

# Geometricky nelineární analýza příhradových konstrukcí

Jan Vobecký, SI-I-22

Konzultant: Doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D.



# Osnova

- 1) Motivace
- 2) Základní předpoklady
- 3) Metody výpočtu
  - 1) Výpočet deformační metodou
  - 2) Analytický výpočet na deformované konstrukci
  - 3) Newtonova metoda
- 4) Výpočet na staticky určitých a neurčitých konstrukcích
- 5) Závislost posunů na zatížení



# Předpoklady pro výpočet příhradových konstrukcí

- Konstrukce složená jen z prutů kloubově spojených
- Zatížení působí pouze ve styčnicích(kloubech)
- Pruty namáhány pouze normálovými silami, posouvající síly a momenty nevznikají
- Lineární chování materiálu
  
- Konstrukce staticky:
  - určité
  - neurčité

# Metody řešení příhradových konstrukcí

- Staticky neurčité
  - deformační metodou
  - nelineární analýzou
- Staticky určité
  - styčnickovou rovnováhou
  - průsečnou metodou
  - deformační metodou
  - nelineární analýzou

# Deformační metoda

- Zaveden předpoklad rovnováhy sil na prutech a styčnicích
- Lineárním výpočtem získáme přemístění styčníků  $u_i$  a  $w_i$  ve směrech souřadných os  $x$  a  $z$ , z nich se poté dopočítávají vnitřní síly v závislosti na Hookově zákoně

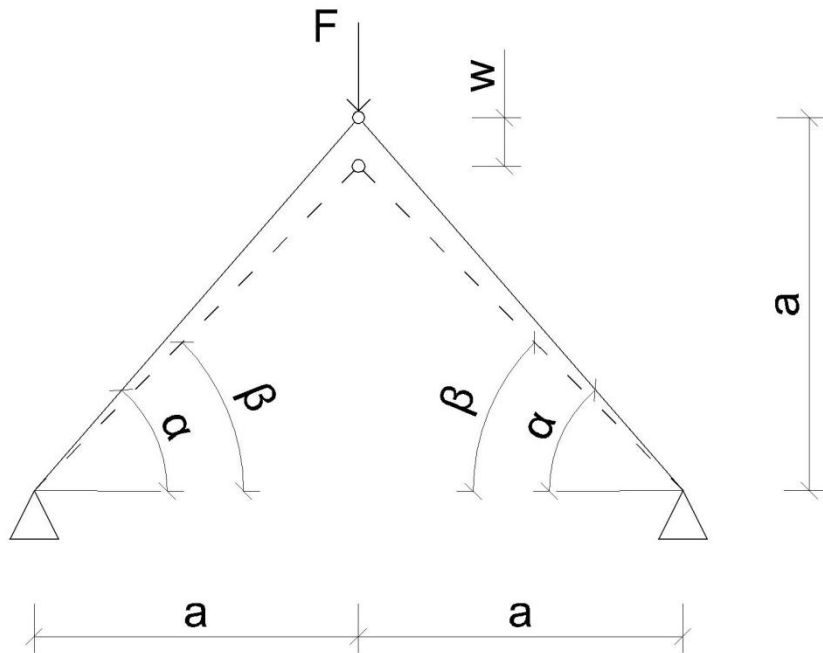
$$N = EA\varepsilon$$

- Posuny jsou vzhledem k celkové geometrii zanedbatelné, a tudíž již dále nezkoumáme rovnováhu na zdeformované konstrukci

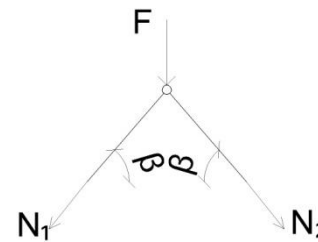
# Nelineární analýza

- Zavedeny stejné předpoklady, jako při *deformační metodě*
- Deformace již nejsou zanedbatelné
- Další krok – výpočet rovnováhy na deformované konstrukci
- Na deformované konstrukci se k zatížení styčnicků ještě přidávají působící normálové síly od deformace

# Analytické odvození posunutí



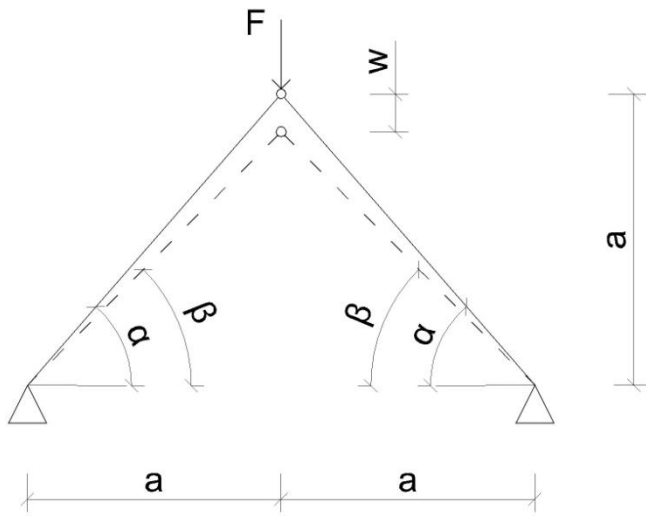
➤ Rovnováha na styčnicku



$$N_1 \sin \beta + N_2 \sin \beta + F = 0$$

Značení:  $L_i$  - původní délka  
 $l_i$  - délka po deformaci





$$N_i = EA \frac{l_i - L_i}{L_i}$$

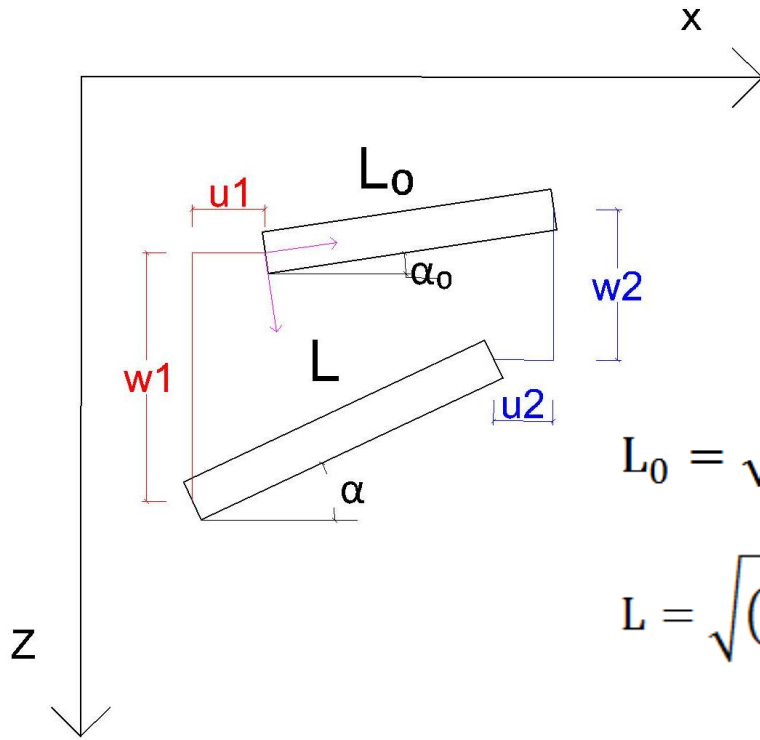
$$l_i = \sqrt{(L_i \cos \beta)^2 + (L_i \sin \beta - w)^2}$$

$$= \sqrt{L_i^2 + w^2 - 2L_i w \sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{L_i \sin \beta - w}{l_i} = \frac{L_i \sin \beta - w}{\sqrt{L_i^2 + w^2 - 2L_i w \sin \beta}}$$

$$2EA \left( \frac{\sqrt{L_1^2 + w^2 - 2L_1 w \sin \beta} - L_1}{L_1} \right) \left( \frac{L_1 \sin \beta - w}{\sqrt{L_1^2 + w^2 - 2L_1 w \sin \beta}} \right) = -F$$

# Odvození vztahů pro maticový výpočet



$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

$$L = \sqrt{((X_2 + u_2) - (X_1 + u_1))^2 + ((Z_2 + w_2) - (Z_1 + w_1))^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{(X_2 + u_2) - (X_1 + u_1)}{L}$$

$$\sin \alpha = \frac{(Z_2 + w_2) - (Z_1 + w_1)}{L}$$

- Vnitřní energie

$$U = \frac{1}{2} k \Delta L^2 = \frac{1}{2} \frac{EA}{L_0} \Delta L^2$$

- Vektor posunutí konců prutu

$$d = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

- Vektor vnitřních sil

$$f_g = \frac{\partial U}{\partial d} = k \Delta L \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta L}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Delta L}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \Delta L}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \Delta L}{\partial w_2} \end{bmatrix}$$

- Pro nalezení parciálních derivací použijeme vztah:

$$\frac{\partial \Delta L}{\partial u_1} = \frac{\partial (L - L_0)}{\partial u_1} = \frac{\partial L}{\partial u_1}$$

- Ze kterého vyplývá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_1} &= \frac{\sqrt{((X_2 + u_2) - (X_1 + u_1))^2 + ((Z_2 + w_2) - (Z_1 + w_1))^2}}{\partial u_1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{-2((X_2 + u_2) - (X_1 + u_1))}{\sqrt{((X_2 + u_2) - (X_1 + u_1))^2 + ((Z_2 + w_2) - (Z_1 + w_1))^2}} \\ &= \frac{-\Delta x}{\Delta L} = -\cos \alpha \end{aligned}$$

- Další parciální derivace dopočítané analogicky

$$f_g = k\Delta L \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \frac{EA\Delta L}{L_0} \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

# Výsledné matice tuhosti

Nalezena jako druhá derivace vnitřní energie  
vzhledem ke globálním uzlovým posunům

$$\frac{\partial^2 U}{\partial d^2} = \frac{\partial f}{\partial d} = \frac{\partial}{\partial d} \left( kd \frac{\partial \Delta L}{\partial d} \right) = k \frac{\partial \Delta L}{\partial d} \left( \frac{\partial \Delta L}{\partial d} \right)^T + kd \frac{\partial^2 \Delta L}{\partial d^2} = K_m + K_g$$

Materiálová matice tuhosti

$$K_m = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} [-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha] = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

Lineární část matice tuhosti – vyskytuje se i  
při výpočtu *deformační metodou*

Geometrická matice tuhosti:

$$\frac{\partial^2 \Delta L}{\partial d^2} = \frac{\partial^2 (L - L_0)}{\partial d^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial d^2}$$

Parciální derivace délky prutu v závislosti na přemístěních

$$\begin{array}{c} \frac{\partial \Delta L}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Delta L}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \Delta L}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \Delta L}{\partial w_2} \end{array} \begin{array}{c} \frac{\partial \Delta L}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Delta L}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \Delta L}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \Delta L}{\partial w_2} \end{array} \begin{bmatrix} \frac{s^2}{L} & \frac{-cs}{L} & \frac{-s^2}{L} & \frac{cs}{L} \\ -\frac{cs}{L} & \frac{c^2}{L} & \frac{cs}{L} & \frac{-c^2}{L} \\ \frac{-s^2}{L} & \frac{cs}{L} & \frac{s^2}{L} & \frac{-cs}{L} \\ \frac{cs}{L} & \frac{-c^2}{L} & \frac{-cs}{L} & \frac{c^2}{L} \end{bmatrix}$$

- Výsledná geometrická matice tuhosti

$$K_G = kd \frac{\partial^2 \Delta L}{\partial d^2} = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} s^2 & -cs & -s^2 & cs \\ -cs & c^2 & cs & -c^2 \\ -s^2 & cs & s^2 & -cs \\ cs & -c^2 & -cs & c^2 \end{bmatrix}$$

- Celková matice tuhosti

$$K = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \begin{bmatrix} s^2 & -cs & -s^2 & cs \\ -cs & c^2 & cs & -c^2 \\ -s^2 & cs & s^2 & -cs \\ cs & -c^2 & -cs & c^2 \end{bmatrix}$$

# Algoritmus výpočtu

Výpočty prováděny v softwaru MATLAB

1. Očíslování styčnicků
2. Zavedeny souřadnice styčnicků  $X = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_i]$   
 $Z = [Z_1 \quad Z_2 \quad \dots \quad Z_i]$
3. Definování vazeb mezi styčnickými (pruty) a vnějších podpor
4. Zavedeno styčnickové zatížení ve směrech souřadných os
5. Konstrukce rozdělena myšlenými řezy na pruty a styčnický
6. Pro každý prut sestavena silová podmínka rovnováhy

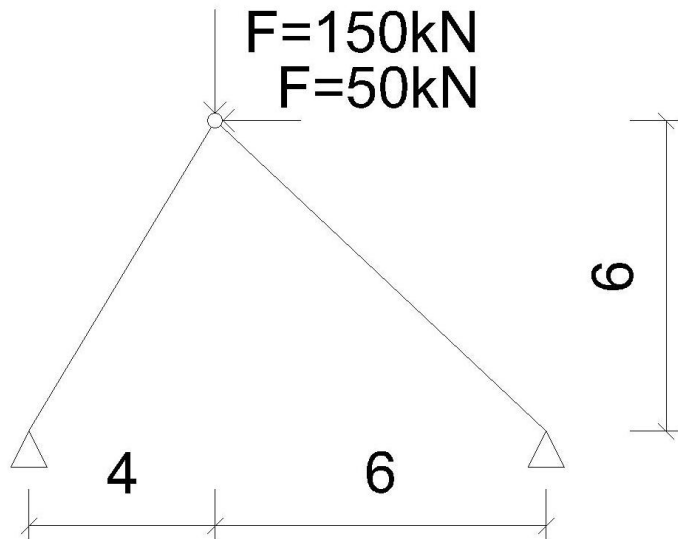
$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ Z_{ij} \\ N_{ji} \\ Z_{ji} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

7. Pomocí kódových čísel označeny neznámé a sestavena podmínka rovnováhy pro každý styčnický, zohledněno uzlové zatížení



8. Vypočteny globální styčnickové posuny ve směrech souřadných os
9. Transformací globálních posunů na lokální spočteny vnitřní normálové síly 
$$N = -\frac{EA}{L} (u_j c + w_j s - u_i c - w_i s)$$
10. Přepočítaná geometrie konstrukce, tj. souřadnice „pohyblivých“ styčnicků upraveny o globální posuny – dopočteny nové hodnoty  $c, s, L$
11. Nový výpočet s upravenou geometrií, navíc vstupuje materiálová matice tuhosti – dosazení normálové síly z předchozího kroku
12. Opakování výpočtu, za použití hodnot z předchozího kroku, dokud se hodnoty, s určitou tolerancí, nemění
13. Dosažen konečný výsledek, jsou jím hodnoty přemístění a jimi způsobené normálové síly v prutech

# Příklad 1 – staticky určitá konstrukce



$$EA=10MN$$

Přesný výsledek

$$u^{(f)} = -45,563\text{mm}$$

$$w^{(f)} = 96,773\text{mm}$$

$$N_1^{(f)} = -145,110\text{kN}$$

$$N_2^{(f)} = -42,964\text{kN}$$

Deformační metoda

$$u^{(1)} = -44,448\text{mm}$$

$$w^{(1)} = 95,36\text{mm}$$

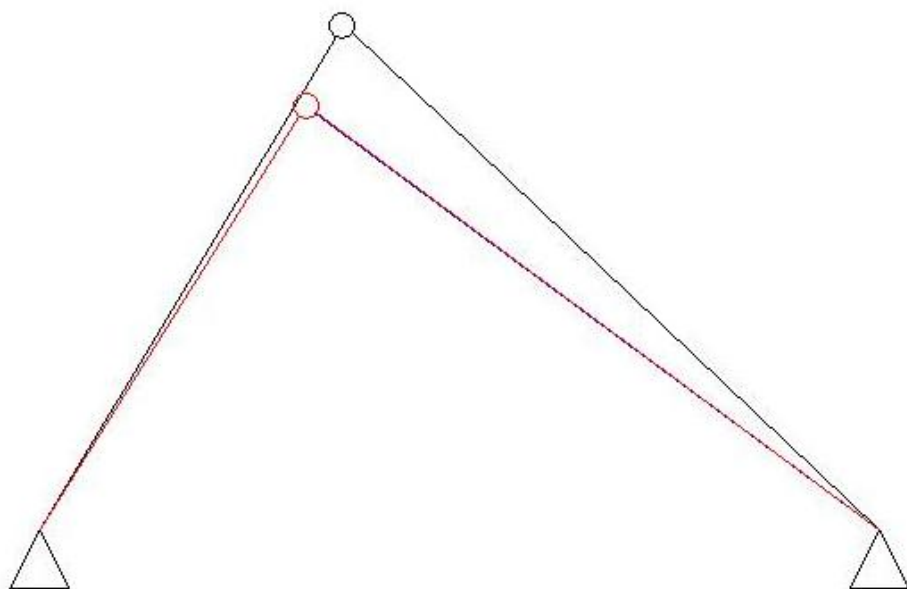
$$N_1^{(1)} = -144,170\text{kN}$$

$$N_2^{(1)} = -41,060\text{kN}$$

Počet potřebných iteračních kroků: 4

Rozdíl mezi výpočtem *deformační metodou* a přesným výpočtem

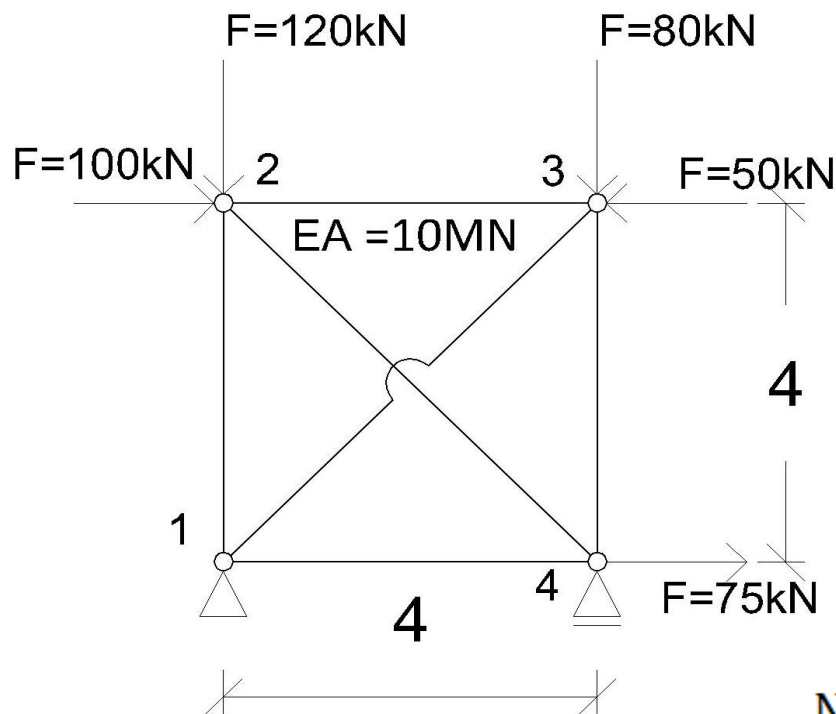
- V případě  $N_1$  přibližně 0,6%
- V případě  $N_2$  4,43%



- Původní konstrukce
- Výsledek deformační metody
- Přesný výpočet

Pozn. Přemístění jsou 10x zvětšená

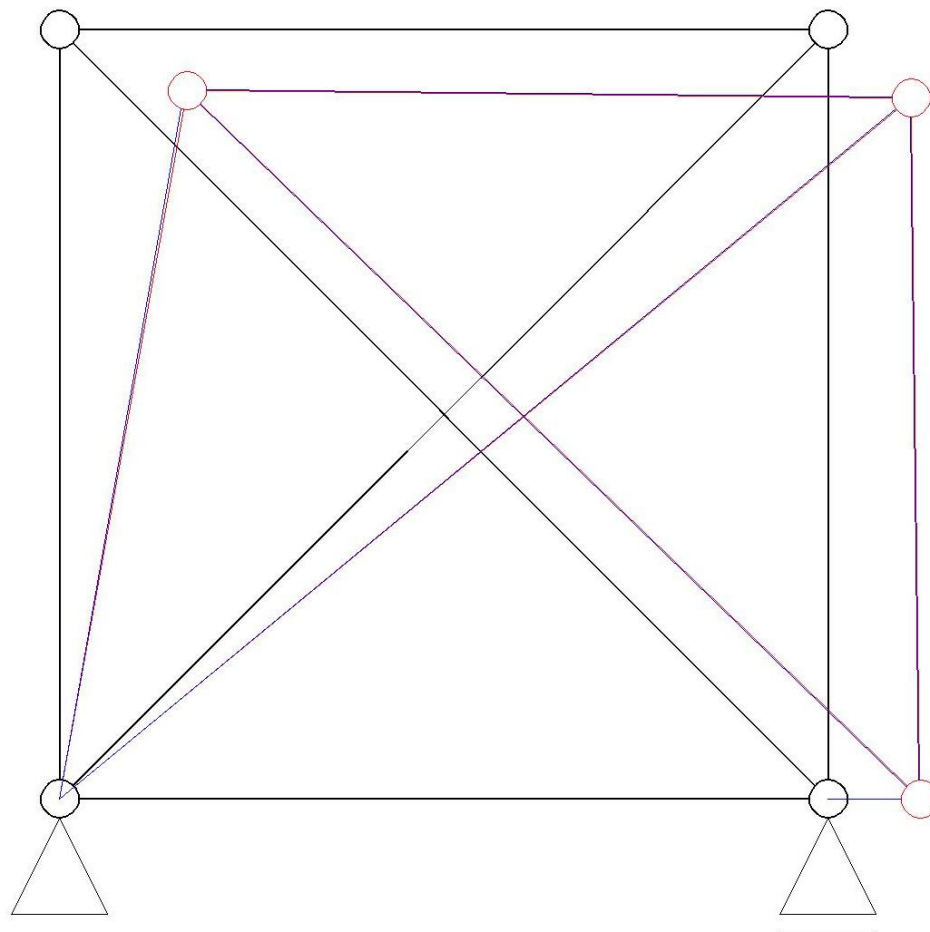
# Příklad 2 – staticky neurčitá konstrukce



$$\begin{aligned}
 u_2^{(1)} &= 65,284\text{mm} & u_2^{(f)} &= 66,487\text{mm} \\
 w_2^{(1)} &= 30,751\text{mm} & w_2^{(f)} &= 31,385\text{mm} \\
 u_3^{(1)} &= 42,533\text{mm} & u_3^{(f)} &= 43,21\text{mm} \\
 w_3^{(1)} &= 34,751\text{mm} & w_3^{(f)} &= 35,119\text{mm} \\
 u_4^{(1)} &= 47,249\text{mm} & u_4^{(f)} &= 47,826\text{mm}
 \end{aligned}$$

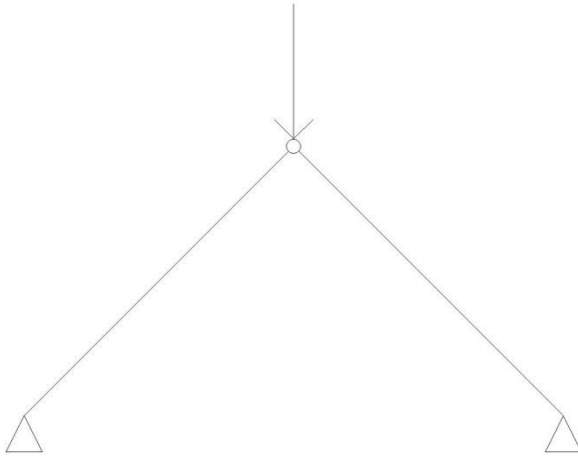
$$\begin{aligned}
 N_{12}^{(1)} &= -74,184\text{kN} \\
 N_{23}^{(1)} &= -56,868\text{kN} \\
 N_{34}^{(1)} &= -86,864\text{kN} \\
 N_{14}^{(1)} &= 118,12\text{N} \\
 N_{24}^{(1)} &= -60,958\text{kN} \\
 N_{13}^{(1)} &= 10,659\text{kN}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{12}^{(f)} &= -75,668\text{kN} \\
 N_{23}^{(f)} &= -58,185\text{kN} \\
 N_{34}^{(f)} &= -87,784\text{kN} \\
 N_{14}^{(f)} &= 119,56\text{N} \\
 N_{24}^{(f)} &= -62,533\text{kN} \\
 N_{13}^{(f)} &= 11,071\text{kN}
 \end{aligned}$$

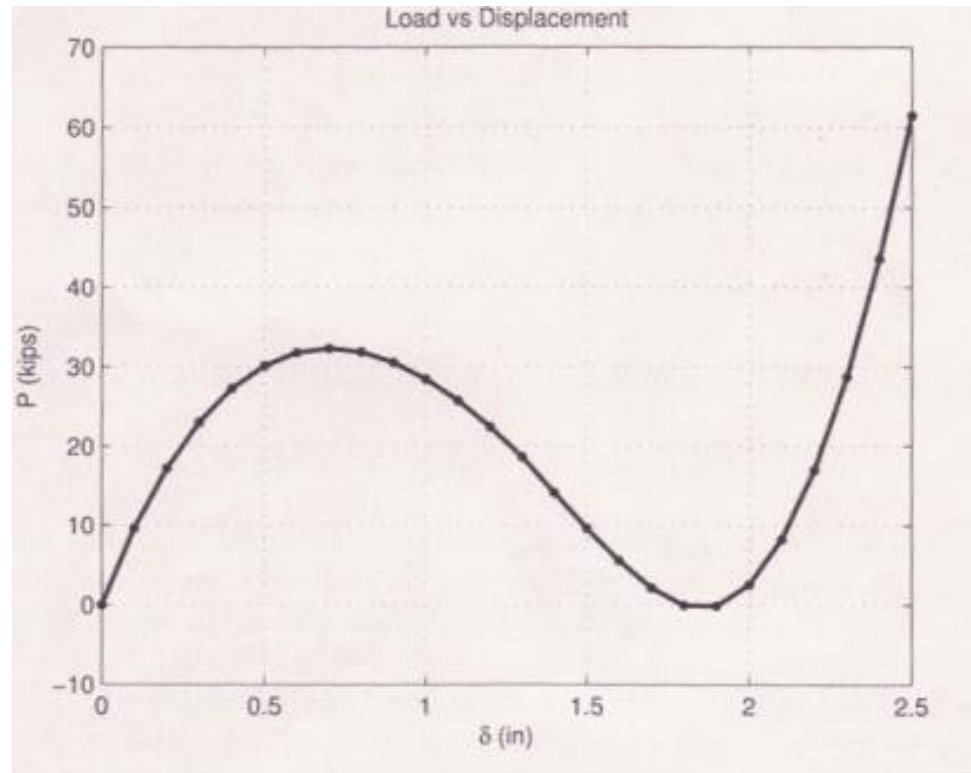


Odchytky ve výpočtu deformační metodou a přesným výpočtem jsou v rozmezí 1%-3,9%

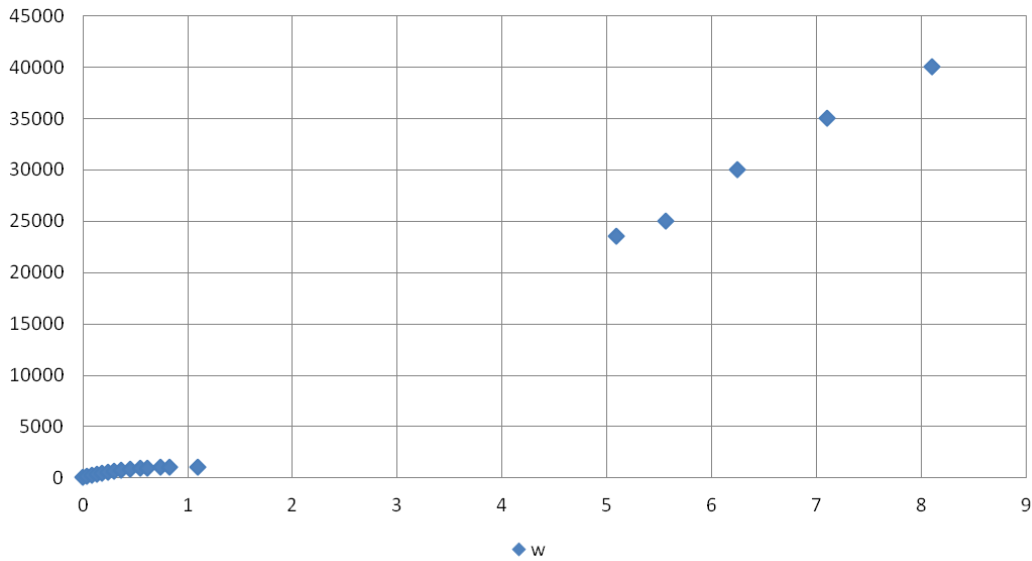
# Závislost mezi svislým posunem a působící silou



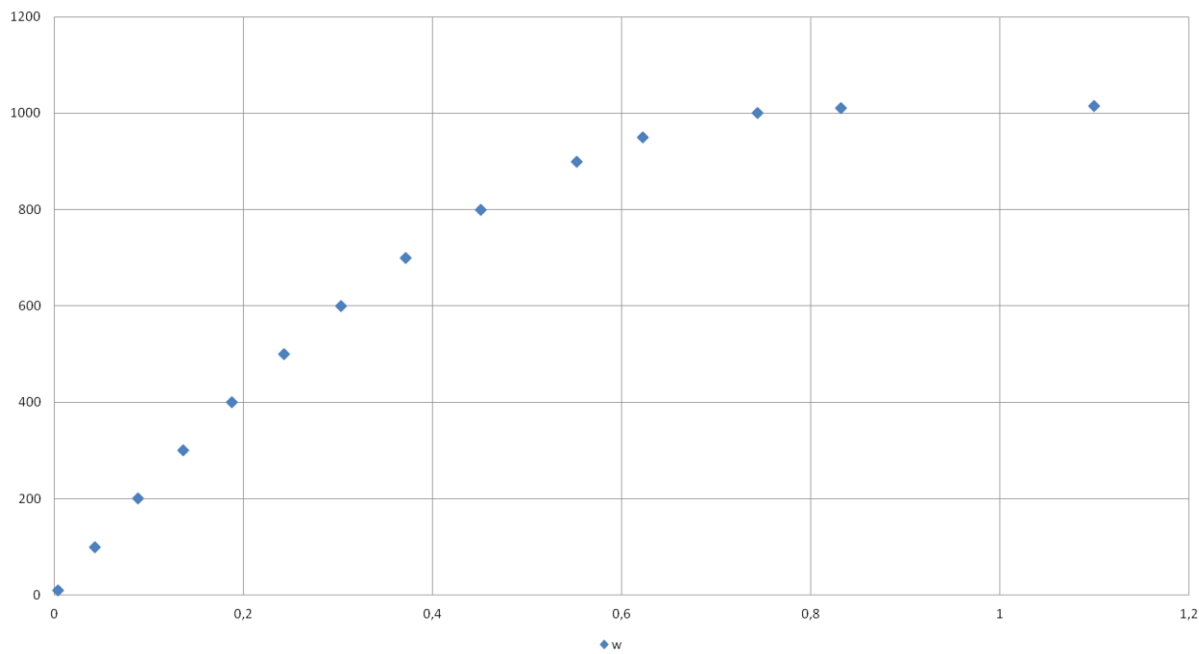
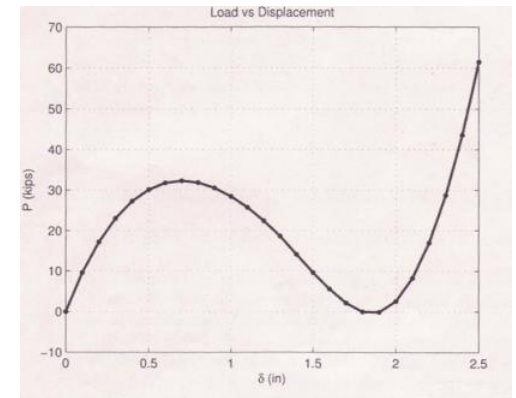
Při předem daném posunu  
a dopočtení příslušné síly



Zdroj: 2D Co-rotational Truss Formulation, Louie L. Yaw, Walla Walla University, April 23, 2009



Dopočítané posuny v závislosti na působící síle



# Použité materiály

- Použitá literatura
  - 2D Co-rotational Truss Formulation, Louie L. Yaw, Walla Walla University, April 23, 2009
- Použitý software:
  - Matlab R2012a
  - Microsoft Excel
  - AutoCAD 2012

Děkuji za pozornost