	2	243	164	$49 \cdot 10^{-5}$	3,1118	201	547	$9 \cdot 10^{-5}$	0,6350
	3	1607	760	$113 \cdot 10^{-5}$	2,9822	1201	801	$13 \cdot 10^{-5}$	0,5904
	4	7767	2701	$84 \cdot 10^{-5}$	3,4264	5281	1416	$11 \cdot 10^{-5}$	0,6519
GQN	1	23	31	$0 \cdot 10^{-5}$	3,5143	21	475	$0 \cdot 10^{-5}$	0,7086
	2	265	164	$5 \cdot 10^{-5}$	9,7539	221	549	$4 \cdot 10^{-5}$	1,7807
	3	2069	764	$719 \cdot 10^{-5}$	6,9817	1581	759	$62 \cdot 10^{-5}$	1,2896
	4	12453	2713	$3229 \cdot 10^{-5}$	15,7367	8761	1404	$93 \cdot 10^{-5}$	2,7486
GM KPN	1					–	535	$1 \cdot 10^{-5}$	0,6739
	2					–	576	$6 \cdot 10^{-5}$	0,4824
	3					–	797	$14 \cdot 10^{-5}$	0,3806
	4					–	1465	$10 \cdot 10^{-5}$	0,3513
GM GQN	1					–	500	$1 \cdot 10^{-5}$	0,6736
	2					–	586	$5 \cdot 10^{-5}$	0,4752
	3					–	807	$15 \cdot 10^{-5}$	0,3830
	4					–	1461	$15 \cdot 10^{-5}$	0,3684

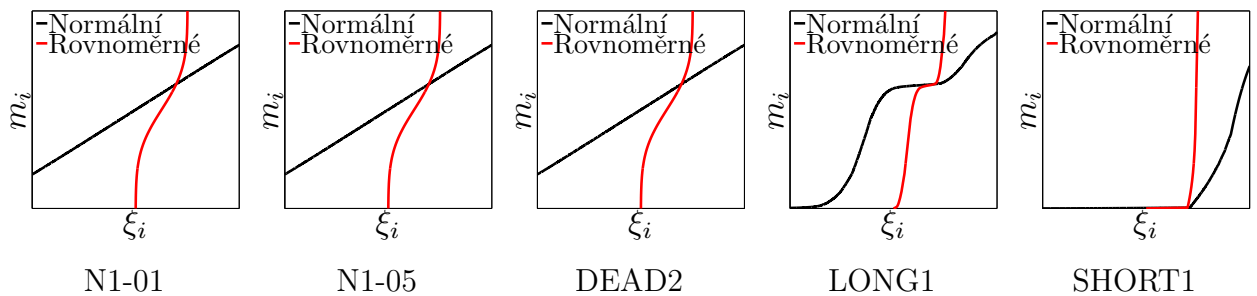
Tabulka 4.4: Časová náročnost, chyby v odhadech rezervy spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy pro případ **předepsaných histogramů** pro parametry modelu  $m$ .

Výrazný rozdíl v odhadu rezervy spolehlivosti pro jednotlivé varianty odezvy modelu je způsobený odlišným počtem náhodných proměnných ovlivňujících odezvu modelu, a tak i její obdrženou aproximaci. Zatímco odezva modelu rovná vektoru přemístění  $r$  je závislá pouze na deseti náhodných proměnných, rezervu spolehlivosti  $Z$  navíc ovlivňuje také nejistá mez kluzu  $f_y$ . Celé funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti pro obě varianty odezvy modelu jsou zobrazeny na Obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti  $Z$  pro případ **předepsaných histogramů** pro parametry modelu  $\mathbf{m}$ .

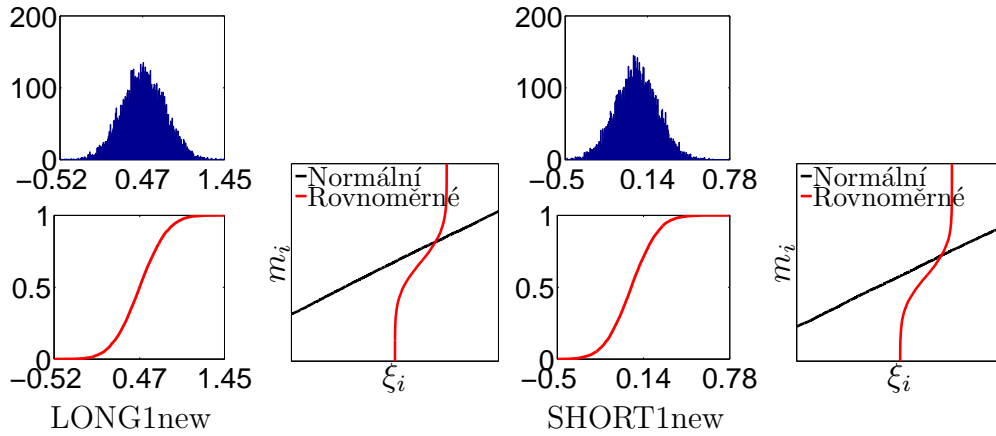
Důvodem takto neuspokojivých výsledků je pravděpodobně vysoká nelinearita transformace (4.4) parametrů s předepsanými histogramy LONG1 a SHORT1, jak je vidět z grafů uvedených na Obrázku 4.6. Grafy zobrazují jednotlivé transformační vztahy mezi původními parametry  $m_i$  modelu s pravděpodobnostním rozdělením definovaným předepsanými histogramy a novými standardními proměnnými  $\xi_i$ , které jsou uvažovány ve dvou variantách rozdělení, a to jako standardně normálně rozdělené a rovnoměrně rozdělené.



Obrázek 4.6: Transformační vztahy pro předepsané histogramy.

Za účelem prozkoumání těchto předpokladů se nahradily tyto dva předepsané histogramy LONG1 a SHORT1 dvěma novými histogramy, které se více blíží normálnímu rozdělení pravděpodobnosti, viz Obrázek 4.7. Nové histogramy respektují původně dané hodnoty průměru a směrodatné odchylky jednotlivých proměnných vycházející z předepsaných histogramů.

Pro tuto variantu pravděpodobnostního rozdělení původních proměnných  $\mathbf{m}$  jsou získané chyby v odhadech průměrů a směrodatných odchylek jednotlivých složek odezvy pro variantu odezvy rovnou vektoru přemístění uvedeny v Tabulce 4.5. Na Obrázku 4.8 jsou zobrazeny obdržené funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$ .



Obrázek 4.7: Nové histogramy parametrů modelu s odpovídajícími kumulativními distribučními funkcemi a transformačními vztahy.

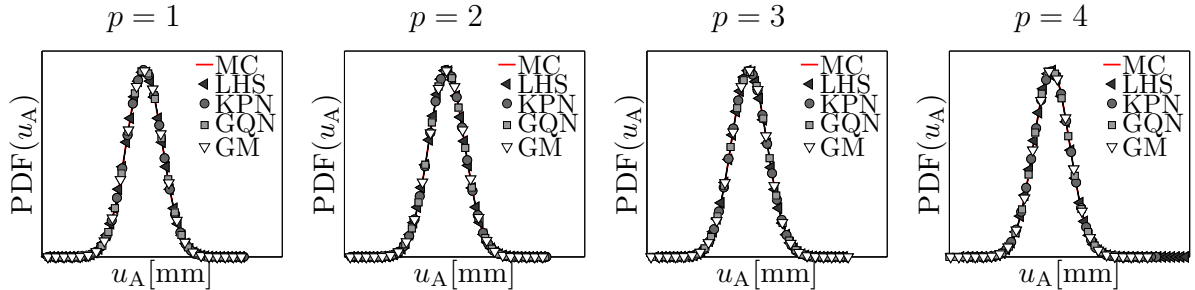
Metoda	$p$	$n_d$	Čas [s]	$u_A$ [mm]		$w_A$ [mm]		$\varphi_A$ [mrad]	
				$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
MC	—	$10^7$	21874	0,206	0,033	0,009	0,002	4,056	0,789
				$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]	$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]	$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]
LHS	1	21	0	0,01	0,91	0,13	3,06	0,02	0,02
	2	201	0	0,01	0,08	0,02	0,16	0,01	0,09
	3	1201	3	0,00	0,13	0,03	0,34	0,00	0,13
	4	5301	19	0,01	0,00	0,01	0,06	0,01	0,00
KPN	1	21	0	0,05	0,13	0,04	0,06	0,05	0,11
	2	201	0	0,05	0,09	0,04	0,00	0,05	0,09
	3	1201	3	0,01	0,27	0,01	0,19	0,01	0,26
	4	5301	13	0,01	0,13	0,01	0,13	0,01	0,13
GQN	1	21	0	0,08	0,21	0,06	0,20	0,08	0,20
	2	221	0	0,05	0,07	0,04	0,01	0,05	0,07
	3	1581	4	0,03	0,47	0,03	0,30	0,03	0,47
	4	8761	21	0,01	0,20	0,01	0,21	0,01	0,20
GM KPN	1	—	1	0,01	0,07	0,01	0,06	0,01	0,10
	2	—	1	0,01	0,11	0,01	0,12	0,01	0,11
	3	—	3	0,01	0,11	0,01	0,12	0,01	0,11
	4	—	41	0,01	0,11	0,01	0,12	0,01	0,12
GM GQN	1	—	1	0,07	0,31	0,01	0,09	0,01	0,32
	2	—	0	0,07	0,35	0,01	0,15	0,01	0,28
	3	—	3	0,07	0,35	0,01	0,16	0,01	0,21
	4	—	41	0,07	0,36	0,01	0,17	0,01	0,07

Tabulka 4.5: Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky složek vektoru přemístění pro případ **nových histogramů** pro parametry modelu  $m$ .

Je zřetelné, že nahrazení těchto dvou histogramů vede ke značnému zlepšení výsledků obdržených všemi metodami. Dále si lze všimnout, že výsledky stochastické kolokace založené na podmínkách GQN jsou celkově nejhorší a také nadále přetrvávají problémy s konvergencí u této metody. Na druhou stranu nejhorší odhady při použití polynomů prvního stupně předvádí lineární regrese, ale chyba této metody rychle konverguje s rostoucím stupněm polynomů. Stochastická Galerkinova metoda opět ve své semi-intruzivní formě dosahuje stejných hodnot relativních chyb v odhadech průměru pro všechny stupně polynomů, co se

týká odhadů směrodatných odchylek, metoda vykazuje problémy s konvergencí obdobně jako stochastická kolokace.

Stejně zlepšení lze pozorovat také v odhadech celé funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$  zachycené na Obrázku 4.8.



Obrázek 4.8: Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$  pro případ **nových histogramů** pro parametry modelu  $m$ .

Tabulka 4.6 obsahuje chyby v odhadech rezervy spolehlivosti  $Z$  a pravděpodobnost poruchy  $\Pr(F)$  pro případ původních proměnných rozdělených podle nových histogramů.

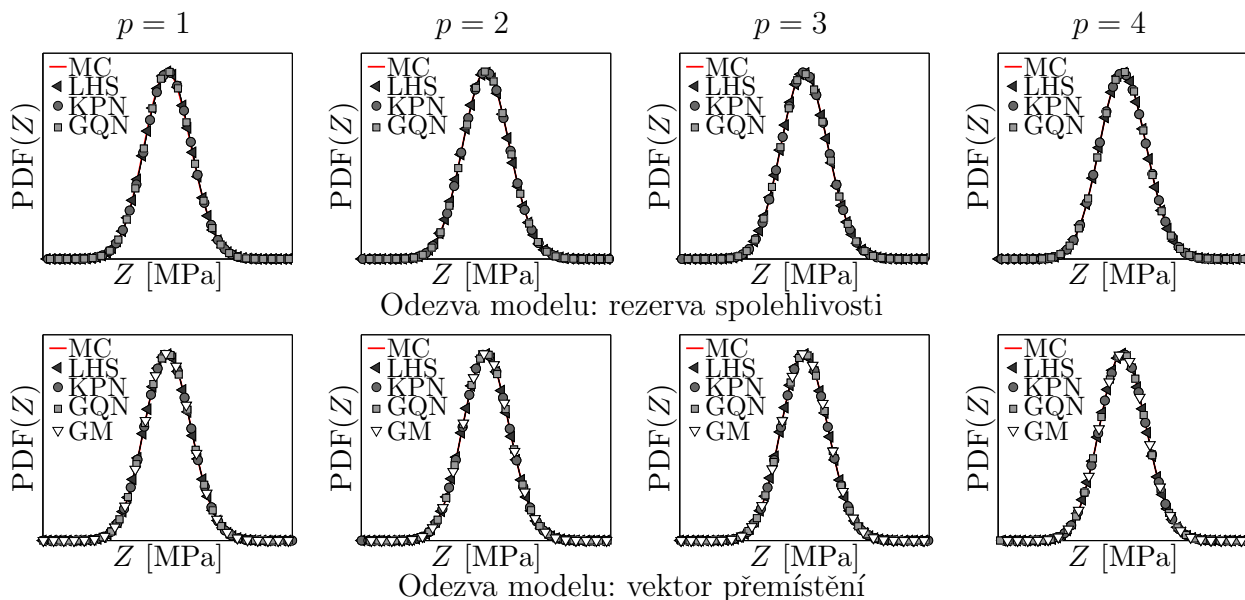
Odezva modelu:		Rezerva spolehlivosti				Vektor přemístění			
Metoda	$p$	$n_d$	Čas [s]	$\Pr(F)$	$\varepsilon_Z$ [%]	$n_d$	Čas [s]	$\Pr(F)$	$\varepsilon_Z$ [%]
MC	–	$10^7$	23833	$5 \cdot 10^{-7}$	–	$10^7$	21874	$5 \cdot 10^{-7}$	–
LHS	1	23	32	$9 \cdot 10^{-7}$	0,2855	21	479	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0320
	2	243	165	$6 \cdot 10^{-7}$	0,0798	201	537	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0142
	3	1607	753	$3 \cdot 10^{-7}$	0,0826	1201	782	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0143
	4	7767	2701	$15 \cdot 10^{-7}$	0,2003	5281	1437	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0275
KPN	1	23	31	$10 \cdot 10^{-7}$	0,2592	21	475	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0202
	2	243	164	$6 \cdot 10^{-7}$	0,0821	201	551	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0132
	3	1607	758	$1 \cdot 10^{-7}$	0,1663	1201	778	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0241
	4	7767	2786	$8 \cdot 10^{-7}$	0,1299	5281	1425	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0220
GQN	1	23	31	$10 \cdot 10^{-7}$	0,2407	21	484	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0212
	2	265	164	$6 \cdot 10^{-7}$	0,1466	221	560	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0235
	3	2069	763	$1 \cdot 10^{-7}$	0,1981	1581	781	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0339
	4	12453	2714	$2 \cdot 10^{-7}$	0,2944	8761	1418	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0348
GM KPN	1	–	–	–	–	–	494	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0196
	2	–	–	–	–	–	560	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0120
	3	–	–	–	–	–	792	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0124
	4	–	–	–	–	–	1455	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0128
GM GQN	1	–	–	–	–	–	491	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0199
	2	–	–	–	–	–	575	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0267
	3	–	–	–	–	–	782	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0403
	4	–	–	–	–	–	1446	$6 \cdot 10^{-7}$	0,0445

Tabulka 4.6: Časová náročnost, chyby v odhadech rezervy spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy pro případ **nových histogramů** pro parametry modelu  $m$ .

Odhad rezervy spolehlivosti i pravděpodobnosti poruchy se po záměně histogramů LONG1 a SHORT1 výrazně zlepšil při použití všech zkoumaných metod. V případě odezvy rovné rezervě spolehlivosti dosahuje nejméně přesné aproximace stochastická kolokace založená na pravidlech GQN, v případě odezvy rovné vektoru přemístění je nejhorší chyba v odhadu

rezervy spolehlivosti obdržena stochastickou Galerkinovou metodou při numerické integraci podle pravidel GQN. Chování těchto dvou metod si je velmi blízké a obě vykazují problémy s konvergencí. Výsledný odhad pravděpodobnosti poruchy je nyní uspokojivý, v případě odezvy rovné vektoru přemístění přímo vynikající.

Zlepšení s výměnou problematických histogramů lze také pozorovat na celých funkcích hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti  $Z$  na Obrázku 4.9.



Obrázek 4.9: Funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti  $Z$  pro případ **nových histogramů** pro parametry modelu  $\mathbf{m}$ .

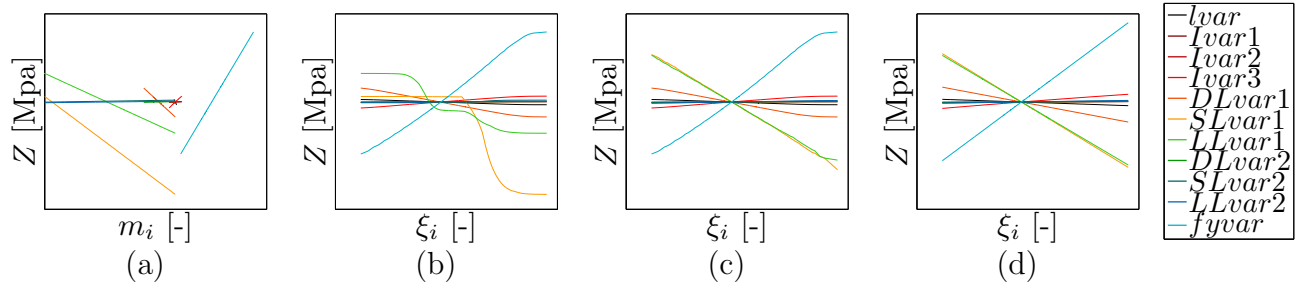
V obou předchozích případech bylo nutné ve stochastické Galerkinově metodě integraci provádět numericky z důvodu diskrétně zadaných rozdělení pravděpodobnosti vyžadující nutnou nepolynomialní transformaci mezi původními proměnnými  $\mathbf{m}$  a standardními proměnnými  $\boldsymbol{\xi}$ . Za účelem prozkoumání vlastností plně intruzivní Galerkinovy metody je nutné znovu změnit předepsaná rozdělení parametrů modelu. Tentokrát jsou všechny proměnné považovány za normálně rozdělené s původními hodnotami průměru a směrodatné odchylky vycházejícími z předepsaných histogramů. V tomto případě se transformace (4.4) stává polynomem prvního stupně

$$m_i = \sigma_i(\xi_i) + \mu_i, \quad (4.11)$$

což umožňuje použití analytické integrace.

Obrázek 4.10 ukazuje funkční závislost rezervy spolehlivosti  $Z$  pro popsané typy pravděpodobnostního rozdělení předepsaného parametrům modelu. Na Obrázku 4.10a je vidět, že vztah mezi  $Z$  a parametry modelu  $\mathbf{m}$  je lineární, zatímco v případě předepsaných histogramů je vztah ke standardním proměnným  $\boldsymbol{\xi}$  vysoce nelineární, viz Obrázek 4.10b. Náhrada dvou histogramů LONG1 a SHORT1 novými, více podobnými normálnímu rozdělení, vede k téměř lineárnímu  $Z - \boldsymbol{\xi}$  vztahu, a to zvláště v oblasti vysoké pravděpodobnosti výskytu proměnných, jak je patrné z Obrázku 4.10c. Poslední Obrázek 4.10d zobrazuje případ, kde je parametrům modelu předepsáno normální rozdělení a vztah  $Z - \boldsymbol{\xi}$  je lineární.



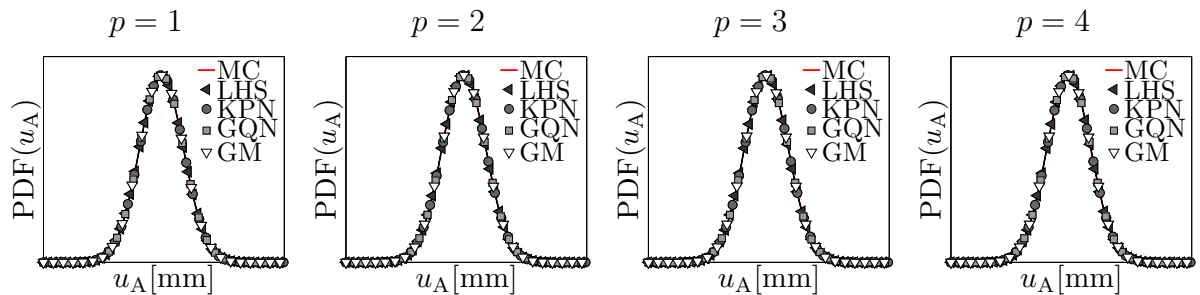


Obrázek 4.10: Funkční závislost  $Z$  na parametrech modelu  $\mathbf{m}$  (a), na standardních proměnných  $\xi$  v případě předepsaných histogramů (b), nových histogramů (c) a normálního rozdělení (d).

Výsledky pro normální rozdělení původních proměnných  $\mathbf{m}$  pro variantu odezvy modelu rovnou vektoru přemístění jsou ukázány v Tabulce 4.7 a na Obrázku 4.11.

Metoda	$p$	$n_d$	Čas [s]	$u_A$ [mm]		$w_A$ [mm]		$\varphi_A$ [mrad]	
				$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
MC	–	$10^7$	3692	0,207	0,033	0,009	0,002	4,090	0,795
				$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]	$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]	$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]
LHS	1	21	0	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-1}$	$6,6 \cdot 10^{-2}$	$5,8 \cdot 10^{-1}$
	2	201	0	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$6,8 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$5,9 \cdot 10^{-3}$
	3	1201	2	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$
	4	5301	10	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$
KPN	1	21	0	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$
	2	201	0	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$
	3	1201	0	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$
	4	5301	3	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$
GQN	1	21	0	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$
	2	221	0	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$
	3	1581	1	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$
	4	8761	5	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$
GM	1	–	0	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-2}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$
	2	–	0	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$
	3	–	3	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$
	4	–	45	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$

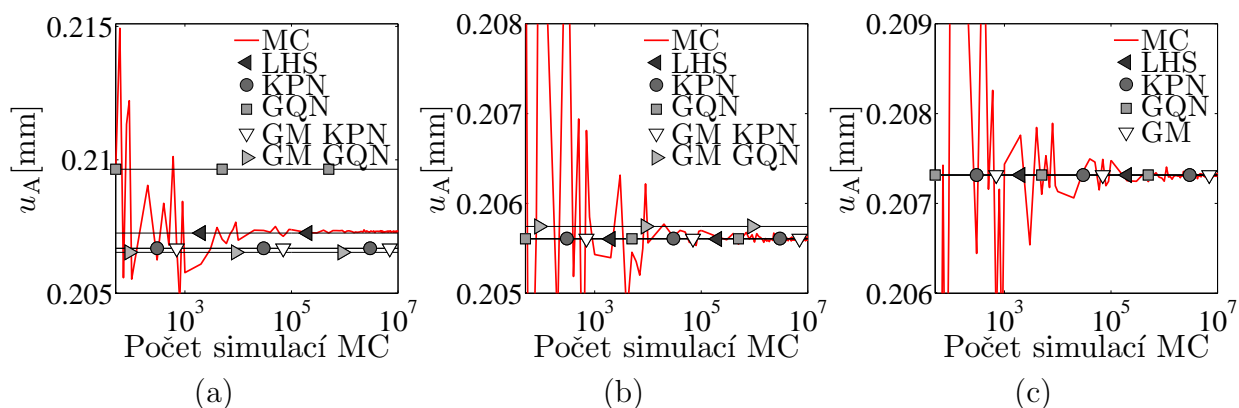
Tabulka 4.7: Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky složek vektoru přemístění pro případ **normálního rozdělení** parametrů modelu  $\mathbf{m}$ .



Obrázek 4.11: Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$  pro případ **normálního rozdělení** parametrů modelu  $\mathbf{m}$ .

Výsledky potvrzují, že vztah  $u_A - \xi$  je v tomto případě lineární, a proto jsou polynomy prvního stupně dostatečné pro vynikající náhradní modely. Rozdíly mezi jednotlivými metodami jsou nyní z hlediska přesnosti zanedbatelné.

Výsledky v přesnosti odhadu průměru aproximace modelu s odezvou rovnou posunutí  $u_A$  shrnuje Obrázek 4.12 pro všechny doposud prezentované varianty pravděpodobnostního rozdělení parametrů. Jednotlivé grafy zobrazují konvergenci odhadu průměru pomocí metody Monte Carlo při použití  $10^2$  až  $10^7$  simulací v porovnání s odhady stanovenými z koeficientů vytvořených polynomiálních aproximací 4. stupně.



Obrázek 4.12: Porovnání odhadů průměru posunu  $u_A$  pomocí PCE a MC s různým počtem simulací v případě **předepsaných histogramů** (a), **nových histogramů** (b) a **normálního rozdělení** (c).

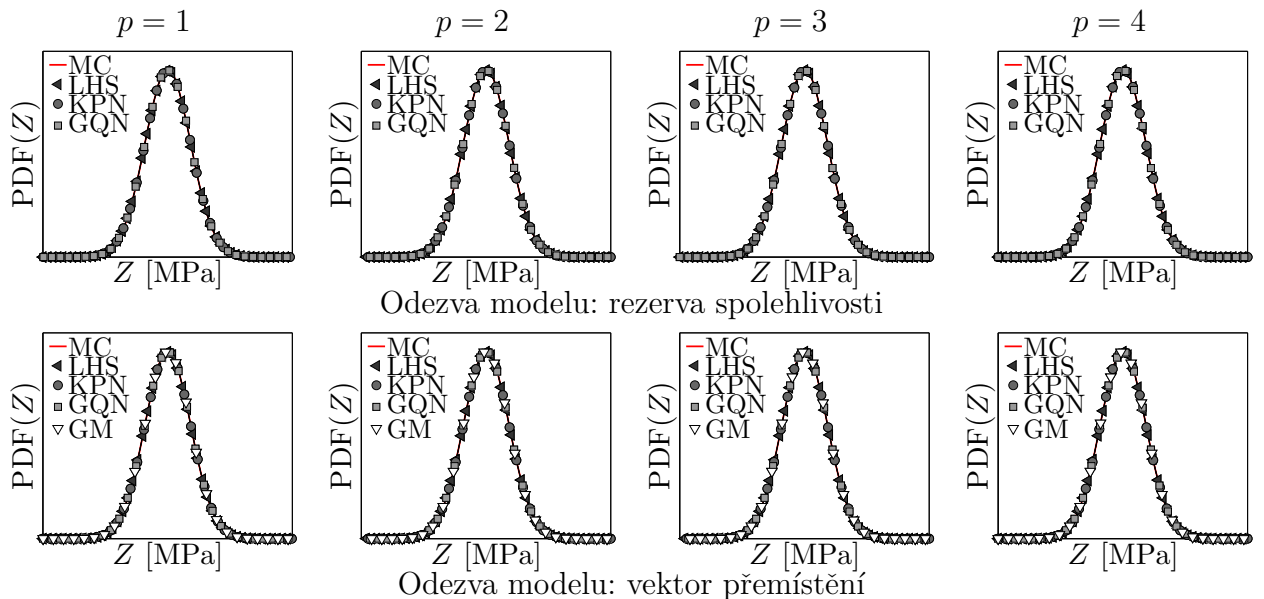
Z grafu 4.12a je patrné, že pro variantu předepsaných histogramů poskytuje nejpreciznější odhad aproximace vytvořená lineární regrese, zatímco nejhorší odhad dává stochastická kolokace založená na pravidlech GQN. V případě nových histogramů 4.12b jsou všechny odhady spočtené z koeficientů PCE velmi přesné kromě odhadu semi-intruzivní Galerkinovy metody v kombinaci s integračním pravidlem GQN. Poslední graf 4.12c ukazuje vynikající odhady průměru získané pomocí všech zkoumaných metod, ke kterým metoda MC konverguje při použití velmi velkého počtu simulací. Je nutné tedy vzít v potaz, že doposud uvedené relativní chyby v odhadech stanovených pomocí polynomiálních aproximací jsou vztahovány k výsledkům metody MC, která ovšem sama poskytuje pouze odhad.

Odhady rezervy spolehlivosti a pravděpodobnosti poruchy pro normální rozdělení původních proměnných  $\mathbf{m}$  jsou uvedeny v Tabulce 4.8. Obrázek 4.13 pak zobrazuje celé funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti pro tuto variantu pravděpodobnostního rozdělení parametrů.

$Z - \xi$  vztah je opravdu lineární, jak ukazují obdržené výsledky, pro vytvoření velmi přesného náhradního modelu stačí polynomy prvního stupně. Z hlediska přesnosti i časové náročnosti jsou všechny zkoumané metody srovnatelné.

Odezva modelu: Rezerva spolehlivosti						Vektor přemístění			
Metoda	$p$	$n_d$	Čas [s]	$\Pr(F)$	$\varepsilon_Z$ [%]	$n_d$	Čas [s]	$\Pr(F)$	$\varepsilon_Z$ [%]
MC	–	$10^7$	3819	$12 \cdot 10^{-7}$	–	$10^7$	3773	$12 \cdot 10^{-7}$	–
LHS	1	23	32	$12 \cdot 10^{-7}$	0,1139	19	439	$12 \cdot 10^{-7}$	0,0249
	2	243	179	$12 \cdot 10^{-7}$	0,0021	163	515	$12 \cdot 10^{-7}$	$2,50 \cdot 10^{-4}$
	3	1607	802	$12 \cdot 10^{-7}$	$4,17 \cdot 10^{-5}$	871	738	$12 \cdot 10^{-7}$	$3,05 \cdot 10^{-6}$
	4	7789	2987	$12 \cdot 10^{-7}$	$1,35 \cdot 10^{-6}$	3481	1374	$12 \cdot 10^{-7}$	$4,88 \cdot 10^{-8}$
KPN	1	23	38	$12 \cdot 10^{-7}$	0,0742	19	447	$12 \cdot 10^{-7}$	0,0134
	2	243	214	$12 \cdot 10^{-7}$	0,0013	163	521	$12 \cdot 10^{-7}$	$1,49 \cdot 10^{-4}$
	3	1607	875	$12 \cdot 10^{-7}$	$3,32 \cdot 10^{-5}$	871	725	$12 \cdot 10^{-7}$	$2,21 \cdot 10^{-6}$
	4	7789	2997	$12 \cdot 10^{-7}$	$1,00 \cdot 10^{-6}$	3481	1362	$12 \cdot 10^{-7}$	$4,08 \cdot 10^{-8}$
GQN	1	23	31	$12 \cdot 10^{-7}$	0,0742	19	444	$12 \cdot 10^{-7}$	0,0134
	2	265	212	$12 \cdot 10^{-7}$	0,0013	181	520	$12 \cdot 10^{-7}$	$1,49 \cdot 10^{-4}$
	3	2069	848	$12 \cdot 10^{-7}$	$3,32 \cdot 10^{-5}$	1177	734	$12 \cdot 10^{-7}$	$2,21 \cdot 10^{-6}$
	4	12453	2796	$12 \cdot 10^{-7}$	$9,98 \cdot 10^{-6}$	5965	1376	$12 \cdot 10^{-7}$	$4,08 \cdot 10^{-8}$
GM	1	–	–	–	–	–	456	$12 \cdot 10^{-7}$	0,0134
	2	–	–	–	–	–	551	$12 \cdot 10^{-7}$	$1,49 \cdot 10^{-4}$
	3	–	–	–	–	–	746	$12 \cdot 10^{-7}$	$2,21 \cdot 10^{-6}$
	4	–	–	–	–	–	1425	$12 \cdot 10^{-7}$	$4,07 \cdot 10^{-8}$

Tabulka 4.8: Časová náročnost, chyby v odhadech rezervy spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy pro případ **normálního rozdělení** parametrů modelu  $m$ .



Obrázek 4.13: Funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti  $Z$  pro případ **normálního rozdělení** parametrů modelu  $m$ .

#### 4.1.2 Legendreovy polynomy

Se záměrem doplnit porovnání různých metod pro proměnné s normálním rozdělením byla dále zařazena varianta s použitím standardních proměnných  $\xi$ , které jsou rovnoměrně rozdělené na intervalu  $\langle -1; 1 \rangle$ . Proměnné s tímto rozdělením se pojí s náhradními modely založenými na Legendreových polynomech.

Při použití Legendreových polynomů jsou vyzkoušeny dvě varianty pravděpodobnostního rozdělení parametrů modelu  $m$ . V první variantě jsou parametry modelu  $m$  rozděleny podle

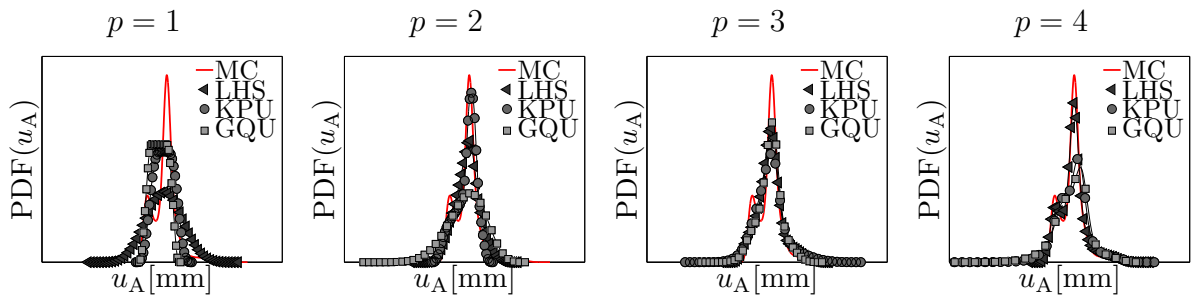
předepsaných histogramů a transformaci mezi standardními rovnoměrně rozdělenými parametry  $\xi$  a původními parametry  $\mathbf{m}$  tvoří inverzní po částech lineární kumulativní distribuční funkce vycházející z předepsaných histogramů. V druhé variantě rozdělení se parametry modelu  $\mathbf{m}$  považují za rovnoměrně rozdělené se zachováním intervalů vycházejících z předepsaných histogramů, v tomto případě je transformace parametrů polynomem prvního stupně

$$m_i = (m_{i,max} - m_{i,min}) \frac{\xi_i + 1}{2} + m_{i,min}. \quad (4.12)$$

Výsledky pro první variantu s parametry  $\mathbf{m}$  rozdělenými podle předepsaných histogramů jsou opět rozděleny do dvou tabulek. Tabulka 4.9 obsahuje výsledky pro variantu odezvy rovnou vektoru přemístění. Tabulka obsahuje potřebný výpočetní čas a relativní chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky jednotlivých složek odezvy stanovených lineární regresí (LHS) a stochastickou kolokační metodou (KPU, GQU) pro čtyři stupně polynomu  $p$ . Na Obrázku 4.14 je odpovídající srovnání celých PDF složky vektoru přemístění  $u_A$ .

Metoda	$p$	$n_d$	Čas [s]	$u_A$ [mm]		$w_A$ [mm]		$\varphi_A$ [mrad]	
				$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
MC	–	$10^7$	21207	0.207	0.033	0.009	0.002	4.090	0.794
				$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]	$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]	$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]
LHS	1	21	0	0.88	33.76	0.86	11.26	1.17	37.52
	2	201	0	0.44	11.05	0.50	6.63	0.55	9.41
	3	1201	3	0.08	5.48	0.04	4.10	0.08	5.31
	4	5301	19	0.06	1.25	0.06	1.71	0.08	1.36
KPU	1	21	0	1.42	29.58	1.09	23.78	1.47	29.61
	2	201	0	1.42	21.49	1.09	15.25	1.47	21.44
	3	1201	3	0.20	17.36	0.14	12.59	0.21	16.80
	4	5301	12	0.20	24.10	0.14	12.01	0.21	19.34
GQU	1	21	0	7.02	37.46	5.93	31.11	7.19	37.47
	2	221	0	1.42	39.89	1.09	19.54	1.48	25.34
	3	1581	3	0.10	10.32	0.05	9.44	0.12	11.21
	4	8761	20	0.42	33.08	0.33	22.36	0.44	24.57

Tabulka 4.9: Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky složek vektoru přemístění pro případ **předepsaných histogramů** pro parametry modelu  $\mathbf{m}$  při aplikaci Legendreových polynomů.



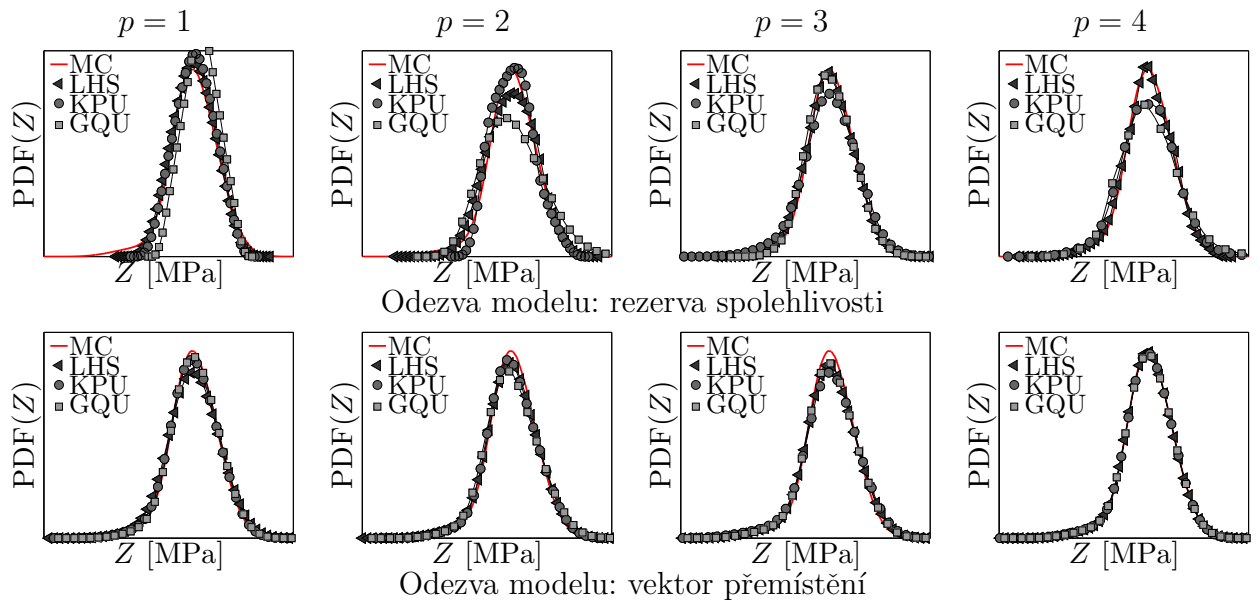
Obrázek 4.14: Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$  pro případ **předepsaných histogramů** pro parametry modelu  $\mathbf{m}$  při aplikaci Legendreových polynomů.

Nejllepších výsledků dosáhla lineární regrese, ovšem ani tato metoda neposkytla dostatečně přesnou podobu celé funkce hustoty pravděpodobnosti zkoumané složky odezvy  $u_A$ , jak je patrné z Obrázku 4.14.

Tabulka 4.10 obsahuje příslušné chyby v odhadu rezervy spolehlivosti  $Z$  a odhady pravděpodobnosti poruchy  $\Pr(F)$  pro obě varianty odezvy modelu. Obrázek 4.15 ukazuje porovnání odhadů celých funkcí hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti  $Z$ .

Odezva modelu: Rezerva spolehlivosti						Vektor přemístění			
Metoda	$p$	$n_d$	Čas [s]	$\Pr(F)$	$\varepsilon_Z$ [%]	$n_d$	Čas [s]	$\Pr(F)$	$\varepsilon_Z$ [%]
MC	–	$10^7$	23207	$72 \cdot 10^{-6}$	–	$10^7$	21207	$72 \cdot 10^{-6}$	–
LHS	1	23	32	$0 \cdot 10^{-6}$	4.6941	21	470	$43 \cdot 10^{-6}$	2.6947
	2	243	165	$0 \cdot 10^{-6}$	3.8073	201	542	$51 \cdot 10^{-6}$	1.7635
	3	1607	764	$0 \cdot 10^{-6}$	2.4549	1201	762	$270 \cdot 10^{-6}$	1.6299
	4	7767	2698	$2 \cdot 10^{-6}$	1.3643	5281	1417	$42 \cdot 10^{-6}$	0.2674
KPU	1	23	32	$0 \cdot 10^{-6}$	3.2641	21	462	$10 \cdot 10^{-6}$	0.9759
	2	243	165	$0 \cdot 10^{-6}$	2.7648	201	550	$10 \cdot 10^{-6}$	1.0885
	3	1607	765	$111 \cdot 10^{-6}$	4.3576	1201	761	$952 \cdot 10^{-6}$	2.9108
	4	7767	2697	$13 \cdot 10^{-6}$	4.3408	5281	1400	$49 \cdot 10^{-6}$	0.8019
GQU	1	23	32	$0 \cdot 10^{-6}$	3.9778	21	469	$4 \cdot 10^{-6}$	1.0408
	2	265	165	$0 \cdot 10^{-6}$	8.1251	221	550	$15 \cdot 10^{-6}$	3.0914
	3	2069	766	$0 \cdot 10^{-6}$	3.0649	1581	769	$109 \cdot 10^{-6}$	1.5978
	4	12453	3054	$0 \cdot 10^{-6}$	5.6265	8761	1409	$25 \cdot 10^{-6}$	1.0043

Tabulka 4.10: Časová náročnost, chyby v odhadech rezervy spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy pro případ **předepsaných histogramů** pro parametry modelu  $\mathbf{m}$  při aplikaci Legendreových polynomů.



Obrázek 4.15: Funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti  $Z$  pro případ **předepsaných histogramů** pro parametry modelu  $\mathbf{m}$  při aplikaci Legendreových polynomů.

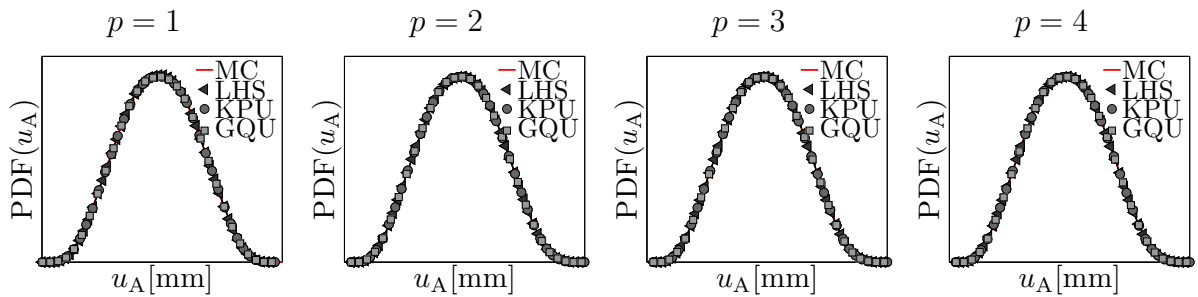
Chyby v odhadech rezervy spolehlivosti  $Z$  jsou opět menší pro variantu odezvy rovnou vektoru přemístění  $\mathbf{r}$ , což je způsobeno rozdílným počtem proměnných ovlivňující danou

odezvu modelu, a i odhad pravděpodobnosti je pro tento případ přesnější, přesto není uspokojivý. Aproximační chyba při použití lineární regrese jasně konverguje, zatímco při použití stochastické kolokace založené na integračních pravidlech KPU i GQU dochází k problémům s konvergencí.

Při uvažování původních parametrů modelu  $\mathbf{m}$  za rovnoměrně rozdělené proměnné se zachováním intervalů z předepsaných histogramů se získají výsledky uvedené v Tabulce 4.11 pro variantu odezvy modelu rovné vektoru přemístění a odpovídající celé PDF posunu  $u_A$  na Obrázku 4.16.

Metoda	$p$	$n_d$	Čas [s]	$u_A$ [mm]		$w_A$ [mm]		$\varphi_A$ [mrad]	
				$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
MC	–	$10^7$	3754	0.274	0.051	0.011	0.003	5.459	1.203
				$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]	$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]	$\varepsilon_\mu$ [%]	$\varepsilon_\sigma$ [%]
LHS	21	1	0	0,03	0,56	0,26	1,19	0,05	1,19
	201	2	0	0,01	0,01	0,00	0,02	0,01	0,01
	1201	3	1	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01
	5301	4	10	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01
KPN	21	1	0	0,02	0,12	0,01	0,17	0,02	0,06
	201	2	0	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01
	1201	3	1	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01
	5301	4	3	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01
GQN	21	1	0	0,02	0,12	0,01	0,17	0,02	0,06
	221	2	0	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01
	1581	3	1	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01
	8761	4	5	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01

Tabulka 4.11: Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky složek vektoru přemístění pro případ **rovnoměrného rozdělení** parametrů modelu  $\mathbf{m}$ .



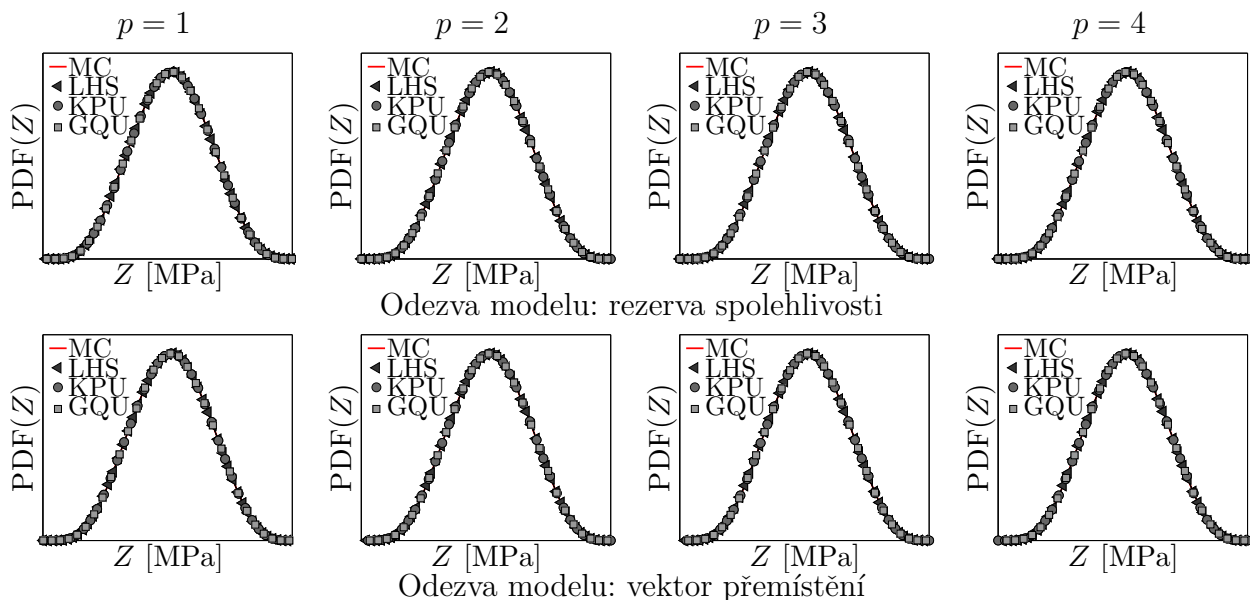
Obrázek 4.16: Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$  pro případ **rovnoměrného rozdělení** parametrů modelu  $\mathbf{m}$ .

V této variantě rozdělení parametrů  $\mathbf{m}$  je vztah mezi standardními proměnnými  $\xi$  a původními proměnnými  $\mathbf{m}$  lineární, proto pro velmi přesnou aproximaci odezvy modelu je dostatečné použití polynomů prvního stupně. Výsledky dosažené stochastickou kolokací jsou shodné u obou zkoumaných variant integračních pravidel pro všechny použité stupně polynomů. Lineární regrese vykazuje horší výsledky pro první stupeň polynomů, ale pro vyšší stupně polynomů jsou její výsledky stejně přesné jako výsledky stochastické kolokace.

Odezva modelu:		Rezerva spolehlivosti				Vektor přemístění				
Metoda	$p$	$n_d$	Čas [s]	$\Pr(F)$	$\varepsilon_Z$ [%]	$n_d$	Čas [s]	$\Pr(F)$	$\varepsilon_Z$ [%]	
MC	–	$10^7$	3793	$1326 \cdot 10^{-5}$	–	$10^7$	3754	$1326 \cdot 10^{-5}$	–	
	LHS	1	23	32	$1329 \cdot 10^{-5}$	0,2733	21	442	$1308 \cdot 10^{-5}$	0,0508
		2	243	215	$1326 \cdot 10^{-5}$	0,0063	201	517	$1326 \cdot 10^{-5}$	0,0009
		3	1607	760	$1326 \cdot 10^{-5}$	0,0002	1201	747	$1326 \cdot 10^{-5}$	$2,17 \cdot 10^{-5}$
		4	7767	2684	$1326 \cdot 10^{-5}$	$3,64 \cdot 10^{-6}$	5281	1380	$1326 \cdot 10^{-5}$	$3,76 \cdot 10^{-7}$
KPN	1	23	32	$1290 \cdot 10^{-5}$	0,2127	21	449	$1319 \cdot 10^{-5}$	0,0370	
	2	243	165	$1326 \cdot 10^{-5}$	0,0052	201	503	$1326 \cdot 10^{-5}$	0,0007	
	3	1607	761	$1326 \cdot 10^{-5}$	0,0001	1201	732	$1326 \cdot 10^{-5}$	$1,57 \cdot 10^{-5}$	
	4	7767	2683	$1326 \cdot 10^{-5}$	$3,80 \cdot 10^{-5}$	5281	1378	$1326 \cdot 10^{-5}$	$1,12 \cdot 10^{-5}$	
GQN	1	23	32	$1290 \cdot 10^{-5}$	0,2127	21	443	$1319 \cdot 10^{-5}$	0,0370	
	2	265	165	$1325 \cdot 10^{-5}$	0,0052	221	513	$1326 \cdot 10^{-5}$	0,0007	
	3	2069	763	$1326 \cdot 10^{-5}$	0,0001	1581	733	$1326 \cdot 10^{-5}$	$1,39 \cdot 10^{-5}$	
	4	12453	2687	$1326 \cdot 10^{-5}$	$3,15 \cdot 10^{-6}$	8761	1358	$1326 \cdot 10^{-5}$	$3,11 \cdot 10^{-7}$	

Tabulka 4.12: Časová náročnost, chyby v odhadech rezervy spolehlivosti a pravděpodobnost poruchy pro případ **rovnoměrného rozdělení** parametrů modelu  $m$ .

Chyby v aproximaci rezervy spolehlivosti jsou v tomto případě velmi malé a odhady pravděpodobnosti poruchy velmi přesné při použití všech zkoumaných metod, jak je patrné z Tabulky 4.12. Rozdíl v přesnosti u jednotlivých typů modelu je při tomto pravděpodobnostním rozdělení parametrů malý. Na Obrázku 4.17 jsou zobrazeny celé PDF rezervy spolehlivosti pro oba typy modelu a čtyři stupně polynomu použité pro aproximaci odezvy modelu.



Obrázek 4.17: Funkce hustoty pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti  $Z$  pro případ **rovnoměrného rozdělení** parametrů modelu  $m$ .

# Kapitola 5

## Shrnutí

Tato část diplomové práce představuje přehled a porovnání třech metod pro konstrukci náhradního modelu založeného na polynomiálním chaosu a nahrazujícího numerický model s náhodnými parametry. Konkrétně zkoumané metody jsou stochastická Galerkinova metoda, stochastická kolokační metoda a polynomiální regrese zakládající se na metodě Latin Hypercube Sampling. V práci jsou probrány specifické rysy těchto metod.

Pro získání kvalitního náhradního modelu je nutné použít k jeho tvorbě ortogonální polynomy typu odpovídajícího předepsanému rozdělení pravděpodobnosti parametrů. V práci byly použity Hermiteovy polynomy pro normální rozdělení a Legendreovy polynomy pro rovnoměrné rozdělení parametrů.

Kvalita obdržných náhradních modelů je demonstrována z hlediska přesnosti i časové náročnosti na jednoduchém ilustrativním příkladu rámové konstrukce v porovnání s tradiční metodou Monte Carlo.

U aproximace pomocí Hermiteových polynomů se s dobrými výsledky osvědčuje lineární regrese, zatímco stochastická kolokační metoda má problémy s konvergencí. Podobný charakter, jaký se projevuje u stochastické kolokace, lze pozorovat u semi-intruzivní formy stochastické Galerkinovy metody, důvodem je použití stejných integračních pravidel v obou zkoumaných metodách. Stochastická Galerkinova metoda je také aplikována ve své plně intruzivní formě pro variantu normálně rozdělených parametrů modelu, kdy lze vyloučit všechny numerické odhady a integraci provádět analyticky. Výsledky Galerkinovy metody jsou dobré, ale je nutno zmínit, že tato metoda je z hlediska aplikace náročnější, protože oproti předchozím dvěma metodám vyžaduje přeformulování samotného modelu.

Pro rovnoměrně rozdělené parametry jsou náhradní modely vytvořeny pomocí lineární regrese a stochastické kolokace. Výsledky těchto metod ve variantě s Legendreovými polynomy jsou obdobné jako v případě Hermiteových polynomů. Rozdíl v přesnosti vytvořených polynomiálních náhradních modelů pomocí jednotlivých metod je velmi malý. Konvergence aproximační chyby není opět optimální při použití stochastické kolokační metody.

Z hlediska časové náročnosti jsou jednotlivé metody srovnatelné a ve srovnání s metodou Monte Carlo jsou méně časově náročné.



Výstupem této části diplomové práce není pouze porovnání představených metod, ale také vyhodnocení, která z metod bude následně použita pro aplikaci v druhé části práce. Z důvodu obecného použití, kdy může být plný numerický model brán jako tzv. černá skříňka (z angl. *black box*), není vhodné se soustředit na stochastickou Galerkinovu metodu, která je založena na určitém typu modelu a navíc na jeho podstatné úpravě. Dále se nabízí vyloučit stochastickou kolokační metodu pro její problémy s konvergencí. Nyní je tedy jasné, že pro další práci je zvolena lineární regrese založená na LHS, která z uvedených výsledků a vyvozených závěrů vychází jako nejvhodnější metoda sestavení polynomiálního náhradního modelu pro následné použití k urychlení bayesovské identifikace parametrů.

## Část II

# Bayesovská identifikace parametrů

# Kapitola 6

## Bayesovský přístup

Tato část diplomové práce se zaměřuje na identifikaci nejistých parametrů numerických modelů. Oproti první části, která se zabývá kvantifikací nejistot v odezvě modelu, se předmětem zkoumání stane nejistota ve vstupních parametrech. Jedná se o inverzní problém, kdy se odezva modelu používá pro identifikování vstupních parametrů, v tomto případě pro určení či zpřesnění jejich pravděpodobnostních rozdělení.

K problematice identifikování parametrů výpočetních modelů lze přistupovat pomocí bayesovské statistiky, která vnímá pravděpodobnost náhodného jevu jako stupeň důvěry v tento jev. Naproti tomu klasická či četnostní statistika uvažuje pravděpodobnost jako objektivní vlastnost náhodného jevu, na níž nemají vliv další zjištěné informace či postoje k těmto informacím. Bayesovská statistika pracuje s podmíněnými pravděpodobnostmi a je založena na Bayesově větě, která vychází z běžného způsobu uvažování, kdy její podstatou je stanovit výslednou důvěru v náhodný jev na základě kombinace dosavadních znalostí a nově nabytých informací [11]. Tento přístup zavedl Thomas Bayes v 18. století ve své posmrtně vydané práci [3].

Při zachování dosavadního značení, kdy se uvažuje stochastický problém (2.1) s nejistými vstupními parametry  $\mathbf{m}$  a náhodnými měřeními  $\mathbf{z}$ , lze odvodit Bayesovu větu ze simultánní hustoty pravděpodobnosti parametrů a pozorování  $h(\mathbf{m}, \mathbf{z})$  [12]. Pokud se výchozí postoj k parametrům  $\mathbf{m}$  označí  $p(\mathbf{m})$  a funkci těchto parametrů při daném pozorování  $\mathbf{z}$  jako  $p(\mathbf{r}|\mathbf{m})$ , platí analogicky jako pro náhodné jevy

$$h(\mathbf{m}, \mathbf{z}) = p(\mathbf{z}|\mathbf{m})p(\mathbf{m}) = p(\mathbf{m}|\mathbf{z})p(\mathbf{z}). \quad (6.1)$$

Bayesova věta, která definuje pravděpodobnostní rozdělení nejistých parametrů  $\mathbf{m}$  na základě všech dostupných informací, se poté vyjádří následujícím vzorcem

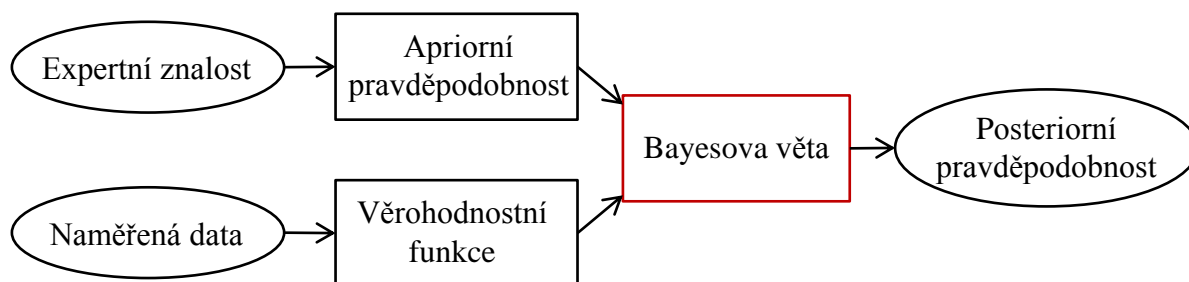
$$p(\mathbf{m}|\mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{z}|\mathbf{m})p(\mathbf{m})}{p(\mathbf{z})} = \frac{p(\mathbf{z}|\mathbf{m})p(\mathbf{m})}{\int_{\mathbf{m}} p(\mathbf{z}|\mathbf{m})p(\mathbf{m})d\mathbf{m}}. \quad (6.2)$$

V uvedeném vzorci se kombinují expertní znalosti v podobě apriorního rozdělení  $p(\mathbf{m})$  a informace z naměřených dat definované věrohodnostní funkcí  $p(\mathbf{z}|\mathbf{m})$ . Celý výraz je dělen

normalizační konstantou, která zaručuje, že výsledkem je pravděpodobnostní rozdělení, tedy že platí

$$\int_{\mathbf{m}} p(\mathbf{m}|\mathbf{z})d\mathbf{m} = 1. \quad (6.3)$$

Výsledné pravděpodobnostní rozdělení se nazývá posteriorní neboli posterior. Jde o upřesněnou charakteristiku nejistých vstupních parametrů vycházející z apriorní pravděpodobnosti a věrohodnostní funkce. Jednoduché schéma principu bayesovského určení posteriorního rozdělení nejistých parametrů je na Obrázku 6.1.



Obrázek 6.1: Princip bayesovské identifikace nejistých parametrů.

V některých případech lze používat Bayesovu větu i ve tvaru bez jmenovatele, kdy bývá posteriorní rozdělení zjednodušeně vyjádřeno jako

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{z}) \propto p(\mathbf{z}|\mathbf{m})p(\mathbf{m}) \quad (6.4)$$

neboli

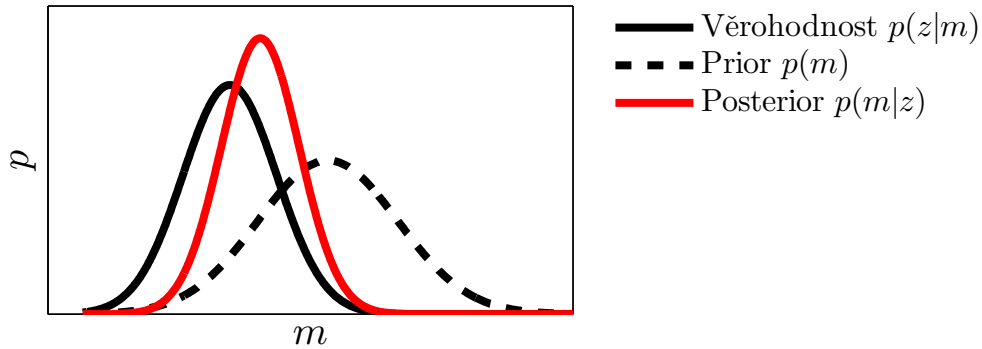
$$posterior \propto věrohodnost \times prior, \quad (6.5)$$

kdy se symbolem  $\propto$  rozumí rovnost až na normalizační konstantu.

Problémem ovšem zůstává, jak posteriorní rozdělení prakticky získat, protože jeho výpočet nebývá v mnoha případech triviální a analyticky vůbec možný.

Zvláštním případem je aplikace tzv. konjugovaného prioru, kdy jsou známy explicitní vztahy pro parametry posteriorního rozdělení, jehož typ je dán typem apriorního rozdělení. Jinak řečeno, pokud se kombinací určitého typu apriorního rozdělení a věrohodnostní funkce získá posteriorní rozdělení stejného typu jako je prior, jedná se o konjugovaný prior. Například kombinací normálního apriorního rozdělení s věrohodnostní funkcí rovnou normálnímu rozdělení vzhledem k identifikovanému parametru vzniká normální posteriorní rozdělení, jak je možné vidět na Obrázku 6.2. Příklady konjugovaných apriorních rozdělení s odpovídajícími vzorci pro parametry posteriorního rozdělení jsou uvedeny v [41].

Velkou výhodou konjugovaného apriorního rozdělení je usnadnění bayesovských výpočtů, ovšem často nelze tento postup uplatnit a posteriorní rozdělení je nutné vyjádřit jiným způsobem. Řešení může spočívat ve vzorkování hledaného rozdělení, kdy různé přístupy



Obrázek 6.2: Kombinace apriorního normálního rozdělení s normálně rozdělenými měřeními za vzniku normálně rozděleného posterioru.

k simulacím posteriorního rozdělení a obsáhlý přehled literatury zabývající se touto problematikou lze nalézt v [7], kapitola 11.

Nejčastěji používanou metodou pro obdržení posterioru se jeví vzorkování pomocí Markovových řetězců generovaných metodou Monte Carlo, které umožňují obejít výpočet složitých (často vícerozměrných) integrálů. Tato metoda je velmi univerzální, lze ji aplikovat pro jakýkoliv tvar apriorního rozdělení a věrohodnostní funkce a poskytuje dostatečně přesný odhad posteriorního rozdělení. Nevýhodou je však vysoká výpočetní náročnost, resp. nezbytnost použití velkého počtu vzorků.

Pro snížení výpočetní náročnosti lze při vzorkování posteriorního rozdělení používat při vyhodnocování odezvy místo plného numerického modelu jeho aproximaci založenou na polynomiálním chaosu [25], jejíž tvorbě se věnuje předcházející část této práce. Jak už bylo zmíněno v rámci shrnutí výsledků první části práce, v následujících praktických aplikacích se uplatňuje polynomiální aproximace získaná lineární regresí založenou na LHS návrhu experimentů. Porovnání jednotlivých metod sestavení PCE aproximace určené pro bayesovskou identifikaci nejistého parametru je uvedeno v Kapitole 9.4.

# Kapitola 7

## Monte Carlo pro Markovovy řetězce

Pro získání posteriorního rozdělení náhodných parametrů se v této práci použijí již zmíněné Markovovy řetězce generované metodou Monte Carlo (MCMC - z ang. *Markov Chain Monte Carlo*). Jedná se o skupinu algoritmů, které umožňují generovat vzorky i ze složitého pravděpodobnostního rozdělení narozdíl od obyčejné metody Monte Carlo, která lze použít pouze pro rozdělení, jež se dají popsat transformací rovnoměrného rozdělení. Základem MCMC je konstrukce ergodického Markovova řetězce se stacionárním rozdělením rovným požadovanému rozdělení  $p$ , v této práci je  $p$  rovno posteriornímu rozdělení  $p(\mathbf{m}|\mathbf{z})$ . Po dostatečně velkém počtu simulací lze takový řetězec považovat přibližně za náhodný výběr z hledaného rozdělení. Tímto postupem lze tedy simulovat složité stochastické systémy, což vedlo k jeho širokému uplatnění v různých oborech. Ve spojitosti s vývojem výpočetní techniky dosahují MCMC algoritmy, jejichž první zástupce byl vyvinut v roce 1953 [28], největšího rozmachu převážně v posledních dvou desetiletích.

Markovův řetězec vyjadřuje stochastický proces, který je dán sekvencí  $X_1, X_2, \dots$  náhodných proměnných, pokud podmíněná pravděpodobnost  $X_s$  za podmínky  $X_1, X_2, \dots, X_{s-1}$  závisí pouze na proměnné v předcházejícím stavu  $X_{s-1}$ . Systém tedy prochází v průběhu řetězce z jednoho stavu do druhého, přičemž současný stav je dán pouze předcházejícím stavem a nezávisí na celé historii řetězce. V této práci se uvažují jen homogenní Markovovy řetězce, ty mají stacionární pravděpodobnost přechodu, tzn. že podmíněná pravděpodobnost proměnné  $X_s$  za podmínky  $X_{s-1}$  nezávisí na kroku  $s$ . Existence jediného stacionárního rozdělení a jeho konvergence k požadovanému rozdělení  $p$  je zaručena pro ergodické Markovovy řetězce, tj. nerozložitelné řetězce se všemi stavy trvalými nenulovými a neperiodickými. Podrobný popis těchto vlastností a jejich důkazy pro různé algoritmy tvorby řetězců jsou uvedeny v [29].

Jak vyplývá z předchozího textu, existují různé algoritmy pro sestavení Markovova řetězce. Mezi nejznámější z nich patří Metropolisův nebo obecnější Metropolisův-Hastingsův algoritmus a Gibbsův generátor [33, 7]. Všechny tyto algoritmy jsou založeny na následujícím jednoduchém základním postupu, který spočívá v generování nových návrhových stavů neboli bodů  $Y$  z návrhového rozdělení (z angl. *proposal distribution*)  $q(Y_s|X_{s-1})$  a jejich přijetí

s pravděpodobností  $w(X_s = Y_s | X_{s-1})$  [35].

```

1  Vytvoř počáteční stav X(1,:)
2  for i = 2:n
3      Generuj nový stav Y z návrhového rozdělení
4      Spočti pravděpodobnost přijetí nového stavu w(Y|X(i-1,:))
5      if rand < w(Y|X(i-1,:))
6          X(i,:) = x;
7      else
8          X(i,:) = X(i-1,:);
9      end
10 end

```

Jednotlivé algoritmy se od sebe navzájem liší předepsaným návrhovým rozdělením, kdy nejobecnější Metropolisův-Hastingsův algoritmus používá jakékoliv návrhové rozdělení a pravděpodobnost přijetí nového stavu je vzhledem k tomuto rozdělení vážená

$$w(X_s = Y_s | X_{s-1}) = \min\left\{1, \frac{p(Y_s | \mathbf{z})}{p(X_{s-1} | \mathbf{z})} \cdot \frac{q(Y_s | X_{s-1})}{q(X_{s-1} | Y_s)}\right\}, \quad (7.1)$$

zatímco pro Metropolisův algoritmus je typické symetrické návrhové rozdělení. Jelikož tedy platí  $q(Y|X) = q(X|Y)$ , tak pravděpodobnost přijetí nového stavu se v tomto případě zjednoduší na

$$w(X_s = Y_s | X_{s-1}) = \min\left\{1, \frac{p(Y_s | \mathbf{z})}{p(X_{s-1} | \mathbf{z})}\right\}. \quad (7.2)$$

Při výpočtu se v podílu posteriorní hustoty v návrhovém stavu a ve stavu předcházejícím pokrátí normalizační konstanty, a není tedy nutné počítat složité integrály.

Gibbsův generátor se od předchozích dvou MCMC algoritmů liší především v tom, že jednotlivé parametry, tj. souřadnice stavu či bodu  $X_s$ , jsou měněny během Markovova řetězce postupně po jednom, přičemž ostatní parametry jsou zafixovány.

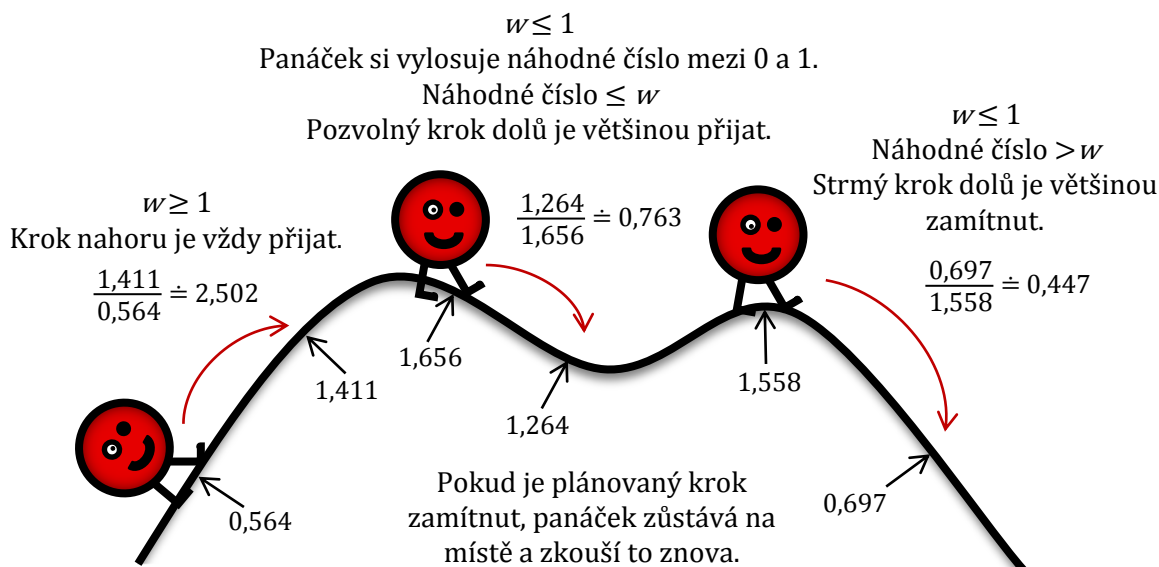
Tato práce se zaměřuje na Metropolisův algoritmus, v němž je návrhové rozdělení sdružené normální se středními hodnotami rovnými souřadnicím předchozího stavu a kovarianční matice závislou na konkrétním příkladě. Jinou interpretací stejného postupu může být představa, že návrhové rozdělení je použito pouze pro definování náhodného kroku při tzv. náhodné procházce (z angl. *random walk*), kdy přičtením náhodného kroku k předchozímu bodu se obdrží návrhový bod, tedy

$$Y_s = X_{s-1} + v_s, \quad (7.3)$$

kde  $v_s$  je náhodný krok se sdruženým normálním návrhovým rozdělením s nulovými středními hodnotami. Kovarianční matice tohoto návrhového rozdělení pak určuje velikost náhodného kroku, tedy jak je daleko bod  $z$  předchozího kroku a návrhový bod v současném kroku. Princip Metropolisova algoritmu náhodné procházky zjednodušeně uvádí Obrázek 7.1.

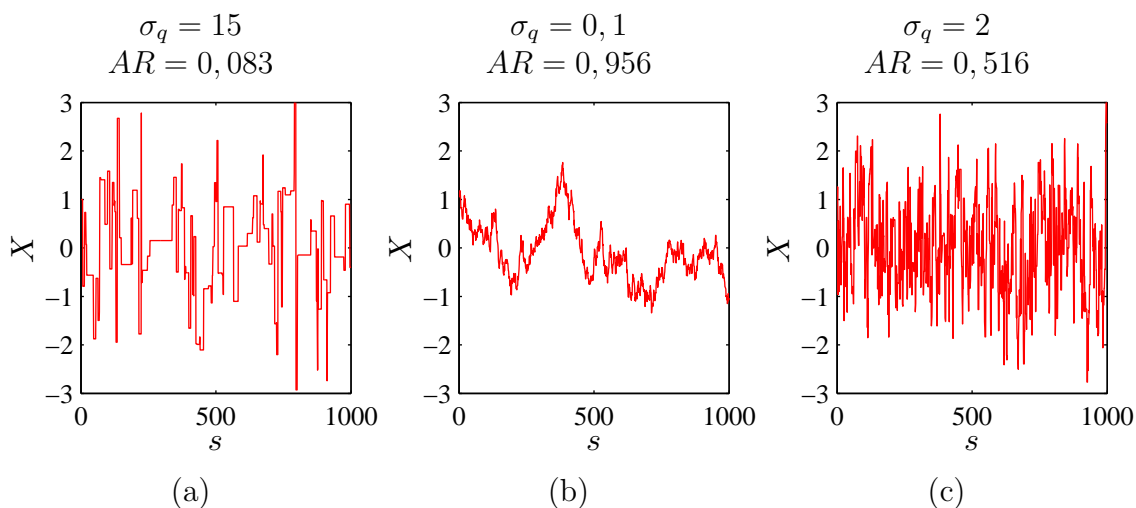
Postup jak vhodně zvolit směrodatné odchylky návrhových rozdělení  $\sigma_q$  není jasně dán, ale platí obecné zásady, které jsou demonstrovány na Obrázku 7.2. Jedná se o jednoduchý příklad vzorkování normálního standardního rozdělení pomocí funkce `mhsample` v MatLabu,

Panáček si na *náhodné procházce* zvolí, kam vstoupí příštím krokem. Nová pozice je přijata podle poměru  $w$  výšky zvoleného místa a výšky současné pozice, kdy jednotlivé výšky znázorňují hodnoty posteriorní hustoty pravděpodobnosti.



Obrázek 7.1: Princip Metropolisova algoritmu náhodné procházky. Inspirace v [22].

kdy je uvažováno normální návrhové rozdělení se střední hodnotou rovnou nule a mění se jeho  $\sigma_q$ .



Obrázek 7.2: Příklady MCMC se špatným (a,b) a dobrým (c) směřováním a odpovídající míry přijetí  $AR$  v závislosti na změně  $\sigma_q$ .

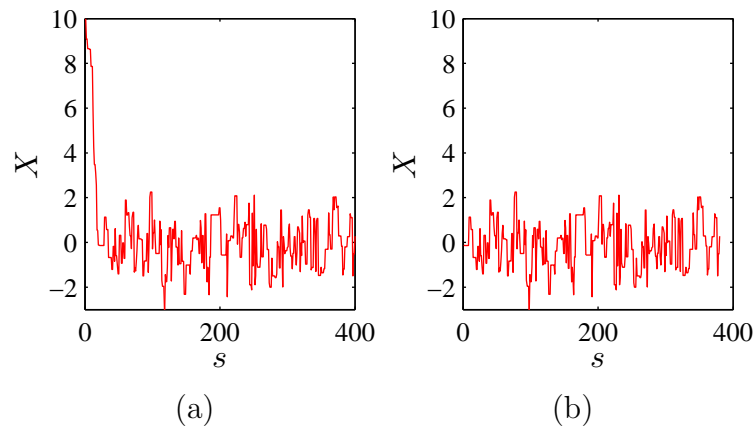
Způsob, jakým řetězec prozkoumává prostor, se nazývá směřování (z angl. *mixing*) řetězce a závisí na návrhovém rozdělení. Pokud jsou náhodné kroky příliš malé jako na Obrázku 7.2a, je potřeba větší množství kroků v řetězci, aby se navzorkovalo požadované rozdělení. Směřování řetězce je v takovém případě špatné. Ovšem ani velké náhodné kroky nejsou dobré, viz Obrázek 7.2b, protože většina návrhových bodů je zamítnuta a řetězec dlouho setrvává na stejném místě [30]. Optimální míra přijetí  $AR$  (z angl. *Acceptance Rate*), která vy-



jadřuje poměr přijatých návrhových bodů ku celkovému počtu provedených cyklů Metropolisova algoritmu, je podle [31] v rozmezí 0,1 až 0,6. Příklad MCMC s optimální AR je na Obrázku 7.2c. Míra přijetí blízká nule znamená, že náhodné kroky jsou příliš velké, při hodnotě blízké se jedné jsou naopak téměř všechny návrhové body přijaty, ale směšování řetězce je pomalé.

Dalším možným vyjádřením efektivnosti vzorkování je měření korelace mezi stavy řetězce, kdy vyšší hodnoty korelace většinou znamenají méně efektivní vzorkování [21]. V Kapitole 9 s výsledky aplikace na inženýrské konstrukci je použito vyhodnocení autokorelace pro nastavení návrhového rozdělení.

Dále se v souvislosti s Markovovými řetězci zmiňuje tzv. rozhořívání či rozhořivací perioda (z angl. *burn-in period*). Jedná se o počáteční část řetězce, která se odstraňuje, protože nemusí odpovídat požadovanému rozdělení. Jak velká část řetězce se má odstranit není pevně dáno a spíše záleží na inženýrském citu. Příklad řetězce před a po odstranění rozhořivací periody je uveden na Obrázku 7.3a, resp. 7.3b.



Obrázek 7.3: Původní Markovův řetězec (a) a Markovův řetězec upravený odstraněním rozhořivací periody (b).

Odstranění počáteční části řetězce není nutné, pokud se vhodně zvolí počáteční bod řetězce. Přehled různých způsobů stanovení vhodného počátečního bodu pro MCMC je uveden v [9]. Jiným řešením, které není z hlediska výpočetního času příliš ideální, může být použití velkého počtu bodů v řetězci, kdy se vliv počátečních bodů minimalizuje [8].

# Kapitola 8

## Citlivostní analýza

V případě, kdy má numerický model více výstupů nebo lze při experimentu měřit na fyzikálním modelu různé veličiny, je nutné před samotným měřením zvolit, která veličina či skupina veličin je nejvhodnější pro identifikaci zkoumaného parametru, a určit tak, co se za tímto účelem bude doopravdy měřit. Odpověď na tuto zásadní otázku je možné získat pomocí citlivostní analýzy, která stanovuje citlivost vztahu mezi vstupním parametrem a odezvou modelu. Konkrétně se použije globální citlivostní analýza, která se zabývá vlivem parametrů na jejich celých definičních oborech.

Globální citlivost je možné vyhodnotit několika způsoby, a to pomocí korelačních koeficientů nebo Sobolových indexů citlivosti stanovených na základě analýzy rozptylu - ANOVA (z angl. *ANalysis Of VAriance*) [32]. Některým z těchto přístupů se stanoví, která složka odezvy má se zkoumaným parametrem nejužší vztah, a je tedy vhodným kandidátem pro použití při identifikaci tohoto parametru.

Je nutné si uvědomit, že citlivost vztahu mezi zkoumaným parametrem a volené složky odezvy umožňuje vzít v úvahu nejistotu, která se s touto složkou odezvy pojí. Je vhodné, aby zvolená složka odezvy měla co největší rozptyl, tedy aby se při změně parametru její hodnota měnila více v porovnání s ostatními složkami odezvy.

Jednoduchým příkladem může být konzola se spojitým konstantním zatížením s nejistým modulem pružnosti, pro jehož identifikaci se použije svislý průhyb, úkolem je pouze stanovit umístění tenzometru. V uvedeném příkladě je jasné, že nejvhodnější volbou je měřit průhyb na volném konci konzoly, kde dosahuje průhyb největších hodnot. Případné chyby měření (nedokonalá realizace měření, nepřesnost přístroje, nedostatečné zahrnutí vlivů okolního prostředí atd.), které se zde mohou považovat za stejné v jakémkoliv bodě konzoly, pak tvoří nejmenší část odezvy v porovnání s odezvami s menšími hodnotami rozptylu.

Ne vždy však chyby měření dosahují stejných hodnot pro různé složky odezvy. Například při použití přístrojů s různou rozlišovací schopností, v různých okolních podmínkách (některé měřící přístroje umístěny v interiéru a některé v exteriéru) či měření různých veličin pomocí různě přesných aproximací v měřících metodách vede na nutnost zahrnutí těchto rozdílů při volbě vhodné odezvy modelu pro identifikaci parametrů.

## 8.1 Korelace

Prvním způsobem vyjádření citlivosti jsou korelační koeficienty, které se spočítají na základě sady nezávislých simulací získané nejjednodušeji pomocí metody Monte Carlo. Pro stanovení citlivosti odezvy modelu na vstupní parametry je vhodné použít Spearmanova koeficientu pořadové korelace (SRCC z angl. *Spearman's Rank Correlation Coefficient*), který je schopen určit vztah mezi vstupními a výstupními hodnotami nelineárních monotónních modelů [14]. Pokud máme numerický model

$$\mathbf{r} = M(\mathbf{m}), \quad (8.1)$$

kde  $\mathbf{r}$  je odezva modelu a  $\mathbf{m}$  jsou vstupní parametry, vliv parametru  $m_i$  na odezvu modelu  $r_j$  lze ohodnotit Spearmanovým koeficientem pořadové korelace  $\rho_{m_i, r_j}$  podle

$$\rho_{m_i, r_j} = 1 - \frac{6 \sum_{a=1}^n (p(m_{i,a}) - p(r_{j,a}))^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (8.2)$$

kde  $m_{i,a}$  jsou hodnoty zkoumaného parametru modelu vybrané metodou Monte Carlo a odpovídající  $n$  provedeným simulacím modelu,  $r_{j,a}$  jsou odpovídající hodnoty odezvy modelu. Hodnotám  $m_{i,a}$  a  $r_{j,a}$  náleží pořadí  $p(m_{i,a})$  a  $p(r_{j,a})$ , ze kterých je počítána příslušná citlivost.

## 8.2 Indexy citlivosti a ANOVA dekompozice

Citlivost lze také vyjádřit pomocí indexů citlivosti, které se získají na základě rozkladu odezvy modelu na složky ovlivněné jednotlivými proměnnými nebo jejich kombinacemi:

$$\mathbf{r} = M(\mathbf{m}) = M_0 + \sum_{i=1}^{n_m} M_i(m_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n_m} M_{i,j}(m_i, m_j) + \cdots + M_{1,2,\dots,n_m}(\mathbf{m}) \quad (8.3)$$

a zároveň platí, že:

$$M_0 = \int M(\mathbf{m}) d\mathbb{P}(\mathbf{m}) \quad (8.4)$$

a

$$\int M_{i_1, \dots, i_s}(m_{i_1}, \dots, m_{i_s}) d\mathbb{P}(m_k) = 0, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n_m, \quad k \in \{i_1, \dots, i_s\}. \quad (8.5)$$

Tento rozklad je často nazýván ANOVA dekompozice [5]. Stejným způsobem lze rozložit také rozptyl odezvy modelu

$$\mathbb{V}[M(\mathbf{m})] = D = \int M^2(\mathbf{m}) d\mathbb{P}(\mathbf{m}) - M_0^2 = \sum_{i=1}^{n_m} D_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n_m} D_{i,j} + \cdots + D_{1, \dots, n_m}, \quad (8.6)$$

kde  $D_{i_1, \dots, i_s}$  jsou parciální rozptyly definované jako

$$D_{i_1, \dots, i_s} = \int \cdots \int_s M_{i_1, \dots, i_s}^2(m_{i_1}, \dots, m_{i_s}) d\mathbb{P}(m_{i_1}) \cdots d\mathbb{P}(m_{i_s}) = \mathbb{V}[M_{i_1, \dots, i_s}(m_{i_1}, \dots, m_{i_s})], \quad (8.7)$$

kde  $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n_m$  a  $s = 1, \dots, n_m$ .

Nyní již lze snadno vyjádřit index citlivosti odezvy modelu na skupinu náhodných proměnných  $(m_{i_1}, \dots, m_{i_s})$

$$S_{i_1, \dots, i_s} = \frac{D_{i_1, \dots, i_s}}{D}. \quad (8.8)$$

$S_i$  se nazývá index citlivosti prvního řádu proměnné  $m_i$ , který vyjadřuje hlavní vliv proměnné  $m_i$  na odezvu modelu,  $S_{ij}$  se nazývá index citlivosti druhého řádu, pokud  $i \neq j$ , a slouží k vyjádření současného vlivu dvou proměnných  $m_i$  a  $m_j$  na odezvu modelu atp. Součet všech indexů citlivosti je roven jedné:

$$\sum_{i=1}^{n_m} S_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n_m} S_{ij} + \cdots + S_{1,2, \dots, n_m} = 1. \quad (8.9)$$

Celkový vliv proměnných na odezvu modelu lze poté vyjádřit pomocí totálních indexů citlivosti, které vyjadřují nejen vliv samotné proměnné, ale i její vliv v interakci s ostatními proměnnými. Totální index citlivosti proměnné  $m_i$  se rovná součtu všech indexů citlivosti proměnné  $m_i$  a skupin s touto proměnnou

$$S_i^{\text{T}} = S_i + \sum_{j < i} S_{j,i} + \sum_{j < k < i} S_{j,k,i} + \cdots + S_{i, \dots, n_m} = \frac{D_i^{\text{tot}}}{D}, \quad (8.10)$$

nebo ho lze také vyjádřit pomocí rozptylu  $D_{\sim i}$ , který se skládá ze všech parciálních rozptylů  $D_{i_1, \dots, i_s}$  vyjma indexu  $i$

$$S_i^{\text{T}} = 1 - \frac{D_{\sim i}}{D}. \quad (8.11)$$

Popsané indexy citlivosti lze odhadnout pomocí metody Monte Carlo s  $n$  simulacemi, kdy výrazy pro odhady  $M_0$ ,  $D$ ,  $D_i$  a  $D_{\sim i}$  jsou následující [32]:

$$\tilde{M}_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n M(\mathbf{m}_t), \quad (8.12)$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n M^2(\mathbf{m}_t) - \tilde{M}_0^2, \quad (8.13)$$

$$\tilde{D}_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n M(\mathbf{m}_{(\sim i)t}^{(1)}, m_{im}^{(1)}) M(\mathbf{m}_{(\sim i)t}^{(2)}, m_{im}^{(1)}) - \tilde{M}_0^2, \quad (8.14)$$

$$\tilde{D}_{\sim i} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n M(\mathbf{m}_{(\sim i)t}^{(1)}, m_{im}^{(1)}) M(\mathbf{m}_{(\sim i)t}^{(1)}, m_{im}^{(2)}) - \tilde{M}_0^2. \quad (8.15)$$

V rovnicích (8.12) a (8.13) je  $\mathbf{m}_t$  kombinace vstupních parametrů pro  $t$ -tou simulaci modelu. Horní indexy <sup>(1)</sup> a <sup>(2)</sup>, které jsou použity v rovnicích (8.14) a (8.15), označují dvě různé sady vstupních parametrů vždy pro  $n$  nezávislých simulací. Jejich kombinace je taková, že v jedné sadě jsou nahrazeny hodnoty parametru  $i$  jeho hodnotami v sadě druhé. Použitý výraz  $\mathbf{m}_{(\sim i)t}$  zastupuje  $t$ -tou kombinaci parametrů vyjma  $i$ -tého parametru, tzn.

$$\mathbf{m}_{(\sim i)t} = (m_{1t}, \dots, m_{(i-1)t}, m_{(i+1)t}, \dots, m_{n_m t}). \quad (8.16)$$

Celkově je tedy nutné provést  $n(2n_m + 1)$  simulací pro vyhodnocení indexů citlivosti pomocí MC.

Stanovení indexů citlivosti je méně výpočetně náročné při použití polynomiálního chaosu, kdy po jeho sestavení lze indexy citlivosti vyjádřit analyticky přímo ze stanovených PCE koeficientů [5]. V podstatě veškeré výpočetní nároky jsou tedy vynaloženy na vyhodnocení PCE koeficientů, které, jak už bylo ukázáno v první části této práce, je oproti MC méně časově náročné.

Indexy citlivosti založené na polynomiálním chaosu jsou definovány jako

$$S_{i_1, \dots, i_s}^{\text{PCE}} = \frac{\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{i_1, \dots, i_s}} \beta_\alpha^2 \mathbb{E}[\psi_\alpha^2(\boldsymbol{\xi})]}{\sum_{\alpha=1}^{n_\beta} \beta_\alpha^2 \mathbb{E}[\psi_\alpha^2(\boldsymbol{\xi})]}, \quad (8.17)$$

kde  $\mathbb{E}[\psi_\alpha^2(\boldsymbol{\xi})]$  se vypočítá podle rovnice (3.10) a  $\mathcal{I}_{i_1, \dots, i_s}$  určuje polynomy, které se skládají pouze z členů závislých na  $(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_s})$  a stupně polynomiálních členů ostatních proměnných jsou nulové, tedy

$$\mathcal{I}_{i_1, \dots, i_s} = \{\alpha_k = 0 \iff k \notin (i_1, \dots, i_s), \forall k = 1, \dots, n_\beta\}. \quad (8.18)$$

Totální indexy citlivosti založené na polynomiálním chaosu lze následně vypočítat jako

$$S_i^{\text{T,PCE}} = S_i^{\text{PCE}} + \sum_{j < i} S_{j,i}^{\text{PCE}} + \sum_{j < k < i} S_{j,k,i}^{\text{PCE}} + \dots + S_{i, \dots, n_\beta}^{\text{PCE}} \quad (8.19)$$

neboli

$$S_i^{\text{T,PCE}} = \frac{\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_i^+} \beta_\alpha^2 \mathbb{E}[\psi_\alpha^2(\boldsymbol{\xi})]}{\sum_{\alpha=1}^{n_\beta} \beta_\alpha^2 \mathbb{E}[\psi_\alpha^2(\boldsymbol{\xi})]}, \quad (8.20)$$

kde  $\mathcal{I}_i^+$  určuje všechny polynomy, v nichž se vyskytuje proměnná  $\xi_i$ , tzn.

$$\mathcal{I}_i^+ = \{\alpha \in \mathbb{N} : 0 \leq \alpha \leq n_\beta, \alpha_i \neq 0\}. \quad (8.21)$$

# Kapitola 9

## Aplikace na inženýrské konstrukci

Pro praktickou ukázkou bayesovské identifikace parametrů výpočetního modelu je použita stejná konstrukce jako při analýze nejistot, která je popsána v Kapitole 4. Zásadní změna v zadání problému se týká vyskytujících se nejistot. Předmětem zkoumání se nyní stane nejistota ve vstupních parametrech, která se identifikuje pomocí expertních znalostí a dat z experimentů. Je předpokládáno, že při provádění experimentů by se zatížení a geometrické parametry daly přímo určit, zatímco materiálové charakteristiky by byly náhodné. Předmětem identifikace je nejistý Youngův modul pružnosti, který se v předešlé části této práce považoval za známý.

V prvním případě se pro jednoduchost uvažuje modul pružnosti jako jediná náhodná proměnná. Dosavadní parametry se zafixují na pevných hodnotách, konkrétně na svých průměrných hodnotách stanovených z předepsaných histogramů (Obrázky 4.2 a 4.3). Na tomto příkladě, který je dále značen jako příklad **A**, se podrobně představí problematika bayesovské identifikace v praxi.

Následně se zvedne počet náhodných proměnných, kdy se zpátky zavedou náhodné geometrické parametry uvedené v Tabulce 4.1. Jejich pravděpodobnostní rozdělení, reflektující zde výrobní nepřesnosti, bude uvažováno jako normální se zachováním průměrů a směrodatných odchylek z předepsaných histogramů. Tento příklad s celkem pěti náhodnými parametry označuje písmeno **B**.

### 9.1 Apriorní rozdělení

Obecně známou informací o Youngově modulu pružnosti  $E$  je, že jeho hodnoty nabývají pouze kladných hodnot. Proto je možné zvolit jako prior lognormální rozdělení.

Řešená konstrukce je vyrobena z oceli, jejíž hodnota modulu pružnosti se z praktických zkušeností pohybuje nejčastěji okolo 210 GPa. Tuto hodnotu lze tedy považovat za střední hodnotu apriorního rozdělení. Protože apriorní rozdělení je pouze počáteční odhad pravděpodobnostního rozdělení parametru, není příliš jisté a směrodatná odchylka se zvolí poměrně vysoká, konkrétně 110 GPa.

Pro urychlení procesu MCMC pomocí náhrady plného modelu aproximací Hermiteovými polynomy se využije blízký vztah mezi standardně normálně rozdělenou proměnnou  $\xi$  a uvažovaným lognormálně rozděleným parametrem  $m$

$$m = \exp(\mu_\xi + \sigma_\xi \xi), \quad (9.1)$$

kdy se statistické momenty  $\mu_\xi$  a  $\sigma_\xi$  stanoví z určené střední hodnoty  $\mu_m = 210$  GPa a směrodatné odchylky  $\sigma_m = 110$  GPa lognormálního rozdělení dle následujících vzorců:

$$\mu_\xi = \ln \frac{\mu_m^2}{\sqrt{\sigma_m^2 + \mu_m^2}}, \quad \sigma_\xi = \sqrt{\ln(\sigma_m^2/\mu_m^2 + 1)}. \quad (9.2)$$

## 9.2 Citlivostní analýza

Již bylo stanoveno, která náhodná proměnná bude identifikována, ale zatím není určeno, kterou náhodnou veličinu je vhodné pro tuto identifikaci měřit.

V řešeném příkladu je možné vybírat celkem z pěti přemístění  $\mathbf{r}$ , konkrétně ze dvou pootočení  $\varphi_D$  a  $\varphi_A$  a třech posunů  $u_D$ ,  $u_A$  a  $w_A$ . Rozptyly jednotlivých veličin odpovídající stanoveným pravděpodobnostním rozdělením vyskytujících se parametrů pro obě varianty příkladu jsou uvedeny v Tabulce 9.1.

Příklad	$u_D$ [mm]	$\varphi_D$ [mrad]	$u_A$ [mm]	$w_A$ [mm]	$\varphi_A$ [mrad]
<b>A</b> <sub>PCE</sub>	0,0192	1,8787	0,0192	$3,7611 \cdot 10^{-5}$	7,4814
<b>A</b> <sub>MC</sub>	0,0191	1,8713	0,0191	$3,7462 \cdot 10^{-5}$	7,4519
<b>B</b> <sub>PCE</sub>	0,0192	1,8750	0,0192	$3,7580 \cdot 10^{-5}$	7,4665
<b>B</b> <sub>MC</sub>	0,0192	1,8760	0,0192	$3,7610 \cdot 10^{-5}$	7,4703

Tabulka 9.1: Rozptyly jednotlivých přemístění.

Uvedené rozptyly jsou obdrženy dvěma způsoby. Index PCE označuje odhad rozptylu stanovený na základě koeficientů polynomiální aproximace modelu, jehož výpočet vychází z rovnice (3.9), zatímco indexem MC je označena varianta s použitím obyčejné metody Monte Carlo s  $n = 10^7$  simulacemi plného numerického modelu, z nichž je odhad rozptylu vyjádřen jako

$$\sigma_{r_i}^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (r_{i,l} - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n r_{i,l})^2. \quad (9.3)$$

Z obdržených výsledků vyplývá, že přemístění s největším rozptylem je z pootočení  $\varphi_A$  a z posunutí  $u_D$  a  $u_A$ . Uvedené veličiny se tedy na první pohled zdají být vhodné pro použití při identifikaci nejistého modulu pružnosti.

Nyní se provede citlivostní analýza za účelem určit, která přemístění jsou na náhodných parametrech nejvíce závislá. Pro variantu příkladu **A** lze citlivost vyjádřit pouze pomocí korelace, protože Sobolovy indexy by se v tomto případě s jedním náhodným parametrem vždy rovnaly jedné. Citlivosti odezev v příkladu **B** s více parametry jsou stanoveny ko-

relačními koeficienty i Sobolovými indexy. Výsledky citlivostní analýzy provedené pomocí Spearmanova koeficientu pořadové korelace jsou uvedeny v Tabulce 9.2.

Příklad	$r_i$	$u_D$	$\varphi_D$	$u_A$	$w_A$	$\varphi_A$
<b>A</b>	$\rho_{E,r_i}$	-1	1	-1	-1	-1
<b>B</b>	$\rho_{E,r_i}$	-0,9993	0,9995	-0,9993	-0,9990	-0,9995

Tabulka 9.2: Výsledky citlivostní analýzy provedené pomocí Spearmanova koeficientu pořadové korelace.

Jak je vidět, citlivost jednotlivých složek odezvy numerického modelu na vstupní parametr je ve všech případech téměř rovna jedné, resp.  $-1$ , ovšem při provádění fyzikálních experimentů je každá měřená veličina zatížena chybami měření. Tyto chyby, které vyjadřují jak moc nejsou jednotlivé měřené veličiny jisté, se mohou pro různé veličiny lišit a je nutné je při citlivostní analýze vzít v potaz. V řešeném příkladu jsou chyby měření uvažovány jako náhodné proměnné s normálním rozdělením o průměru  $\mu_\varepsilon = 0$  mm, resp. mrad, a směrodatné odchylce v případě posunů  $\sigma_{\varepsilon_u} = 10^{-2}$  mm a v případě pootočení  $\sigma_{\varepsilon_\varphi} = 1$  mrad. Výsledné citlivosti zohledňující stanovené chyby měření získané Spearmanovým koeficientem pořadové korelace jsou v Tabulce 9.3.

Příklad	$r_i$	$u_D$	$\varphi_D$	$u_A$	$w_A$	$\varphi_A$
<b>A</b>	$\rho_{E,r_i+\varepsilon}$	-1	0,73475	-0,99517	-0,45727	-0,90008
<b>B</b>	$\rho_{E,r_i+\varepsilon}$	-0,99451	0,73472	-0,99451	-0,45695	-0,89978

Tabulka 9.3: Výsledky citlivostní analýzy při uvažování chyb měření provedené pomocí Spearmanova koeficientu pořadové korelace.

Nyní obdržené citlivosti reflektují chyby měření a zároveň i jejich poměr ku rozptylům jednotlivých odezev. Dle Spearmanova koeficientu pořadové korelace jsou tedy v obou uvažovaných příkladech nejvíce citlivá přemístění na modul pružnosti právě posuny  $u_D$  a  $u_A$  a pootočení  $\varphi_A$ .

Výsledky citlivostní analýzy provedené metodou ANOVA jsou uvedeny v Tabulce 9.4. Z důvodu výpočetní efektivity jsou indexy citlivosti jednotlivých přemístění na všechny parametry vypočteny na základě polynomiální aproximace, kdy v podstatě veškerý nutný výpočetní čas slouží k sestavení této aproximace, v tomto případě konkrétně Hermiteova polynomu 4. stupně. Srovnání časové náročnosti je podrobně probráno v Kapitole 4.1. Z hlediska identifikování modulu pružnosti je ovšem zásadní citlivost složek odezvy právě na tento parametr, proto je příslušný index citlivosti stanoven také druhým možným způsobem, a to metodou Monte Carlo s  $10^7$  simulacemi.

Z uvedených výsledků je na první pohled patrné, že citlivost jednotlivých přemístění na geometrické parametry modelu je velmi malá oproti odpovídající citlivosti na identifikovaný modul pružnosti. Je to především dáno velkým rozptylem tohoto parametru, který vypovídá o nejistotě jeho hodnoty. Indexy citlivosti modulu pružnosti obdržené oběma způsoby se



Index citlivosti	$u_D$	$\varphi_D$	$u_A$	$w_A$	$\varphi_A$
$S_I^{\text{PCE}}$	0,0002	0,0004	0,0002	0,0000	0,0004
$S_{I\sigma}^{\text{PCE}}$	0,0000	0,0001	0,0000	0,0005	0,0001
$S_{I\sigma^1}^{\text{PCE}}$	0,0009	0,0000	0,0009	0,0004	0,0000
$S_{I\sigma^2}^{\text{PCE}}$	0,0000	0,0003	0,0000	0,0008	0,0003
$S_{I\sigma^3}^{\text{PCE}}$	0,9986	0,9990	0,9986	0,9979	0,9990
$S_E^{\text{MC}}$	0,9985	0,9989	0,9985	0,9979	0,9989
$S_E^{\text{MC}+\varepsilon}$	0,9934	0,6516	0,9933	0,2733	0,8810
Totální index citlivosti	$u_D$	$\varphi_D$	$u_A$	$w_A$	$\varphi_A$
$S_E^{\text{T,PCE}}$	0,9989	0,9992	0,9989	0,9984	0,9992
$S_E^{\text{T,MC}}$	0,9988	0,9991	0,9988	0,9982	0,9991
$S_E^{\text{T,MC}+\varepsilon}$	0,9987	0,9998	0,9989	0,9983	0,9987

Tabulka 9.4: Výsledky citlivostní analýzy modelu **B** provedené pomocí metody ANOVA s použitím polynomiálního chaosu (PCE) a metody Monte Carlo (MC).

navzájem liší velmi nepatrně a shodují se s výsledky obdrženými Spearmanovým koeficientem pořadové korelace.

Případu s uvažováním chyb měření odpovídá index citlivosti  $S_E^{\text{MC}+\varepsilon}$  a totální index citlivosti  $S_E^{\text{T,MC}+\varepsilon}$ . Základní index citlivosti, který vyjadřuje vliv samotného parametru, vypovídá o stejném efektu zavedení chyb jako Spearmanův koeficient, kdy se citlivost dané odezvy sníží úměrně poměru rozptylu chyby a rozptylu odezvy. Totální index citlivosti má v tomto případě nevypovídající hodnotu, protože vyjadřuje kromě vlivu samotného parametru také vliv tohoto parametru v kombinaci s ostatními parametry, tedy uvažuje také kombinaci parametru se zavedenou chybou, kterou je možné si pro jednoduchost představit jako další přidaný parametr.

Výstupem provedené citlivostní analýzy je následující pořadí přemístění dle citlivosti na nejistý modul pružnosti od nejvíce závislého po nejméně závislé:  $u_A$ ,  $u_D$ ,  $\varphi_A$ ,  $\varphi_D$  a  $w_A$ . Jinými slovy je posun  $u_A$  nejvíce vhodný pro použití při identifikaci modulu pružnosti, zatímco posun  $w_A$  je pro tento úkol nejméně vhodný.

### 9.3 Věrohodnostní funkce

Věrohodnostní funkce  $L(\mathbf{m}, \mathbf{z})$  vystihuje naměřená data  $\mathbf{z}$ , která poskytují novou informaci použitelnou ke zpřesňování pravděpodobnostního rozdělení neznámých parametrů, tj. k tvorbě posteriorního rozdělení  $p(\mathbf{m}|\mathbf{z})$ . V řešeném příkladě se předpokládá, že jednotlivé měřené veličiny, jimiž jsou různé složky vektoru přemístění, mají normální rozdělení vycházející z normálního rozdělení chyb měření. Věrohodnostní funkce je pak sdružená normální hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru  $\mathbf{z}$

$$L(\mathbf{m}, \mathbf{z}) = p(\mathbf{z}|\mathbf{m}). \quad (9.4)$$

Parametry takového rozdělení při použití  $n_z$  naměřených hodnot jsou vektor středních hodnot  $\boldsymbol{\mu}_z = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_z})^T$  a kovarianční matice

$$\mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_{n_z}\rho_{1n_z} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_{n_z}\rho_{2n_z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \sigma_{(n_z-1)}\sigma_{n_z}\rho_{(n_z-1)n_z} \\ \sigma_{n_z}\sigma_1\rho_{n_z1} & \sigma_{n_z}\sigma_2\rho_{n_z2} & \sigma_{n_z}\sigma_{(n_z-1)}\rho_{n_z(n_z-1)} & \sigma_{n_z}^2 \end{bmatrix}, \quad (9.5)$$

kde  $\sigma_i$  je směrodatná odchylka měřené veličiny  $z_i$  a  $\rho_{ij}$  je korelace mezi  $i$ -tou a  $j$ -tou složkou vektoru  $\mathbf{z}$ .

Interpretace naměřených dat formou věrohodnostní funkce je zásadní krok při bayesovské identifikaci parametrů, kdy věrohodnostní funkce spolu s apriorním rozdělením udává podobu posteriorního rozdělení. Z tohoto důvodu je vhodné se u stanovení parametrů věrohodnostní funkce na chvíli zastavit. Pro jednoduchost se testování vlivu nastavení věrohodnostní funkce provede na modelu s jedním parametrem  $m$ .

Jako první je uvažován nejjednodušší případ, kdy jednotlivá měření  $z_i$  jsou nezávislá a každé z nich přináší zcela novou informaci pro aktualizaci rozdělení nejistého parametru  $m$ . Kovarianční matice sdruženého rozdělení je vzhledem k nezávislosti jednotlivých složek vektoru  $\mathbf{z}$  diagonální, protože korelace mezi jednotlivými složkami  $z_i$  je pro všechny kombinace složek nulová. Za těchto podmínek lze věrohodnostní funkci vyjádřit jako součin marginálních hustot pravděpodobností

$$L(m, z_1, \dots, z_{n_z}) = p(z_1, \dots, z_{n_z} | m) = \prod_{i=1}^{n_z} p(z_i, m). \quad (9.6)$$

Jako zdroj informací je možné použít buď několik různých složek vektoru přemístění  $\mathbf{r}$  nebo také několikrát měřit stejnou složku, každý výsledek podává nový fakt o zkoumaném materiálu, který musí být brán v potaz. Střední hodnoty jednotlivých marginálních hustot jsou rovny naměřeným hodnotám a směrodatné odchylky se rovnají příslušným stanoveným chybám měření.

Popsaná situace je základním příkladem bayesovské identifikace nejistého parametru, který popisuje jeden konkrétní náhodný jev, v tomto případě jeden konkrétní materiál s nejistým modulem pružnosti. V praxi ale může nastat také situace, kdy jsou naměřená data získána při zkoušení různých materiálů nebo jednoho heterogenního materiálu ve více místech. Rozptyl takovýchto dat není způsoben jen chybou měření, ale i rozptylem materiálového parametru. Tento rozdíl je ovšem zásadní a použití Bayesova postupu, jehož cílem je redukovat nejistotu vyplývající z nedůvěry v provedené měření, by v takovém případě vedlo ke zprůměrování skutečných heterogenních materiálových vlastností. Rozptyl experimentálních dat má v této situaci svůj význam a není cílem ho redukovat.

Pro správnou interpretaci měření heterogenních materiálů je nutné odlišné zpracování obdržených dat. Získané hodnoty každé uvažované složky vektoru přemístění ze všech experi-

mentů se sloučí do jedné marginální hustoty. Věrohodnost je v tomto případě součinem tolika marginálních hustot, kolik se pro identifikaci použije složek vektoru přemístění. Konkrétně se při použití experimentálních dat z  $n_e$  pokusů, kdy jsou zaznamenány hodnoty složek vektoru přemístění  $z_{r_i}$ , stanoví jednotlivé střední hodnoty  $\mu_i$  a směrodatné odchylky  $\sigma_i$  z následujících vzorců:

$$\mu_i = \frac{1}{n_e} \sum_{l=1}^{n_e} z_{r_i,l}, \quad (9.7)$$

respektive

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{n_e} \sum_{l=1}^{n_e} (z_{r_i,l} - \mu_i)^2}. \quad (9.8)$$

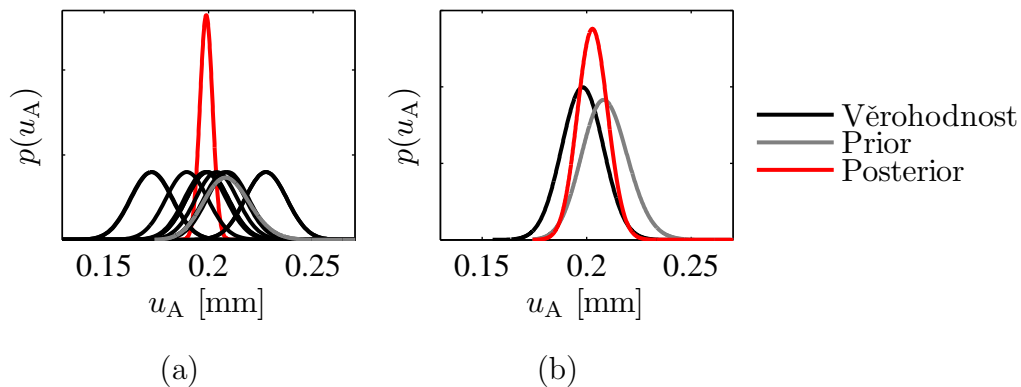
Tento přístup může být vnímán jako kombinace klasického a bayesovského přístupu ke zpracování dat a stanovení pravděpodobnosti náhodného jevu. V první fázi je stanoveno pravděpodobnostní rozdělení pozorovaného náhodného jevu klasickým četnostním přístupem, následně se takto získaná informace použije ve formě věrohodnostní funkce při bayesovské aktualizaci apriorního rozdělení.

Obdobným postupem lze také zpracovat informaci o vzájemně závislých měřeních. V tomto případě kovarianční matice už není diagonální a sdruženou hustotu pravděpodobnosti nelze zapsat jako součin marginálních pravděpodobností. Věrohodnost lze nyní zapsat pouze ve tvaru sdružené normální hustoty jako

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{m}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{C}_z|(2\pi)^{nr}}} e^{-1/2(\mathbf{r}-\boldsymbol{\mu}_z)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{r}-\boldsymbol{\mu}_z)}. \quad (9.9)$$

Z obdržených měření se stanoví střední hodnoty, směrodatné odchylky a dále také korelace mezi měřeními odpovídajícími jednotlivým složkám vektoru přemístění pro sestavení kovarianční matice.

Dvě popsané situace, které se zásadně liší zpracováním experimentálních dat, jsou zobrazeny na Obrázku 9.1. V obou případech jsou uvedeny hustoty pravděpodobnosti vzhledem ke sledované odezvě, v tomto případě je to posun  $u_A$ . Pro aktualizaci apriorního rozdělení,

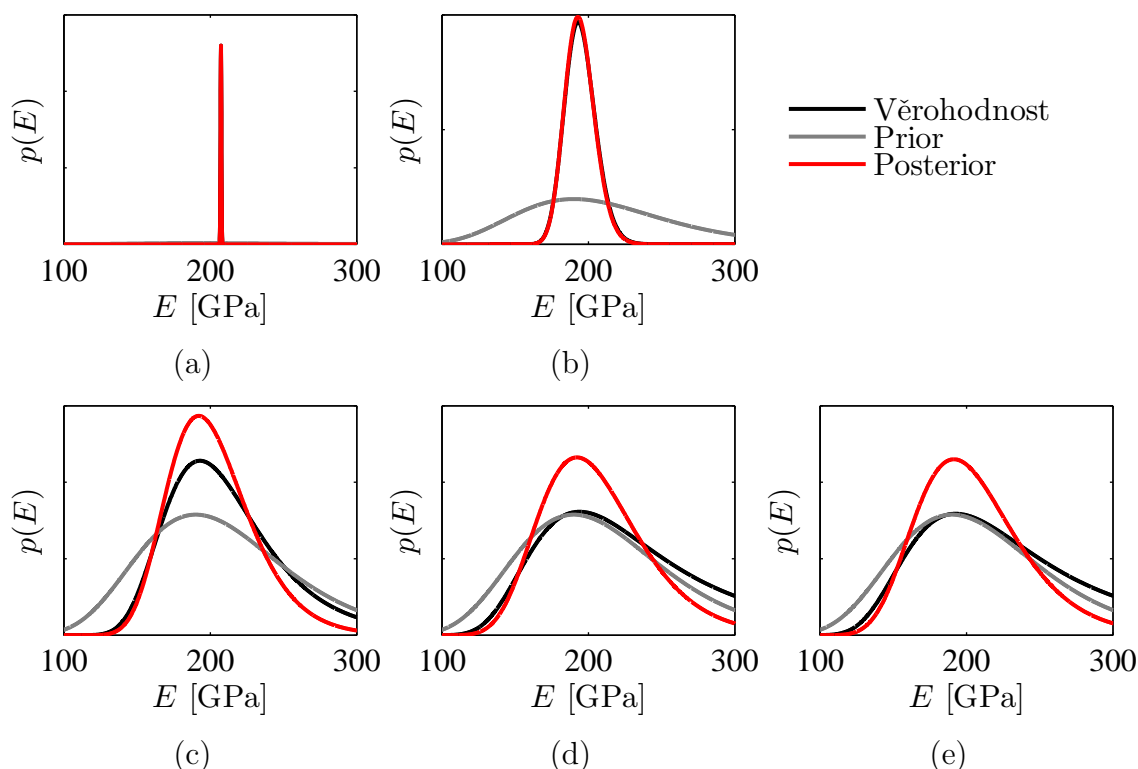


Obrázek 9.1: Hustoty pravděpodobností posunu  $u_A$  pro variantu Bayesovského přístupu při měření jednoho materiálu (a) a více materiálů (b).

které se zde uvažuje zúžené se směrodatnou odchylkou rovnou 11 GPa, je použito deset hodnot tohoto posunu. Obrázek 9.1a ukazuje tradiční Bayesův přístup, kdy je měřen jeden konkrétní materiál a každé měření je využito pro tvorbu jedné marginální hustoty pravděpodobnosti, jejichž součin tvoří věrohodnostní funkci. Ve druhé variantě na Obrázku 9.1b je věrohodnost normální rozdělení s parametry stanovenými z obdržených hodnot posunu  $u_A$ .

Grafy názorně ukazují rozdíl ve výsledném posteriorním rozdělení, které je při použití tradičního Bayesova přístupu výrazně užší, protože s každou novou informací dochází k jeho zpřesnění. V druhé variantě se rozptyl posteriorního rozdělení zmenší oproti první variantě mnohem méně, ale jak už bylo řečeno, tento rozptyl vystihuje kromě chyb měření také rozptyl samotného materiálového parametru.

Dále jsou uvedeny také výsledky pro případ, kdy se pro bayesovskou identifikaci použijí hodnoty dvou přemístění, konkrétně posunu  $u_A$  a pootočení  $\varphi_A$ . Na Obrázku 9.2 jsou zobrazeny grafy hustot pravděpodobností nejistého parametru  $E$  aktualizované pomocí deseti experimentů ( $n_e = 10$ ), kdy jsou pro lepší názornost chyby měření sníženy na 0,001 mm u posunu a 0,1 mrad u pootočení a apriorní rozptyl modulu pružnosti na 55 GPa.



Obrázek 9.2: Hustoty pravděpodobností parametru aktualizované pomocí 10 experimentů, při nichž je měřen posun  $u_A$  a pootočení  $\varphi_A$ .

V prvních dvou grafech (a) a (b) jsou výsledky všech experimentů považovány za nové informace a každá naměřená hodnota je přímo použita k definování věrohodnostní funkce. Varianta 9.2a vystihuje případ, kdy se naměřená data liší pouze chybou měření, jedná se tedy o měření jednoho konkrétního materiálu. Věrohodnost je v tomto případě sdružené normální

rozdělení se středními hodnotami rovnými naměřeným hodnotám a diagonální kovarianční maticí

$$\mathbf{C}_z^{(a)} = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_u,1}^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_u,n_e}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_\varphi,1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_\varphi,n_e}^2 \end{bmatrix}, \quad (9.10)$$

na jejíž diagonále jsou rozptýly příslušných chyb měření. Obdržené posteriorní rozdělení je velmi úzké. Ve variantě 9.2b je při každém experimentu použit jiný materiál a každá odezva je opět zatížena chybou měření. Kovarianční matice sdruženého rozdělení

$$\mathbf{C}_z^{(b)} = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_u+u(E),1}^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_u+u(E),n_e}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_\varphi+\varphi(E),1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_\varphi+\varphi(E),n_e}^2 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

je opět diagonální, avšak nyní jsou na diagonále rozptýly  $\sigma_{\varepsilon_u+u(E)}$  a  $\sigma_{\varepsilon_\varphi+\varphi(E)}$  indukované chybami měření i řádově větším rozptylem materiálových parametrů. Posterior má oproti variantě (a) větší rozptyl.

V následujících třech grafech je prezentován případ kombinace četnostního a bayesovského přístupu. Graf 9.2c zobrazuje variantu, kdy opakované měření každé složky odezvy je použito jen pro získání průměrné hodnoty a směrodatné odchylky daných přemístění podle rovnic (9.7) a (9.8). Oba posuny jsou však vzájemně stále uvažovány jako nezávislé a kovarianční matice má následující tvar

$$\mathbf{C}_z^{(c)} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi^2 \end{bmatrix}. \quad (9.12)$$

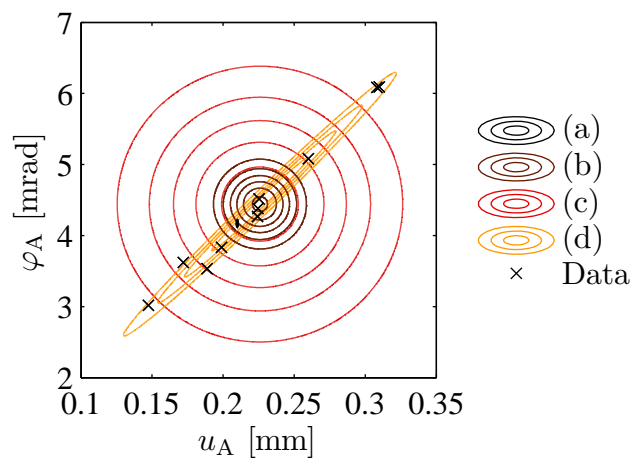
Vliv vzájemné závislosti uvažovaných přemístění vystihuje graf 9.2d, z něhož je patrné, že věrohodnost i z ní vycházející posterior mají větší rozptyl než ve variantě (c), protože nyní nejsou k dispozici dvě nové informace, ale pouze jedna nová informace a druhá na ní závislá. Příslušná kovarianční matice

$$\mathbf{C}_z^{(d)} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_u \sigma_\varphi \rho_{u\varphi} \\ \sigma_u \sigma_\varphi \rho_{u\varphi} & \sigma_\varphi^2 \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

již není diagonální. Jelikož v tomto případě je korelace mezi sledovanými přemístěními vysoká, snižují ji pouze chyby měření, vliv méně informativního pootočení je téměř nulový. Tento fakt je možné pozorovat ve variantě 9.2e, kdy je část věrohodnosti vycházející z po-

otočení  $\varphi_A$  zcela odebrána a celá bayesovská identifikace vychází pouze z posunu  $u_A$ . Rozdíl mezi grafy (d) a (e) je minimální.

Na Obrázku 9.3 jsou zobrazeny věrohodnosti odpovídající představeným situacím (a) až (d) ve formě izolinií v závislosti na posunu  $u_A$  a pootočení  $\varphi_A$ . Nejužší sdružené rozdělení odpovídá variantě (a), kdy jednotlivé směrodatné odchylky odpovídají pouze chybám měření a v obrázku tvoří příslušné izolinie nepatrnou svislou elipsu vlevo dole blízko ke středu grafu. Ve všech variantách s měřením na různých materiálech byla použita stejná sada obdržených dat, která jsou v grafu také zanesena. Rozdíl věrohodnosti varianty (c) a varianty (d) je v natočení vzhledem k osám grafu, které znázorňuje vzájemnou závislost dat. Je patrné, že skutečné rozdělení těchto dat nejlépe vystihuje právě věrohodnost varianty (d) a v případě hledání rozptylu vlastností heterogenního materiálu je tato věrohodnost nejvíce vhodná.



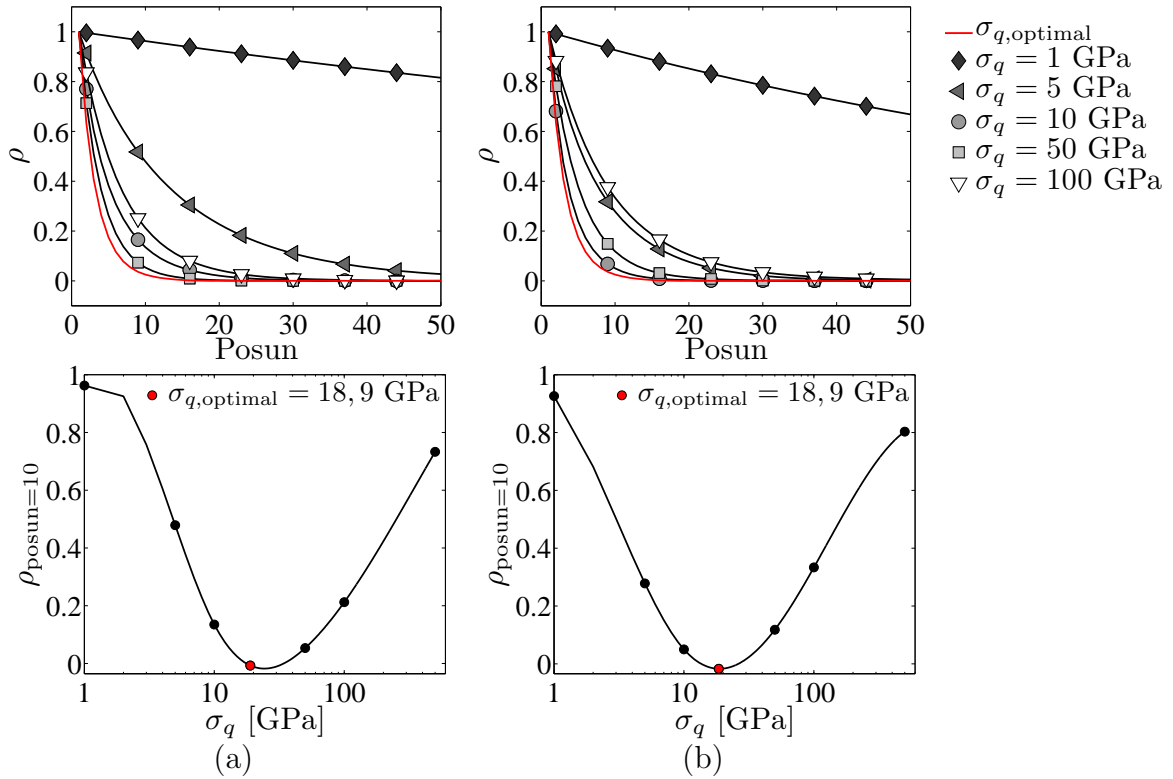
Obrázek 9.3: Podoba věrohodnostních funkcí vzhledem k uvažovaným přemístěním.

## 9.4 Posteriorní rozdělení

Po stanovení apriorního rozdělení a věrohodnostní funkce následuje konečná fáze, jejímž produktem je hledané posteriorní rozdělení. Jak už bylo vyloženo v Kapitole 7, posteriorní rozdělení lze získat jeho vzorkováním pomocí Markovova řetězce metodou Monte Carlo. V této kapitole jsou rozebrány jednotlivé kroky praktické aplikace tohoto postupu, konkrétně při použití Metropolisova algoritmu.

V první řadě je nutné stanovit parametry zvoleného algoritmu. Jako počáteční bod neboli výchozí stav Markovova řetězce se volí průměrná hodnota parametrů z apriorního rozdělení. Počet stavů  $s$  je zvolen vysoký, konkrétně  $10^7$ , z důvodu minimalizace vlivu případných nevhodných počátečních stavů, protože se neuvažuje odstraňování počáteční rozhořivací periody. Hlavním rysem Metropolisova algoritmu je symetrické návrhové rozdělení, v řešených příkladech je toto rozdělení vždy normální se střední hodnotou rovnou souřadnici předchozího stavu a zvolenou směrodatnou odchylkou. Velikost směrodatné odchylky se stanoví s ohledem na autokorelaci řetězce a míru přijetí AR.

Pro nastavení návrhového rozdělení byla sledována autokorelace Markovových řetězců pro různé hodnoty směrodatné odchylky, jak je patrné z Obrázku 9.4. Pro názornost jsou



Obrázek 9.4: Konvergence autokorelace v závislosti na směrodatné odchylce návrhového rozdělení pro variantu s měřením jednoho posunu  $u_A$  (a) a celého vektoru přemístění  $\mathbf{r}$  (b).

uvažovány dvě varianty modelu  $\mathbf{A}$ , v prvním případě se pro identifikaci modulu pružnosti používá pouze posun  $u_A$ , v druhém případě celý vektor přemístění  $\mathbf{r}$ . K identifikaci je vždy použito jedno měření zvolených přemístění a kovarianční matice ve věrohodnostní funkci zohledňuje pouze uvažované chyby měření. Vzorčky posteriorního rozdělení získané MCMC odpovídající jednotlivým variantám jsou  $\mathbf{X}(m, u_A)$ , resp.  $\mathbf{X}(m, \mathbf{r})$ . Na horních grafech je znázorněna konvergence autokorelace se zvyšujícím se vzájemným posunem řetězce, zatímco dolní grafy zobrazují řez při konkrétním posunu o deset stavů pro stejné hodnoty směrodatné odchylky jako na prvních grafech.

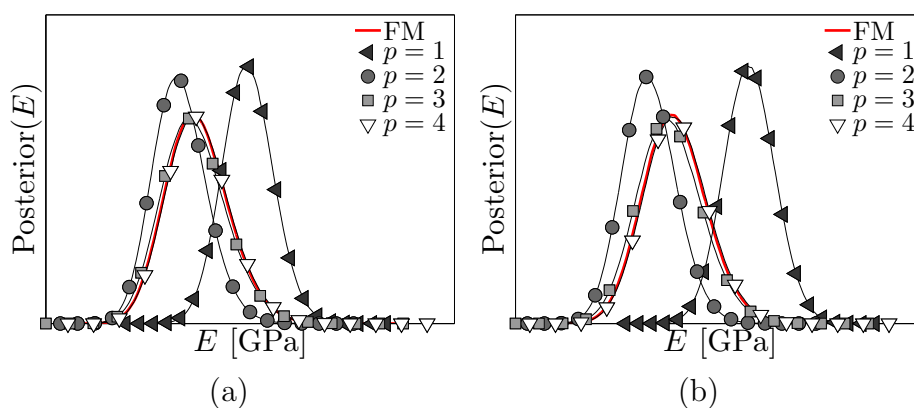
Na Obrázku 9.4 jsou také uvedeny zvolené hodnoty směrodatných odchylek  $\sigma_{0,\text{optimal}}$ . Uvedené finální hodnoty směrodatných odchylek pro oba Markovovy řetězce jsou stanoveny pomocí optimalizace, kdy minimalizovanou účelovou funkcí  $f(\mathbf{X})$  je součet hodnot autokorelací pro maximální posun o 50 kroků, tzn.

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{t=0}^{50} \text{corr}(X(1 : 10^7 - t + 1), X(t : 10^7)). \quad (9.14)$$

Korelace je vyjádřena pomocí Spearmanova koeficientu pořadové korelace. Pro samotnou optimalizaci je použita funkce `fmincon()` ve variantě optimalizační metody `interior-point`

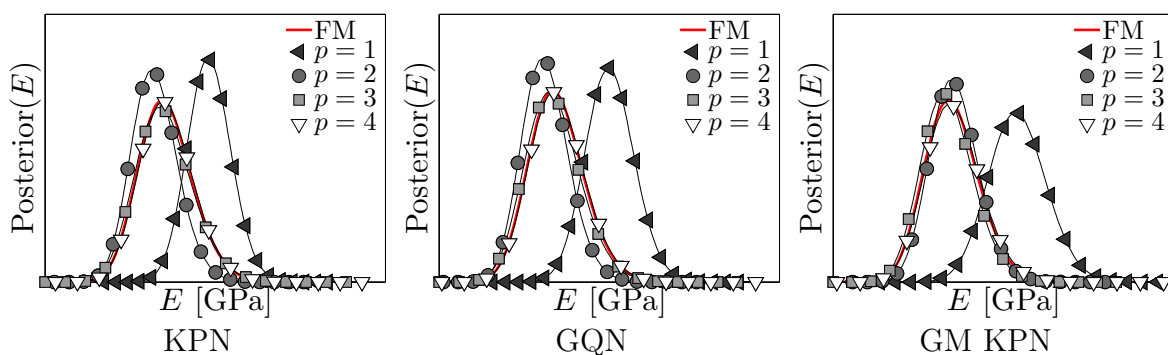
implementovaná v MATLABu, která slouží pro hledání minima omezených nelineárních funkcí více proměnných.

Porovnání přesnosti posteriorního rozdělení při použití polynomiální aproximace sestavené pomocí lineární regrese namísto plného numerického modelu v závislosti na použitém stupni polynomu je znázorněno na Obrázku 9.5. Z grafů je patrné, že pro 4. stupeň Hermiteova polynomu se výsledné posteriorní rozdělení liší od výsledku získaného pomocí plného modelu velmi málo, zatímco výpočetní náročnost, která je uvedena v Tabulce 9.5, je výrazně nižší.



Obrázek 9.5: Posteriorní rozdělení Youngova modulu pružnosti získané pomocí plného modelu (FM) a polynomiální aproximace  $p$ -tého stupně pro variantu s uvažováním jednoho posunu  $u_A$  (a) a celého vektoru přemístění  $\mathbf{r}$  (b).

Na jednodušší variantě s měřením pouze posunu  $u_A$  jsou pro srovnání ukázány také výsledky ostatních metod sestavení PCE aproximace. Na Obrázku 9.6 jsou grafy obdržných posteriorních rozdělení v závislosti na použitém stupni polynomu. Přesnost získaných posteriorů pomocí stochastické kolokace i semi-intruzivní Galerkinovy metody je obdobná jako při použití lineární regrese, opět je dostatečný 4. stupeň polynomu pro velmi přesnou aproximaci plného modelu. Parametry odpovídajících Markovových řetězců  $\mathbf{X}(m, u_A)$  při použití těchto polynomiálních aproximací 4. stupně jsou uvedeny v Tabulce 9.5.



Obrázek 9.6: Posteriorní rozdělení Youngova modulu pružnosti získané pomocí plného modelu (FM) a polynomiální aproximace  $p$ -tého stupně sestavené stochastickou kolokací (KPN, GQN) a Galerkinovou metodou (GM KPN) pro variantu s použitím jednoho posunu  $u_A$ .



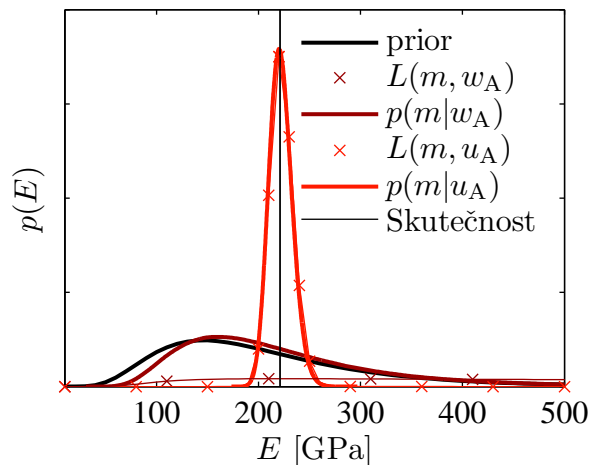
Tabulka 9.5 obsahuje parametry Markovových řetězců obdržných plným modelem (FM) i pomocí polynomiálních aproximací (PCE) 4. stupně. Pro stanovené směrodatné odchylky náhodného kroku  $\sigma_{q,\text{optimal},u_A} = 18,9$  GPa a  $\sigma_{q,\text{optimal},r} = 18,5$  GPa je míra přijetí AR v doporučeném intervalu 0,1 až 0,6.

MCMC		$s$	AR	Čas [s]	$\mu_{\mathbf{X}}$ [GPa]	$\sigma_{\mathbf{X}}$ [GPa]
FM	$\mathbf{X}(m, u_A)$	$10^7$	0,553	3958	221,92	11,316
	$\mathbf{X}(m, \mathbf{r})$	$10^7$	0,447	4693	221,55	7,879
LHS	$\mathbf{X}(m, u_A)$	$10^7$	0,555	550	222,28	11,409
KPN	$\mathbf{X}(m, u_A)$	$10^7$	0,555	532	222,29	11,412
PCE	GQN	$10^7$	0,555	537	222,23	11,418
	GM	$10^7$	0,559	532	222,47	11,553
	LHS	$10^7$	0,449	755	221,92	7,941

Tabulka 9.5: Parametry obdržných Markovových řetězců: počet vzorků  $s$ , míra přijetí AR, časová náročnost, průměr  $\mu_{\mathbf{X}}$  a směrodatná odchylka  $\sigma_{\mathbf{X}}$  odpovídajícího navzorkovaného posteriorního rozdělení.

Stanovené hodnoty průměru a směrodatné odchylky posteriorního rozdělení se při použití FM a PCE příliš neliší. Z jednotlivých metod sestavení polynomiální aproximace dává nejpřesnější výsledky lineární regrese, která je aplikována ve všech ostatních uvedených příkladech. Tímto je potvrzeno, že výběr této numerické metody na základě výsledků obdržných v první části diplomové práce je správný i v případě jejího použití při bayesovské identifikaci.

Vliv volby odezvy, která se použije pro identifikaci nejistého parametru, názorně ukazuje Obrázek 9.7, který zobrazuje apriorní rozdělení modulu pružnosti, dvě varianty věrohodnostní funkce a k nim odpovídající dvě posteriorní rozdělení. První věrohodnostní funkce vychází

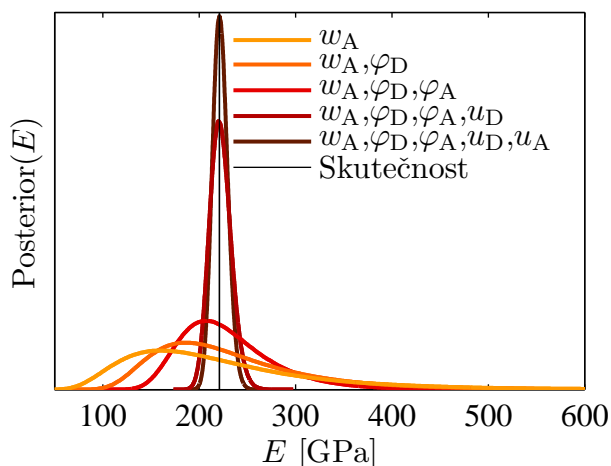


Obrázek 9.7: Posteriorní rozdělení Youngova modulu pružnosti získané pomocí nejméně informativního přemístění  $w_A$  a nejvíce informativního přemístění  $u_A$ .

z měření posunutí  $w_A$  nejméně citlivého na změnu identifikovaného parametru, kdy je patrné, že výsledný posterior se tolik neliší od původního apriorního rozdělení. Na druhou stranu

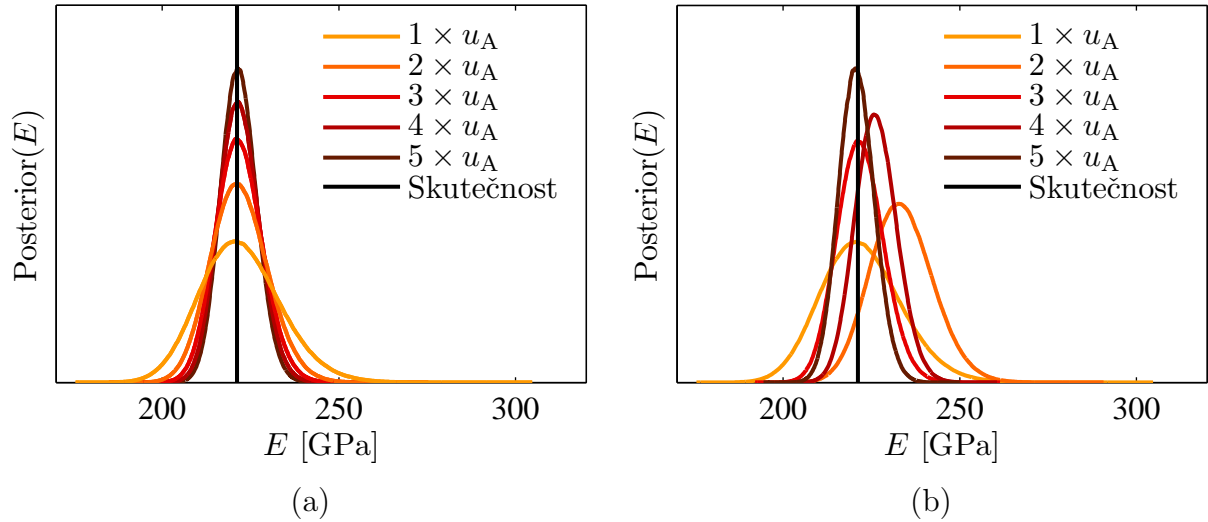
je také uvedena věrohodnostní funkce vycházející z nejvíce citlivého posunutí  $u_A$ , kdy tato nová informace má mnohem větší vliv na aktualizované posteriorní rozdělení. V grafu je také uvedena černou čarou hodnota modulu pružnosti, která skutečně odpovídá naměřeným hodnotám posunutí, z nichž vychází použitá věrohodnost. Posteriorní rozdělení získané na základě měření nejvíce informativního posunu má zřetelně menší rozptyl a jeho průměrná hodnota se přibližně rovná skutečné hodnotě odpovídající naměřenému posunu narozdíl od posterioru stanoveného pomocí měření nejméně informativního posunu.

Pro názornost je dále uveden Obrázek 9.8, na němž jsou zobrazena posteriorní rozdělení získaná postupně pomocí jednoho až všech pěti přemístění. Nejprve je použita pro identifikaci modulu pružnosti nejméně informativní odezva, a posléze je přidána více informativní až po nejvíce informativní odezvu. Tendence posteriorního rozdělení postupně se blížit hledané skutečné hodnotě modulu pružnosti je zřetelná. Z grafu je dále patrné, že přidáním přemístění, které není tolik informativní, se posteriorní rozdělení nezpřesní tolik, jako při přidání více informativního přemístění.



Obrázek 9.8: Posteriorní rozdělení Youngova modulu pružnosti získané na základě jedné až všech pěti složek vektoru přemístění postupně od nejméně po nejvíce informativní složku.

V případě, kdy je měřen několikrát nejvíce informativní posun mohou nastat různé situace, které vystihuje Obrázek 9.9. V prvním případě jsou naměřeny pokaždé přesně stejné hodnoty posunu, jde o nerealistickou situaci, která je uvedena pro ilustraci. Vývoj posteriorního rozdělení při uvažování jednoho až pěti měření je pro tuto variantu zobrazen na Obrázku 9.9a. Druhá situace, kdy je při každém měření naměřena jiná hodnota vlivem chyb měření, je reálnější a odpovídající posteriorní rozdělení uvádí Obrázek 9.9b. Jak vyplývá z Obrázku 9.9a, metoda bayesovské identifikace poskytuje přímé zpřesňování pravděpodobnostního rozdělení při použití přesných dat. Pokud jsou ovšem nové informace použité pro aktualizaci rozdělení nejistého parametru zatíženy chybami měření, může mít posteriorní rozdělení získané touto metodou při malém počtu měření zavádějící charakter. Pro získání dostatečně přesného posteriorního rozdělení je tedy nejlepší mít k dispozici co nejvíce přesná data v co největším počtu.



Obrázek 9.9: Posteriorní rozdělení Youngova modulu pružnosti získané pomocí odezvy  $u_A$  při různých počtech provedených experimentů, které mají stejný výsledek (a), respektive různé výsledky vycházející z chyb měření (b).

Tímto jsou probrány základní aspekty bayesovské identifikace na modelu **A** s jedním parametrem a nyní se představený postup aplikuje také na model **B**, v němž vystupují kromě dosavadního materiálového parametru další čtyři parametry geometrické.

## 9.5 Víceparametrický model

Model **B** má celkem pět parametrů, z nichž nejširší apriorní rozdělení má modul pružnosti  $E$ , zatímco geometrické parametry  $l_\sigma$ ,  $I_{\sigma_1}$ ,  $I_{\sigma_2}$  a  $I_{\sigma_3}$  vyjadřující geometrické nepřesnosti výroby mají všechny poměrně užší normální apriorní rozdělení vycházející z předepsaných histogramů zobrazených na Obrázku 4.2.

Identifikace všech parametrů je provedena na základě měření celého vektoru přemístění  $\mathbf{r}$ , kdy jsou jednotlivé složky vnímány jako nezávislé a je identifikována jedna konkrétní konstrukce. Jde tedy o tradiční Bayesův přístup, při němž je aktualizace apriorního rozdělení uskutečněna pomocí věrohodnosti založené na pěti nezávislých přemístěních získaných při jednom experimentu a zatížených nejistotou způsobenou chybami měření. Příslušná kovarianční matice

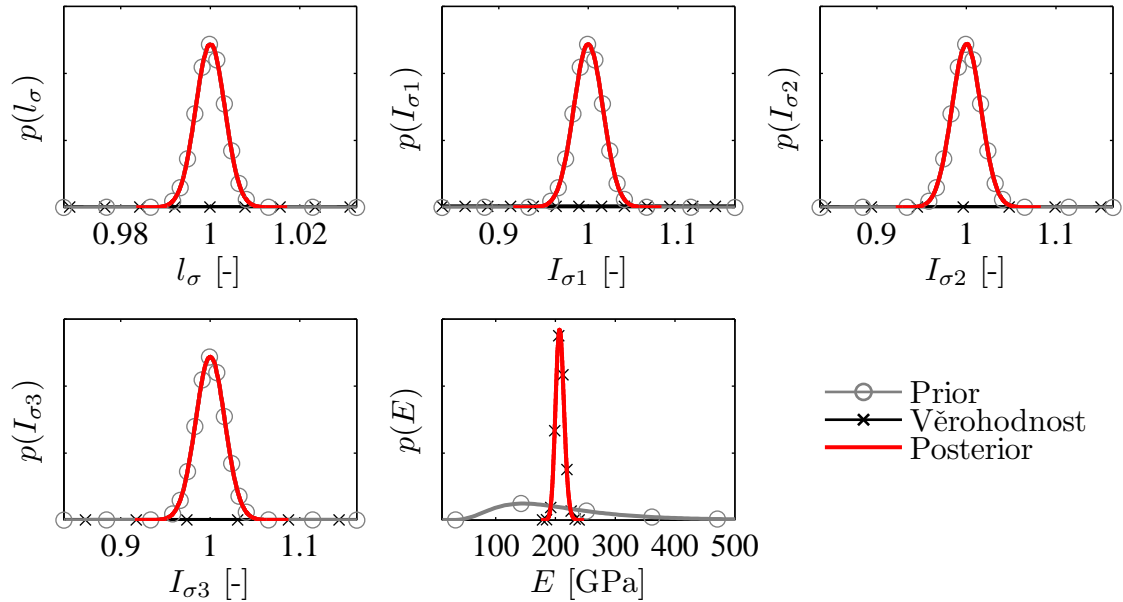
$$\mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_u}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_\varphi}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_u}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_u}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_\varphi}^2 \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

je diagonální a vystupující rozptyly odpovídají chybám měření pro jednotlivá přemístění  $\sigma_{\varepsilon_u} = 10^{-2}$  mm a  $\sigma_{\varepsilon_\varphi} = 1$  mrad. Vektor středních hodnot věrohodnostní funkce obsahuje

naměřené hodnoty přemístění

$$\boldsymbol{\mu}_z = (z_{u_D}, z_{\varphi_D}, z_{u_A}, z_{w_A}, z_{\varphi_A})^T. \quad (9.16)$$

Výsledky provedené identifikace jsou zobrazeny na Obrázku 9.10, kde je postupně ukázáno apriorní rozdělení, věrohodnost a obdržovaný posterior příslušící jednotlivým parametrům.



Obrázek 9.10: Prior, věrohodnost a posteriorní rozdělení jednotlivých nejistých parametrů.

Je patrné, že identifikací bylo zpřesněno nejvíce apriorní rozdělení materiálového parametru, který byl nejvíce nejistý. Posteriorní rozdělení geometrických parametrů se v podstatě od apriorního neliší. Tento jev je důsledkem velmi malé citlivosti odezvy na geometrické parametry, která vede na velmi plochou věrohodnostní funkci odpovídající těmto parametrům.

# Kapitola 10

## Shrnutí

Tato část diplomové práce se zaměřuje na Bayesův přístup při identifikaci nejistých parametrů výpočetního modelu. Jedná se o velmi efektivní způsob, jakým lze snížit nejistotu týkající se vstupních parametrů, kterými jsou v této práci materiálové a geometrické parametry rámové konstrukce.

Bayesovská identifikace vychází z jednoduché myšlenky, kdy je vhodnou kombinací dosavadních expertních znalostí o nejistém parametru a nově nabytých informací získaných z experimentů obdrženo aktualizované pravděpodobnostní rozdělení nejistého parametru. Základními termíny v této problematice je apriorní rozdělení vycházející z počátečních vědomostí, věrohodnostní funkce reflektující experimentální výsledky a posteriorní rozdělení jako výsledek celé identifikace.

Jelikož formulace posteriorního rozdělení nebývá jednoduchá a často obsahuje vícerozměrné integrály, je pro jeho získání a případné stanovení příslušných statistických momentů nutné použít vhodnou metodu, kterou je v této práci metoda Monte Carlo pro Markovovy řetězce. Konkrétně je aplikován Metropolisův algoritmus se symetrickým návrhovým rozdělením. Parametry návrhového rozdělení jsou stanoveny na základě minimalizace autokorelace obdrženého Markovova řetězce. Dále je sledována míra přijetí Markovových řetězců, pro kterou existuje doporučený interval hodnot, při nichž se stacionární rozdělení řetězce optimálně rovná hledanému posteriornímu rozdělení.

Použití Markovových řetězců umožňuje vyhnout se složitým výpočtům integrálů, ovšem výpočetní náročnost vyplývající z požadovaného velkého počtu vzorků je vysoká. Řešením je nahrazení plného modelu polynomiální aproximací, jejímž sestavením se zabývá první část diplomové práce. V této části je úspěšně aplikována lineární regrese pro tvorbu aproximace modelu Hermiteovými polynomy. Vzájemné srovnání všech představených metod je provedeno na příkladu s jedním nejistým parametrem a výsledky potvrzují vhodnost volby lineární regrese.

Pro stanovení složky odezvy vhodné k použití při identifikaci nejistých parametrů je provedena citlivostní analýza. Citlivost je stanovena dvěma způsoby, konkrétně pomocí Spearmanova koeficientu pořadové korelace a pomocí indexů citlivosti vycházejících z analýzy

rozptylu ANOVA, které lze výhodně stanovit přímo z koeficientů polynomiální aproximace. Výsledky potvrdily, že citlivostní analýzou je možné určit informativní složky odezvy, jejichž měření nejvíce přispěje ke snížení nejistot v popisu zkoumaných parametrů.

Při aplikaci popsané metody identifikace není v této práci cílem pouze obdržení výsledného posteriorního rozdělení, ale především prozkoumání chování metody pro různá nastavení. Například jsou probrány odlišné přístupy k obdrženým experimentálním datům a použity různé kombinace více či méně informativních složek odezvy s ohledem na efektivnost identifikace jednoho parametru. Dále je provedeno také porovnání identifikačního procesu pro více nejistých parametrů s odpovídající rozdílnou citlivostí měřené odezvy.

# Kapitola 11

## Závěr

Předložená diplomová práce se soustředí na identifikování nejistot týkajících se odezvy i parametrů výpočetních modelů. Tato problematika je v dnešní době aktuální a díky vývoji výpočetní techniky nacházejí představené postupy široké uplatnění v různých oborech.

Diplomová práce je koncepčně rozdělena do dvou na sebe navazujících částí. Zatímco první část se zaměřuje na tvorbu aproximací pomocí polynomiálního chaosu, v druhé části je vytvořený polynomiální náhradní model efektivně využit při vzorkování Markovových řetězců metodou Monte Carlo pro získání posteriorního rozdělení nejistých parametrů modelu. Stručný popis praktického postupu při implementaci zkoumaných metod je uveden v Příloze A.

V první části práce jsou představeny a porovnány tři různé metody pro sestavení polynomiální aproximace, která je vytvořena pro výpočetní model jednoduché rámové konstrukce s náhodnými parametry. Zkoumanými metodami jsou lineární regrese, stochastická kolokační metoda a stochastická Galerkinova metoda ve své plně i semi-intruzivní formě. Vytvořené náhradní modely jsou aplikovány při analýze nejistot v odezvě modelu a stanovení pravděpodobnosti poruchy modelované konstrukce. Metody jsou porovnány z hlediska výpočetních požadavků a dosažené přesnosti obdržených aproximací, v potaz je brána i náročnost aplikace jednotlivých metod. Pro použití v následující části práce je po zvážení všech uvedených hledisek vybrána metoda lineární regrese založená na návrhu experimentů získaného metodou Latin Hypercube Sampling.

Druhá část práce se zabývá bayesovskou identifikací nejistých parametrů. Tato metoda umožňuje sloučit veškeré dostupné znalosti a experimentálně obdržená data do jednoho zpřesněného popisu, kterým je posteriorní rozdělení zkoumaného nejistého parametru. Hledaný posterior je součinem apriorního rozdělení a věrohodnostní funkce, jejíž sestavení je v práci podrobně rozebráno. Jelikož analytické vyjádření posteriorního rozdělení není v mnoha případech možné, jsou za tímto účelem výhodně používané Markovovy řetězce, které poskytují vzorky i ze složitých pravděpodobnostních rozdělení. Z důvodu časové náročnosti je pro vzorkování posteriorního rozdělení použita namísto plného numerického modelu jeho polynomiální aproximace vytvořená, jak je výše uvedeno, lineární regresí. Součástí práce je

také jednoduché srovnání ostatních metod pro sestavení polynomiální aproximace při použití v identifikačním procesu, které potvrzuje závěr vyvozený z výsledků první části práce.

Při zpracovávání řešeného tématu vznikly další práce, které byly autorkou prezentovány na národních i mezinárodních konferencích [17, 20, 18, 19] a na studentských soutěžích [15].



# Literatura

- [1] Babuška, I.; F., N.; Tempone, R.: A Stochastic Collocation Method for Elliptic Partial Differential Equations with Random Input Data. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, ročník 45, č. 3, 2007: s. 1005–1034.
- [2] Babuška, I.; Tempone, R.; Zouraris, G. E.: Galerkin Finite Element Approximations of Stochastic Elliptic Partial Differential Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, ročník 42, č. 2, 2004: s. 800–825.
- [3] Bayes, T.; Price, R.: An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S. *Philosophical Transactions (1683-1775)*, ročník 53, 1763: s. 370–418.
- [4] Blatman, G.; Sudret, B.: An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, ročník 25, č. 2, 2010: s. 183–197.
- [5] Blatman, G.; Sudret, B.: Efficient computation of global sensitivity indices using sparse polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering and System Safety*, ročník 95, 2010: s. 1216–1229.
- [6] Ditlevsen, O.; Madsen, H. O.: *Structural Reliability Methods*. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 1996.
- [7] Gelman, A.; Carlin, J. B.; Stern, H. S.; aj.: *Bayesian data analysis*. Chapman & Hall/CRC, druhé vydání, c2004, xxv, 668 s.
- [8] Gelman, A.; Shirley, K.: *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, kapitola Inference from Simulations and Monitoring Convergence. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC, 2011, s. 163–174, ISBN 978-1-4200-7942-5.
- [9] Geyer, C. J.: *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, kapitola Introduction to Markov Chain Monte Carlo. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC, 2011, s. 3–48, ISBN 978-1-4200-7942-5.
- [10] Ghanem, R. G.; Spanos, P. D.: *Stochastic finite elements: A spectral approach*. Springer-Verlag New York, Inc., 1991.
- [11] Hebák, P.: *Texty k bayesovské statistice*. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, první vydání, 1999, ISBN 80-707-9862-9, 139 s.
- [12] Hebák, P.: Srovnání klasické a bayesovské pravděpodobnosti a statistiky (2.). In *Acta oeconomica Pragensia: Vědecký sborník Vysoké školy ekonomické v Praze*, ročník 20, Praha: Vysoká škola ekonomická, 2012, s. 77–92, ISSN 0572-3043.

- [13] Heiss, F.; Winschel, V.: Likelihood approximation by numerical integration on sparse grids. *Journal of Econometrics*, ročník 144, č. 1, 2008: s. 62–80.
- [14] Helton, J.; Johnson, J.; Sallaberry, C.; aj.: Survey of sampling-based methods for uncertainty and sensitivity analysis. *Reliab Eng Syst Safe*, ročník 91, č. 10-11, 2006: s. 1175–1209.
- [15] Janouchová, E.: Porovnání numerických metod pro analýzu nejistot. Soutěžní práce [online], 2013, [cit. 2013-12-09]. Dostupné z <[http://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/f/f4/Bazant\\_2013\\_janouchova.pdf](http://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/f/f4/Bazant_2013_janouchova.pdf)>
- [16] Janouchová, E.; Kučerová, A.: Competitive Comparison of Optimal Designs of Experiments for Sampling-based Sensitivity Analysis. *Computers & Structures*, ročník 124, 2013: s. 47–60, ISSN 0045-7949.
- [17] Janouchová, E.; Kučerová, A.; Sýkora, J.: Comparison of Numerical Methods for Uncertainty Quantification. In *Engineering Mechanics 2013*, Praha: Ústav termomechaniky AV ČR, 2013, s. 235–246, ISBN 978-80-87012-47-5.
- [18] Janouchová, E.; Kučerová, A.; Sýkora, J.: Efficient methods for uncertainty quantification. In *Proceedings of the 4th Conference Nano and Macro Mechanics NMM 2013*, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, 2013.
- [19] Janouchová, E.; Kučerová, A.; Sýkora, J.: Polynomial chaos-based evaluation of failure probability: A numerical study. In *Proceedings of the 11th International Probabilistic Workshop*, Brno: University of Technology, Faculty of Civil Engineering, Institute of Structural Mechanics, 2013, s. 145–157, ISBN 978-80-214-4800-1.
- [20] Janouchová, E.; Kučerová, A.; Sýkora, J.: Polynomial chaos-based methods for uncertainty quantification and reliability analysis. In *Book of abstracts of the Third International Conference on Material Modelling*, Warsaw, 2013, str. 138, ISBN 978-83-89687-83-8.
- [21] Jin, B.: Fast Bayesian approach for parameter estimation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, ročník 76, 2008: s. 230–252.
- [22] Lewis, P. O.: The Robot Metaphor. *MCMC Robot: A Markov chain Monte Carlo teaching tool* [online], 2012, [cit. 2013-12-08]. Dostupné z <<http://mcmicrobot.org/>>
- [23] Liu, B.: *Uncertainty theory*. Uncertainty Theory Laboratory, čtvrté vydání, 2013, 450 s. Dostupné z <<http://orsc.edu.cn/liu/ut.pdf>>
- [24] Marek, P.; Brozzetti, J.; Guštar, M.; aj.: *Probabilistic assessment of structures using Monte Carlo simulation*. Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, druhé vydání, 2003.
- [25] Marzouk, Y. M.; Najm, H. N.; Rahn, L. A.: Stochastic spectral methods for efficient Bayesian solution of inverse problems. *Journal of Computational Physics*, ročník 224, č. 2, 2007: s. 560–586.
- [26] Matthies, H. G.: *Encyclopaedia of Computational Mechanics*, kapitola Uncertainty quantification with stochastic finite elements. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 2007.

- [27] Matthies, H. G.; Keese, A.: Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ročník 194, č. 12–16, 2005: s. 1295–1331.
- [28] Metropolis, N.; Rosenbluth, A. W.; Rosenbluth, M. N.; aj.: Equation of state calculations by fast computing machine. *J. Chem. Phys.*, ročník 21, 1953: s. 1087–1091.
- [29] Pawlas, Z.: Metody MCMC (STP139). Pracovní text k přednášce [online], 2007, [cit. 2013-12-08]. Dostupné z <<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pawlas/2007/STP139/mcmc.pdf>>
- [30] Roberts, G. O.; Gelman, A.; Gilks, W. R.: Weak convergence and optimal scaling of random walk Metropolis algorithms. *The Annals of Applied Probability*, ročník 7, č. 1, 1997: s. 110–120.
- [31] Rosenthal, J. S.: *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, kapitola Optimal Proposal Distributions and Adaptive MCMC. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC, 2011, s. 93–140, ISBN 978-1-4200-7942-5.
- [32] Saltelli, A.; Chan, K.; Scott, E. M.: *Sensitivity analysis*. New York: NY:Wiley, 2000.
- [33] Spall, J. C.: Estimation via Markov Chain Monte Carlo. *IEEE Control Systems Magazine*, ročník 23, č. 2, 2003: s. 34–45, doi:10.1109/MCS.2003.1188770.
- [34] Stefanou, G.: The stochastic finite element method: Past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ročník 198, č. 9–12, 2009: s. 1031–1051.
- [35] Stormark, K.: *Multiple Proposal Strategies for Markov Chain Monte Carlo*. Diplomová práce, Norwegian University of Science and Technology, 2006.
- [36] Wiener, N.: The Homogeneous Chaos. *American Journal of Mathematics*, ročník 60, č. 4, 1938: s. 897–936.
- [37] Xiu, D.: Fast Numerical Methods for Stochastic Computations: A Review. *Communications in Computational Physics*, ročník 5, č. 2–4, 2009: s. 242–272.
- [38] Xiu, D.: *Numerical Methods for Stochastic Computations: A Spectral Method approach*. 125, Princeton University Press, 2010, ISBN 9780691142128.
- [39] Xiu, D.; Karniadakis, G. E.: The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, ročník 24, č. 2, 2002: s. 619–644.
- [40] Zander, E.: A Matlab/Octave toolbox for stochastic Galerkin methods. [online], 2009, [cit. 2013-12-10]. Dostupné z <<http://ezander.github.com/sglib>>
- [41] Zheng, S.: *Bayesian Approach to Parameter Estimation*. Lecture from Math 541: Statistical Theory II [online], 2008, [cit. 2013-12-05]. Dostupné z <<http://people.missouristate.edu/songfengzheng/Teaching/MTH541/Lecture%20notes/Bayesian.pdf>>

# Příloha A

## Implementace metod

Pro implementaci všech popsaných postupů byl zvolen v dnešní době velmi oblíbený program MATLAB, který kombinuje kvalitní technický programovací jazyk a interaktivní prostředí pro vývoj algoritmů, numerické výpočty a analýzu dat.

Nejprve byl vytvořen kód plného numerického modelu rámové konstrukce se dvěma variantami výstupu (rezerva spolehlivosti  $Z$ , vektor přemístění  $\mathbf{r}$ ). Následně byly implementovány metody sestavení polynomiální aproximace - lineární regrese, stochastická kolokační metoda a stochastická Galerkinova metoda.

Výhodou použitého programovacího prostředí je široká nabídka předdefinovaných funkcí i jeho obecná rozšířenost, která umožňuje sdílet vytvořené kódy s mnoha uživateli. V této práci byly kromě standardních funkcí obsažených v MATLABu použity také některé funkce z volně dostupné knihovny zabývající se stochastickou Galerkinovou metodou [40].

Konkrétně byly použity funkce:

- `multiindex()`, která stanovuje matici indexů jednotlivých proměnných v ortogonálních polynomech v závislosti na zvoleném stupni polynomu,
- `hermite_triple_fast()`, která počítá integrál ze součinu tří Hermiteových polynomů přes standardní normální rozdělení,
- `gpc_evaluate()`, která vyhodnocuje zvolený polynom pro stanovené hodnoty proměnných.

Poslední ze zmíněných funkcí se v práci neosvědčila při současném vyhodnocování více PCE pro velké množství vzorků, proto byla vytvořena jednodušší funkce, která je pro uvedené příklady dostačující a mnohem méně časově náročná.

Pro identifikaci nejistých parametrů byl naprogramován Metropolisův algoritmus pro sestavení Markovova řetězce. Dále byly vytvořeny funkce pro citlivostní analýzu provedenou na základě vzorků MC i koeficientů PCE.

Numerické výsledky byly obdrženy pomocí popsaných kódů a získaná data byla dále graficky zpracována také v prostředí MATLAB.