České vysoké učení technické v Praze
KLOKNERŮV ÚSTAV

166 08 Praha 6 - Dejvice, Šolínova 7

VZDĚLÁVACÍ A VÝZKUMNÉ CENTRUM PRO KOMPOZITNÍ MATERIÁLY
A
KONSTRUKCE

Učební texty a pomůcky
svazek 2

ÚVOD DO SCHWARTZOVY TEORIE DISTRIBUCÍ

Prof. Ing. Václav Kovařík, DrSc.

Praha, srpen 1992

PŘEDMLUVA

Technická praxe staví vědecké pracovníky i techniky-specialisty jednak před stále nové problémy, jednak před nově otvírané staré problémy. Při formulování a řešení těchto problémů často nevystačíme s elementárními prostředky matematické analýzy. Jinými slovy: Poznávání nových matematických prostředků často otevírá možnosti řešení nových technických problémů.

Cílem této učební pomůcky je seznámit studenty různých forem postgraduálního studia, popřípadě mladé vědecké pracovníky i fundované specialisty z projekčních kanceláří, s netradičním matematickým aparátem, který skýtá možnosti matematicky korektně a úsporně formulovat a řešit některé úlohy zmíněného charakteru. Poněkud paradoxně zde doporučujeme a upřednostňujeme aparát, který je na první pohled technikovi vzdálenější než tradiční aparát diferenciálního a integrálního počtu - aparát teorie zobecněných funkcí anebo přesněji Schwartzovy teorie distribucí.

Chceme zde ukázat, že názor založený na podobném pohledu platí pouze pro některé partie teorie distribucí, respektive pro činnost matematika v této oblasti. Pro aplikace v řadě úloh technické praxe není třeba zabíhat nijak hluboko do teorie distribucí. Většinou vystačíme s několika málo pojmy a základními operacemi. Necelých šedesát stránek této publikace by mělo dokázat, že k jejich pochopení stačí elementární znalosti z matematické, resp. funkcionální analýzy běžně přednášené v kursech matematiky na fakultách vysokého technického učení. Uvidíme, že všechny operace nad zobecněnými funkcemi (distribucemi) mají známé paralely v teorii obyčejných funkcí, avšak mnohdy jsou o poznání jednodušší. Síla distributivní analýzy vyplývá ve značné míře ze skutečnosti, že každá distribuce má všechny derivace a že v teorii distribucí je derivování spojitý proces.

Teorie distribucí použili při řešení některých kontaktních, statických a dynamických úloh teorie konstrukcí v pružném oboru

Kecs, Teodorescu [4] a Cejtlin [2]. Prokázali výhodnost distributivní koncepce zejména v případech úloh s nespojitostmi. Překvapivě zůstala zatím mimo zájem badatelů aplikační oblast, v níž se projevují výhody distributivního pojetí mnohem výrazněji - lineární teorie vazkopružnosti. Proto je tato pomůcka směrována k využití teorie distribucí právě v této oblasti, která je náplní dalšího kursu. Uvidíme, že distributivní pojetí teorie vazkopružnosti (přesněji: časově invariantní teorie dědičnosti) vede na formulace blízké formulacím teorie pružnosti, na tzv. rovnice s konvolucemi. Jde o jisté rovnice, se kterými můžeme zacházet velmi podobně jako s rovnicemi maticovými, které jsou technikům velmi blízké. Vzhledem k tomu, že v teorii vazkopružnosti nelze v žádném případě vystačit s matematickým aparátem používaným v teorii pružnosti, bude vždy nutno seznámit se s některými novými matematickými disciplínami. Domnívám se, že stojí zato naučit se několik málo nezvyklých pojmů či pohledů teorie distribucí. Jednoduchost aplikace jejího aparátu v teorii vazkopružnosti (a nejen tam) daný vklad bezpochyby zúročí.

Praha, srpen 1992

Prof.Ing. Václav Kovařík, DrSc.

Obsah

POUŽITÉ OZNAČENÍ

t	nezávisle proměnná
F, $F(t)$	regulární pravostranná distribuce
$f(t)$	spojitá funkce definovaná nad celým intervalem $(-\infty,+\infty)$ a určující distribuci F; tohoto označení se používá zejména v případech, kdy je třeba zdůraznit odlišnost f a F
$h(t)$	Heavisideova funkce: $h(t)=0$ pro $t<0$ $h(t)=1$ pro $t\geq 0$
$\delta(t)$	Diracova distribuce (míra): $\delta(t)=h^{[1]}(t)$
$[1]$	v horním indexu: zobecněná (distributivní) derivace podle t
(1)	v horním indexu: klasická derivace podle t
$*$	distributivní konvoluce (konvolutorní součin)

1. Úvod

V lineární teorii vazkopružnosti se zcela přirozeným způsobem objevují časově proměnné fyzikální veličiny, které nelze charakterizovat jako funkce. Problém popisu podobných veličin je problémem volby vhodných matematických prostředků. Obvyklá cesta aplikace aparátu klasické či funkcionální analýzy vede k používání nedefinovaných nebo nekorektních operací. Teorie zobecněných funkcí sobolevovského typu je určena spíše pro účely matematické; její aparát není vždy vhodný pro technické účely. Cílem této práce je ukázat možnosti, které v tomto směru skýtá jiná teorie zobecněných funkcí - Schwartzova teorie distribucí.

Při výkladu budeme vedeni spíše snahou o srozumitelnost než snahou o co nejvyšší matematickou přesnost. Omezíme se v podstatě na popis používaných matematických prostředků. Vynecháváme tedy všechny důkazy stejně jako některé definice, které souvisí výlučně s matematickou stránkou teorie distribucí. Všechny potřebné důkazy, definice a řadu dalších podrobností lze nalézt u Laurenta Schwartze [5], [6]. První z uvedených publikací je určena matematikům a lze ji stěží doporučit čtenáři technického zaměření. Druhá je však matematicky méně náročná a je psána velmi přístupně. Při vlastním výkladu se budeme ve velké míře držet práce Zemanianovy [8], která se v některých partiích odchyluje od přístupu Schwartzova [6].

2. Obsah pojmu distribuce

V druhé kapitole ukážeme tři cesty, kterými lze zcela logickým postupem dojít k pojmu zobecněná funkce, resp. distribuce. Při každé z těchto cest sledujeme otázku obsahu tohoto pojmu z jiného zorného úhlu, z jiného hlediska.

2.1. První hledisko: fyzikálně - experimentální. Základní definice.

Velmi názornou cestu k objasnění pojmu zobecněná funkce ukazuje běžná fyzikálně-experimentální praxe. Výchozím bodem zde je fyzikální podstata klasického pojmu funkce. Při obvyklém pojetí rozumíme pod vztahem

$$y = f(t) \tag{2.1}$$

přiřazení mezi jednotlivými hodnotami y a jednotlivými hodnotami t z určitého intervalu M. Tomuto pojetí odpovídá fyzikální představa o možnosti zjištění přesné hodnoty fyzikální proměnné y v každém izolovaném okamžiku $t \in M$. Tato představa je ve zřejmém rozporu s možnostmi experimentálního zjišťování podobných veličin. Fyzikální proměnné zjišťujeme v podstatě nepřímo, to jest měřením jejich účinku na měřící aparaturu. Při takovém měření registrujeme jistý vážený průměr hodnot dané fyzikální proměnné nad určitým intervalem $N \subset M$, určený s váhou $\psi(t)$. Délka intervalu N obsahujícího bod t, v němž měříme danou veličinu, a váha $\psi(t)$ závisí na parametrech použité měřící aparatury. Vždy však bude $N \neq 0$ a $\psi(t) \neq 1$, protože neexistuje přístroj, který by umožnil stanovit okamžitou (mžikovou) hodnotu f(t) v izolovaném časovém "bodu" t.

Docházíme tak k poznatku, že měřením fyzikálních proměnných zjišťujeme místo veličiny (2.1) hodnoty integrálu

$$Y = \int_N f(t)\, \psi(t)\, dt \tag{2.2}$$

v delších či kratších podintervalech $N \subset M$. Ze vztahu (2.2) je zřejmé, že přitom nemají valný smysl jednotlivé hodnoty f(t); podstatnou roli zde hraje celkový průběh změn f(t) anebo jinými slovy rozložení (distribuce) f(t) nad všemi $t \in M$; proto se množina integrálů (2.2) nazývá distribucemi.

Matematické distribuce jsou v jistém smyslu přesné matematické definice distribucí, vyskytujících se ve fyzice:

Místo váhové funkce $\psi(t)$ se zde zavádí pojem testovací funkce $\varphi(t)$. Tato funkce se volí tak, aby umožňovala všechny potřebné matematické operace. Uvedené podmínce vyhovují funkce, které

a) jsou definovány na celé reálné ose R^1, ale vně některého konečného intervalu N jsou nulové, [1]

b) jsou nekonečně diferencovatelné [2]

Množina všech takových funkcí tvoří lineární vektorový prostor $\mathcal{D}$ testovacích funkcí s omezeným nosičem.

Následkem uvedených vlastností testovacích funkcí z $\mathcal{D}$ platí, že

1. Funkce $\varphi(t)$ a všechny její derivace jsou rovny nule na koncích intervalu N, [3] protože v těchto bodech jsou nulové derivace "zvnějška", tj. zleva v levém a zprava v pravém koncovém bodě.

2. Integrál (2.2) můžeme při $\psi = \varphi$ rozšířit na celou reálnou osu R^1 a psát

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \varphi(t)\ dt, \qquad \varphi\in\mathcal{D}, \tag{2.3}$$

protože díky první skutečnosti nemohou vznikat žádné problémy s konvergencí (2.3) v nekonečnu. Integrál (2.3) můžeme tedy považovat za jistý skalární součin funkcí f(t) a $\varphi(t)$ a použít obvyklé symboliky

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \varphi(t)\ dt = (f,\varphi). \tag{2.4}$$

Při pevné funkci f(t) přiřazuje předpis (2.4) každé

---

[1] Interval N je tzv. nosič funkce.

[2] Říkáme, že funkce $\varphi(t)$ je nekonečně diferencovatelná (anebo nekonečně hladká) v R^1, jestliže má v R^1 spojité derivace všech řádů.

[3] Interval N může být pro různé funkce $\varphi(t)\in\mathcal{D}$ různý.

testovací funkci $\varphi(t)$ z $\mathcal{D}$ některé číslo Y, resp. (φ,f). [4] Tuto skutečnost můžeme také formulovat takto: Funkce f(t) určuje na prostoru $\mathcal{D}$ funkcionál (f,φ). Funkcionál (f,φ) je přitom lineární, tj. aditivní a homogenní, takže platí

$$(f,\varphi_1+\varphi_2) = (f,\varphi_1) + (f,\varphi_2), \tag{2.5}$$
$$(f, c\varphi) = c\,(f,\varphi),$$

a spojitý. Poslední pojem znamená, že pro posloupnost φ_j testovacích funkcí z $\mathcal{D}$ konvergující v $\mathcal{D}$ k funkci $\varphi(t)$ konverguje posloupnost čísel (f,φ_j), $(j=1,2,\dots)$ k číslu (f,φ) v obvyklém smyslu konvergence posloupnosti čísel.

Z čistě matematických důvodů se rovněž přechází od integrálu Riemannova k obecnějšímu integrálu Lebesgueovu ve vztahu (2.4) a zavádí se předpoklad o lokální lebesgueovské integrovatelnosti funkce f(t). [5] Tento postup slouží výlučně k sestavení obecné matematické teorie distribucí. Funkce, vyskytující se v technických aplikacích jsou vždy riemannovsky integrovatelné; to znamená, že jejich Lebesgueův a Riemannův integrál jsou si rovny. [6] Není proto třeba se obávat tohoto obecnějšího pojmu či předpokladu ani se jimi blíže zabývat.

Funkcionál (2.4) mající výše popsané vlastnosti pak nazýváme regulární distribucí. Základní myšlenka Schwartzovy teorie distribucí spočívá v reprezentaci veličiny f hodnotami funkcionálu (f,φ).

Po definici pojmu regulární distribuce sledujme nyní

---

[4] Srovnej klasickou formulaci definice funkce y.

[5] Funkce f(t) je lokálně integrovatelná, jestliže je integrovatelná v každém konečném intervalu $N \subset R^1$. Funkce je lebesgueovsky integrovatelná, jestliže má konečný Lebesgueův integrál. Pokud budeme hovořit o integrálu či integrovatelnosti, půjde vždy o integrál Lebesgueův či o lebesgueovskou integrovatelnost.

[6] Přesněji: Jestliže Riemannův integrál absolutně konverguje, konverguje i integrál Lebesgueův a má stejnou hodnotu.

některé obecné vlastnosti tohoto pojmu. Především proveďme opačný zásah než dříve: testovací funkci $\varphi(t)$ v (2.4) necháme pevnou a změníme hodnoty určující funkce $f(t)$ v konečném počtu bodů. Z integrálního počtu je známo, že hodnota integrálu (2.4) se tímto zásahem nezmění. Docházíme tak k poznatku, že v distributivním pojetí reprezentuje skalární součin (2.4), tj. regulární distribuce, celou třídu funkcí $f(t)$ lišících se navzájem v konečném počtu bodů.[7] Jinými slovy regulární distribuce určuje funkci, která ji vytváří, skoro všude. Pro značení regulárních distribucí se z tohoto důvodu používá podobného anebo dokonce stejného symbolu jako pro funkce tyto distribuce vytvářející (určující). Píšeme tedy

$$f = (f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \varphi(t)\ dt \tag{2.6}$$

anebo

$$f(t) = (f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \varphi(t)\ dt. \tag{2.7}$$

Uvidíme později (§ 2.3), že přirozeným způsobem dospějeme k veličinám, pro které nebude mít integrál typu (2.6) smysl. Pak místo (2.6), (2.7) budeme psát

$$f = \langle f,\varphi \rangle \tag{2.8}$$

anebo

$$f(t) = \langle f,\varphi \rangle \tag{2.9}$$

a hovořit o distribuci singulární. Symbol $\langle f,\varphi \rangle$ v těchto rovnicích značí jistý abstraktní funkcionál, definovaný na prostoru testovacích funkcí, který má stejné základní vlastnosti jako méně obecný skalární součin (f,φ) - je lineární a spojitý. Na rozdíl od skalárního součinu nemůžeme dát

[7] Třída funkcí, z nichž každé dvě se liší navzájem nejvýše v konečném počtu bodů (na množině míry nula), se nazývá ekvivalentní třídou funkcí.

funkcionálu $\langle f,\varphi\rangle$ konkrétní podobu, nemůžeme jej napsat v explicitním tvaru. [8]

Všechny takto definované obecné (singulární) distribuce tvoří lineární vektorový prostor $\mathcal{D}'$ distribucí s obecným nosičem. Tento prostor je duální [9] (adjungovaný) k prostoru $\mathcal{D}$.

Značení typu (2.9) znamená pouze vhodný symbol, u něhož je v argumentu na levé straně vyznačena proměnná, na níž závisí testovací funkce. V žádném případě nenaznačuje, že jde o funkci anebo o regulární distribuci. Tato symbolika má značné výhody při definici některých operací (srovnej § 4.1).

2.2. Druhé hledisko: integrální transformace

Jednou z nejpoužívanějších matematických disciplin v technických vědách jsou integrální transformace, zejména pak transformace Laplaceova. Aniž bychom zabíhali do podrobností, připomeňme si zde její klasickou definici (Veit [8]):

Budiž f komplexní funkce jedné reálné proměnné t taková, že (Lebesgueův) integrál na pravé straně následující rovnosti konverguje alespoň pro jedno komplexní p. Potom funkci f nazýváme předmětem (originálem) a funkci $\tilde{f}(p)$ definovanou rovností

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt \qquad (2.10)$$

nazýváme Laplaceovým obrazem funkce f.

Z definice (2.10) je patrné, že není třeba, aby originál f(t) byl definován pro $t<0$. Zpravidla se jeho definice doplňuje

---

[8] Totéž platí ostatně i o testovacích funkcích $\varphi(t)$. Uvedená skutečnost nemá podstatný význam.

[9] Řekneme, že vektorový prostor $\mathcal{P}'$ nad časovým intervalem M je duální k vektorovému prostoru $\mathcal{P}$ nad M, jestliže jeho prvky jsou spojité lineární funkcionály na prostoru $\mathcal{P}$.

tak, aby pro všechna $t<0$ byl roven nule; jinými slovy předpokládá se, že má nosič omezen zleva v $t=0$.

Z teorie této transformace je známé, že

a) každé (laplaceovsky transformovatelné) funkci f odpovídá jediný obraz $\tilde{f}(p)$

b) změníme-li podintegrální funkci na pravé straně (2.10) v konečném počtu bodů, nezmění se hodnota integrálu (2.10). To znamená, že jednomu obrazu $\tilde{f}(p)$ odpovídá nekonečné množství originálů $f(t)$. Všechny tyto originály tvoří ekvivalentní třídu funkcí.

Veličina $\tilde{f}$ je prostřednictvím (2.10) definována jako funkcionál na množině exponenciálních funkcí s (obecně) komplexním exponentem. Tento funkcionál je lineární a spojitý; exponenciální funkce, na nichž je určen, jsou definovány na celé reálné ose R^1, mají zde všechny derivace a pro $\mathrm{Re}\, p>0$ je jejich nosič omezen zprava.

Vidíme, že při popisu vlastností veličiny (2.10) používáme terminologie z předcházejícího paragrafu. Přihlédneme-li k tomu, že originál $f(t)$ má nosič omezen zleva, můžeme rozšířit platnost vztahu (2.10) na celou reálnou osu, aniž by vznikly konvergenční obtíže při $t\to-\infty$

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = (f, e^{-pt}), \qquad f=0 \text{ pro } t<0. \tag{2.11}$$

Výraz (2.11) se liší od výrazu (2.7) pro regulární distribuci pouze tím, že v něm stojí konkrétní exponenciální funkce e^{-pt} místo obecné testovací funkce $\varphi(t)$ s omezeným nosičem. Důsledkem této rozdílnosti je, že na levé straně (2.11) je holomorfní funkce transformačního parametru p, které můžeme dát konkrétní podobu pro každý zadaný (laplaceovsky transformovatelný) originál. Na levé straně (2.7) bude naproti tomu vždy stát blíže neurčená hodnota abstraktního funkcionálu.

Výraz (2.11) můžeme zobecnit podobně jako výraz (2.2). Místo exponenciální funkce e^{-pt} zavedeme tzv. testovací funkce s nosičem omezeným zprava. Půjde o obecné funkce, které mají základní vlastnosti shodné s uvedenou exponenciální funkcí:

a) jsou definovány na celé reálné ose R^1, ale jejich nosič je omezen zprava

b) jsou nekonečně diferencovatelné.

Množina všech takových funkcí tvoří lineární vektorový prostor $\mathcal{D}_L$ (levostranných) testovacích funkcí s nosičem omezeným zprava.

Místo (2.11) pak můžeme psát

$$f(t) = (f,\varphi), \qquad \varphi\in\mathcal{D}_L. \tag{2.12}$$

Tento vztah definuje na vektorovém prostoru $\mathcal{D}_L$ regulární pravostrannou distribuci, to jest distribuci s nosičem omezeným zleva (v našich úlohách to bude v t=0).

Existují veličiny f, pro které nemá skalární součin, resp. integrál v (2.12) smysl. Pro ně použijeme zobecnění shodného s přechodem od (2.7) k (2.9) a místo skalárního součinu zavedeme obecný (abstraktní) lineární spojitý funkcionál

$$f(t) = \langle f,\varphi\rangle, \qquad \varphi\in\mathcal{D}_L , \tag{2.13}$$

který definuje na prostoru $\mathcal{D}_L$ obecnou (singulární) pravostrannou distribuci. Všechny takové distribuce tvoří lineární vektorový prostor $\mathcal{D}'_P$ pravostranných distribucí, který je duální (adjungovaný) k prostoru $\mathcal{D}_L$. Jednotlivé distribuce z $\mathcal{D}'_P$ nemusí mít nosič omezený zleva ve stejném bodě $t=t_0$.

Rozdíl mezi (2.11) a (2.12) či (2.13) je patrný, avšak funkcionální pojetí je základem jak pro Laplaceovu transformaci, tak pro distribuce.

2.3. Třetí hledisko: derivace

V matematické encyklopedii [1] se na str. 345 říká, že pojem distribuce vznikl z požadavku, aby bylo možno derivovat jakoukoli lokálně integrovatelnou funkci. Vzhledem k tomu, že lokálně integrovatelná funkce je obecně nespojitá, nemyslí se zde derivování v klasickém smyslu, ale jde o obecnější pojetí tohoto pojmu. Chceme se zde pokusit o ilustraci smyslu citovaného výroku.

Mějme lokálně integrovatelnou funkci g(t) definovanou v R^1 předpisem

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t<0 \\ t & \text{pro } t\geq 0. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Jde o spojitou funkci, která nemá v bodě t=0 derivaci; mimo tento bod platí

$$\frac{dg}{dt} = g^{(1)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } -\infty<t<0 \\ 1 & \text{pro } 0<t<\infty. \end{cases} \qquad (2.15)$$

Dále uvažujme testovací funkci $\varphi(t)$ s omezeným nosičem; podle definice této funkce platí

$$\varphi^{(j)}(-\infty) = \varphi^{(j)}(+\infty) = 0, \qquad (j=0,1,2,\ldots), \qquad (2.16)$$

když symbol j v horním indexu značí j-tou derivaci a $\varphi^{(0)}(t) = \varphi(t)$.

Sestavme výraz pro skalární součin $(g^{(1)},\varphi)$; s ohledem na (2.15) platí

$$(g^{(1)},\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(1)}(t)\ \varphi(t)\ dt = \int_{0}^{\infty} \varphi(t)\ dt. \qquad (2.17)$$

Místo naznačeného postupu můžeme integrál ve středním členu vztahu (2.17) upravit integrací per partes. Přihlédneme-li k (2.16), můžeme psát obecně

$$(g^{(1)},\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(1)}(t)\ \varphi(t)\ dt = \qquad (2.18)$$

$$= \Big[g(t)\ \varphi(t)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ \varphi^{(1)}(t)\ dt = -\,(g,\varphi^{(1)}).$$

Výraz na levé straně tohoto složeného vztahu má smysl (existuje) pouze tehdy, má-li funkce g(t) integrovatelnou derivaci; v našem konkrétním případě (2.14), (2.15) pak nabývá hodnoty (2.17). Výraz na pravé straně (2.18) má však zřejmě širší smysl - existuje pro každou lokálně integrovatelnou funkci g(t).

Označme nyní

$$f(t) = g^{(1)}(t) \tag{2.19}$$

a použijme zcela formálně postupu (2.18) k vyčíslení výrazu $(f^{(1)},\varphi)$:

$$\begin{aligned}(f^{(1)},\varphi) &= (g^{(2)},\varphi) = -(f,\varphi^{(1)}) = -(g^{(1)},\varphi^{(1)}) \\ &= (g,\varphi^{(2)}).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Vzhledem k tomu, že při volbě g(t) podle (2.14) je

$$-(g^{(1)},\varphi^{(1)}) = -\int_0^\infty 1.\varphi^{(1)}(t)\ dt = \Big[-\varphi(t)\Big]_0^\infty = \varphi(0), \tag{2.21}$$

můžeme rovnici (2.20) doplnit a psát

$$(g^{(2)},\varphi) = (g,\varphi^{(2)}) = \varphi(0). \tag{2.22}$$

Snadno se přesvědčíme, že jsme došli ke sporu. Formálně správný postup nás zavedl k chybnému výsledku.

Z rovnice (2.15) vyplývá, že v otevřených intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ je

$$g^{(2)}(t) = 0. \tag{2.23}$$

Funkce $g^{(2)}(t)$ je tak rovna nule skoro všude v R^1; patří tedy do ekvivalentní třídy nulových funkcí. Skalární součin nulové funkce se spojitou funkcí $\varphi(t)$ musí být - jak známo z elementární teorie integrálu - roven nule

$$(g^{(2)},\varphi) = \int_{-\infty}^{0} 0.\varphi(t)\ dt + \int_0^\infty 0.\varphi(t)\ dt = 0. \tag{2.24}$$

Tento výsledek je obecně ve sporu s (2.22).

Shrneme-li získané výsledky, zjišťujeme, že pro první derivaci (2.15) funkce g(t) dané rovnicí (2.14) platí vztah (2.18), dávající (2.17). Funkce (2.15) je nespojitá, proto neexistuje její derivace v R^1. Formální aplikace předchozího postupu (2.20), (2.22) při použití derivací $g^{(2)}(t)$ nad otevřenými intervaly $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$ podle (2.23) selhává. Veličina $g^{(2)}(t)$ zřejmě ztrácí charakter funkce a proto pro ni nemá smysl integrál, resp. skalární součin. Kromě toho zjišťujeme, že ačkoliv první součin v (2.22) nemá smysl, druhý součin už jej má a dává $\varphi(0)$.

Zdá se tedy být přirozené pokusit se o zobecnění pojmů, které v klasickém pojetí "selhaly" - pojmu derivace a pojmu skalární součin. V prvním případě budeme používat značení derivací horním indexem v hranaté závorce a nazývat je zobecněné anebo distributivní derivace. Ve druhém případě přejdeme od konkrétního funkcionálu (skalárního součinu) k funkcionálu abstraktnímu, který má nezměněné základní vlastnosti (linearitu a spojitost) a budeme jej nazývat distribucí. Můžeme tedy schematicky psát

$$f^{(m)}(t) \longrightarrow f^{[m]}(t), \qquad (f,\varphi) \longrightarrow \langle f,\varphi\rangle. \tag{2.25}$$

Naznačené zobecnění musí být takové, že pokud existuje (má smysl) symbol nalevo v (2.25), je zobecněná veličina napravo rovna právě veličině nalevo. Jinými slovy: pokud má lokálně integrovatelná funkce klasickou derivaci, je zobecněná derivace rovna derivaci klasické; pokud má smysl skalární součin, nabývá abstraktní funkcionál právě jeho tvaru.

Pokud jde o derivaci, vyhovuje této podmínce zobecněný vztah (2.18)

$$\langle g^{[1]},\varphi\rangle = -\langle g,\varphi^{(1)}\rangle \tag{2.26}$$

anebo (2.22)

$$\langle g^{[2]},\varphi\rangle = \langle g,\varphi^{(2)}\rangle = \varphi(0) \tag{2.27}$$

v uvažovaném případě (2.14).

Zopakujeme-li naznačenou proceduru v případě obecné veličiny f, dostaneme

$$\langle f^{[m]},\varphi\rangle = (-1)^m \langle f,\varphi^{(m)}\rangle. \tag{2.28}$$

Podle této definice má každá lokálně integrovatelná funkce v souhlase s úvodním citátem všechny derivace a platí

$$\langle f^{[m]},\varphi\rangle = (-1)^m (f,\varphi^{(m)}). \tag{2.29}$$

Zkoumejme nyní korektnost vztahů (2.26), (2.27). Povšimneme si, že výsledný integrál v (2.17) můžeme rozšířit na celou osu R^1, zavedeme-li tzv. Heavisideovu funkci h(t) předpisem

$$h(t) = \begin{cases} 0 \text{ pro } t<0 \\ 1 \text{ pro } t\geq 0. \end{cases} \tag{2.30}$$

Pak se (2.17) změní na

$$\langle g^{[1]},\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ \varphi(t)\ dt = \langle h,\varphi\rangle, \tag{2.31}$$

takže

$$g^{[1]} = h(t); \tag{2.32}$$

Heavisideova funkce je podle toho zobecněnou derivací spojité funkce g(t) dané vztahy (2.14). Za pomoci (2.31) a (2.28) můžeme upravit výraz $\langle g^{[2]},\varphi\rangle$ takto

$$\langle g^{[2]},\varphi\rangle = \langle h^{[1]},\varphi\rangle = -\langle h,\varphi^{(1)}\rangle = -\int_0^{\infty} \varphi^{(1)}(t)\ dt = \tag{2.33}$$
$$= \varphi(0).$$

Každý krok v (2.33) - na rozdíl od (2.20), (2.22) - je definován (má smysl) a vede na požadovaný výsledek (2.27). Podle toho, co bylo řečeno výše, nelze veličinu $g^{[2]}(t)$ definovat (charakterizovat) jako funkci, ale pouze jako obecnější matematický objekt - distribuci. Protože pro ni nemá smysl skalární součin, znamená to, že se - na rozdíl od dvou předcházejících paragrafů - setkáváme poprve s distribucí singulární. Veličina $g^{[2]}(t)$, definovaná vztahem (2.33), nachází široké uplatnění v řadě oblastí fyziky pod názvem

Diracova funkce (lépe distribuce nebo míra) a používá se pro ni symbolu $\delta(t)$. Na základě (2.32) ji můžeme definovat rovnicí

$$\delta(t) = g^{[2]}(t) = h^{[1]}(t), \tag{2.34}$$

když $g(t)$ je dána podle (2.14); na základě (2.33) alternativně rovnicí

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0). \tag{2.35}$$

Je tedy Diracova distribuce spojitý lineární funkcionál, který každé testovací funkci $\varphi(t)$ přiřazuje její hodnotu v počátku. Není proto třeba klást žádná omezení na nosič testovacích funkcí; jinými slovy $\varphi(t)$ může být testovací funkcí s libovolným nosičem. Všechny takové testovací funkce tvoří lineární vektorový prostor $\mathcal{E}$. Na tomto prostoru jsou definovány distribuce s omezeným nosičem (příkladem je právě Diracova distribuce, která - jak uvidíme později - má nosič bodový $t=0$). Všechny tyto distribuce tvoří lineární vektorový prostor $\mathcal{E}'$, který je duální (adjungovaný) k $\mathcal{E}$.

Pomocí Diracovy funkce se - zejména v elektrotechnice, kvantové mechanice a také v teorii vazkopružnosti - popisují veličiny, resp. děje závislé na čase (proudy, síly, napětí atp.), které trvají velmi krátkou dobu, ale pro tuto dobu nabývají natolik velkých hodnot, že časový integrál je roven nenulovému číslu. Z toho, co bylo řečeno výše, vyplývá, že pojmy funkce a integrál v předcházející větě by se měly uvádět v uvozovkách, protože jde o veličiny jiného charakteru a pojmů z klasické teorie funkcí se používá pouze v symbolickém smyslu.

Můžeme tedy poněkud poopravit anebo doplnit úvodní citát z [1] takto:

V různých fyzikálních disciplinách se zcela přirozeným způsobem objevují různé entity (matematické objekty), které lze korektně popsat jako funkcionály (distribuce), nikoli však jako funkce. Teorie distribucí (zobecněných funkcí) byla vytvořena proto, aby bylo možno popsat odpovídající fyzikální jevy přiměřeným matematickým aparátem.

2.4. Souhrn

V předcházejících třech paragrafech jsme ukázali tři cesty vedoucí nenásilným způsobem k zavedení pojmu distribuce anebo zobecněná funkce. Zjistili jsme, že distribuce je definována jako lineární spojitý funkcionál na některém vektorovém prostoru $\mathcal{P}$ tzv. testovacích funkcí $\varphi(t)$. Všechny distribuce definované na $\mathcal{P}$ tvoří lineární vektorový prostor $\mathcal{P}'$, který je duální (adjungovaný) k $\mathcal{P}$.

V každém z uvedených paragrafů jsme vyšli od jiného známého pojmu či jevu a dospěli k jednomu ze základních typů distribucí f:

- distribucí s libovolným nosičem ($f \in \mathcal{D}'$), definovaných na prostoru $\mathcal{D}$ testovacích funkcí s omezeným (kompaktním) nosičem,
- distribucí s nosičem omezeným zleva ($f \in \mathcal{D}'_P$, $\mathcal{D}'_P \subset \mathcal{D}'$, tzv. pravostranné distribuce), definovaných na prostoru $\mathcal{D}_L$ testovacích funkcí s nosičem omezeným zprava,
- distribucí s omezeným nosičem ($f \in \mathcal{E}'$), definovaných na prostoru $\mathcal{E}$ testovacích funkcí s libovolným nosičem.

Mezi uvedenými vektorovými prostory platí vztahy

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{E}, \qquad \mathcal{E}' \subset \mathcal{D}', \tag{2.36}$$

když v obou případech jde o vlastní podprostory.

Ukázali jsme dále, že lze rozeznávat distribuce regulární jako reprezentantky ekvivalentních tříd lokálně integrovatelných funkcí, a distribuce singulární, které nelze charakterizovat prostředky teorie funkcí.

Viděli jsme, že v určitém stadiu je někdy potřebné, jindy alespoň užitečné mít k dispozici obecnější pojmy, než jaké poskytuje klasická matamatická analýza. Věnujeme proto zbývající kapitoly tohoto oddílu popisu aparátu teorie distribucí. Při zpracování této pasáže jsme vycházeli hlavně z [6], [8] a přihlédli ke stručným poznámkám v [3], zejména v souvislosti s Laplaceovou transformací. Na tyto publikace také odkazujeme pro různé podrobnosti, důkazy, některé aplikace a bohatější bibliografii.

S ohledem na zaměření této práce se soustředíme - podobně jako v kap.2 - výlučně na distribuce jedné proměnné.

3. NĚKTERÉ ZÁKLADNÍ POJMY

V předcházející kapitole jsme zavedli některé nové pojmy. S ohledem na účel této kapitoly nebyl jejich výčet úplný. Ve třetí kapitole proto uvedeme stručný přehled nových pojmů potřebných pro další úvahy:

Distribuci f pokládáme za *nulovou* na otevřené množině Ω, jestliže platí

$$\langle f,\varphi\rangle = 0 \tag{3.1}$$

pro každou testovací funkci, jejíž nosič leží v Ω.

Nosič distribuce N je nejmenší uzavřená množina, vně které je distribuce rovna nule.

Jestliže některá množina M obsahuje nosič N distribuce f, říkáme, že *distribuce* je *soustředěná* na M.

Dvě lokálně integrovatelné funkce f(t), g(t), které na vektorovém prostoru $\mathcal{D}$ testovacích funkcí definují stejnou regulární distribuci

$$\langle f,\varphi\rangle = \langle g,\varphi\rangle, \tag{3.2}$$

se navzájem liší nejvýše na množině míry nula. Pokud jsou obě funkce spojité, jsou f, g vyhovující vztahu (3.2) identické.

V tomto směru se zavádí úmluva, že dvě lokálně integrovatelné funkce jsou si rovny, rovnají-li se skoro všude. Hovoříme pak o *ekvivalentní třídě funkcí*, do níž patří všechny funkce, které se navzájem liší nejvýše na množině míry nula. Potom můžeme ekvivalentní třídu lokálně integrovatelných funkcí a její regulární distribuci (to jest distribuci touto třídou určovanou) považovat za stejné entity. Vyjádření *"lokálně integrovatelná funkce f z $\mathcal{D}'$"* je pak třeba chápat tak, že jde o regulární distribuci definovanou na $\mathcal{D}$ a určovanou funkcí f.

Často budeme hovořit o *rovnosti dvou distribucí* na otevřené množině (otevřeném intervalu). Říkáme, že distribuce f a g jsou si rovny na otevřené množině Ω, jestliže pro každou testovací funkci, jejíž nosič leží v Ω, platí

$$\langle f,\varphi\rangle = \langle g,\varphi\rangle. \tag{3.3}$$

Podle toho mohou být dvě distribuce shodné v okolí bodu t, to jest na otevřené množině obsahující bod t, i když nelze hovořit o jejich hodnotách v tomto bodě. Z této definice také vyplývá, že distribuce f může být rovna regulární distribuci na otevřené množině Ω. V takovém případě většinou používáme obratu *"f se rovná funkci g na otevřené množině* Ω *"*. Pod tímto výrokem je opět třeba rozumět, že ve skutečnosti odkazujeme na ekvivalentní třídu funkcí reprezentovaných nad Ω regulární distribucí g. Je tedy např. Diracova distribuce (také delta distribuce) $\delta(t)$ rovna nule (tj. nulové funkci) na otevřených množinách

$$K_L = (-\infty,0), \qquad K_P = (0,\infty). \tag{3.4}$$

Dalším pojmem používaným v teorii distribucí je *řád distribuce* na ose R^1. Každá distribuce má na R^1 buď řád konečný anebo nekonečný. To znamená, že z každého vektorového prostoru distribucí $\mathcal{D}'$ lze vyčlenit vlastní podprostor distribucí konečného řádu. Řád distribuce je definován jako nejmenší celé nezáporné číslo r, pro které je splněna rovnice

$$\langle f,\varphi\rangle = \langle g^{[r+2]},\varphi\rangle, \tag{3.5}$$

ve které g(t) značí funkci spojitou v R^1. Jestliže takové číslo r neexistuje, je řád distribuce f na R^1 nekonečný.

Dá se dokázat, že každá distribuce s omezeným nosičem $f\in\mathcal{E}'$ je konečného řádu na R^1. Existují však i distribuce, které nemají omezené nosiče a přesto jsou konečného řádu na R^1; např. každá regulární distribuce je *distribucí nultého řádu* na R^1.

Podmínce spojitosti funkce g(t) v definici (3.5) vyhovuje funkce daná vztahy (2.14). Můžeme ji tedy použít k ocenění řádu Diracovy distribuce $\delta(t)$. Podle (2.34) a (3.5) vychází r=0, takže delta distribuce je rovněž nultého řádu. Distribuce řádu nula se také nazývají *mírami*.

4. OPERACE NAD DISTRIBUCEMI

Distribuce je v podstatě synonymum pro pojem zobecněná funkce; klasická funkce je podle toho zvláštním případem distribuce. Proto se při definici každé operace nad distribucemi postupuje tak, že se vychází z obdobné definice pro funkce (resp. regulární distribuce) a zkoumá se, zda má analogická definice smysl i v obecnějším případě distribucí singulárních. V kladném případě je definice uvažované operace nalezena. V záporném případě se hledají omezení, za kterých by bylo možno smysl takové definice zaručit.

Ve spojení s definicí každé operace se objevuje nový pojem – uzavřenost uvažovaného prostoru distribucí $\mathcal{P}'$ vzhledem k dané operaci. Říkáme, že *prostor* $\mathcal{P}'$ *je uzavřen* vzhledem k dané operaci, jestliže výsledek její aplikace nad elementem z $\mathcal{P}'$ patří rovněž do $\mathcal{P}'$.

Dříve než přistoupíme k definování konkrétních operací, chtěli bychom upozornit na jednu okolnost: Všechny úlohy teorie vazkopružnosti jsou definovány nad polouzavřeným časovým intervalem

$$K = \langle 0,\infty) . \tag{4.1}$$

Nosiče všech distribucí budou proto ležet v K, to jest budou omezeny zleva. Budeme tedy pracovat výlučně s pravostrannými distribucemi $f\in\mathcal{D}'_P$, které jsou definovány na vektorovém prostoru $\mathcal{D}_L$ testovacích funkcí s nosiči omezenými zprava. Omezíme proto svou další pozornost v tomto oddíle na vyjmenované vektorové prostory. Toto omezení se příznivě projeví u některých dále definovaných operací nad distribucemi. V řadě případů umožní jednodušší vyjádření a zbaví nás výše popsaných problémů s uzavřeností.

4.1. Základní operace

V tomto paragrafu budeme definovat nejběžnější operace nad distribucemi. Samostatné partie věnujeme derivování distribucí, konvoluci, rovnicím s konvolucí, Laplaceově transformaci, dvěma abelovským teorémům a Fourierově transformaci.

a) *sčítání distribucí*

$$\langle f+g,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle + \langle g,\varphi\rangle, \tag{4.2}$$

b) *násobení distribuce konstantou*

$$\langle cf,\varphi\rangle = \langle f,c\varphi\rangle, \tag{4.3}$$

c) *rozdíl dvou distribucí*

$$\langle g-f,\varphi\rangle = \langle g,\varphi\rangle + \langle -f,\varphi\rangle = \langle g,\varphi\rangle + \langle f,-\varphi\rangle, \tag{4.4}$$

d) *posunutí (translace) distribuce*

$$\langle f(t-\tau),\varphi(t)\rangle = \langle f(t),\varphi(t+\tau)\rangle, \qquad t\in K,\ t-\tau\in K, \tag{4.5}$$

e) *transposice distribuce*

$$\langle f(-t),\varphi(t)\rangle = \langle f(t),\varphi(-t)\rangle, \tag{4.6}$$

f) *násobení nezávisle proměnné t kladnou konstantou*

$$\langle f(at),\varphi(t)\rangle = \langle f(t), \frac{1}{a}\,\varphi\left(\frac{t}{a}\right)\rangle, \qquad a>0, \tag{4.7}$$

g) *násobení nekonečně integrovatelnou funkcí $\alpha(t)$*

$$\langle \alpha f,\varphi\rangle = \langle f,\alpha\varphi\rangle. \tag{4.8}$$

V tomto přehledu elementárních operací zřejmě chybí násobení distribucí. Definice této operace není pro obecné distribuce možná. Tato skutečnost je jistým nedostatkem teorie distribucí, nikoli však nedostatkem závažným.

V úvodu k této kapitole jsme řekli, jak se obvykle postupuje při definici operací nad distribucemi. Využijeme nyní názornosti a jednoduchosti výše uvedených vzorců a ukážeme pro ilustraci cestu, která vedla např. k definici (4.7).

Nechť f je regulární distribuce; pak platí

$$(f(at),\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\ \varphi(t)\ dt.$$

Substituce at=z vede na

$$t = \frac{z}{a}\ ,\ \ dt = \frac{dz}{a}$$

a při a>0 převádí hořejší integrál na tvar

$$(f(at),\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,\varphi\left(\frac{z}{a}\right)\frac{1}{a}\,dz = (f(t), \frac{1}{a}\,\varphi\left(\frac{t}{a}\right))$$

shodný se (4.7).

Pro ilustraci práce s distribucemi a pro ukázání výhodnosti značení distribucí symboly shodnými se symboly pro funkce ukážeme teď použití některých operací na Diracovu distribuci $\delta(t)$. Vzhledem k tomu, že bodový nosič t=0 této distribuce patří do K, je $\delta\in\mathcal{D}'_P$. Máme rovněž na paměti, že - viz (2.35) -

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0). \qquad (4.9)$$

Pro posunutí delta distribuce podle (4.5) platí

$$\langle\delta(t-\tau),\varphi(t)\rangle = \langle\delta(t),\varphi(t+\tau)\rangle = \varphi(\tau), \quad t\in K,\ t-\tau\in K, \qquad (4.10)$$

podobně pro násobení nekonečněkrát diferencovatelnou funkcí $\alpha(t)$ podle (4.8) máme

$$\langle\alpha(t)\delta(t),\varphi(t)\rangle = \langle\delta(t),\alpha(t)\varphi(t)\rangle = \alpha(0)\varphi(0). \qquad (4.11)$$

Pravou stranu této rovnice však můžeme dále vyjádřit takto

$$\alpha(0)\varphi(0) = \langle\alpha(0)\delta(t),\varphi(t)\rangle, \qquad (4.12)$$

takže spojením (4.11) a (4.12) dostáváme

$$\langle\alpha\delta,\varphi\rangle = \langle\alpha(0)\delta,\varphi\rangle.$$

Odtud plyne

$$\alpha\delta = \alpha(0)\delta(t). \qquad (4.13)$$

V souvislosti s operací (4.8) bychom chtěli poznamenat, že v úlohách teorie vazkopružnosti se většinou uplatňuje pouze část prostoru $\mathcal{D}'_P$ - jeho vlastní podprostor $\mathcal{D}'_0$. Do tohoto podprostoru patří distribuce f, která vyhovuje dvěma podmínkám

$$\text{a) } f\in\mathcal{D}'_P \qquad (4.14)$$

$$\text{b) } fe^{-ct}\in\mathcal{S}',$$

kde c značí některé reálné číslo. Symbolem $\mathcal{S}'$ v (4.14) je označen lineární vektorový prostor *temperovaných distribucí* (anebo distribucí pomalého růstu - blíže viz kap.8) definovaných na vektorovém prostoru $\mathcal{S}$ testovacích funkcí rychlého poklesu. K tomuto konstatování je potřeba připojit definici:

Řekneme, že testovací funkce $\varphi(t)$ je *funkcí rychlého poklesu*, jestliže absolutní hodnoty všech jejích derivací $|\varphi^{(m)}t|$, m=0,1,2,... klesají při $t\to\infty$ rychleji než libovolná mocnina 1/t. Do prostoru $\mathcal{S}$ patří vedle $\varphi(t)$ i všechny derivace $\varphi^{(m)}(t)$.

Máme-li zařadit prostory $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ do hierarchie (2.36), můžeme psát

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}, \qquad \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'. \tag{4.15}$$

Mezi testovacími funkcemi z $\mathcal{P}$ a jimi vytvářenými distribucemi z $\mathcal{P}'$ existuje jedno-jednoznačné přiřazení. Určíme-li přiřazené prvky těchto prostorů, můžeme říci, že $\mathcal{P}$ je podprostorem $\mathcal{P}'$. Ze vztahu $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}'$ a hierarchie (4.15) pak plyne

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'. \tag{4.16}$$

V tomto vztahu je každý prostor vlastním podprostorem prostorů stojících napravo od něj.

Z několika málo dosud uvedených příkladů je patrno, že se v teorii vazkopružnosti sotva vyskytnou distribuce nekonečného řádu na R^1. Proto se budeme vždy, kdykoli to usnadní definici dalších operací, omezovat pouze na podprostory konečného řádu z $\mathcal{D}'_P$, resp. z $\mathcal{D}'_0$.

4.2. Derivování distribucí

Derivování distribucí se řídí vzorcem (2.28)

$$\langle f^{[m]},\varphi\rangle = (-1)^m \langle f,\varphi^{(m)}\rangle, \qquad (m=1,2,\dots). \tag{4.17}$$

V tomto paragrafu bychom se chtěli blíže zmínit o derivování lokálně integrovatelných (nespojitých) funkcí. Pro názornost vyjděme z jednoduchého případu.

Mějme funkci F(t) mající jediný bod nespojitosti t=0. Nechť konkrétně platí

$$F(t) = 0 \text{ pro } t \notin K \tag{4.18}$$
$$F(t) = f(t) \text{ pro } t \in K,$$

kde $f(t)$ je funkce omezená, spojitá a nekonečně diferencovatelná, pro niž platí

$$f(0^+) > 0. \tag{4.19}$$

Místo (4.18) můžeme psát stručněji

$$F(t) = f(t)\ h(t), \qquad t \in R^1. \tag{4.20}$$

Posuňme nyní funkci $f(t)$ nad intervalem K ve směru osy pořadnic o hodnotu $f(0^+)$ tak, aby procházela počátkem a nazvěme tuto posunutou funkci $g(t)$; platí pro ni vztahy

$$g(t) = 0 \text{ pro } t \notin K \tag{4.21}$$
$$g(t) = f(t) - f(0^+) \text{ pro } t \in K.$$

Analogicky k (4.20) zavedeme dále funkci $G(t)$ předpisem

$$G(t) = g(t)\ h(t) = [f(t) - f(0^+)]\ h(t). \tag{4.22}$$

Na rozdíl od $F(t)$ je funkce $G(t)$ spojitá; můžeme tedy hovořit o její klasické derivaci. Podle (4.21) platí

$$g^{(1)}(t) = 0 \text{ pro } t \in K_L\ , \tag{4.23}$$

$$g^{(1)}(t) = f^{(1)}(t) \text{ pro } t \in K_P\ , \tag{4.24}$$

$$g^{(1)}(0^-) = 0, \qquad g^{(1)}(0^+) = f^{(1)}(0^+) \tag{4.25}$$

při označení

$$K_L = (-\infty, 0), \qquad K_P = (0, +\infty). \tag{4.26}$$

Klasická derivace funkce $G(t)$ tak existuje všude v R^1 s výjimkou bodu $t=0$, v němž platí (4.25). Můžeme tedy psát

$$G^{(1)}(t) = g^{(1)}(t)\ h(t) = f^{(1)}(t)\ h(t), \qquad t \neq 0. \tag{4.27}$$

Spojením (4.20) s (4.22) dostaneme vztah

$$F(t) = f(t)\ h(t) = f(0^+)\ h(t) + G(t) \tag{4.28}$$

vhodný pro zobecněné (distributivní) derivování. Z definice distributivní derivace víme, že pokud má uvažovaná funkce klasickou derivaci, je tato derivace totožná s derivací distributivní. Můžeme tedy psát

$$F^{[1]}(t) = f(0^+)\ h^{[1]} + [G^{(1)}(t)], \qquad (4.29)$$

kde hranatá závorka kolem druhého členu na pravé straně značí, že se tento člen uvažuje pouze v bodech, kde má smysl, kde je klasická derivace definována.

Přihlédneme-li k (2.34), dostaneme místo (4.29)

$$F^{[1]}(t) = f(0^+)\ \delta(t) + [G^{(1)}(t)]. \qquad (4.30)$$

V bodech, v nichž $G^{(1)}(t)$ existuje, platí

$$G^{(1)}(t) = g^{(1)}(t), \qquad (4.31)$$

takže rovnici (4.30) můžeme dát tvar

$$F^{[1]}(t) = f(0^+)\ \delta(t) + [g^{(1)}(t)]. \qquad (4.32)$$

Jestliže zdůrazníme skutečnost, že nosič funkce F(t) je omezen zleva v t=0, lze použít zápisu

$$F^{[1]}(t) = f(0^+)\ \delta(t) + [f^{(1)}(t)]. \qquad (4.33)$$

Hranatá závorka na pravých stranách (4.32), (4.33) tentokráte značí, že platnost v nich uvažovaných členů je omezena na otevřený interval K_P.

Další možná úprava tohoto vzorce podle toho je

$$F^{[1]}(t) = f(0^+)\ \delta(t) + g^{(1)}(t)\ h(t), \quad g^{(1)}(0) = 0 \qquad (4.34)$$

resp.

$$F^{[1]}(t) = f(0^+)\ \delta(t) + f^{(1)}(t)\ h(t), \quad f^{(1)}(0) = 0, \qquad (4.35)$$

s dodefinováním hodnot derivací v bodě t=0.

Za upozornění stojí ještě jedna skutečnost: Ze vzorců (4.30) až (4.35) je patrno, že distributivní derivací nespojité funkce je singulární distribuce se singulární částí rovnou Diracově distribuci násobené velikostí skoku v bodě nespojitosti [10] a s regulární částí představovanou klasickou derivací funkce G(t) či g(t), resp. f(t). Vzhledem k tomu, že všechna alternativní vyjádření regulární části se navzájem liší

---

[10] Říkáme, že nespojitost v průběhu funkce F(t) generuje při distributivním derivování Diracovu distribuci $\delta(t)$.

nejvýše v bodě t=0, patří do ekvivalentní třídy funkcí a není nutné v rovnicích (4.34) a (4.35) uvádět podmínku $g^{(1)}(0)=0$ nebo $f^{(1)}(0)=0$.

Stejným způsobem můžeme postupovat dále; derivací (4.30) dostaneme nejprve

$$F^{[2]}(t) = f(0^+)\ \delta^{[1]}(t) + [G^{(1)}(t)]^{[1]}. \tag{4.36}$$

Pro výpočet druhého členu na pravé straně (4.36) použijeme vzorce (4.30), ve kterém položíme $F(t)\equiv G^{(1)}(t)$

$$[G^{(1)}(t)]^{[1]} = g^{(1)}(0^+)\ \delta(t) + [G^{(2)}(t)]. \tag{4.37}$$

Vzhledem k tomu, že v bodech, ve kterých existuje $G^{(2)}(t)$, platí

$$G^{(2)}(t) = g^{(2)}(t) = f^{(2)}(t), \tag{4.38}$$

můžeme - s přihlédnutím k (4.25), (4.33) - místo (4.36) psát

$$F^{[2]}(t) = f(0^+)\ \delta^{[1]}(t) + f^{(1)}(0^+)\ \delta(t) + [f^{(2)}(t)]. \tag{4.39}$$

Opakováním tohoto postupu dojdeme k obecnému vzorci

$$F^{[n]}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0^+)\ \delta^{[n-1-j]}(t) + [f^{(n)}(t)] \tag{4.40}$$

s výše uvedenými možnými alternativními tvary posledního členu na pravé straně.

Za zmínku stojí, že ke vzorci (4.35) můžeme dojít čistě formálním způsobem. Pravou stranu rovnice (4.20) můžeme považovat za součin dokonale hladké funkce f(t) a pravostranné regulární distribuce h(t). Při derivování (4.20) použijeme obvyklého vzorce pro derivování součinu a dostaneme

$$F^{[1]}(t) = f(t)\ h^{[1]}(t) + f^{(1)}(t)\ h(t). \tag{4.41}$$

Protože platí (2.34), dostaneme za pomoci vzorce (4.13) pro násobení Diracovy distribuce nekonečně diferencovatelnou funkcí f(t)

$$f(t)\ \delta(t) = f(0^+)\ \delta(t) \tag{4.42}$$

a po následujícím dosazení do (4.41) máme

$$F^{[1]}(t) = f(0^+)\ \delta(t) + f^{(1)}(t)\ h(t) \tag{4.43}$$

v souhlase s (4.35).

Úvaha, použitá při sestavování vzorců (4.30), (4.39), (4.40) je použitelná i pro funkce s obecnými nosiči, mající nespojitosti v jiném bodě než t=0 a při existenci většího počtu bodů nespojitosti.

V nejobecnějším případě půjde o funkci F(t) omezenou, po částech spojitou a hladkou, definovanou na R^1 a mající v každém konečném intervalu $M \subset R^1$ konečný počet bodů nespojitosti t_k (k=...-3,-2,-1,0,1,2,3,...) samotné funkce nebo jejích derivací. V každém bodě nespojitosti přitom existují derivace zprava i zleva. Označíme-li symbolem $\Delta f_k^{(j)}$ hodnotu skoku j-té derivace v bodě $t=t_k$

$$\Delta f_k^{(j)} = f^{(j)}(t_k+0) - f^{(j)}(t_k-0), \qquad (j=0,1,2,3,\dots) \qquad (4.44)$$

povede tato úvaha na vzorec

$$F^{[n]} = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta f_k^{(j)} \, \delta^{[n-1-j]}(t-t_k) \right\} + [f^{(n)}(t)] \qquad (4.45)$$

s tím, že poslední člen se uvažuje pouze v bodech, v nichž má smysl (je definován).

Definice operace inverzní k derivování, tedy pojem primitivní distribuce, je poněkud složitější a pro naše účely nemá význam. V dalším paragrafu uvidíme, že vystačíme s jiným druhem inverzní operace - s tzv. konvolutorním násobením Heavisideovou funkcí h(t).

4.3. Konvoluce, konvolutorní algebra $\mathcal{A}$

Mějme dvě pravostranné distribuce f,g. Jejich *konvolutorní součin* (stručně *konvoluci*)

$$k = f * g \qquad (4.46)$$

lze zjednodušeně s jistou dávkou nepřesnosti spíše teoretického charakteru definovat jako

$$\langle f*g,\varphi\rangle = \langle f(t),\langle g(\tau),\varphi(t+\tau)\rangle\rangle = \qquad (4.47)$$
$$= \langle g(\tau),\langle f(t),\varphi(t+\tau)\rangle\rangle, \qquad t\in K.$$

Poslední výraz můžeme pomocí (4.5) převést na tvar

$$\langle f*g,\varphi\rangle = \langle g(\tau),\langle f(t-\tau),\varphi(t)\rangle\rangle. \qquad (4.48)$$

V případě regulárních distribucí (anebo lokálně integrovatelných funkcí) dostáváme z (4.48) výraz pro klasickou konvoluci funkcí

$$f * g = \int_0^t g(\tau)\ f(t-\tau)\ d\tau. \qquad (4.49)$$

Výsledkem konvolutorního násobení je pravostranná distribuce $k(t)\in\mathcal{D}'_P$. Vektorový prostor $\mathcal{D}'_P$ je podle toho uzavřen vzhledem ke konvolutornímu násobení.

Konvoluce (4.46) má tyto vlastnosti

a) je komutativní

b) je distributivní

c) je asociativní.

Zkoumejme nyní součin delta distribuce $\delta(t)$ s distribucí $f\in\mathcal{D}'_P$; s ohledem na (2.35) nebo (4.10) platí

$$\langle \delta*f,\varphi\rangle = \langle f*\delta,\varphi\rangle = \langle f(t),\langle\delta(\tau),\varphi(t+\tau)\rangle\rangle = \qquad (4.50)$$
$$= \langle f(t),\varphi(t)\rangle,$$

takže

$$\delta * f = f. \qquad (4.51)$$

Delta distribuce je tedy *jednotkovým prvkem* pro konvolutorní násobení.

Zvolíme-li konvoluci jako operaci násobení v $\mathcal{D}'_P$, přejde lineární vektorový prostor $\mathcal{D}'_P$ v (konvolutorní) algebru $\mathcal{A}$, přesněji v komutativní algebru s jednotkovým prvkem $\delta(t)$, bez dělitelů nuly.

Na posledním místě jmenovaná vlastnost algebry $\mathcal{A}$ je vyjádřením tzv. zobecněného *Titchmarshova teorému*:

Konvoluce dvou pravostranných distribucí $f*g$ je nulovou distribucí jen tehdy, jestliže aspoň jedna z distribucí f,g je nulovou distribucí.

Platí tedy

$$f*g = g*f, \tag{4.52}$$
$$f*(g+p) = f*g + f*p,$$
$$f*(g*p) = (f*g)*p,$$
$$f*\delta = f,$$
$$f*g = 0 \Rightarrow f = 0 \vee g = 0 \vee f = g = 0$$

pro každé tři pravostranné distribuce f,g,p.

Vzhledem k vlastnostem konvolutorní algebry $\mathcal{A}$ můžeme s pravostrannými distribucemi zacházet v podstatě jako s čísly; pouze místo součinu čísel budeme mít konvoluci distribucí, místo jednotky jednotkový prvek $\delta(t)$ algebry $\mathcal{A}$. Můžeme tedy také definovat prvek f^{*-1} inverzní v $\mathcal{A}$ k $f \in \mathcal{D}'_P$ rovnicí

$$f^{*-1} * f = \delta. \tag{4.53}$$

Na rozdíl od algebry čísel nemá však každá nenulová distribuce z $\mathcal{D}'_P$ inverzní prvek. Pokud má v $\mathcal{D}'_P$ inverzní prvek, je tento prvek jediný. V tomto případě říkáme, že f je v $\mathcal{A}$ (anebo někdy v $\mathcal{D}'_P$) invertibilní.

Pro inverzní prvek konvoluce (4.46) dostáváme výraz

$$k^{*-1} = f^{*-1} * g^{*-1} \tag{4.54}$$

za předpokladu, že f i g jsou invertibilní v $\mathcal{D}'_P$.

Z operací nad konvolucemi v teorii vazkopružnosti dále uplatníme *posunutí*, definované rovnicí

$$k(t-a) = f(t-a) * g(t) = f(t) * g(t-a), \qquad t-a \in K \tag{4.55}$$

a *distributivní derivování*, pro něž platí

$$k^{[m]} = f^{[p]} * g^{[r]}, \qquad p+r=m. \tag{4.56}$$

Dále si povšimneme, že pro každou pravostrannou distribuci f podle (4.56), (4.51) a (2.34) můžeme psát

$$f^{[1]}* h = f * h^{[1]} = f*\delta = f. \tag{4.57}$$

Konvolutorní násobení Heavisideovou funkcí a distributivní derivování jsou tak v jistém smyslu inverzní operace.

Mějme nyní dvě distribuce konečného řádu z $\mathcal{D}'_P$, řekněme f_1 a f_2. Z definice distribuce konečného řádu na R^1 plyne, že f_1,

f_2 jsou zobecněnými derivacemi jistých funkcí g_1, g_2 spojitých v R^1

$$f_1 = g_1^{[\alpha]}, \quad f_2 = g_2^{[\beta]}. \tag{4.58}$$

Označme obyčejný konvolutorní součin funkcí g_1, g_2, definovaný rovnicí (4.49) symbolem q:

$$q = g_1 * g_2. \tag{4.59}$$

Konvolutorní součin $k = f_1 * f_2$ je pak definován jednoduše jako distributivní derivace funkce q podle (4.59)

$$f_1 * f_2 = g_1^{[\alpha]} * g_2^{[\beta]} = q^{[\alpha+\beta]}. \tag{4.60}$$

Konvoluce (4.60) existuje vždy a přechází v klasickou konvoluci (4.49) v případě, kdy f_1 a f_2 jsou regulární distribuce.

Na závěr tohoto odstavce odvoďme ještě jeden užitečný vzorec. Platí

$$\begin{aligned} \langle\delta^{[m]}(t-a)*f(t),\varphi\rangle &= \langle\delta(t-a)*f^{[m]}(t),\varphi(t)\rangle = \qquad (4.61)\\ &= \langle f^{[m]}(t)*\delta(t-a),\varphi(t)\rangle = \langle f^{[m]}(t),\langle\delta(\tau-a),\varphi(t+\tau)\rangle\rangle = \\ &= \langle f^{[m]}(t),\langle\delta(\tau),\varphi(t+\tau+a)\rangle\rangle = \langle f^{[m]}(t),\varphi(t+a)\rangle = \\ &= \langle f^{[m]}(t-a),\varphi(t)\rangle\rangle, \end{aligned}$$

takže máme

$$\delta^{[m]}(t-a) * f(t) = f^{[m]}(t-a). \tag{4.62}$$

5. Rovnice s konvolucí

V prostoru $\mathcal{D}'_P$ pravostranných distribucí nazýváme rovnicí s konvolucí rovnici typu

$$f * u = g, \tag{5.1}$$

kde f (tzv. *koeficient rovnice*), g (*pravá strana*) jsou z $\mathcal{D}'_P$ a u (*neznámá*) hledáme rovněž v $\mathcal{D}'_P$. Na rovnice tohoto typu vede celá řada nejrozmanitějších problémů z nejrůznějších oblastí techniky. Dá se ukázat, že pod pojem rovnice s konvolucí (5.1) se dají zařadit mj. obyčejné diferenciální rovnice s konstantními součiniteli, podobné rovnice diferenční, integrální rovnice a kombinace vyjmenovaných typů rovnic, různé typy parciálních diferenciálních rovnic, soustavy simultánních rovnic uvedených typů atd.

Ilustrujme tuto skutečnost na prvně vyjmenovaném případu. Označíme-li symbolem L obecný lineární diferenciální operátor s konstantními součiniteli, můžeme obyčejnou diferenciální rovnici napsat ve tvaru

$$Lu = g. \tag{5.2}$$

Z vlastností delta distribuce plyne, že místo (5.2) můžeme psát

$$\delta * Lu = g,$$

resp. na základě vzorce (4.56)

$$L\delta * u = g. \tag{5.3}$$

položíme-li v (5.3)

$$f = L\delta, \tag{5.4}$$

přejde rovnice (5.3) v (5.1).

Předpokládejme, že f v rovnici (5.1) je invertibilní v $\mathcal{D}'_P$ a násobme tuto rovnici inverzním prvkem f^{*-1}. Dostaneme nejprve

$$f^{*-1} * f * u = f^{*-1} * g \tag{5.5}$$

a pak s ohledem na (4.53), (4.51)

$$u = f^{*-1} * g. \tag{5.6}$$

Existence inverzního prvku f^{*-1} v $\mathcal{D}'_P$ je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby rovnice (5.1) měla v $\mathcal{D}'_P$ řešení pro každou pravou stranu $g \in \mathcal{D}'_P$. Toto řešení je jediné a je dáno rovnicí (5.6).

6. Laplaceova transformace

Distribuci f nazveme Laplaceovsky transformovatelnou, jestliže patří do $\mathcal{D}'_0$ (srovnej § 4.1). *Laplaceův obraz* takové distribuce je pak definován jako

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{L}\{f\} = \langle e^{-ct} f(t), \lambda(t)\ e^{-(p-c)t} \rangle, \tag{6.1}$$

kde $\lambda(t)$ je nekonečně hladká funkce z $\mathcal{D}_p$ nabývající v některém okolí nosiče f jednotkové hodnoty. S jistou dávkou nepřesnosti můžeme místo (6.1) používat přehlednějšího zápisu této definice

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{L}\{f\} = \langle f(t), e^{-pt} \rangle. \tag{6.2}$$

Zde značí

$$p = \varrho + i\omega \tag{6.3}$$

komplexní číslo, tzv. *parametr Laplaceovy transformace*. Ve většině případů vystačíme s tzv. reálnou Laplaceovou transformací, kdy parametrem p bude reálné číslo.

Označíme-li symbolem ϱ_1 infimum všech reálných hodnot c, pro které platí druhá z podmínek (4.14), nazveme oblast

$$\mathrm{Re}\ p = \varrho > \varrho_1$$

oblastí konvergence Laplaceovy transformace. Transformace (6.2) je jednoznačná

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\} \Rightarrow f=g \tag{6.4}$$

a Laplaceův obraz $\tilde{f}(p)=\mathcal{L}\{f\}$ je v oblasti konvergence holomorfní funkce parametru p.

Tabulky přiřazení obrazů $\tilde{f}(p)$ a originálů $f(t)$ tvoří tzv. *slovník Laplaceovy transformace*, soubor teorémů je pak tzv. *gramatika*. Pomocí gramatiky lze ze základních přiřazení odvozovat přiřazení nová, to znamená neustále rozšiřovat sestavené slovníky. Pro praktické používání Laplaceovy transformace nám v obou směrech poskytne velmi dobré služby Doetsch [3], pro potřeby této publikace vystačíme se vztahy uvedenými v Tab.6.1. Snad je vhodné upozornit na to, že se v tabulkách ve všech publikacích obecně mlčky předpokládá, že originály jsou rovny nule pro $t \in K_L$ a uvádějí se jejich tvary pro $t \in K$. Činitel $h(t)$, který by legalizoval tuto skutečnost, se pro zjednodušení zápisu vesměs vynechává.

Pro distribuci $f \in \mathcal{D}'_0$ konečného řádu na R^1 podle definice platí

$$f(t) = g^{[j]}(t), \tag{6.5}$$

kde g(t) je laplaceovsky transformovatelná funkce spojitá v R^1. Laplaceův obraz funkce g(t) nechť je

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \tilde{g}(p) \quad \text{při } \varrho>\varrho_a , \tag{6.6}$$

kde ϱ_a je úsečka absolutní konvergence příslušného Laplaceova integrálu. Laplaceovy obrazy distribucí konečného řádu můžeme pak definovat jednoduše jako

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g^{[j]}(t)\} = p^j \, \tilde{g}(p). \tag{6.7}$$

Pravá strana této rovnice existuje v otevřené polorovině Re p = $= \varrho>\varrho_a$ a reprezentuje zde holomorfní funkci proměnné p. Podle (2.14), (2.34) např. platí

$$\delta^{[m]} = g^{[m+2]}; \tag{6.8}$$

protože

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{t\} = \tilde{g}(p) = p^{-2}, \tag{6.9}$$

dostáváme z (6.7)

$$\mathcal{L}\{\delta^{[m]}\} = p^{m+2} \, p^{-2} = p^m , \quad (m=0,1,2,\dots). \tag{6.10}$$

Na rozdíl od klasické Laplaceovy transformace funkcí se v Laplaceových obrazech distribucí objevují mocniny p s nezáporným exponentem.

Nakonec obraťme svou pozornost na Laplaceův obraz konvoluce dvou distribucí f,g z $\mathcal{D}'_0$. Nechť je

$$\mathcal{L}\{f\} = \tilde{f} \quad \text{při Re } p = \varrho>\varrho_f \tag{6.11}$$

$$\mathcal{L}\{g\} = \tilde{g} \quad \text{při Re } p = \varrho>\varrho_g .$$

Konvolutorní součin takových dvou distribucí je rovněž z $\mathcal{D}'_0$ a platí

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \tilde{f}.\tilde{g} \quad \text{při Re } p >\varrho_s , \tag{6.12}$$

kde

$$\varrho_s = \sup\, (\varrho_f,\varrho_g). \tag{6.13}$$

Pomocí tohoto vzorce a vztahů (4.62) - při a=0 - , (4.56) odvodíme snadno vzorec pro Laplaceovu transformaci derivace

$f^{[m]}$ distribuce $f \in \mathcal{D}'_0$. Máme

$$f^{[m]} = \delta * f^{[m]} = \delta^{[m]} * f,$$

takže podle (6.10), (6.12) je

$$\mathcal{L}\{f^{[m]}\} = \mathcal{L}\{\delta^{[m]}\} \, \mathcal{L}\{f\} = p^m \, \tilde{f} \quad \text{při } \operatorname{Re} p > \varrho_f. \tag{6.14}$$

7. Dva abelovské teorémy

V další kapitole zavedeme dva teorémy, které uvádějí do souvislosti chování Laplaceova obrazu $\tilde{f}(p)$ pro p blížící se k nule (nebo k nekonečnu) s chováním jistých regulárních distribucí při t blížícím se k nekonečnu (nebo k nule).

První z těchto teorémů je obdobou klasického teorému o *počáteční hodnotě* a můžeme ho formulovat takto:

Buď $f(t)$ z $\mathcal{D}'_0$ a předpokládejme, že v některém okolí počátku $t=0$ je $f(t)$ regulární distribucí odpovídající lebesgueovsky integrovatelné funkci $g(t)$. Dále nechť existuje komplexní číslo α a reálné číslo $k>-1$ takové, že platí

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{g(t)}{t^k} = \alpha. \tag{7.1}$$

Pak je

$$\lim_{\varrho \to \infty} \frac{\varrho^{k+1} \, \tilde{f}(\varrho)}{\Gamma(k+1)} = \alpha, \tag{7.2}$$

když

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \qquad p = \varrho + i\omega \tag{7.3}$$

a $\Gamma(k+1)$ značí gama funkci (viz např. [1]).

Druhý teorém je obdobou teorému o *konečné hodnotě* a zní:

Buď $f(t)$ z $\mathcal{D}'_0$ a předpokládejme, že nad některým polonekonečným intervalem $\tau < t < \infty$ v K je $f(t)$ regulární distribucí odpovídající lokálně integrovatelné funkci $g(t)$, která je laplaceovsky transformovatelná. Nechť dále existuje komplexní číslo α a reálné číslo $k>-1$ takové, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t^k} = \alpha. \tag{7.4}$$

Pak je

$$\lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\varrho^{k+1}\,\tilde{f}(\varrho)}{\Gamma(k+1)} = \alpha \tag{7.5}$$

při platnosti (7.3).

Pro $k=0$ je $\Gamma(k+1)=1$ a výše uvedené teorémy, resp. vzorce přecházejí v teorémy či vzorce klasické (viz též *Tauberovy teorémy* anebo tzv. *věty o limitách* v teorii Laplaceovy transformace).

8. TEMPEROVANÉ DISTRIBUCE

Důležitým typem distribucí jsou distribuce temperované anebo distribuce pomalého růstu. V našich úlohách budou úzce spojeny s pojmem distributivní fourierovská transformovatelnost (viz kap.9). V § 4.1 jsme uvedli jejich definici; s ohledem na jejich význam pro teorii vazkopružnosti jim věnujeme v této kapitole větší pozornost.

Nejprve se zmíníme o tom, co je pod tímto pojmem skryto ve zvláštním případě regulárních distribucí:

Říkáme, že lokálně integrovatelná funkce $f(t)$ je funkcí pomalého růstu (temperovanou), jestliže platí

$$|f(t)| \le A|t|^k \qquad \text{pro } |t| \to \infty. \tag{8.1}$$

Z definice temperované distribuce (§ 4.1) plyne, že distribuce $f(t)$, která je obecně spojitým lineárním funkcionálem na $\mathcal{D}\subset\mathcal{S}$, bude temperovanou distribucí, jestliže je možné rozšířit ji na spojitý funkcionál na $\mathcal{S}$. Podle toho je temperovanou distribucí

1. integrovatelná funkce $f \in L^1$
2. omezená funkce
3. lokálně integrovatelná funkce pomalého růstu
4. distribuce s omezeným nosičem [11] $f \in \mathcal{E}' \in \mathcal{S}'$
5. libovolná distributivní derivace temperované distribuce
6. součin temperované distribuce s obecným polynomem proměnné t

Prostor $\mathcal{S}'$ temperovaných distribucí je uzavřen vzhledem ke konvergenci. Protože je tento vektorový prostor vlastním podprostorem $\mathcal{D}'$, platí všechny operace nad distribucemi definované pro $\mathcal{D}'$ také pro $\mathcal{S}'$. Výsledek těchto operací však nemusí nutně patřit do $\mathcal{S}'$. Patří tam však v případě těchto operací

a) sčítání distribucí
b) násobení konstantou
c) posunutí distribuce
d) transposice distribuce
e) násobení nezávisle proměnné kladnou konstantou
f) derivování distribuce.

Poněkud složitější situace nastává u konvolutorního násobení. Jsou-li nosiče distribucí f a g neomezeny ($f \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{D}'$), nemá používaná definice konvoluce smysl; konvoluce dokonce obecně neexistuje. Jestliže je však chování těchto distribucí při $|t| \to \infty$ dostatečně omezeno, lze jejich konvoluci definovat jiným způsobem. Předpokládejme tedy, že distribuce f je temperována ($f \in \mathcal{S}'$) a g(t) je testovací funkce rychlého poklesu ($g \in \mathcal{S}$). Pak můžeme konvoluci $f*g$ vyjádřit předpisem

$$f * g = \langle f(\tau), g(t-\tau) \rangle, \qquad f \in \mathcal{S}', \; g \in \mathcal{S} \qquad (8.2)$$

a platí

1. konvoluce $k=f*g$ a všechny její derivace jsou funkcemi pomalého růstu
2. konvoluce k je nekonečně hladkou funkcí

[11] V tomto případě má výraz $\langle f, \varphi \rangle$ smysl dokonce pro všechny testovací funkce $\varphi(t)$ bez ohledu na jejich klesání v nekonečnu.

3. derivace konvoluce jsou dány vzorcem

$$k^{(m)} = \langle f(\tau), \frac{\partial^m}{\partial t^m} g(t-\tau)\rangle. \tag{8.3}$$

9 Fourierova transformace

9.1. Fourierova transformace integrovatelné funkce

V úvodu k deváté kapitole připomeneme klasickou Fourierovu transformaci z teorie funkcí.

Mějme lebesgueovsky integrovatelnou funkci reálné proměnné f(t), to jest funkci, pro niž konverguje integrál [12]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = A<\infty, \tag{9.1}$$

která je po úsecích spojitá a má po úsecích spojitou derivaci. Potom funkci $\overline{f}$ definovanou na imaginární ose vztahem

$$\overline{f}(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{9.2}$$

nazýváme Fourierovým obrazem funkce f. Transformace

$$\overline{f} = \mathcal{F}f, \tag{9.3}$$

která přiřazuje originálu f(t) obraz $\overline{f}$ definovaný rovnicí (9.2), je Fourierova transformace.

---

[12] Z definice Lebesgueova integrálu vyplývá, že taková funkce f(t) je absolutně integrovatelná. Pro vektorový prostor těchto funkcí se obvykle používá značení L^1.

Jestliže v každém bodě $t \in R^1$ platí ještě

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(t+\varepsilon) + f(t-\varepsilon)}{2}, \qquad (9.4)$$

potom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \qquad (9.5)$$

když integrál na pravé straně je třeba brát ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty. Ve většině případů aplikace Fourierovy transformace bude $\overline{f}(i\omega)$ lokálně integrovatelnou funkcí, která je absolutně integrovatelná přes interval $-\infty<t<+\infty$. Pak ve vztahu (9.5) nejde o hlavní hodnotu; vztah platí přímo v uvedeném tvaru.

Transformace, která každému obrazu $\overline{f}=\mathcal{F}f$ přiřazuje originál f, je tzv. inverzní Fourierova transformace, pro niž budeme používat symbolu $\mathcal{F}^{-1}$; platí

$$f = \mathcal{F}^{-1}\, \overline{f}. \qquad (9.6)$$

Uveďme nyní některé vlastnosti Fourierovy transformace:

1. Fourierův obraz lebesgueovsky integrovatelné funkce je spojitou funkcí transformačního parametru ω. Tento obraz je omezený a dá se ukázat, že platí

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \overline{f}(i\omega) = 0 \qquad (9.7)$$

2. Fourierův obraz lze definovat i v jiných případech; např. je-li $f(t)$ monotónní pro $t \in K_L$ i pro $t \in K_P$ a má-li pro $|t| \to \infty$ limitu 0 (nebo také má-li konečnou variaci a je-li tedy konečnou lineární kombinací funkcí s uvedenými vlastnostmi).
3. Obě transformace (přímou i inverzní) lze definovat i formálně poněkud odlišnými vzorci

$$\overline{f}(i\omega) = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\varkappa\omega t}\, dt, \qquad (9.8)$$

$$f(t) = \frac{1}{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(i\omega)\, e^{i\varkappa\omega t}\, dt,$$

za předpokladu, že platí

$$k\ell = \frac{2\pi}{|\varkappa|}. \qquad (9.9)$$

Obvykle se používá těchto konstant $\varkappa, k, \ell$

$$\varkappa = \pm 2\pi; \qquad k=\ell=1 \qquad (9.10)$$

$$\varkappa = \pm 1; \qquad k=1,\ \ell=2\pi$$

$$\varkappa = \pm 1; \qquad k=\ell=\sqrt{2\pi}.$$

Každá z těchto alternativních voleb má své přednosti. Je na místě upozornit na to, že různé tabulky Fourierových transformací se liší podle toho, které z alternativ bylo použito. Proto je třeba si vždy uvědomit, jak je pro používanou tabulku Fourierova transformace definována.

4. Z rovnosti obrazů dvou fourierovsky transformovatelných funkcí plyne rovnost originálů téměř všude (originály patří do ekvivalentní třídy funkcí).
5. Pro každé dvě fourierovsky transformovatelné funkce f(t), g(t) platí tzv. Parsevalova rovnice

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(x)\, g(x)\, dx, \qquad (9.11)$$

resp.

$$(f,\overline{g}) = (\overline{f},g). \qquad (9.12)$$

6. Podmínkám fourierovské transformovatelnosti vyhovují všechny funkce rychlého poklesu, tedy i testovací funkce $\varphi\in\mathcal{S}$. Fourierův obraz takové funkce patří rovněž do $\mathcal{S}$.
7. Pro funkci f(t), která má tyto vlastnosti
   a) konverguje Lebesgueův integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = A<\infty, \qquad (9.13)$$

b) je na intervalu K po úsecích spojitá a má po úsecích spojitou derivaci,

můžeme definovat sinovou a kosinovou Fourierovu transformaci.

8. *Sinový Fourierův obraz* je funkce reálné proměnné $\overline{f}_s(\omega)$, definovaná vztahem

$$\overline{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \tag{9.14}$$

9. *Inverzní sinová transformace*: Nechť vedle podmínek a),b) pro všechna $t \in K_p$ je

$$f(t) = \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)], \tag{9.15}$$

potom pro $t \in K$ platí

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \overline{f}_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega. \tag{9.16}$$

10. Při splnění podmínek a),b) nazýváme *Fourierovým kosinovým obrazem* funkci reálné proměnné $\overline{f}_c(\omega)$, definovanou rovností

$$\overline{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt. \tag{9.17}$$

11. *Inverzní kosinová transformace*: Nechť jsou splněny podmínky a),b) a (9.15); potom pro $t \in K_p$ platí

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \overline{f}_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega. \tag{9.18}$$

9.2. Fourierova transformace temperované distribuce

Interpretujme nyní funkci $f(t) \in L^1$ jako regulární distribuci a sestavme výraz pro Fourierův obraz $\mathcal{F}f$. Použijeme k tomu Parsevalovy rovmnice (9.12)

$$(\overline{f},\varphi) = (f,\overline{\varphi}), \tag{9.19}$$

platící pro $f \in L^1$, $\varphi \in L^1$. Nahraďme nyní skalární součiny v (9.19) obecnějšími spojitými lineárními funkcionály a zpřísněme podmínku pro testovací funkce na požadavek, aby $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle \overline{f},\varphi\rangle = \langle f,\overline{\varphi}\rangle \tag{9.20}$$

anebo

$$\langle \mathcal{F}f,\varphi\rangle = \langle f,\mathcal{F}\varphi\rangle \tag{9.21}$$

a zkoumejme, kdy mají pravé strany (9.20), (9.21) smysl. Především vidíme, že tyto výrazy nemají smysl pro každou distribuci $f \in \mathcal{D}'$; jinými slovy ne každá distribuce má v $\mathcal{D}'$ Fourierův obraz. Dá se však ukázat, že pro

$$f \in \mathcal{S}' \wedge \varphi \in \mathcal{S} \tag{9.22}$$

mají pravé strany (9.20), (9.21) smysl a definují jistou temperovanou distribuci $\overline{f}(i\omega)$

$$\overline{f}(i\omega) = \langle f,\overline{\varphi}\rangle = \langle f,\mathcal{F}\varphi\rangle, \tag{9.23}$$

kterou nazveme Fourierovým obrazem temperované distribuce f

$$\overline{f}(i\omega) = \mathcal{F}f. \tag{9.24}$$

Dosadíme-li do (9.21)

$$g(i\omega) = \mathcal{F}f \in \mathcal{S}', \qquad \mathcal{F}\varphi = \psi \in \mathcal{S} \tag{9.25}$$

a použijeme-li pro testovací funkce místo ψ obvyklého symbolu φ, dostaneme definiční vztah pro inverzní Fourierovu transformaci temperované distribuce

$$\langle \mathcal{F}^{-1}g,\varphi\rangle = \langle g,\mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle. \tag{9.26}$$

Kromě toho lze z (9.21)-(9.26) získat rovnici

$$\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f,\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}f,\mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle = \langle f,\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \tag{9.27}$$

dávající očekávaný vztah

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}. \tag{9.28}$$

Také zřejmě platí

$$\mathcal{F}f = 0 \tag{9.29}$$

pouze tehdy, jestliže f je nulovou distribucí. Pokud veličina f v (9.29) bude funkcí, mohou se hodnoty originálů f(t) lišit od nuly na množině míry nula. Stručně někdy říkáme, že pokud se funkce f(t) rovná nule jako distribuce, je nulová skoro všude.

9.3. Fourierova transformace distribuce s omezeným nosičem

Každá distribuce s omezeným nosičem $f \in \mathcal{E}'$ je nutně distribucí temperovanou, protože platí $f \in \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$. Fourierova transformace takové distribuce je určena zjednodušeným vztahem

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \bar{F}(i\omega) = \langle f(t), e^{-i\omega t} \rangle, \qquad (9.30)$$

ve kterém je třeba pravou stranu chápat jako

$$\langle f(t), \lambda(t) e^{-i\omega t} \rangle, \qquad (9.31)$$

kde $\lambda(t)$ značí libovolnou testovací funkci z $\mathcal{D}$, nabývající v některém okolí nosiče f jednotkové hodnoty.

Fourierův obraz distribuce $f \in \mathcal{E}'$ je nekonečně diferencovatelnou (nekonečně hladkou) funkcí transformačního parametru ω. Tuto funkci lze rozšířit pro komplexní hodnoty ω na celou holomorfní funkci.

Za pomoci rovnice (9.30) snadno odvodíme Fourierovy obrazy Diracovy distribuce a jejích derivací. Použijeme-li obecnějšího vztahu pro posunutou distribuci $\delta(t-\tau)$, můžeme psát jednak

$$\mathcal{F}\{\delta(t-\tau)\} = \langle \delta(t-\tau), e^{-i\omega t} \rangle = \langle \delta(t), e^{-i\omega(t+\tau)} \rangle = e^{-i\omega\tau}, \qquad (9.32)$$

jednak

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta^{[k]}(t-\tau)\} &= \langle \delta^{[k]}(t-\tau),\ e^{-i\omega t} \rangle = \qquad (9.33) \\ &= (-1)^k \langle \delta(t-\tau), [e^{-i\omega t}]^{(k)} \rangle = \\ &= (i\omega)^k \langle \delta(t-\tau), e^{-i\omega t} \rangle = (i\omega)^k e^{-i\omega\tau}. \end{aligned}$$

Vzorec (9.32) je, pochopitelně, zvláštním případem vzorce (9.33) pro k=0. Položíme-li v (9.33) $\tau=0$, dostaneme ještě

$$\mathcal{F}\{\delta^{[k]}(t)\} = (i\omega)^k. \qquad (9.34)$$

Další případy Fourierových obrazů temperovaných distribucí či distribucí s omezeným nosičem nalezneme v tab.9.1.

9.4. Fourierova transformace konvoluce

V kap.6 jsme viděli, že Laplaceův obraz konvoluce dvou laplaceovsky transformovatelných distribucí f a g existuje a je roven součinu Laplaceových obrazů dvou distribucí (viz(6.12))

$$\mathscr{L}\{f*g\} = \tilde{f}.\tilde{g}, \qquad f\in\mathscr{D}'_0 \ , \ g\in\mathscr{D}'_0 . \tag{9.35}$$

V případě Fourierovy transformace je situace poněkud složitější Zde nestačí pro existenci Fourierova obrazu konvoluce požadavek, aby bylo $f\in\mathscr{S}'$, $g\in\mathscr{S}'$. Vztah analogický k (9.35)

$$\mathscr{F}\{f*g\} = \overline{f}.\overline{g} \tag{9.36}$$

platí pouze v případě, kdy obě distribuce mají omezené nosiče

$$f \in \mathscr{E}', \qquad g \in \mathscr{E}'. \tag{9.37}$$

Zemanian v [50] upozorňuje, že podmínku (9.37) je možno změkčit na požadavek, aby

$$f \in \mathscr{E}' \wedge g \in \mathscr{S}' \tag{9.38}$$

anebo

$$f \in \mathscr{S}' \wedge g \in \mathscr{E}'. \tag{9.39}$$

Jestliže f a g jsou funkce z L^1, pak jejich konvoluce je rovněž v L^1 a platí (9.36) - viz např. L.Schwartz [6].

10. Jednoduché aplikace Schwartzových distribucí

Použití Schwartzovy teorie distribucí ukážeme na elementární úloze statiky konstrukcí, na příkladu příčně zatížených nosníků. Základní diferenciální rovnice tohoto případu má v souřadnicovém systému x, y známý tvar

$$EJ\ v^{(4)} = q, \tag{10.1}$$

v němž $v = v(x)$ značí průhyb, $x \in (0, \ell)$ je souřadnice bodu nosníku, $q = q(x)$ intenzita příčného zatížení. Veličiny v, q jsou kladné ve směru kladné osy y.

Popsaný příklad uvádíme pro jeho naprostou jednoduchost, která umožní snadné sledování postupu aplikace. Neprojeví se zde, celkem pochopitelně, plně výhodnost distributivního pojetí úlohy.

Veličiny v, q v rovnici (10.1) jsou funkce, derivace $v^{(4)}$ je klasickou derivací. Přejděme proto nejprve na pravostranné distribuce V(x), Q(x). Platí

$$V(x) = v(x)\ h(x) \tag{10.2}$$
$$Q(x) = q(x)\ h(x)$$
$$V^{[4]} = v^{(4)}(x)\ h(x) + v(0^+)\delta^{[3]} + v^{(1)}(0^+)\delta^{[2]} +$$
$$+ v^{(2)}(0^+)\delta^{[1]} + v^{(3)}(0^+)\delta.$$

Z poslední z rovnic (10.2) plyne

$$v^{(4)}h(x) = V^{[4]} - v(0^+)\delta^{[3]} - v^{(1)}(0^+)\delta^{[2]} - \tag{10.3}$$
$$- v^{(2)}(0^+)\delta^{[1]} - v^{(3)}(0^+)\delta.$$

Po dosazení z (10.2) a (10.3) do (10.1) a jednoduché úpravě dostaneme základní diferenciální rovnici naší úlohy v distributivním pojetí

$$EJ\ V^{[4]} = Q(x) + EJ\ [v(0^+)\delta^{[3]} + v^{(1)}(0^+)\delta^{[2]} + \tag{10.4}$$
$$+ v^{(2)}(0^+)\delta^{[1]} + v^{(3)}(0^+)\delta].$$

Taková rovnice se řeší postupným konvolutorním násobením Heavisideovou funkcí h(x). Ukážeme si podrobně první násobení

$$EJ\ v^{[4]}*h = Q*h + EJ\ [v(0^+)\delta^{[3]}*h + v^{(1)}(0^+)\delta^{[2]}*h + \tag{10.5}$$
$$+ v^{(2)}(0^+)\delta^{[1]}*h + v^{(3)}(0^+)\delta*h].$$

Protože

$$v^{[4]}*h = v^{[3]}*h^{[1]} = v^{[3]}*\delta = v^{[3]} \tag{10.6}$$

a podobně

$$\delta^{[n]}*h = \delta^{[n-1]}*h^{[1]} = \delta^{[n-1]}*\delta = \delta^{[n-1]}, \tag{10.7}$$

pro n = 1,2,3,.., dostaneme z (10.5) rovnici nižšího řádu

$$EJ\ v^{[3]} = Q*h + EJ\ [v(0^+)\delta^{[2]} + v^{(1)}(0^+)\delta^{[1]} + \tag{10.8}$$
$$+ v^{(2)}(0^+)\delta + v^{(3)}(0^+)\ h(x)].$$

Konvoluci $Q*h$ nemůžeme - bez zadání konkrétního tvaru funkce $q(x)$ - vyčíslit. Výpočet pro $q(x) = q = \text{konst.}$ uvedeme později. Popsaný postup můžeme opakovat s výsledkem

$$EJ\ v^{[2]} = Q*h*h + EJ\ [v(0^+)\delta^{[1]} + v^{(1)}(0^+)\delta + \tag{10.9}$$
$$+ v^{(2)}(0^+)\ h(x) + v^{(3)}(0^+)\ h*h].$$

Povšimněme si, že platí

$$h*h = \int_0^x 1.1\ d\xi = x, \tag{10.10}$$

$$h*x^m = x^m*h = \int_0^x 1.\xi^m\ d\xi = \frac{1}{m+1}\ x^{m+1},$$

takže např. místo

$$Q*h*h = Q*(h*h) \tag{10.11}$$

můžeme psát

$$Q*h*h = Q*x$$

resp. dále

$$Q*h*h*h = Q*h*x = \frac{1}{2}Q * x^2 \tag{10.12}$$

$$Q*h*h*h*h = \frac{1}{2}Q*h*x^2 = \frac{1}{2}Q * \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{6}Q * x^3$$

atp.

Vynásobíme-li nyní rovnici (10.9) konvolucí $h*h$, dostaneme po jednoduché úpravě pomocí výše uvedených vzorců postupně

$$\begin{aligned} EJ\ V^{[2]}*h*h = Q*h*h*h*h + EJ\ [&v(0^+)\delta^{[1]}*h*h + \\ &+ v^{(1)}(0^+)\delta*h*h + v^{(2)}(0^+)h*h*h + \\ &+ v^{(3)}(0^+)h*h*h*h] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJ\ V*h^{[1]}*h^{[1]} = \frac{1}{6}Q * x^3 + EJ\ [&v(0^+)\delta*h^{[1]}*h + \\ &+ v^{(1)}(0^+)h*h + v^{(2)}(0^+)x*h + \\ &+ v^{(3)}(0^+)\ \frac{1}{2}\ x^2*h] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJ\ V*\delta*\delta = \frac{1}{6}Q * x^3 + EJ\ [&v(0^+)\delta*\delta*h + v^{(1)}(0^+)x + \\ &+ v^{(2)}(0^+)\ \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{1}{2}\ v^{(3)}(0^+)\ \frac{1}{3}\ x^3] \end{aligned}$$

až po konečný obecný tvar hledaného řešení

$$\begin{aligned} EJ\ V(x) = \frac{1}{6}Q * x^3 + EJ\ [&v(0^+) + v^{(1)}(0^+)x + \\ &+ \frac{1}{2}\ v^{(2)}(0^+)x^2 + \frac{1}{6}\ v^{(3)}(0^+)x^3]\ h(x). \end{aligned} \qquad (10.13)$$

Heavisideova funkce $h(x)$ stojí v (10.13) z formálních důvodů: umisťuje funkci v hranaté závorce, definovanou pro všechna x, nad kladnou poloosu a vytváří z tohoto členu pravostrannou regulární distribuci. Obecné řešení (10.13) platí pro všechna zatížení $q(x)$ - ať spojitá či nespojitá - a pro libovolné okrajové podmínky, to jest pro všechna korektně definovaná podepření nosníku.

Předpokládejme nyní, že nosník nese rovnoměrné spojité zatížení s intenzitou q

$$Q(x) = q\ h(x), \qquad q = \text{konst.} \qquad (10.14)$$

Dosadíme-li z (10.14) do výrazu $Q * x^3$, můžeme s ohledem na (10.10) psát

$$Q * x^3 = qh * x^3 = \frac{1}{4}\ qx^4\ h(x) \qquad (10.15)$$

Dále specifikujme způsob uložení okrajů nosníku. Nejprve

Uvažujme prostě uložený nosník s okrajovými podmínkami

$$v(0^+) = 0, \qquad v^{(2)}(0^+) = 0 \qquad [\text{tj. } M(0) = 0], \tag{10.16}$$

$$v(\ell^-) = 0, \qquad v^{(2)}(\ell^-) = 0 \qquad [\text{tj. } M(\ell) = 0]. \tag{10.17}$$

Rovnice (10.13) nabude vzhledem k platnosti (10.15) a (10.16) tvaru

$$EJ\ V(x) = \left\{ \frac{1}{24}\, qx^4 + EJ[v^{(1)}(0^+)x + \frac{1}{6}\, v^{(3)}(0^+)x^3] \right\} h(x) \tag{10.18}$$
$$= EJ\ v(x)\ h(x)$$

při označení

$$v(x) = \frac{1}{24\ EJ}\, qx^4 + v^{(1)}(0^+)x + \frac{1}{6}\, v^{(3)}(0^+)x^3 . \tag{10.19}$$

Neznámé veličiny $v^{(1)}(0^+)$ a $v^{(3)}(0^+)$ v (10.18), (10.19) určíme z dosud nepoužitých okrajových podmínek (10.17) na $x = \ell$. Pro jejich aplikaci vytvoříme druhou derivaci funkce (10.19)

$$v^{(2)}(x) = \frac{1}{2\ EJ}\, qx^2 + v^{(3)}(0^+)x \tag{10.20}$$

a použijeme nejprve druhé z podmínek (10.17)

$$v^{(2)}(\ell) = \frac{1}{2\ EJ}\, q\ell^2 + v^{(3)}(0^+)\ell = 0$$

dávající

$$v^{(3)}(0^+) = -\frac{1}{2\ EJ}\, q\ell . \tag{10.21}$$

Z první z podmínek (10.17) ve spojení s (10.19) a (10.21) pak vychází

$$\frac{1}{24\ EJ}\, q\ell^4 + v^{(1)}(0^+)\ell + \frac{1}{6}\, v^{(3)}(0^+)\ell^3 = 0$$

resp.

$$v^{(1)}(0^+) = -\frac{1}{24\ EJ}\, q\ell^3 - \frac{1}{6}\, v^{(3)}(0^+)\ell^2 = \frac{1}{24\ EJ}\, q\ell^3 . \tag{10.22}$$

Výsledný tvar rovnice ohybové čáry získáme dosazením z (10.21) a (10.22) do (10.18), resp. (10.19)

$$V(x) = v(x)\ h(x),$$

kde

$$v(x) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{24}\, qx^4 + \frac{1}{24}\, q\ell^3 x - \frac{1}{12}\, q\ell x^3 \right], \tag{10.23}$$

maximální průhyb v $x=\frac{\ell}{2}$ je roven

$$v(\frac{\ell}{2}) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{24}\,q\,\frac{\ell^4}{16} + \frac{1}{24}\,q\ell^3\,\frac{\ell}{2} - \frac{1}{12}\,q\ell\,\frac{\ell^3}{8}\right] = \frac{5\;q\ell^4}{384\;EJ} \qquad (10.24)$$

v souhlase s obecně známým výsledkem.

Ohybové momenty dostaneme z rovnic

$$M(x) = -\,EJ\;v''(x). \qquad (10.25)$$

S přihlédnutím k (10.20) a (10.21) platí

$$M(x) = -\,EJ\left[\frac{1}{2\;EJ}\,qx^2 - \frac{1}{2\;EJ}\,q\ell x\right] = \frac{qx}{2}\,(\ell-x) \qquad (10.26)$$

a pro $x=\frac{\ell}{2}$ také

$$M(\frac{\ell}{2}) = \frac{q}{2}\,\frac{\ell}{2}\,\frac{\ell}{2} = \frac{q\ell^2}{8}\;. \qquad (10.27)$$

Konečně posouvající síly T plynou z rovnic (10.20), (10.21) a

$$T(x) = -\,EJ\;v^{(3)}(x) = -\,EJ\left[\frac{1}{EJ}\,qx + v^{(3)}(0^+)\right] = \qquad (10.28)$$

$$= -\,EJ\left[\frac{1}{EJ}\,qx - \frac{q}{2\;EJ}\,\ell\right] = \frac{q}{2}\,(\ell-2x),$$

takže

$$T(0) = \frac{q\ell}{2}\,, \qquad T(\ell) = -\,\frac{q\ell}{2}\,, \qquad T(\frac{\ell}{2}) = 0 \qquad (10.29)$$

v souhlase se zadáním úlohy.

Obecné řešení (10.13) platí, pochopitelně, i pro staticky neurčité způsoby podepření. Na příklad pro oboustranně dokonale vetknutý nosník s okrajovými podmínkami

$$v(0^+) = v^{(1)}(0^+) = 0, \qquad (10.30)$$

$$v(\ell^-) = v^{(1)}(\ell^-) = 0, \qquad (10.31)$$

zatížený podle (10.14), z (10.13), (10.15) a (10.30) vychází

$$EJ\;V(x) = \left\{\frac{1}{24}\,qx^4 + EJ\left[\frac{1}{2}\,v^{(2)}(0^+)x^2 + \right.\right. \qquad (10.32)$$

$$\left.\left. + \frac{1}{6}\,v^{(3)}(0^+)x^3\right]\right\} h(x) = EJ\;v(x)\;h(x),$$

$$v^{(1)}(x) = \frac{1}{6\;EJ}\,qx^3 + v^{(2)}(0^+)x + \frac{1}{2}\,v^{(3)}(0^+)x^2. \qquad (10.33)$$

Aplikací podmínek (10.31) dostaneme soustavu dvou rovnic pro neznámé veličiny $v^{(2)}(0^+)$ a $v^{(3)}(0^+)$ mající po úpravě tvar

$$v^{(2)}(0^+) + \frac{1}{3}\, v^{(3)}(0^+)\,\ell = -\frac{q\ell^2}{12\ EJ} \tag{10.34}$$

$$v^{(2)}(0^+) + \frac{1}{2}\, v^{(3)}(0^+)\,\ell = -\frac{q\ell^2}{6\ EJ}$$

a řešení

$$v^{(2)}(0^+) = \frac{q\ell^2}{12\ EJ}\,, \qquad v^{(3)}(0^+) = -\frac{q\ell}{2\ EJ}. \tag{10.35}$$

Rovnice ohybové čáry v(x) daná podle (10.32), (10.35)

$$v(x) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{qx^4}{24} + \frac{q\ell^2x^2}{24} - \frac{q\ell x^3}{12}\right] \tag{10.36}$$

má maximální pořadnici v $x = \frac{\ell}{2}$ rovnou

$$v(\tfrac{\ell}{2}) = \frac{ql^4}{384\ EJ}\,. \tag{10.37}$$

Vzhledem k rovnicím

$$v^{(2)}(x) = \frac{q}{12\ EJ}\left[\ell^2 - 6x\,(\ell-x)\right], \tag{10.38}$$

$$v^{(3)}(x) = -\frac{q}{2\ EJ}\,(\ell-2x)$$

plynoucím derivací z (10.33) po dosazení z (10.35) a jednoduché úpravě, vycházejí pro ohybové momenty a posouvající síly výrazy

$$M(x) = -\ EJ\ v^{(2)}(x) = -\frac{q}{12}\left[\ell^2 - 6x\,(\ell-x)\right] \tag{10.39}$$

$$T(x) = -\ EJ\ v^{(3)}(x) = \frac{q}{2}\,(\ell-x)$$

Pro x=0, $x = \frac{\ell}{2}$ a $x=\ell$ z rovnic (10.39) postupně vychází

$$M(0) = -\frac{q\ell^2}{12}\,, \qquad M(\tfrac{\ell}{2}) = \frac{q\ell^2}{24}\,, \qquad M(\ell) = -\frac{q\ell^2}{12} \tag{10.40}$$

$$T(0) = \frac{q\ell}{2}\,, \qquad T(\tfrac{\ell}{2}) = 0\,, \qquad T(\ell) = -\frac{q\ell}{2}$$

v souhlase se známými výsledky.

Rovnice (10.13) platí nejen pro libovolné podepření nosníku, ale také pro libovolné příčné zatížení. Ukažme její použití pro zatížení osamělým břemenem P působícím v obecném bodě $x=\zeta$.

Veličina Q nebude v tomto případě regulární distribucí (10.2), ale distribucí singulární

$$Q = P\,\delta(x-\zeta) \tag{10.41}$$

Platí tedy

$$Q * x^3 = P\,\delta(x-\zeta)*x^3 = P(x-\zeta)^3, \tag{10.42}$$

takže rovnice (10.13) nabude tvaru

$$\begin{aligned} EJ\,V(x) &= \left\{ \frac{1}{6} P(x-\zeta)^3 + EJ \left[v(0^+) + v^{(1)}(0^+)x + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{2} v^{(2)}(0^+)x^2 + \frac{1}{6} v^{(3)}(0^+)x^3 \right] \right\} h(x) = \\ &= EJ\,v(x)\,h(x). \end{aligned} \tag{10.43}$$

Postup stanovení počátečních hodnot $v(0^+)$ až $v^{(3)}(0^+)$ z okrajových podmínek byl podrobně popsán v případě rovnoměrného spojitého zatížení. Tento postup je obecný, zůstává proto v platnosti pro libovolnou veličinu Q.

Na závěr uvažujme případ po částech spojitého zatížení definovaného vztahy

$$\begin{aligned} x\in(0,\zeta_1) &: \quad q(x) \equiv 0 \\ x\in(\zeta_1,\zeta_2) &: \quad q(x) = q(x) \\ x\in(\zeta_2,\ell) &: \quad q(x) \equiv 0. \end{aligned} \tag{10.44}$$

Tomuto zatížení zřejmě odpovídá distribuce

$$Q(x) = q(x) \left[h(x-\zeta_1) - h(x-\zeta_2) \right]. \tag{10.45}$$

Abychom mohli použít k vyčíslení výrazu $Q*x^3$ dříve odvozených vztahů (10.10), rozdělíme případ (10.45) na dvě zatížení, resp. veličiny Q_1 a Q_2. Pro jednoduchost budeme uvažovat rovnoměrné zatížení

$$q(x) \equiv q = \text{konst.} \tag{10.46}$$

Potom můžeme psát

$$Q(x) = Q_1(x) - Q_2(x), \tag{10.47}$$

kde

$$Q_1(x) = q\ h(x-\zeta_1), \qquad Q_2 = q\ h(x-\zeta_2).(10.48) \tag{10.48}$$

Pro určení výrazu typu $Q*x^3$ zvolíme lokální souřadnicové systémy

$$x - \zeta_1 = x_1 , \qquad x - \zeta_2 = x_2 \tag{10.49}$$

a budeme psát

$$Q_1 * x_1^3 = q\ h(x_1) * x_1^3 \tag{10.50}$$

$$Q_2 * x_2^3 = q\ h(x_2) * x_2^3 .$$

Rovnice (10.50) jsou rovnicemi typu (10.15), takže platí

$$Q_1 * x_1^3 = \frac{1}{4} qx_1^4\ h(x_1) \tag{10.51}$$

$$Q_2 * x_2^3 = \frac{1}{4} qx_2^4\ h(x_2)$$

a také

$$Q * x^3 \triangleq \frac{1}{4} q \left[x_1^4\ h(x_1) - x_2^4\ h(x_2) \right] = \tag{10.52}$$

$$= 6\ EJ \left[v_1(x_1)\ h(x_1) - v_2(x_2)\ h(x_2) \right]$$

při označení

$$v_1(x_1) = \frac{1}{24\ EJ} qx_1^4 , \qquad v_2(x_2) = \frac{1}{24\ EJ} qx_2^4 . \tag{10.53}$$

Řešení (10.13) má podle toho tvar

$$\begin{aligned} EJ\ V(x) &= \frac{1}{24} q \left[x_1^4\ h(x_1) - x_2^4\ h(x_2) \right] + EJ \Big[v(0^+) + \\ &+ v^{(1)}(0^+)x + \frac{1}{2} v^{(2)}(0^+)x^2 + \frac{1}{6} v^{(3)}(0^+)x^3 \Big]\ h(x) = \\ &= EJ \Big\{ v_1(x_1)\ h(x_1) - v_2(x_2)\ h(x_2) + \Big[v(0^+) + \\ &+ v^{(1)}(0^+)x + \frac{1}{2} v^{(2)}(0^+)x^2 + \frac{1}{6} v^{(3)}(0^+)x^3 \Big] \Big\}\ h(x) = \\ &= EJ \left[v_1(x_1)\ h(x_1) - v_2(x_2)\ h(x_2) + v_0(x)\ h(x) \right] , \end{aligned} \tag{10.54}$$

kde

$$v_0(x) = v(0^+) + v^{(1)}(0^+)x + \frac{1}{2} v^{(2)}(0^+)x^2 + \frac{1}{6} v^{(3)}(0^+)x^3 . \tag{10.55}$$

Vytvořme dále první tři derivace funkcí v_1, v_2 a v_3 ; protože platí

$$\frac{dv_j(x_j)}{dx} = \frac{dv_j}{dx_j}\,\frac{dx_j}{dx}\,, \qquad (j=1,2) \tag{10.56}$$

$$\frac{dx_j}{dx} = \frac{d(x-\zeta_j)}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dv_j(x_j)}{dx} = \frac{dv_j}{dx_j}\,, \qquad (j=1,2),$$

dostáváme postupnou derivací (10.53) a (10.55)

$$v_1^{(1)} = \frac{1}{6\ EJ}\, qx_1^3\,, \qquad v_2^{(1)} = \frac{1}{6\ EJ}\, qx_2^3\,, \tag{10.57}$$

$$v_0^{(1)} = v^{(1)}(0^+) + v^{(2)}(0^+)x + \frac{1}{2}\, v^{(3)}(0^+)x^2 \ ;$$

$$v_1^{(2)} = \frac{1}{2\ EJ}\, qx_1^2\,, \qquad v_2^{(2)} = \frac{1}{2\ EJ}\, qx_2^2\,, \tag{10.58}$$

$$v_0^{(2)} = v^{(2)}(0^+) + v^{(3)}(0^+)x \ ;$$

$$v_1^{(3)} = \frac{1}{EJ}\, qx_1\,, \qquad v_2^{(3)} = \frac{1}{EJ}\, qx_2\,, \tag{10.59}$$

$$v_0^{(3)} = v^{(3)}(0^+) = \text{konst.}$$

Máme-li na zřeteli, že Heavisideova funkce v (10.54) má formální význam ("umisťuje" jednotlivé členy v_1, v_2, v_0 nad příslušné části nosníku v souhlase se zatížením, resp. veličinou Q), můžeme psát

$$v(x)\ h(x) = v_1(x_1)\ h(x_1) - v_2(x_2)\ h(x_2) + v_0(x)\ h(x) = \tag{10.60}$$

$$= \frac{1}{24\ EJ}\, q\Big[\, x_1^4\ h(x_1) - x_2^4\ h(x_2)\Big] + \Big[\, v(0^+) +$$

$$+ v^{(1)}(0^+)x + \frac{1}{2}\, v^{(2)}(0^+)x^2 + \frac{1}{6}\, v^{(3)}(0^+)x^3\Big]\ h(x)$$

$$v^{(1)}(x)\ h(x) = v_1^{(1)}(x_1)\ h(x_1) - v_2^{(1)}(x_2)\ h(x_2) + v_0^{(1)}(x)\ h(x) =$$

$$= \frac{1}{6\ EJ}\, q\ \Big[\, x_1^3\ h(x_1) - x_2^3\ h(x_2)\Big] + \Big[\, v^{(1)}(0^+) +$$

$$+ v^{(2)}(0^+)x + \frac{1}{2}\, v^{(3)}(0^+)x^2\Big]\ h(x) \ ;$$

$$v^{(2)}(x)\ h(x) = v_1^{(2)}(x_1)\ h(x_1) - v_2^{(2)}(x_2)\ h(x_2) + \qquad (10.61)$$

$$+ v_0^{(2)}(x)\ h(x) = \frac{1}{2\ EJ}\, q\left[x_1^2\ h(x_1) - x_2^2\ h(x_2)\right] +$$

$$+ \left[v^{(2)}(0^+) + v^{(3)}(0^+)x \right] h(x)\ ;$$

$$v^{(3)}(x)\ h(x) = v_1^{(3)}(x_1)\ h(x_1) - v_2^{(3)}(x_2)\ h(x_2) + \qquad (10.62)$$

$$+ v_0^{(3)}(x)\ h(x) = \frac{1}{EJ}\, q\left[x_1\ h(x_1) - x_2\ h(x_2)\right] +$$

$$+ v^{(3)}(0^+)\ h(x).$$

Průhyb určujeme z rovnice (10.60), momenty z rovnice (10.61) ve spojení s rovnicí

$$M(x)\ h(x) = -\ EJ\ v^{(2)}(x)\ h(x) \qquad (10.63)$$

a posouvající síly z rovnice (10.62) a rovnice

$$T(x)\ h(x) = -\ EJ\ v^{(3)}(x)\ h(x) \qquad (10.64)$$

Neznámé počáteční hodnoty $v(0^+)$ až $v^{(3)}(0^+)$ stanovíme z příslušných okrajových podmínek. Např. pro prostý nosník použijeme vztahy (10.30) přímo, tj. vynecháme v (10.61) - (10.62) členy s $v(0^+)$ a $v^{(2)}(0^+)$, a při aplikaci (10.31) máme na paměti, že pro $x=\ell$ je

$$x_1 = \ell - \zeta_1 \geq 0, \quad x_2 = \ell - \zeta_2 \geq 0 \Rightarrow \qquad (10.65)$$

$$\Rightarrow h(x_1) = h(x_2) = 1$$

$$v_1(x_1) = \frac{q(\ell-\zeta_1)^4}{24\ EJ}, \qquad v_2(x_2) = \frac{q(\ell-\zeta_2)^4}{24\ EJ} \qquad (10.66)$$

$$v_0(\ell) = v^{(1)}(0^+)\ell + \frac{1}{6}\ v^{(3)}(0^+)\ell^3\ ;$$

$$v_1^{(1)}(x_1) = \frac{q(\ell-\zeta_1)^3}{6\ EJ}, \qquad v_2^{(1)}(x_2) = \frac{q(\ell-\zeta_2)^3}{6\ EJ} \qquad (10.67)$$

$$v_0^{(1)}(\ell) = v^{(1)}(0^+) + \frac{1}{2}\ v^{(3)}(0^+)\ell^2\ ;$$

$$v_1^{(2)}(x_1) = \frac{q(\ell-\zeta_1)^2}{2\ EJ}\,, \qquad v_2^{(2)}(x_2) = \frac{q(\ell-\zeta_2)^2}{2\ EJ} \tag{10.68}$$

$$v_0^{(2)}(\ell) = v^{(3)}(0^+)\,\ell\ ;$$

$$v_1^{(3)}(x_1) = \frac{q(\ell-\zeta_1)}{EJ}\,, \qquad v_2^{(3)}(x_2) = \frac{q(\ell-\zeta_2)}{EJ} \tag{10.69}$$

$$v_0^{(3)}(\ell) = v^{(3)}(0^+)\,.$$

Podmínky (10.31) pak s ohledem na (10.60) - (10.62), (10.65) - (10.69) vedou po vydělení ℓ na rovnice

$$v^{(1)}(0^+) + \frac{1}{6}\, v^{(3)}(0^+)\,\ell^2 = -\frac{q}{24\ EJ\ell}\left[(\ell-\zeta_1)^4 - (\ell-\zeta_2)^4\right] \tag{10.70}$$

$$v^{(3)}(0^+) = -\frac{q}{2\ EJ\ell}\left[(\ell-\zeta_1)^2 - (\ell-\zeta_2)^2\right] \tag{10.71}$$

určující přímo hodnotu $v^{(3)}(0^+)$ rovnicí (10.71). Z (10.70) pak vychází $v^{(1)}(0^+)$

$$v^{(1)}(0^+) = -\frac{q}{24\ EJ\ell}\left[(\ell-\zeta_1)^4 - (\ell-\zeta_2)^4\right] - \tag{10.72}$$

$$- \frac{1}{6}\, v^{(3)}(0^+)\,\ell^2 = \frac{q(\zeta_2-\zeta_1)}{24\ EJ\ell}\Big[\ 2\ell^2(2\ell - \zeta_1 - \zeta_2) - 4\ell^3 +$$

$$+ 6\ell^2(\zeta_1 + \zeta_2) - 4\ell\ (\zeta_1^2 + \zeta_1\zeta_2 + \zeta_2^2) + (\zeta_1 + \zeta_2)(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)\Big]$$

Další postup už je snadný, jde v podstatě o dosazování z (10.71), (10.72) do (10.60) - (10.64). Pro kontrolu položme v (10.71) a (10.72)

$$\zeta_1 = 0, \qquad \zeta_2 = \ell \tag{10.73}$$

a výsledek porovnejme s hodnotami (10.22).

Po dosazení dostaneme

$$v^{(3)}(0^+) = -\frac{q}{2\ EJ\ell}\,(\ell^2 - 0) = -\frac{q\ell}{2\ EJ} \tag{10.74}$$

$$v^{(1)}(0^+) = \frac{q\ell}{24\ EJ\ell}\Big[\ 2\ell^2\ell - 4\ell^3 + 6\ell^3 - 4\ell^3 + \ell.\ell^2\Big] = \frac{q\ell^3}{24\ EJ}$$

v souhlase s (10.21) a (10.22).

Popsaný postup řešení může vzbuzovat dojem jisté komplikovanosti. Při posuzování objektivnosti podobného úsudku je třeba vzít do úvahy, že při klasickém přístupu

a) je třeba řešit tři rovnice základního typu (10.1) - dvě homogenní (pro intervaly $0<x<\zeta_1$, $\zeta_2<x<\ell$) a jednu nehomogenní (pro interval $\zeta_1<x<\zeta_2$)

b) dostaneme celkem 3x4=12 integračních konstant

c) musíme sestavit příslušnou soustavu podmínečných rovnic, která se skládá ze dvou okrajových podmínek na každém z okrajů (ve výše uvedeném případě jsou to podmínky (10.30) a (10.31) a ze čtyř přechodových podmínek typu $v_a^{(j)}= v_b^{(j)}$ pro $x=\zeta_1$, $v_b^{(j)}= v_c^{(j)}$ pro $x=\zeta_2$, $(j=0,1,2,3)$, kde v_a je obecné řešení v prvním, v_b ve druhém a v_c ve třetím intervalu

d) je třeba vyřešit sestavený systém dvanácti rovnic

e) při výpočtu průhybu, momentů a posouvajících sil vybrat to z řešení v_a, v_b a v_c , do jehož intervalu platnosti přísluší bod, v němž vyjmenované veličiny hledáme.

Při zohlednění vyjmenovaných skutečností dojem komplikovanosti distributivního pojetí dané úlohy nebude již příliš přesvědčivý.

Tab. 6.1. Některé věty z gramatiky a vzorce ze slovníku Laplaceovy transformace pravostranných distribucí

Originál f(t), operace	Laplaceův obraz $\tilde{f}(p)$
$f * g$	$\tilde{f} \cdot \tilde{g}$
$f^{[n]}$	$p^n \, \tilde{f}$
$f * h$	$p^{-1} \, \tilde{f}$
$\delta(t)$	1
$h(t)$	p^{-1}
$e^{\alpha t}$	$(p-\alpha)^{-1}$
$\alpha^{-1} \, (e^{\alpha t} - 1)$	$[p(p-\alpha)]^{-1}$
$(n!)^{-1} \, t^n$ $n \geq 0$ celé číslo	$(p^{n+1})^{-1}$
$t\,e^{\alpha t}$	$(p-\alpha)^{-2}$
$\alpha^{-2} \, [1+(\alpha t - 1) \, e^{\alpha t}]$	$[p(p-\alpha)^2]^{-1}$
$\sum_{j=1}^{n} A_j \, e^{p_j t}$	$\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{A_j}{p - p_j}$

m, n řády polynomů v p, $m < n$

$Q_n(p_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j;$

$$A_j = \frac{P_m(p_j)}{\prod_{i=1,\, i \neq j}^{n} (p - p_i)}$$

Tab. 9.1. Fourierovy obrazy temperovaných distribucí a distribucí s omezeným nosičem

Originál $f(t) \in \varphi'$	Fourierův obraz $\overline{f}(\omega)$
$f^{[n]}(t)$	$(i\omega)^n\ \overline{f}$
$(-it)^n\ f(t)$	$\overline{f}^{(n)}(\omega)$
$f(t-\tau)$	$\overline{f}\ e^{-i\omega\tau}$
$f(t)\ e^{-i\tau t}$	$\overline{f}(\omega+\tau)$
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\ \overline{f}(\frac{\omega}{a})$, $a \neq 0$
$f * g;\quad f,g \in \mathcal{E}'$	$\overline{f}\ .\ \overline{g}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-i\omega\tau}$
$\delta^{[n]}(t)$	$(i\omega)^n$
$(it)^n\ e^{-i\tau t}$	$(-1)^n\ 2\pi\ \delta^{[n]}\ (\omega+\tau)$
1	$2\pi\ \delta(\omega)$
$e^{-i\tau t}$	$2\pi\ \delta(\omega+\tau)$
$(it)^n$	$(-1)^n\ 2\pi\ \delta^{[n]}(\omega)$

LITERATURA

[1] Aplikovaná matematika I, II. 1.vyd. SNTL, Praha 1977, 1978

[2] Цейтлин, А.И.: Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. 1.изд. Стройиздат, Москва 1984

[3] Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der z-Transformation. 3.Aufl. R. Oldenbourg, München 1967

[4] Kecs, W., Teodorescu, P.P.: Applications of the theory of distributions in mechanics. 2nd ed. Editura Academiei Romane, Bucharest 1974

[5] Schwartz, L.: Théorie des distributions I, II. Hermann, Paris 1957, 1959

[6] Schwartz, L.: Matematické metody ve fyzice. 1.vyd. SNTL, Praha 1972

[7] Veit, J.: Integrální transformace. 2.vyd. SNTL, Praha 1983

[8] Zemanian, A.H.: Distribution theory and transform analysis. 1st ed. McGraw-Hill, New York 1965