



České vysoké učení technické v Praze  
Stavební fakulta

---

Studentská vědecká a odborná činnost  
Akademický rok 2011/2012

# **VLIV ČLÁNKŮ SE ZÁPORNOU TUHOSTÍ NA CHOVÁNÍ MECHANICKÝCH SOUSTAV**

Jméno a příjmení studenta : Ondřej Šupčík

Ročník, obor : 5.ročník, Kce. a dopravní stavy

Vedoucí práce : Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

# Abstrakt

**Cíle práce:** Cílem této práce je popsat chování článků se zápornou tuhostí zapojených do mechanických soustav. Analyzovat dynamické chování paralelního zapojení článku se zápornou tuhostí, pružin a tlumiče v kontextu téměř nulové výsledné tuhosti.

**Metody:** Články se zápornou tuhostí jsou modelovány pomocí jednorozměrných dokonale elastických pružin. Paralelní zapojení je zkoumáno jako systém s jedním stupněm volnosti buzený kmitajícím podložím. Dynamické chování se počítá metodou centrálních diferencí. Ustálené periodické kmitání se hledá metodou střelby. Výpočty jsou prováděny ve studentské verzi programu Matlab 2010a.

**Výsledky:** Jsou popsány mechanické vlastnosti diskrétního článku se zápornou tuhost, tvořené vzpěradlem z pružin. Pro paralelní zapojení se ukazuje značné množství zajímavých větví řešení. Pro vhodně zvolené parametry a dostatečně malou budící amplitudu podloží systém velmi efektivně brání přenosu chvění.

**Klíčová slova:** Diskrétní soustava, nulová tuhost, paralelní zapojení, záporná tuhost.

# Abstract

**Goals:** The first goal of this thesis is to describe the behavior of units with negative stiffness connected into mechanical systems. The second and most important goal is to analyze the dynamic behavior of parallel connection of an unit with negative stiffness, springs and a damper in the context of near-zero resultant stiffness.

**Methods:** Units with negative stiffness are modeled using one-dimensional perfectly elastic springs. Parallel connection is examined as a system with one degree of freedom loaded by oscillating subsoil. Dynamic behavior is calculated using central differences. Steady periodic oscillations are found by the shooting method. Calculations are performed in the student version of Matlab 2010a.

**Results:** Mechanical properties of discrete unit with negative stiffness (strut frame scheme consisting of springs) are described. For parallel connection it is shown that a large number of interesting solution branches exist. The parallel system can very effectively reduce the transmission of vibration for suitably chosen parameters and a sufficiently small excitation amplitude of subsoil.

**Keywords:** Discrete system, negative stiffness, parallel connection, zero stiffness.

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>2</b>
1.1 Záporná tuhost . . . . .	2
<b>2 Článek se zápornou tuhostí</b>	<b>3</b>
2.1 Vzpěradlo . . . . .	3
<b>3 Paralelní zapojení</b>	<b>5</b>
3.1 Předpoklady . . . . .	5
3.2 Metoda integrace vpřed . . . . .	7
3.2.1 Metoda centrálních diferencí . . . . .	8
3.3 Metoda střelby . . . . .	9
3.3.1 Odvození metody střelby . . . . .	9
3.4 Rozměrová analýza . . . . .	11
3.5 Stručný výsledný postup . . . . .	13
3.6 Výsledné grafy . . . . .	13
3.6.1 Vliv normované amplitudy budící výchylky $\pi_2$ . . . . .	14
3.6.2 Vliv normovaného útlumu $\pi_1$ . . . . .	16
<b>4 Závěr</b>	<b>18</b>

# 1 Úvod

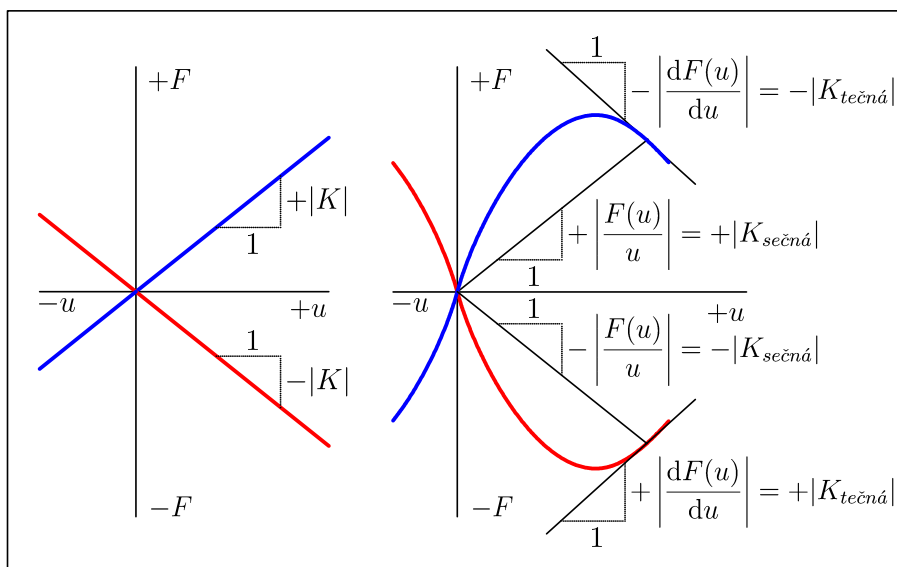
Článek se zápornou tuhostí. Pro neznalého tajemná formule, pro znalé přinejmenším velmi neobvyklé. V základním kurzu dynamiky mnohokrát opakovaná poučka: „ Máš-li záporné číslo na diagonále matice tuhosti, začni hledat chybu, než se pustíš dál!“ v nás může budit značnou nedůvěru vůči záporné tuhosti. Zvědavý člověk si řekne: „Kdyby se to správně nastavilo, tak by to dávalo úžasné vlastnosti“.

Ze vzorečku pro paralelní zapojení lze získat velmi malou tuhost. „Je to tak? A pokud je, je to vůbec užitečné?“ Odpověď se skrývá v kapitole 3.

V kapitole 2 bude podrobně popsáno jak získat diskrétní článek se zápornou tuhostí pomocí předepnutých pružin.

## 1.1 Záporná tuhost

Co to je záporná tuhost? V článku [4] o ní říkají: „Negative stiffness entails a reversal of the usual directional relationship between force and displacement in deformed objects. In ordinary positive stiffness elastic materials (such as a spring), the reaction force exerted by the material is in opposite direction as the deformation. This corresponds to a restoring force. A material of negative stiffness exerts a reaction force in the same direction as the deformation, which tends to help the deformation proceed further. This is accomplished by a positive stored energy at unstable equilibrium.“ Což se dá přeložit takto: „Záporná tuhost přináší, oproti klasickému, opačný směrový vztah mezi silou a posunem. V normálních, kladně-tuhých pružných materiálech (jako třeba pružina), je reakce materiálu v opačném směru než deformace. To odpovídá vratné síle. Materiál s negativní tuhostí přináší reakci ve směru deformace, což pomáhá jejímu nárůstu. Toho je dosaženo kladnou vloženou energií ve stavu nestabilní rovnováhy.“ Co to znamená prakticky?



Obrázek 1: Pracovní diagram

Snadno si lze představit třeba houbu na mytí tabule. Pokud se stlačí, bude se snažit vrátit do původního nestlačeného tvaru a bude nutné na ni tlačit, aby se tak nestalo. Kdyby však byla z materiálu se zápornou tuhostí a stlačila se, bude nutné ji táhnout, aby ve stlačeném stavu zůstala. A pokud tažena nebude nebo ne dost velkou silou, tak se bude stlačovat víc a víc, dokud její tuhost nepřestane být záporná a nenastane rovnováha. Pokud by se na tento děj dívalo z energetického hlediska, těleso se zápornou tuhostí při nulové deformaci je na vrcholu energetického kopce, stačí malý posun kterýmkoliv směrem a vložená energie se začne měnit na kinetickou a posun bude narůstat, dokud se systém nedostane do energetického údolí, kde se stabilizuje. Toto

je důvod, proč se v přírodě materiály se zápornou tuhostí prakticky nevyskytují – velmi rychle ztrácí stabilitu a ustalují se ve stabilní podobě s kladnou tuhostí.

Další způsob, jak si zápornou tuhost představit, je za pomoci Pracovního diagramu 1. Vlevo je nakreslen pracovní diagram dvou lineárně pružných materiálů. Modrou křivkou je materiál s kladnou tuhostí a červenou se zápornou. Pro ně není třeba rozlišovat tečnou a sečnou tuhost, protože jsou shodné. V pravé straně obrázku jsou nakresleny diagramy nelineární. Modrou křivkou je znázorněn běžný materiál, jako ocel, beton nebo plast. Síla nejdříve s nárůstem deformace roste - jak sečná, tak tečná tuhost jsou kladné. Postupně obě tuhosti klesají, až do bodu, kde síla začne klesat. V tu chvíli je sečná tuhost stále kladná, ale tečná přešla z kladných hodnot do záporných. Co to znamená? Při zkoušce s předepsanou silou a měřenou deformací, pokud by síla neklesla ze své maximální hodnoty, stačil by minimální impuls a deformace by začala narůstat až do kolapsu. Projevila by se nestabilita záporné tuhosti.

Pokud by však, a to je pro tento typ materiálové zkoušky obvyklejší, byl předepsán posun a měřena síla, tak by síla poklesla a vše by zůstalo stabilní.

Záporná tuhost se může vyskytovat ve dvou podobách: ve spojitých materiálech a v diskretních soustavách. Ve spojitých materiálech se vyskytuje u některých jednodoménových feroelastických materiálů v blízkosti fázového přechodu. Podle [4], [5] a [6] se u nich očekává negativní tuhost, protože dle Landauovy teorie má volná energie relativní maximum, odpovídající nestabilní rovnováze, právě pod kritickou teplotou. Obvykle se však u feroelastických a feroelektrických materiálů o záporné tuhosti nemluví, neboť díky nestabilitě přechází do pásových struktur.

Feroelastického materiálu při teplotě blízké přechodové využili autoři v [7], kde provedli experiment s kompozitem z kladně tuhé cínové matrice a záporně tuhé feroelastické inkluze oxidu vanadičitého ( $\text{VO}_2$ ). Výsledný kompozit vykazoval extrémní mechanický útlum a velké anomálie v tuhosti, z důvodu mnohem větších lokálních přetvoření inkluze oproti celému kompozitu. Podrobně se o podmínkách stability takovýchto materiálů mluví ve čtvrté kapitole článku [8]. V článku [4] popisují experiment se zápornou tuhostí prolomených trubiček ze silikonové gumy.

## 2 Článek se zápornou tuhostí

Dosud se zde psalo pouze obecně o článku se zápornou tuhostí, bez vysvětlení fyzikální podstaty. V této kapitole bude popsáno konkrétní schéma diskretního článku se zápornou tuhostí.

### 2.1 Vzpěradlo

Vzpěradlo se skládá ze dvou vodorovných pružin předepnutých proti sobě. Toto předepnutí se realizuje svislým stlačením ze stabilní rovnováhy v poloze  $u = \pm h$  do nestabilní rovnováhy  $u = 0$ . Jak je vidět na obrázku 2, pružiny mají původní délku  $l_0$  a po předepnutí délku  $l_1$ . Vztah mezi těmito délkami pak lze popsat rovnicí

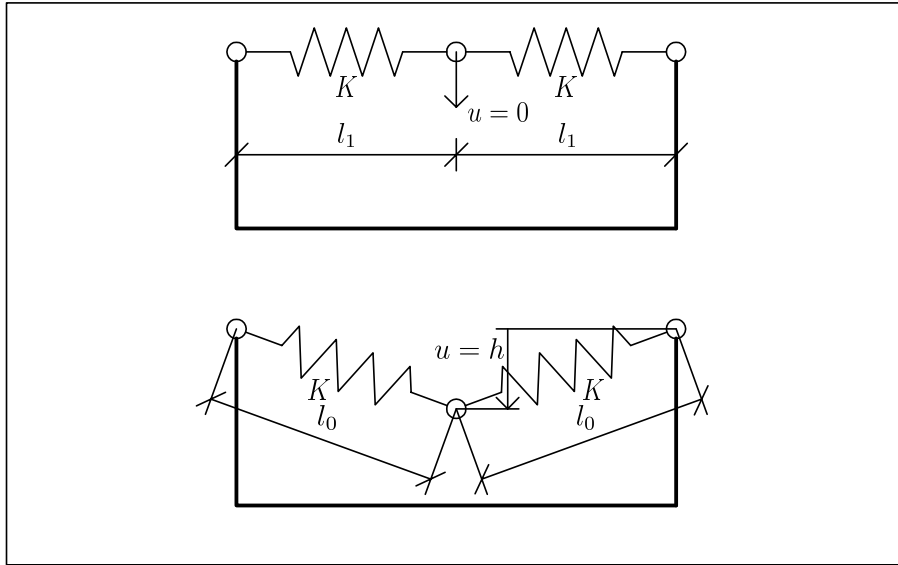
$$l_1 = \sqrt{l_0^2 - h^2} \quad (1)$$

Sílu  $N_1$  v pružině v závislosti na svislém posunu  $u$  je možné vyjádřit jako

$$N_1(u) = -K(l_0 - \sqrt{l_1^2 + u^2}) \quad (2)$$

Svislá složka síly v pružině  $P_{1,z}(u)$  je

$$P_{1,z}(u) = -\frac{K(l_0 - \sqrt{l_1^2 + u^2})u}{\sqrt{l_1^2 + u^2}} \quad (3)$$



Obrázek 2: První schéma - vzpěradlo

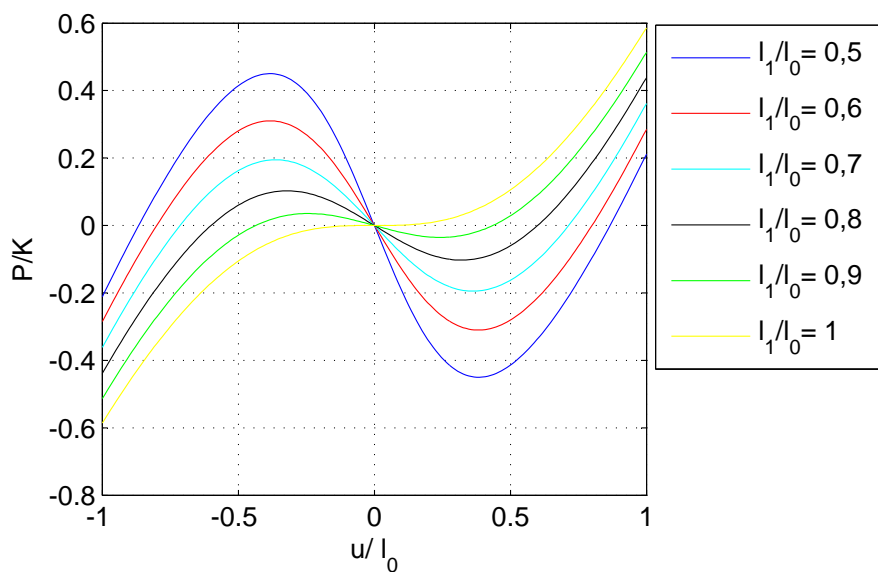
Vodorovné složky síly obou pružin jsou díky symetrii stejně velké a opačně orientované, a proto je vodorovný posun nulový. Celková svislá síla tohoto článku

$$P_1(u) = -\frac{2K(l_0 - \sqrt{l_1^2 + u^2})u}{\sqrt{l_1^2 + u^2}} \quad (4)$$

je součtem svislých složek sil obou pružin. Derivací této síly podle  $u$  se získá tečná tuhost.

$$\frac{dP_1(u)}{du} = 2Kl_0 \left( \frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{l_1^2 + u^2}} + \frac{u^2}{\sqrt{(l_1^2 + u^2)^3}} \right) \quad (5)$$

Obrázek (3) ukazuje normovaný pracovní diagram.

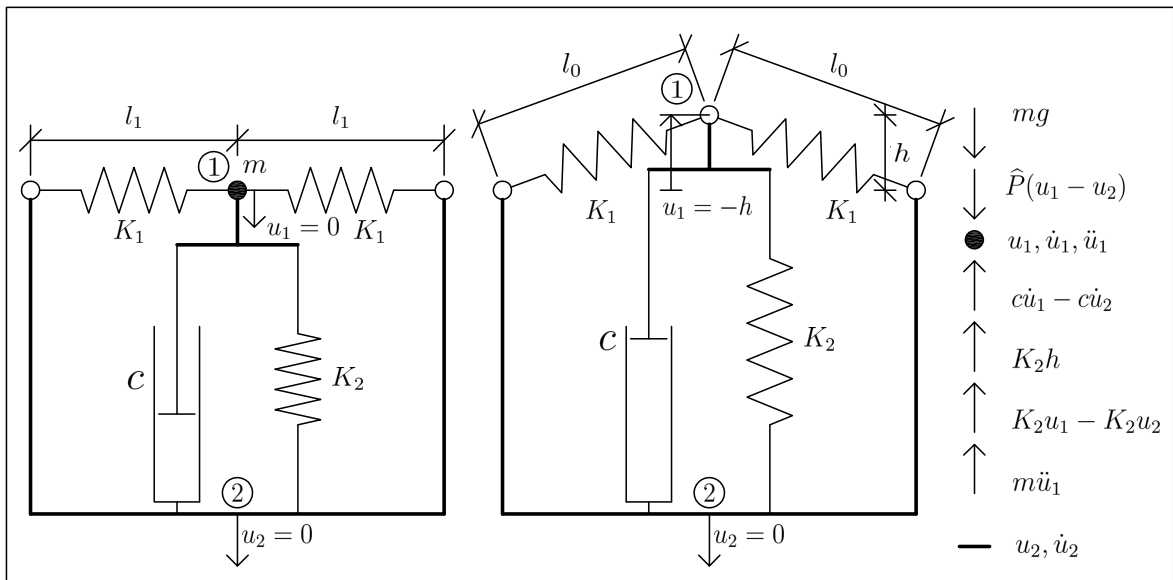


Obrázek 3: Normovaný pracovní diagram - první schéma

### 3 Paralelní zapojení

Tato kapitola, inspirovaná článkem [2], se bude zabývat numerickou simulací paralelního zapojení článku se zápornou tuhostí, pružiny a tlumiče v programu Matlab a zkoumáním jeho vlastností. V první podkapitole se rozeberou důvody pro takové uspořádání a diferenciální rovnice dynamické rovnováhy, ve druhé podkapitole bude popsáno řešení této rovnice metodou přímé integrace, ve třetí podkapitole bude prozkoumána metoda střelby, která umožňuje získat podmínky ustáleného kmitání, ve čtvrté bude podrobně rozepsán postup získávání výsledků a v páté budou prezentovány výsledky. V průběhu této kapitoly se předpokládá, že jediné posuny  $u_i(t)$ , jejich časové derivace  $\dot{u}_i(t)$  a  $\ddot{u}_i(t)$  a funkce těchto posunů a časových derivací  $f(u_i(t), \dot{u}_i(t), \ddot{u}_i(t))$  jsou funkcemi času. Pro zkrácení a zpřehlednění zápisu rovnic bude vynecháváno  $(t)$  a budou psány jako  $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$  a  $f(u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i)$ .

#### 3.1 Předpoklady



Obrázek 4: Schéma paralelního zapojení

Cílem je zařízení, které dokáže přenést tíhu nákladu s co nejmenší deformací a zároveň tento náklad co nejlépe oddělit od vibrací podloží. Jedná se o dva protichůdné požadavky. Pro splnění prvního požadavku je nutná značná tuhost, pro druhý naopak co nejmenší. Oba tyto požadavky dokáže splnit paralelní zapojení článku se zápornou tuhostí, pružiny a tlumiče.

Na obrázku 4 je nakresleno schéma takového paralelního zapojení. Hmotnost nákladu i samotného zařízení je soustředěna do bodu 1. Jako článek se zápornou tuhostí je využito schéma z podkapitoly 2.1. V horní části obrázku je schéma nezatíženo, bod 1 má počáteční výchylku  $u_1 = -h$ , všechny pružiny mají svoji původní délku a z toho důvodu nepřenášejí žádné síly. Při této deformaci má soustava značnou tuhost, která umožňuje přenos tíhové síly s malou deformací.

V dolní části obrázku 4 je schéma již zatíženo. Vodorovné pružiny jsou zkrácené o

$$l_0 - l_1 = l_0 - \sqrt{l_0^2 - h^2} \quad (6)$$

čímž v nich působí předpětí, takže tvoří článek se zápornou tuhostí v nestabilní rovnováze. Svislá pružina přenáší celou tíhovou sílu a je s ní ve stabilní rovnováze. Při předpokladu nulové rychlosti tlumič nepřenáší žádnou sílu. V ideálním případě dokonalého nastavení je pružinou přenesené zatížení, tuhost pružiny je negovaná tuhostí článku se zápornou tuhostí a celá soustava

je stabilní. Aby tento ideální stav nastal, musí být splněno několik podmínek. Pro jejich lepší pochopení se nejdříve důkladně projde diferenciální rovnice dynamické rovnováhy, jež tento systém popisuje.

Na obrázku 4 vpravo dole jsou nakresleny síly působící na bod 1. Dynamickou rovnováhu sil popisuje rovnice

$$m\ddot{u}_1 + c(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - \widehat{P}(u_1 - u_2) + K_2h + K_2(u_1 - u_2) = mg \quad (7)$$

kde

$m\ddot{u}_1$	vyjadřuje inerciální sílu – součin hmotnosti a zrychlení,
$c(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)$	popisuje sílu v tlumiči – součin útlumu a rozdílu rychlostí bodu 1 a podloží $\dot{u}_1 - \dot{u}_2$ ,
$K_2h$	značí předpětí svislé pružiny, je to síla, jež vznikla stlačením této pružiny z $u_1 = -h$ na $u_1 = 0$ ,
$K_2(u_1 - u_2)$	je síla v pružině mimo předpětí, rovná součinu tuhosti $K$ a rozdílu posunů $u_1 - u_2$ ,
$-\widehat{P}(u_1 - u_2)$	je síla v článku se zápornou tuhostí, která je funkcí rozdílu posunů $u_1 - u_2$ .

Vyjádření funkce

$$-\widehat{P}(u_1 - u_2) = P_1(u_1 - u_2) = -\frac{2K_1(l_0 - \sqrt{l_1^2 + (u_1 - u_2)^2})(u_1 - u_2)}{\sqrt{l_1^2 + (u_1 - u_2)^2}} \quad (8)$$

vychází z rovnice (4), ve které je  $K$  nahrazeno  $K_1$  a  $u$  nahrazeno rozdílem posunů bodu jedna a podloží  $u_1 - u_2$ . Pokud se zadefinuje

$$P(u_1 - u_2) = -\widehat{P}(u_1 - u_2) + K_2u_1 - K_2u_2 \quad (9)$$

jež po dosazení za  $-\widehat{P}(u_1 - u_2)$  z rovnice (8) vypadá jako

$$P(u_1 - u_2) = -\frac{2K_1(l_0 - \sqrt{l_1^2 + (u_1 - u_2)^2})(u_1 - u_2)}{\sqrt{l_1^2 + (u_1 - u_2)^2}} + K_2(u_1 - u_2) \quad (10)$$

lze rovnici (7) zjednodušit na

$$m\ddot{u}_1 + c(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + P(u_1 - u_2) + K_2h = mg \quad (11)$$

Nyní je možné stanovit podmínky pro správné fungování. Je žádoucí, aby v případě nulového posunutí, rychlosti i zrychlení jak bodu 1, tak podloží (bod 2) byla dodržena rovnováha sil.

Po dosazení  $\ddot{u}_1 = \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = u_1 = u_2 = 0$  do rovnice (31) se získá vztah

$$K_2h = mg \quad (12)$$

Jeho úpravou se získá první podmínka, která říká, že aby statická deformace měla velikost  $h$ , musí tuhost svislé pružiny  $K_2$  být

$$K_2 = \frac{mg}{h} \quad (13)$$

Druhá podmínka vychází z tečné tuhosti, jež se vyjádří jako derivace

$$\begin{aligned} \frac{dP(u_1 - u_2)}{du_1} &= \frac{d}{du_1} \left[ -\frac{2K_1(l_0 - \sqrt{l_1^2 + (u_1 - u_2)^2})(u_1 - u_2)}{\sqrt{l_1^2 + (u_1 - u_2)^2}} + K_2(u_1 - u_2) \right] = \\ &= 2K_1l_0 \left( \frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{l_1^2 + (u_1 - u_2)^2}} + \frac{(u_1 - u_2)^2}{\sqrt{(l_1^2 + (u_1 - u_2)^2)^3}} \right) + K_2 \end{aligned} \quad (14)$$



Jak již bylo řečeno, cílem je co nejmenší tuhost po přenesení hmotnosti nákladu, tedy v poloze  $u_1 = u_2 = 0$ . Pro udržení stability tato tuhost nemůže být záporná a nejnižší nezáporná tuhost je nulová. Po dosazení do rovnice (14) se získá vztah

$$\frac{dP(0)}{du_1} = 2K_1 l_0 \left( \frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{l_1^2 + (0)^2}} + \frac{(0)^2}{\sqrt{(l_1^2 + (0)^2)^3}} \right) + K_2 = -2K_1 \left( \frac{l_0 - l_1}{l_1} \right) + K_2 = 0 \quad (15)$$

ze kterého vychází podmínka pro tuhost vodorovných pružin

$$K_1 = \frac{K_2 l_1}{2(l_0 - l_1)} \quad (16)$$

Využitím rovnosti (12) se pak diferenciální rovnice (11) zjednoduší na

$$m\ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 + P(u_1 - u_2) = c\dot{u}_2 \quad (17)$$

K popsání vibrací podloží se velmi dobře hodí harmonické kmitání. Při vhodně zvoleném počátku časové souřadnice lze posun podloží  $u_2$  vyjádřit jako

$$u_2 = U_{2a} \sin(U_{2\omega} t) \quad (18)$$

kde  $U_{2a}$  je amplituda budícího kmitání podloží [m],  
 $U_{2\omega}$  je kruhová frekvence budícího kmitání podloží [ $s^{-1}$ ].

Rychlost podloží je pak časovou derivací tohoto posunu

$$v_2 = \dot{u}_2 = U_{2a} U_{2\omega} \cos(U_{2\omega} t) \quad (19)$$

V rovnici (17) už zbývá jediná neznámá a to posun bodu 1  $u_1$ . Aby bylo možné ho alespoň numericky řešit, je nutné přidat počáteční podmínky. Protože rovnice (17) je diferenciální rovnice 2. řádu, jsou potřeba dvě počáteční podmínky

$$u_1(t = 0) = u_0 \quad (20)$$

$$\dot{u}_1(t = 0) = v_1(t = 0) = v_0 \quad (21)$$

kde  $u_0$  je počáteční výchylka bodu 1 [m],  
 $\dot{u}_1 = v_0$  je počáteční rychlost bodu 1 [ $ms^{-1}$ ].

Hledaný posun  $u_1$  a z něj dopočítanou rychlost  $v_1$  je možné uspořádat do vektoru

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

počáteční podmínky zapsat jako

$$\vec{x}(t = 0) = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

### 3.2 Metoda integrace vpřed

Jedná se o numerickou metodu řešení diferenciálních rovnic, která místo analytického vyjádření hledaných funkcí dává popis tabulkami hodnot. Tato metoda převádí řešení soustavy diferenciálních rovnic na sérii soustav algebraických. Postup spočívá v rozdělení sledovaného intervalu na  $N$  časových kroků o délce  $\Delta t$ , kdy

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (24)$$

nahrazení derivací diferencemi a vyjádření funkční hodnoty v čase  $t_{i+1}$  pomocí funkčních hodnot v čase  $t_i$  případně i v  $t_{i-1}$ . Podle toho, ve který okamžik se sestavují rovnice, se dělí na implicitní a explicitní metodu. Explicitní metoda sestavuje rovnice v čase  $t_i$ , implicitní v  $t_{i+1}$ .

Výhodou explicitní metody je, že při sestavení rovnice v čase  $t_i$  známe již funkční hodnotu v tomto čase, proto pro výpočet členů na ní závislých stačí jen dosadit a z nich vyjádřit funkční hodnotu v čase  $t_{i+1}$ . Nevýhodou je pouze podmíněná stabilita, což znamená, že pro příliš dlouhý časový krok metoda ztrácí matematickou stabilitu a chyby s uplynulým časem narůstají exponenciálně.

Výhodou implicitní metody je její stabilita. Nevýhodou vzniklou sestavováním rovnic v čase  $t_{i+1}$  je nutnost řešit nelineární rovnici pro získání funkční hodnoty v čase  $t_{i+1}$ . V mnoha případech je daná nelineární rovnice řešitelná pouze numericky.

Přesnost řešení je u obou metod velmi závislá na délce časového kroku. Teoreticky platí, čím kratší časový krok, tím přesnější řešení. Prakticky to platí jen do určité míry – pro velmi krátký časový krok jsou hodnoty a jejich difference natolik malé, že vliv zaokrouhlovacích chyb přesáhne užitek dalšího zkrácení časového kroku.

V této práci je využita explicitní metoda, protože požadavek na přesnost řešení je mnohem přísnější než požadavek podmiňující stabilitu. Její nevýhoda se v této práci vůbec neprojevuje. Podle řádu řešených diferenciálních rovnic se volí vhodné difference.

### 3.2.1 Metoda centrálních diferencí

Tato metoda umožňuje diferencí nahradit první i druhou derivaci a řešit rovnici (17). První a druhá derivace se nahradí diferencemi

$$\dot{u}_1 = \frac{u_{1; i+1} - u_{1; i-1}}{2\Delta t} \quad (25)$$

$$\ddot{u}_1 = \frac{u_{1; i+1} - 2u_{1; i} + u_{1; i-1}}{\Delta t^2} \quad (26)$$

Dosazením (25) a (26) do diferenciální rovnice (17) se získá algebraická rovnice

$$m \frac{u_{1; i+1} - 2u_{1; i} + u_{1; i-1}}{\Delta t^2} + c \frac{u_{1; i+1} - u_{1; i-1}}{2\Delta t} + P(u_1 - u_2) = cv_2 \quad (27)$$

jejíž úpravou mohu vyjádřit

$$u_{1; i+1} = \frac{2\Delta t^2}{2m + c\Delta t} \left( cv_{2; i} - P(u_{1; i} - u_{2; i}) + \frac{2m}{\Delta t^2} u_{1; i} - \frac{2m - c\Delta t}{2\Delta t^2} u_{1; i-1} \right) \quad (28)$$

Z této rovnice lze snadno vypočítat posun  $u_{1; i+1}$  a z něj rychlost  $v_{1; i}$  pomocí vztahu (25), ale pro získání rychlosti  $v_{1; i+1}$  je nutné nejdříve spočítat  $u_{1; i+2}$  a až teprve poté je možné ji počítat, což je poněkud nepohodlné.

Je tu ještě jedna nepříjemnost. Jak aplikovat počáteční podmínky? Rovnice (28) vyžaduje znalost nejen  $u_{1; i=0}$ , kam se dosadí počáteční posun, ale i  $u_{1; i=-1}$ . Je nutné znát hodnotu posunu ještě před časem  $t = 0$  a navíc zatím přebývá počáteční rychlost, kterou ještě není kam dosadit. Možnosti řešení jsou dvě. První je snadná, ale vnáší do výpočtu chybu. Druhá vyžaduje jisté odvozování, ale je přesná.

První možnost je poklesnout z centrální difference na diferenci dopřednou. Předpokládat, že v časovém kroku předcházejícím čas  $t = 0$  se rychlost nemění a hledaný posun je

$$u_{1; -1} = u_0 - v_0\Delta t \quad (29)$$

Pokud se po výpočtu prvního časového kroku ověří, pomocí vztahu (25), počáteční rychlost, zjistí se, že je zatížena značnou chybou. Proto se v této práci využije druhé možnosti. Do rovnic (25) a (28) se dosadí počáteční podmínky, čímž se získají dvě rovnice o dvou neznámých

$$u_{1; 1} = \frac{2\Delta t^2}{2m + c\Delta t} \left( cv_{2; 0} - P(u_0 - u_{2; 0}) + \frac{2m}{\Delta t^2} u_0 - \frac{2m - c\Delta t}{2\Delta t^2} u_{1; -1} \right) \quad (30)$$

$$v_0 = \frac{u_{1;1} - u_{1;-1}}{2\Delta t} \quad (31)$$

Triviální úpravou se z nich získá jediná rovnice obsahující hledané  $u_{1;-1}$

$$u_{1;-1} + 2\Delta t v_0 = \frac{2\Delta t^2}{2m + c\Delta t} \left( cv_{2;0} - P(u_0 - u_{2;0}) + \frac{2m}{\Delta t^2} u_0 - \frac{2m - c\Delta t}{2\Delta t^2} u_{1;-1} \right) \quad (32)$$

ze které se již snadno vyjádří

$$u_{1;-1} = \frac{\Delta t^2}{2m} \left( cv_{2;0} - P(u_0 - u_{2;0}) + \frac{2m}{\Delta t^2} u_0 - \frac{2m + c\Delta t}{\Delta t} v_0 \right) \quad (33)$$

které je možné dosadit spolu s počátečním posunem do (28) a vypočítat  $u_{1;1}$ . Další možností by bylo z rovnic (30) a (31) vyjádřit rovnou

$$u_{1;1} = \frac{\Delta t^2}{2m} \left( cv_{2;0} - P(u_0 - u_{2;0}) + \frac{2m}{\Delta t^2} u_0 + \frac{2m - c\Delta t}{\Delta t} v_0 \right) \quad (34)$$

což je výrazně jednodušší a pro práci s uloženými daty i praktičtější.

### 3.3 Metoda střelby

Řešení rovnice (17) s okrajovými podmínkami (23) dává řešení obsahující jak ustálené, tak přechodové kmitání. Pro získání ustáleného kmitání lze buď sledovat řešení dostatečně dlouho, až přechodové kmitání vymizí, nebo použít metodu střelby.

Výhodou první metody je její jednoduchost. V okamžiku, kdy je možné soustavu rovnic alespoň numericky vyřešit, je tato metoda použitelná a vždy přinese nějaké výsledky. Nevýhodami je dlouhý a na paměť náročný výpočet a nejistota, zda se získává již ustálené kmitání (v případě nulového útlumu dokonce jistota opaku).

Výhodou metody střelby je správnost v případě získání výsledku a dokonce i informace o stabilitě vypočteného řešení. Další výhodou je mnohem rychlejší a na paměť výrazně méně náročný výpočet. Nevýhodou je, že za určitých okolností musí být startovní podmínky relativně blízko hledanému řešení, jinak metoda nekonverguje.

#### 3.3.1 Odvození metody střelby

Ustálené kmitání odpovídá takovému řešení, které splňuje podmínku periodicity

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t + nT) \quad (35)$$

kde  $T$  je perioda [s],

$n$  je libovolné přirozené číslo [-].

Tato podmínka nám říká, že rychlost a výchylka musí být v čase  $t$  a v čase posunutém o  $n$ -násobek periody stejné. Protože metodou střelby se hledají takové počáteční podmínky, které zaručují pouze ustálené kmitání, je pro metodu střelby rozhodující čas  $t = 0$  a  $t = T$ . Pro tento účel se nadefinuje funkce

$$\vec{g}(\vec{x}_0) = \vec{g} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(\vec{x}_0, T) \\ v_1(\vec{x}_0, T) \end{pmatrix} = \vec{x}(\vec{x}_0, T) \quad (36)$$

která vektoru počátečních podmínek  $\vec{x}_0$  přidělí vektor řešení v čase  $t = T$   $\vec{x}(T)$ . Dále je potřeba definovat funkci

$$\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{g}(\vec{x}_0) - \vec{x}_0 \quad (37)$$

která vyjadřuje, o kolik se řešení změní po uplynutí jedné periody. Ze vztahu (35) lze vyvodit, že když  $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ , dávají počáteční podmínky pouze ustálené periodické řešení. Tento vztah platí i obráceně, takže je-li vektor  $\vec{X}$  takový, že funkce  $\vec{f}(\vec{X}) = \vec{0}$ , pak složky vektoru  $\vec{X}$  jsou počáteční podmínky zajišťující periodické ustálené kmitání. Protože funkce  $\vec{g}(\vec{x}_0)$  může být spočtena pouze numericky, bude pro hledání periodických řešení vhodná Newtonova-Raphsonova metoda tečen. Její stručný postup je následující:

1. Zvolí se vhodný startovní vektor  $\vec{X}_{k=0}$ .
2. Pro tento vektor se vypočítá hodnota vektorové funkce  $\vec{g}(\vec{X}_k)$  a z ní pak funkce  $\vec{f}(\vec{X}_k)$  dle vzorečku (37).
3. Zkontroluje se splnění konvergenčních kritérií. Jsou-li splněna, zde výpočet končí.
4. Pokud kritéria splněna nejsou, sestaví se Jacobiho matice<sup>1</sup>  $\mathbf{J}_f(\vec{X}_k)$  a vztahem

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k - (\mathbf{J}_g(\vec{X}_k) - \mathbf{1})^{-1}(\vec{g}(\vec{X}_k) - \vec{X}_k) \quad (38)$$

se získá  $k+1$ . iterace.

5. Pokračuje se od bodu 2, dokud se nepodaří splnit konvergenční kritéria nebo dokud neproběhne určitý počet iterací.
6. Pokud konvergenční kritéria nebyla splněna ani za zvolený počet iterací, je lépe změnit startovací vektor  $\vec{X}_k$  a pak pokračovat od bodu 2.

Pro získání  $\vec{X}_{k+1}$  je potřeba Jacobiho matice  $\mathbf{J}_g(\vec{X}_k)$ . Co to je? Jacobiho matice sestává z parciálních derivací složek funkce  $\vec{g}(\vec{X}_i)$  podle jednotlivých proměnných. Vypadá takto:

$$\mathbf{J}_g(\vec{X}_k) = \begin{pmatrix} \frac{dg_1(\vec{X}_k)}{du_0} & \frac{dg_1(\vec{X}_k)}{dv_0} \\ \frac{dg_2(\vec{X}_k)}{du_0} & \frac{dg_2(\vec{X}_k)}{dv_0} \end{pmatrix} \quad (39)$$

Funkce  $\vec{g}(\vec{x}_0)$  přiřadí vektoru počátečních podmínek  $\vec{x}_0$  vektor řešení  $\vec{x}(t = T)$ . Je více možností, jak spočítat parciální derivace této funkce. Z důvodu vyloučení nárůstu zaokrouhlovacích chyb byla využita metoda linearizace. Touto metodou byl odvozen následující vzorec

$$\delta u_{1; i+1} = \frac{2\Delta t^2}{2m + c\Delta t} \left[ \left( \frac{2m}{\Delta t^2} - \frac{dP(u_{1; i} - u_{2; i})}{du_{1; i}} \right) \delta u_{1; i} - \frac{2m - c\Delta t}{2\Delta t^2} \delta u_{1; i-1} \right] \quad (40)$$

Jež ukazuje jak vypočítat následující krok. Pro využití počátečních podmínek se využije vztah

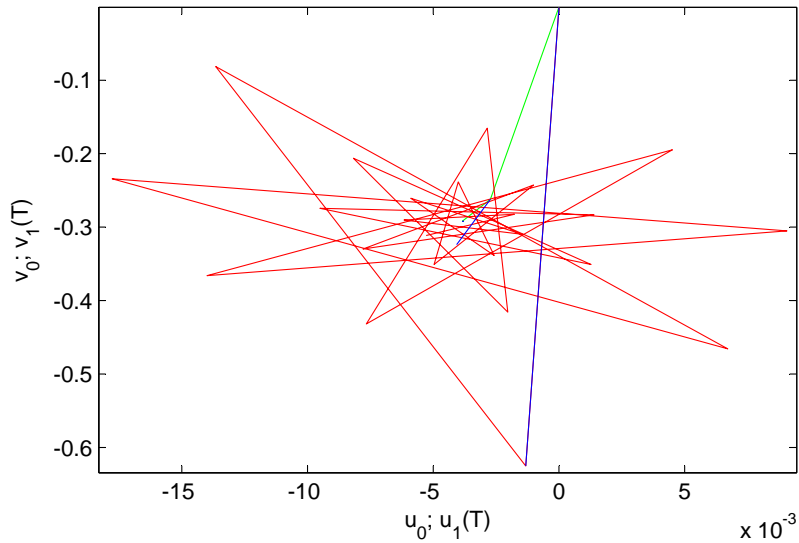
$$\delta u_{1; 1} = \frac{\Delta t^2}{2m} \left[ \left( \frac{2m}{\Delta t^2} - \frac{dP(u_{1; i} - u_{2; i})}{du_{1; i}} \right) \delta u_0 + \frac{2m - c\Delta t}{\Delta t} \delta v_0 \right] \quad (41)$$

Pro získání prvního sloupce  $\mathbf{J}_g(\vec{X}_k)$  se do předchozích vztahů dosadí jednotkový počáteční posun a nulová rychlost, pro druhý sloupec naopak nulový posun a jednotková rychlost. Do prvního řádku se dosadí posuny a do druhého rychlosti v čase  $t = T$ .

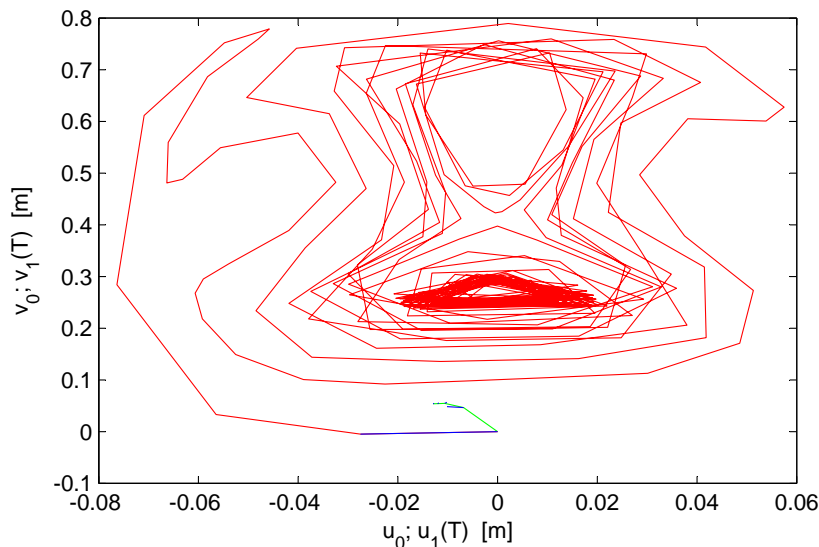
Účinnost metody střelby je dobře vidět na konkrétním příkladu. Pro demonstraci byly zvoleny tyto parametry: frekvence je volena  $U_{2f} = 5,0329$  Hz, amplituda kmitání podloží  $U_{2a} = 0,1$  m, hmotnost  $m = 10$  t, tuhost svislé pružiny  $K_2 = 1$  MN a útlum  $c = 1$  kNms<sup>-1</sup>. V grafu 5 jsou zelenou čarou ukázány jednotlivé iterace metody střelby, modře kam se z daného bodu dostane soustava za jednu periodu  $T$  a červeně je postupné ustalování vlivem útlumu. Je vidět, že metoda střelby konverguje velmi rychle - po třetí iteraci již rozdíl mezi  $u_0$  a  $u_1(t)$  není v grafu viditelný a po čtvrté jsou splněna přísná konvergenční kritéria.

V dalším případě je útlum  $c = 0,1$  kNms<sup>-1</sup>, frekvence  $U_{2f} = 0,5129$  Hz a ostatní parametry zůstávají stejné. Jak je vidět na obrázku 6, metoda střelby velmi rychle konverguje k blízkému nestabilnímu řešení, kdežto dlouhá simulace se po velmi dlouhé době ustaluje jinde. Bohužel, existují i případy, kdy metoda střelby nekonverguje.

<sup>1</sup>z výpočetních důvodů se však počítá souběžně s bodem 2



Obrázek 5: Metoda střelby - stabilní řešení: zeleně jednotlivé iterace metody střelby, modře kam se z dané iterace soustava posune za jednu periodu a červeně metoda dlouhé simulace



Obrázek 6: Metoda střelby - nestabilní řešení: zeleně jednotlivé iterace metody střelby, modře kam se z dané iterace soustava posune za jednu periodu a červeně metoda dlouhé simulace

### 3.4 Rozměrová analýza

Z deseti vstupních parametrů  $l_0, l_1, h, m, K_1, K_2, c, U_{2a}$  a  $U_{2\omega}$  a  $g$  se pomocí rovnic (1), (13) a (16) povedlo 3 svázat a zbylo jich 7 nezávislých. K těmto 7 nezávislým vstupům patří ještě dva výstupy výchylka  $u_1$  a rychlost  $v_1$  bodu jedna. Těchto 9 veličin obsahuje celkem 3 různé základní jednotky, jak shrnuje tabulka 3.4, ve které každá buňka udává, na kolikátou je umocněna základní jednotka v jednotce veličiny.

Např.: tuhost pružiny  $K_2$  má jednotku  $[\text{kg}^1\text{m}^0\text{s}^{-2}]$  a proto je ve sloupci pro  $K_2$  v řádku s kilogramem 1, v řádku s metrem 0 a v řádku se sekundou -2.

Využitím Buckinghamova teoremu [10] je možné těchto 9 proměnných vyjádřit pomocí 6 bezrozměrných  $\pi$ -funkcí následovně.

Vnitřek tabulky 3.4 tvoří dimenzionální matici  $\underline{M}$ . Pro případ s 9 parametry o 3 základních jed-

Tabulka 1: Exponenty základních jednotek

	$m$	$U_{2a}$	$K_2$	$c$	$g$	$U_{2\omega}$	$l_1$	$u_1$	$v_1$
kg	1	0	1	1	0	0	0	0	0
m	0	1	0	0	1	0	1	1	1
s	0	0	-2	-1	-2	-1	0	0	-1

notkách je to 6 lineárně nezávislých jádrových vektorů. Každý z nich pak má význam exponentů vstupních parametrů jedné  $\pi$ -funkce. Nejlepší fyzikální smysl dávají tyto vektory:  $\vec{v}_1 = [-0,5; 0; -0,5; 1; 0; 0; 0; 0; 0]$ ,  $\vec{v}_2 = [-1; 1; 1; 0; -1; 0; 0; 0; 0]$ ,  $\vec{v}_3 = [0,5; 0; -0,5; 0; 0; 1; 0; 0; 0]$ ,  $\vec{v}_4 = [1; 0; -1; 0; 1; 0; -1; 0; 0]$ ,  $\vec{v}_5 = [0; -1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0]$  a  $\vec{v}_6 = [0; -1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1]$ . Z nich jsou odvozené  $\pi$ -funkce, kde

$$\pi_1 = m^{-0,5} U_{2a}^0 K_2^{-0,5} c^1 g^0 U_{2\omega}^0 l_1^0 u_1^0 v_1^0 = \frac{c}{\sqrt{K_2 m}} = 2 \frac{c}{2\sqrt{K_2 m}} = 2 \frac{c}{c_{crit}}$$

má význam dvojnásobku podílu útlumu ke kritickému útlumu referenční soustavy,<sup>2</sup>

$$\pi_2 = m^{-1} U_{2a}^1 K_2^1 c^0 g^{-1} U_{2\omega}^0 l_1^0 u_1^0 v_1^0 = \frac{U_{2a} K_2}{mg} = \frac{U_{2a}}{h}$$

vyjadřuje poměr amplitudy výchylky k nezatížené výchylce  $h$ ,

$$\pi_3 = m^{0,5} U_{2a}^0 K_2^{-0,5} c^0 g^0 U_{2\omega}^1 l_1^0 u_1^0 v_1^0 = \sqrt{\frac{m}{K_2}} U_{2\omega} = \frac{U_{2\omega}}{\omega_0}$$

odpovídá poměru budící kruhové frekvence k první vlastní kruhové frekvenci referenční soustavy a v dalším textu se o ní budu zmiňovat jako o poměrné frekvenci,

$$\pi_4 = m^1 U_{2a}^0 K_2^{-1} c^0 g^1 U_{2\omega}^0 l_1^{-1} u_1^0 v_1^0 = \frac{mg}{l_1 K_2} = \frac{h}{l_1}$$

je poměr nezatížené výchylky  $h$  ku nejmenší délce vodorovných pružin v článku se zápornou tuhostí (a též polovině šířky článku),

$$\pi_5 = m^0 U_{2a}^{-1} K_2^0 c^0 g^0 U_{2\omega}^0 l_1^0 u_1^1 v_1^0 = \frac{u_1}{U_{2a}}$$

normuje výchylku bodu jedna k amplitudě výchylky podloží a

$$\pi_6 = m^{0,5} U_{2a}^{-1} K_2^{-0,5} c^0 g^0 U_{2\omega}^0 l_1^0 u_1^0 v_1^1 = \sqrt{\frac{m}{K_2}} \frac{v_1}{U_{2a}} = \frac{v_1}{U_{2a} \omega_0}$$

normuje rychlost výchylky bodu jedna k rychlosti podloží při rezonanční frekvenci referenční soustavy.

Z těchto šesti získaných  $\pi$ -funkcí první čtyři vyjadřují vstupní parametry a zbylé dva výstupy. Význam těchto výstupů se může lišit. Bude-li se jednat o normované počáteční podmínky ustáleného kmitání, budu normovanou počáteční výchylku značit  $\pi_{5;0}$  a normovanou počáteční rychlost  $\pi_{6;0}$ . Normovaná maxima a minima budou mít index „min“ a „max“. V případě rozkmitu výchylky tedy maximum mínus minimum bude značení  $\pi_{5;r}$

<sup>2</sup>Referenční soustavou zde myslím soustavu ve které chybí článek se zápornou tuhostí a jež se tedy skládá pouze z tlumiče, pružiny a soustředěné hmoty v bodě 1.

### 3.5 Stručný výsledný postup

Pro získání výsledků následující podkapitoly jsem využil následující postup. Nejdříve jsem musel získat informaci o počtu časových kroků  $N$  na jednu periodu  $T$ . K tomu jsem používal skript s názvem DIP\_PRESNOST.m. Tím jsem vypočítal  $N$  pro  $U_{pom}$  0,1; 0,3169; 1; 3,169 a 10 – tedy frekvenci v rozmezí desetiny až desetinásobku vlastní frekvence referenční soustavy.

V dalším postupu jsem použil skript DIP\_HLEDAC.m. Ten prošel, pro jednu poměrnou frekvenci, všechny kombinace počátečních posunů a rychlostí (např. 100 různých posunů a 100 různých rychlostí dalo 10 000 startovacích vektorů) a vypsál všechny nalezené počáteční podmínky periodického kmitání.

Jestliže jsem nabyt přesvědčení, že mám alespoň jeden bod z každé větve řešení, využil jsem DIP\_HLEDA3.m. Ten vycházel z již nalezeného periodického řešení a pomocí kvadratické extrapolace postupně hledal periodické řešení pro další poměrnou frekvenci a tvořil hlavní metodu získání větve řešení. Takto jsem prošel postupně všechny známé body a z nich získal větve řešení. Ty jsem uložil do matic  $\mathbf{Am}$ , kde  $m$  bylo číslo větve řešení.

Získané větve řešení jsem zpřesnil pomocí skriptu DIP\_PROCHAZEC.m, který ještě jednou prošel získaná data, zpřesnil výsledky pro splnění finálních konvergenčních kritérií:  $\vec{e}_1 = [10^{-9} \text{ m}; 10^{-9} \text{ ms}^{-1}]$  a  $\vec{e}_2 = [10^{-6}; 10^{-6}]$ . Dále skript vypočítal Jacobiho matici, obě její vlastní čísla a hodnoty výchylky a rychlosti v průběhu jedné periody.

Z takto uložených hodnot skript vypočítal minimální a maximální výchylku a maximální absolutní hodnotu rychlosti. Výstupem byla matice  $\mathbf{VVm}$ , kde  $m$  je stejné číslo jako u matic  $\mathbf{Am}$ . Každý sloupec obsahuje:  $U_{2pom}$ ,  $N$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\mathbf{J}_{g;III,1,1}$ ,  $\mathbf{J}_{g;III,1,2}$ ,  $\mathbf{J}_{g;III,2,1}$ ,  $\mathbf{J}_{g;III,2,2}$ , vyšší z absolutních hodnot vlastních čísel (matice  $\mathbf{J}_{g;III}$  je obecně nesymetrická, proto její vlastní čísla obsahují jak reálnou tak imaginární složku), nejnižší posun, nejvyšší posun, a nejvyšší absolutní hodnota rychlosti.

Po doběhnutí tohoto skriptu bylo třeba rozřídít, které větve řešení obsahují stabilní ustálené kmitání a které nestabilní. Detailně je postup i s vysvětlením popsán v [1]. O stabilitě rozhoduje nejvyšší absolutní hodnota vlastního čísla matice  $\mathbf{J}_g$ . Tuto nejvyšší absolutní hodnotu nazvěme modulem stability

$$m_s = \max(|\text{eig}(\mathbf{J}_g)|) \quad (42)$$

Pokud je  $m_s < 1$  jedná se o asymptotickou stabilitu linearizované soustavy a tedy lze prohlásit, že řešení je stabilní. Pokud  $m_s > 1$  je řešení nestabilní. V situaci, kdy  $m_s = 1$  což se často stává v netlumených soustavách nelze s jistotou určit stabilitu na základě linearizované soustavy.

Pomocí tohoto kritéria jsem rozřídil data z matic  $\mathbf{VVm}$  na stabilní a nestabilní větve. Data stabilních větví jsem uložil do  $\mathbf{Cks}^3$  a nestabilní větve do  $\mathbf{Cln}^4$ . Tyto matice pak uložím do souboru FINALE $x$ . $y$ . $z$ .mat, kde  $x$  reprezentuje  $U_{2a}$ ,  $y$   $c$  a  $z$   $l_0$ . Pak jsem změnil vstupní parametry  $U_{2a}$  nebo  $c$  a prošel celý tento postup znovu.

Po získání všech požadovaných FINALE $x$ . $y$ . $z$ .mat jsem použil skript DIP\_KRESLIC.m. Ten provedl normování a vykreslil grafy, ve kterých jsou stabilní řešení vykreslena plnou čarou, nestabilní tečkovaně a každá sada z jednoho FINALE $x$ . $y$ . $z$ .mat svojí barvou.

Pomocí skriptu DIP\_PODROBNYPROCHAZEC.m jsem vykreslil průběh normované výchylky  $\pi_5(t)$ , normované rychlosti  $\pi_6(t)$  po dobu jedné periody ( $\vec{x}(t \in (0; T))$ ) a polohu v rovině normovaného posunu a normované rychlosti vektorové funkce  $\begin{pmatrix} \pi_5(t) \\ \pi_6(t) \end{pmatrix}$ . Pro zadání stačilo vybrat jméno datového souboru FINALE $x$ . $y$ . $z$ .mat, jména matice  $\mathbf{Cks}$  nebo  $\mathbf{Cln}$  a čísla sloupce.

### 3.6 Výsledné grafy

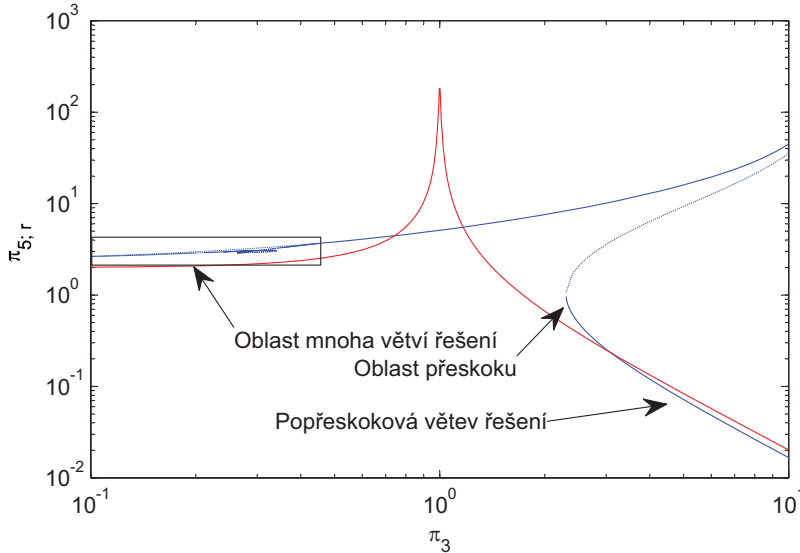
Mnohé grafy v této kapitole mají rozsah dat přes několik řádů. Proto, bude-li to možné a účelné, budou vykreslovány v logaritmickém a semilogaritmickém měřítku. Plnou čarou jsou značeny stabilní větve řešení a tečkovaně nestabilní.

<sup>3</sup>k je pořadové číslo, s značí že větev je stabilní

<sup>4</sup>l je pořadové číslo, n značí že větev obsahuje nestabilní řešení

### 3.6.1 Vliv normované amplitudy budící výchylky $\pi_2$

Prvním grafem této podkapitoly bude graf 7. V něm je vykreslen normovaný rozkmit  $\pi_{5,r}$  v závislosti na poměrné frekvenci  $\pi_3$  pro normovanou amplitudu budící výchylky  $\pi_2 = 1,0194$ , normovaný útlum  $\pi_1 = 1\%$  (což odpovídá 2% poměrnému útlumu) a geometrie předpětí, popsaná parametrem  $\pi_4$ , bude mít hodnotu 0,0986.



Obrázek 7: Graf normovaného rozkmitu v závislosti na poměrné frekvenci. Plnou čarou je kresleno řešení se stabilním periodickým kmitáním, tečkovaně s nestabilním. Červenou barvou je vykreslena referenční soustava a modrou systém s  $\pi_2 = 1,0194$

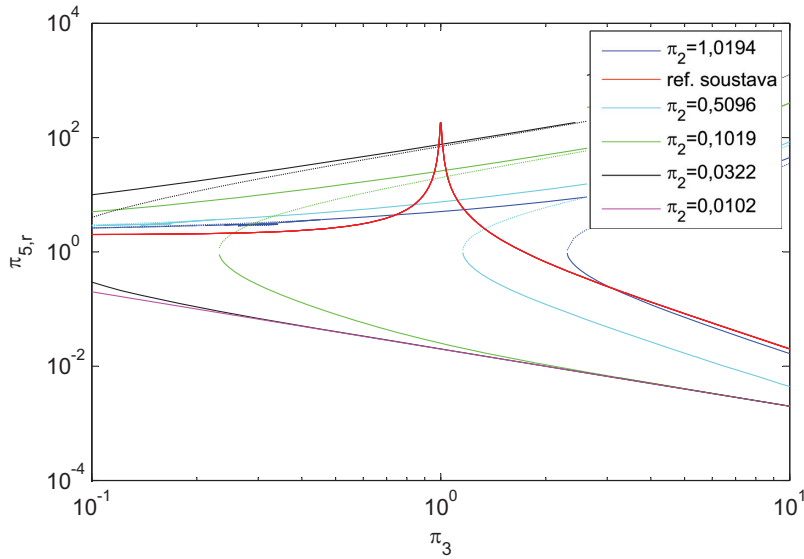
V tomto grafu je hlavní větev řešení, oblast s mnoha řešeními a dvě popřeskokové větve řešení (stabilní a nestabilní). Při simulaci samovolného ustálení metodou dlouhé simulace se ukázalo, že řešení pro frekvence vyšší než popřeskokové se ustaluje u stabilní popřeskokové, energeticky méně náročné větve řešení. Pro praktické účely je právě popřeskoková frekvenční oblast zajímavá svým minimálním přenosem vibrací.

V grafu 8 jsou pro stejné parametry vykreslená řešení pro různé  $\pi_2$ . Z grafu je vidět, že pro klesající  $\pi_2$  se celé řešení posouvá směrem k nižším frekvencím a současně se jeho větve rozevírají co do přenesené výchylky tak, že popřeskoková větev má menší a menší normovanou výchylku a naopak hlavní větev včetně oblasti s mnoha větvemi řešení mají normovanou výchylku větší. S tím, jak  $\pi_2$  klesá, se i oblast s mnoha větvemi řešení posouvá k nižším frekvencím a pro  $\pi_2 = 0,1019$  (zelená čára) už je mimo zobrazovaný interval  $\pi_3$ .

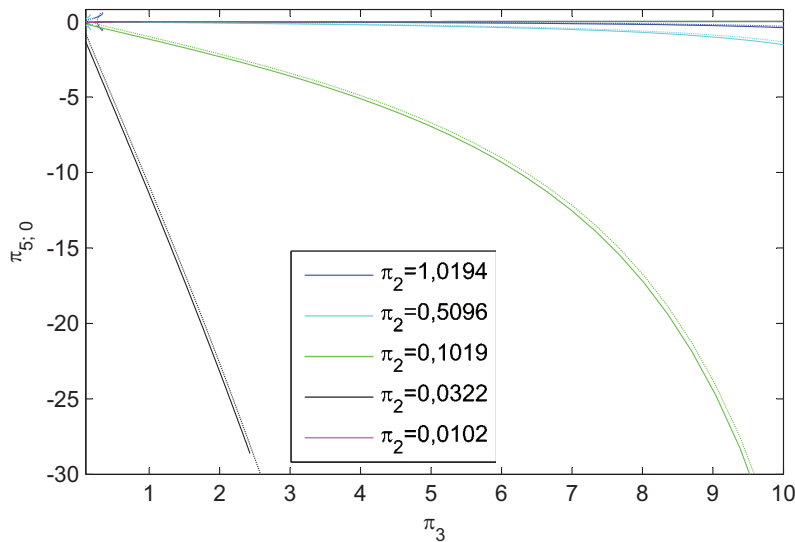
Zajímavým poznatkem je, že jak klesá normovaná budící amplituda  $\pi_2$ , popřeskokové větve řešení se přimykají k jediné křivce - po velké části grafu splývá řešení s parametrem  $\pi_2 = 0,0322$  (černé) s řešením s parametrem  $\pi_2 = 0,0102$  (fialové). Toto chování lze vysvětlit právě téměř nulovou tuhostí pro malý rozdíl deformací. Lze předpokládat, že křivka, ke které se řešení přimykají, bude reprezentovat dynamický systém, kde hmotný bod je spojen s budícím bodem pouze tlumičem.

V grafu 9 jsou vykresleny normované počáteční výchylky  $\pi_{5,0}$  pro různé hodnoty  $\pi_2$ . Je na nich vidět značný nárůst záporné počáteční výchylky, jak u hlavní, tak i popřeskokové nestabilní větve. V blízkém okolí nuly vlivem měřítka splývají stabilní popřeskokové větve. V levém horním rohu grafu je vidět oblast mnoha větví řešení. Její detailní zobrazení je v grafu 11. Na něm jsou zachyceny stabilní a nestabilní větve oblasti mnoha větví řešení jen pro větve s parametry  $\pi_2 = 1,0194$  a  $\pi_2 = 0,5096$ , pro ostatní, nižší  $\pi_2$  jsou mimo oblast grafu. Dále je zde vidět popřeskoková oblast pro  $\pi_2 = 0,1019$ . Počáteční normovaná výchylka  $\pi_{5,0}$  stabilní větve postupně stoupá směrem k nule avšak  $\pi_{5,0}$  nestabilní větve naopak stále rychleji klesá.





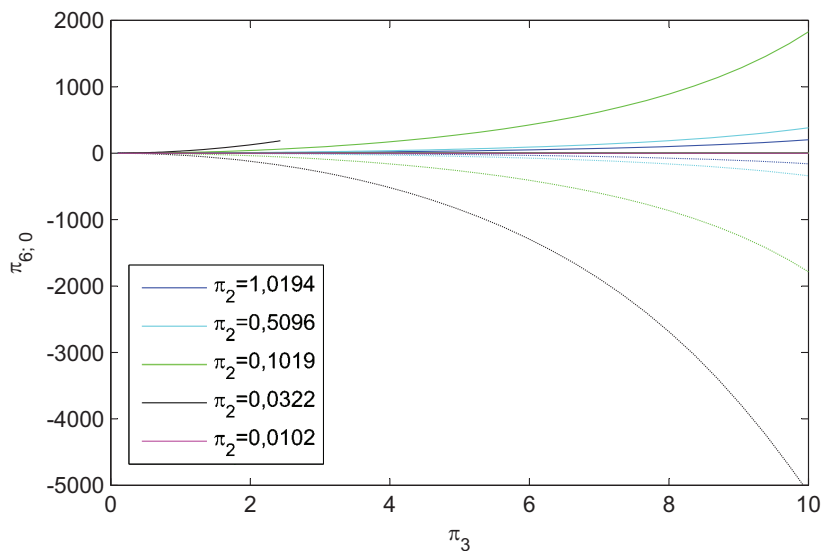
Obrázek 8: Graf normovaného rozkmitu v závislosti na poměrné frekvenci. Plnou čarou je kresleno řešení se stabilním periodickým kmitáním, tečkovaně s nestabilním.



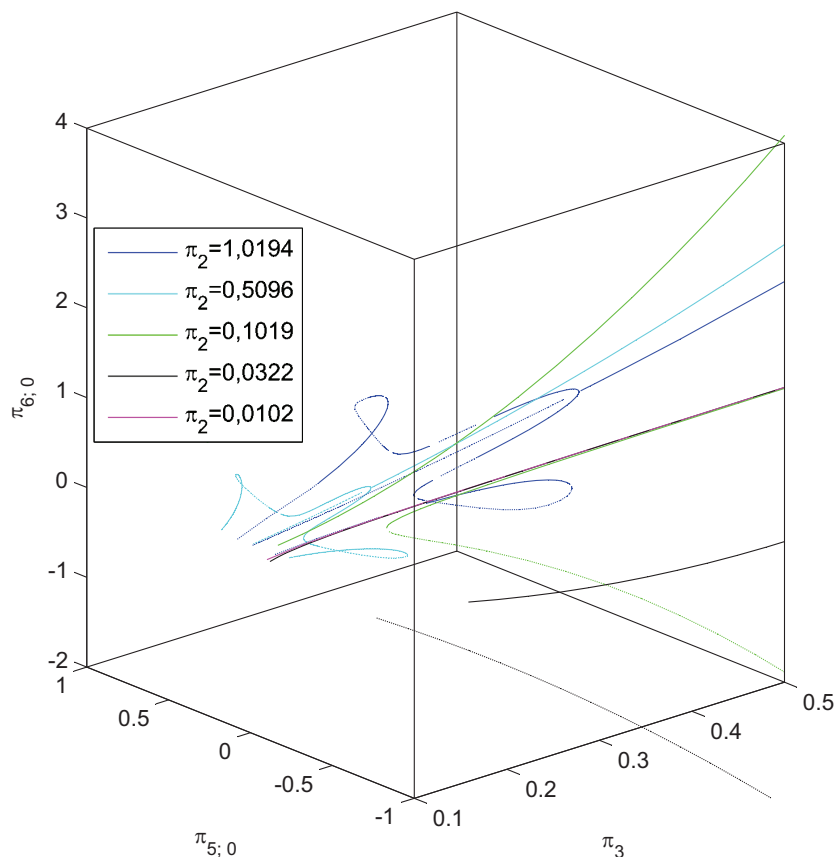
Obrázek 9: Graf normované počáteční výchylky v závislosti na poměrné frekvenci

V grafu 10 jsou normované počáteční rychlosti  $\pi_{6;0}$ . Hlavním větším s rostoucí poměrnou frekvencí narůstá kladná počáteční rychlost, nestabilním popřeskokovým naopak záporná. Počáteční rychlost stabilních popřeskokových větví je velmi blízká nule, takže v tomto měřítku s ní prakticky splývá. Přestože hlavní větev zůstává stabilní i po přeskokové oblasti, je nepravděpodobné, že by zařízení kmitalo v ní. Důvody jsou dva: první je, že počáteční rychlost velmi rychle roste s frekvencí a s ní i energie nutná pro toto kmitání, druhým důvodem jsou velké dosažené výchylky - nejen přesahující lineární oblast pružin, ale i jejich uvažovanou velikost.

V grafu 12 ukazuje průběh normované výchylky po dobu jedné periody pro tři větve řešení - hlavní a obě popřeskokové. Všechny větve patří systému s parametry  $\pi_1 = 0,01$ ,  $\pi_2 = 1,0194$  a  $\pi_4 = 0,981$ . Poměrná frekvence  $\pi_3 = 0,231$ . V grafu 13 je vykreslena trajektorie jedné periody v rovině normovaný posun - normovaná rychlost.



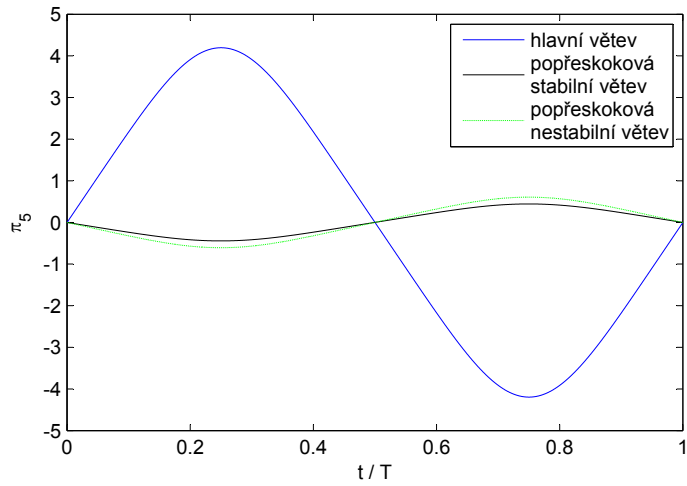
Obrázek 10: Graf normované počáteční rychlosti v závislosti na poměrné frekvenci



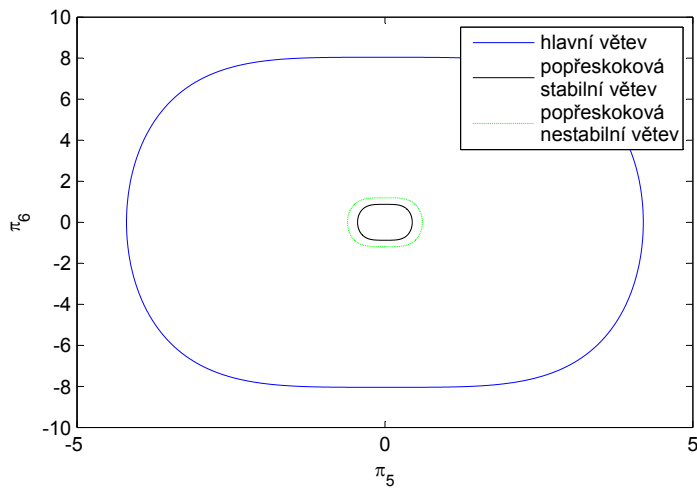
Obrázek 11: Graf normovaných počátečních podmínek v závislosti na poměrné frekvenci - detail oblasti mnoha větví řešení

### 3.6.2 Vliv normovaného útlumu $\pi_1$

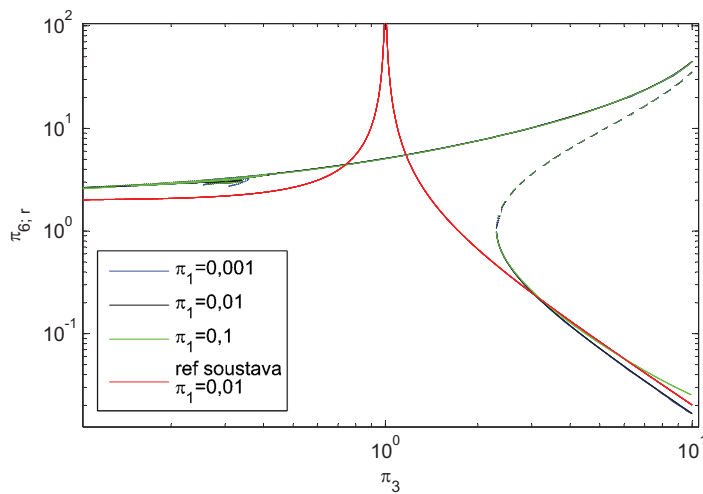
V grafu 14 je normovaný rozkmit v závislosti na poměrné frekvenci při relativně vysoké amplitudě výchylky  $\pi_2 = 1,0194$ . Barvy reprezentují tři hodnoty normovaného útlumu  $\pi_1 = 0,001, 0,01$  a  $0,1$ . Ve velké části se společně kryjí, s výjimkou dvou oblastí mnoha větví řešení a stabilní



Obrázek 12: Průběh normovaného posunu za dobu jedné periody,  $\pi_1 = 0,01$ ,  $\pi_2 = 1,0194$ ,  $\pi_3 = 0,231$  a  $\pi_4 = 0,981$



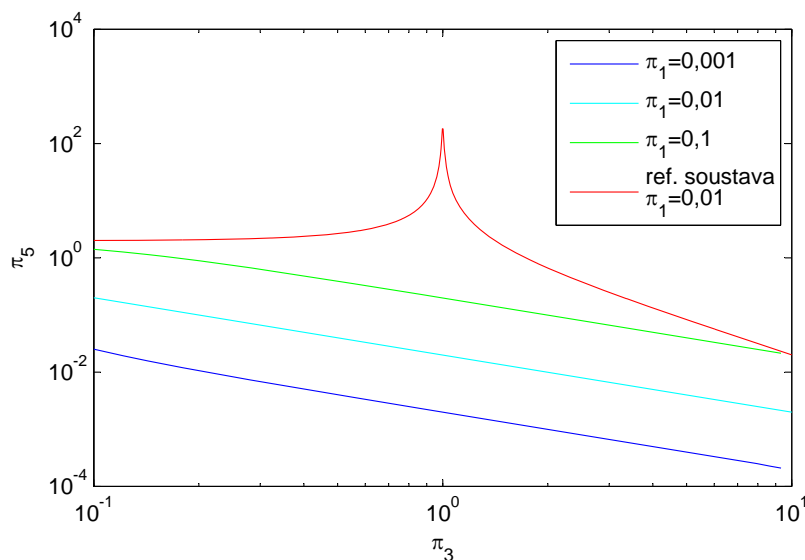
Obrázek 13: Trajektorie jedné periody v rovině normovaný posun - normovaná rychlost,  $\pi_1 = 0,01$ ,  $\pi_2 = 1,0194$ ,  $\pi_3 = 0,231$  a  $\pi_4 = 0,981$



Obrázek 14: Graf normovaného rozkmitu v závislosti na poměrné frekvenci,  $\pi_2 = 1,0194$

popřeskokové větve, ve které soustavě s nejvyšším útlumem rozkmit s narůstající frekvencí klesá nejpomaleji. Důvodem je, že zvolené  $\pi_2 = 1,0194$  je natolik velké, že článek se zápornou tuhostí se dostává i do oblasti s kladnou tuhostí, což vede k velké síle přenášené pružinami. A přestože se síly přenášené tlumičem liší mezi systémy o řád, jsou stále řádově menší než síly přenášené pružinami. Nejméně tlumený systém a středně tlumený se svými útlumy sice liší desetkrát, avšak samotný rozdíl je velmi malý. Proto v popřeskokové stabilní větvi křivky odpovídající dvěma nejméně tlumeným systémům splývají a nejvíce tlumený systém se od nich odděluje.

Pro praktické účely je důležitější vědět, jaký vliv bude mít útlum na malé normované amplitudy výchylek. V grafu 15 jsou vyneseny normované rozkmity stejných tří soustav. Na rozdíl od předchozích grafů je však snížena normovaná budící amplituda na  $\pi_2 = 0,0102$ . Pro takto malé buzení je článek se zápornou tuhostí po celou dobu v lineární oblasti (celková tuhost systému je pak téměř nulová) a síly se přenášejí přes tlumič.



Obrázek 15: Graf normovaného rozkmitu  $k$  v závislosti na poměrné frekvenci,  $\pi_2 = 0,0102$

## 4 Závěr

Paralelní zapojení článku se zápornou tuhostí, pružiny a tlumiče se ukázalo jako potenciálně zajímavý izolátor vibrací. Pro správnou kombinaci parametrů pružin a geometrie umožňoval přenést hmotnost nákladu a přitom ho izolovat od harmonicky kmitajícího podloží s nepříliš velkou amplitudou pro široký frekvenční rozsah. Principem je anulace tuhosti hlavní pružiny článkem se zápornou tuhostí po přenesení hmotnosti nákladu a tím zamezení dodatečnému přenosu sil. V důsledku tohoto principu si však toto zapojení s sebou nese jedno důležité omezení - změna hmotnosti nebo stálého silového zatížení vyžaduje změnu geometrie. V praxi je to do určité míry možné pomocí aretačních šroubů. Časově proměnná působící síla (chodící lidé, vítr, rotující nevyvážená hmota apod.) nebo časově proměnné tíhové zrychlení (použití v jedoucím automobilu, ve výtahu či letadle) vyvolá velmi velké posuny.

Kromě praktického popřeskokového kmitání bylo objeveno ještě další značné množství periodických řešení, z nichž mnohé jsou nestabilní, kmitají v amplitudách mimo lineární oblast reálných pružin, případně obojí.

## Reference

- [1] M. Jirásek, *Simulace jednoduchého nelineárního systému*, ČVUT v Praze, 29-41 (1988)
- [2] D. L. Platus, *Smoothing out bad vibes*, Machine Design, 124-130 (February 1993)
- [3] Z. Bittnar, P. Řeřicha, *Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí*, SNTL - Nakladatelství technické literatury, n. p., 117-118 (1981)
- [4] R. S. Lakes *Extreme Damping in Composite Materials with a Negative Stiffness Phase*, PHYSICAL REVIEW LETTERS, 2897-2900 (March 2001)
- [5] E. Salje, *Phase Transition in Ferroelastic and Co-elastic Crystals*, Cambridge University Press (1990)
- [6] J. K. Knowles a E. Sternberg, *Journal of Elasticity* 8, 329-379 (1978)
- [7] R. S. Lakes, T. Lee, A. Bersie a Y. C. Wang, *Extreme Damping in Composite Materials with a Negative Stiffness Phase*, Nature, 565-567 (March 2001)
- [8] R. S. Lakes a W. J. Drugan, *Dramatically stiffer elastic composite materials due to a negative stiffness phase?*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 50, 979-1009 (2002)
- [9] M. Holodniok, A. Klíč, M. Kubíček, M. Marek, *Metody analýzy nelineárních dynamických modelů*, Academia, Praha (1986)
- [10] J. C. Gibbings, *Dimensional Analysis*, Springer, ISBN 1849963169 (2011)