

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STAVEBNÍ
KATEDRA MECHANIKY



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Prvky pro analýzu
deskových a skořepinových konstrukcí

Autor: Bc. Edita Dvořáková

Vedoucí práce: Prof. Dr. Ing. Bořek Patzák

Praha, 2015

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracovala samostatně, pouze za odborného vedení vedoucího práce Prof. Dr. Ing. Bořka Patzáka. Veškerou použitou literaturu a podkladové materiály uvádím v příloženém seznamu zdrojů.

V Praze dne 19.12.2014

.....

Poděkování:

Na tomto místě bych velice ráda poděkovala Prof. Dr. Ing. Bořku Patzákovi za odborné vedení, podporu, trpělivost a cenné rady, které mi poskytl při zpracování této diplomové práce.

Název práce: Prvky pro analýzu deskových a skořepinových konstrukcí

Autor: Bc. Edita Dvořáková

Katedra: Katedra mechaniky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. Dr. Ing. Bořek Patzák

Abstrakt Tato diplomová práce se zabývá studiem vybraných konečných prvků pro analýzu deskových a skořepinových konstrukcí. V práci je stručně představena metoda konečných prvků a základní principy využívané pro analýzu stěn, desek a skořepin. Pro deskové konstrukce jsou představeny dva prvky založené na diskrétní Kirchhoffově teorii. Pro analýzu skořepin byly zvoleny dva prvky založené na odlišných přístupech. Jeden z prvků je sestaven kombinací deskového a stěnového prvku, formulace druhého skořepinového prvku vychází z třídimenzionální analýzy s přihlédnutím k vlastnostem skořepin. Všechny čtyři prvky jsou implementovány do prostředí MATLAB, program je ověřen na několika jednoduchých testech. Na složitějších konstrukcích je porovnána konvergence jednotlivých prvků, výsledky jsou porovnány s dalšími dostupnými prvky a v některých případech s analytickým řešením.

Klíčová slova: desky, skořepiny, MITC4, DKT, rotační stupně volnosti, metoda konečných prvků

Title: Finite elements for analysis of plates and shells

Author: Bc. Edita Dvorakova

Department: Department of Mechanics

Supervisor: Prof. Dr. Ing. Borek Patzak

Abstract This thesis deals with the study of selected finite elements for analysis of plate and shell structures and their implementation. The finite element method and basic principles used for analysis of plane stress structures, plates and shells are briefly introduced. Two finite elements based on discrete Kirchhoff theory are presented for plate analysis. For the shell analysis, two different approaches were considered. One of the elements is constructed by combining plane stress and plate element. The second shell element is based on three-dimensional formulation with consideration of shell behaviour. All four elements are implemented in MATLAB and verified by means of simple tests. Some more complex structures are analyzed and the convergence of different types of elements is compared to other available elements and in some cases also with analytical solution.

Keywords: plates, shells, MITC4, DKT, drilling degrees of freedom, finite element method

OBSAH

Zadání práce	ii
Abstrakt	v
1. Úvod	1
1.1. Motivace	2
2. Úvod do metody konečných prvků	4
2.1. Teorie pružnosti	4
2.1.1. Základní neznámé	5
2.1.2. Geometrické rovnice	5
2.1.3. Konstitutivní rovnice	6
2.1.4. Rovnice rovnováhy	6
2.1.5. Okrajové podmínky	7
2.2. Princip virtuálních prací	8
2.3. Variační principy	8
2.4. Ritzova metoda	9
3. Analýza plošných konstrukcí	12
3.1. Stěny	12
3.2. Desky	13
3.3. Skořepiny	17

4. Deskové prvky	20
4.1. Deskový prvek DKT	20
4.1.1. Vlastnosti prvku	21
4.1.2. Sestavení prvku	22
4.2. Deskový prvek DKQ	29
4.2.1. Sestavení prvku	29
5. Skořepinové prvky	33
5.1. Stěnodeskový prvek s rotačními stupni volnosti	33
5.1.1. Stěnový prvek s rotačními stupni volnosti	34
5.1.2. Formulace skořepinového prvku	37
5.2. Skořepinový prvek MITC4	39
5.2.1. Základní vztahy	40
5.2.2. Sestavení prvku	41
6. Implementace do prostředí MATLAB	46
6.1. Patch testy	48
6.1.1. Deskové prvky DKT a DKQ	49
6.1.2. Stěnodeskový prvek s rotačními stupni volnosti	49
6.1.3. Skořepinový prvek MITC4	50
6.1.4. Výsledky patch testů	51
7. Numerické výsledky	52
7.1. Kloubově podepřená deska	52
7.2. Zkosená konzola	55
7.3. Skořepina tvaru válce	60
8. Závěr	64
Seznam obrázků	66
Seznam tabulek	68
Literatura	70

Přílohy	I
A. Implementace geometrických matic do prostředí MATLAB	II
A.1. Deskový prvek DKT	II
A.2. Deskový prvek DKQ	III
A.3. Stěnový prvek s rotačními stupni volnosti	IV
A.4. Skořepinový prvek MITC4	V

ÚVOD

Cílem předkládané diplomové práce je formulace vybraných konečných prvků určených pro analýzu deskových a skořepinových konstrukcí a jejich následná implementace do prostředí MATLAB. Byly vybrány celkem čtyři prvky, dva deskové a dva skořepinové. Jako deskové prvky byly vybrány prvky založené na diskretní Kirchhoffově teorii tenkých desek, a to jak trojúhelníkový, tak čtyřúhelníkový prvek. Pro analýzu skořepin je představen prvek MITC4, tedy čtyřúhelníkový prvek s použitím redukované interpolace pro smykové složky napětí, a trojúhelníkový prvek, který vznikl sloučením deskového trojúhelníkového prvku se stěnovým prvkem s rotačními stupni volnosti. Pro porovnání s dalšími dostupnými prvky byl využit program OOFEM [15], v některých případech bylo k porovnání využito analytické řešení nebo experimentální výsledky.

Práce je uvedena kapitolou, která stručně představuje metodu konečných prvků a její základní principy. V kapitole 3 jsou uvedeny základní vlastnosti desek, stěn a skořepin, které jsou využity v následujících dvou kapitolách pojednávajících postupně o deskových prvcích (kapitola 4) a skořepinových prvcích (kapitola 5). Program, který byl v rámci této práce zpracován, je představen v kapitole 6, kde je také otestován na klasických patch testech, složitější konstrukce jsou následně analyzovány v kapitole 7. V po-

slední kapitole jsou shrnuty závěry, které lze na základě numerických výsledků vyvodit.

1.1. Motivace

Během posledních pár desítek let došlo k velkému rozvoji výpočetní techniky. Tento rozvoj umožnil rozšíření numerických metod, které jsou dnes nedílnou součástí inženýrské praxe. Většina softwaru pro analýzu konstrukcí je založena na metodě konečných prvků. Ačkoliv se na rozvoji této metody pracuje již několik desítek let, stále je zde velký prostor pro výzkum. Přesnost této metody záleží z velké části na volbě použitého prvku. Vzhledem k tomu, že software je často používán pracovníky, kteří nutně nemusí mít příliš hluboké znalosti o metodě konečných prvků, je třeba, aby implementované prvky byly spolehlivé a co nejlépe vystihovaly chování skutečné konstrukce.

Právě řešení desek a především skořepin bylo prvním podnětem pro analýzu metodou konečných prvků. Již od počátku bylo navrženo několik více či méně úspěšných přístupů k řešení této problematiky. Ačkoliv se jedná v podstatě o třídídimenzionální problém, řešení klasickými prostorovými prvky se jeví jako velice neefektivní a často i problematické. Hlavním problémem, se kterým se analýza deskových a skořepinových konstrukcí potýká, je především smykové a membránové zatuhnutí, ke kterému dochází pro velmi tenké konstrukce. V tomto případě se může konstrukce jevit výrazně tužší než ve skutečnosti je.

V případě deskových konstrukcí lze problém smykového zatuhnutí vyřešit vhodnou volbou deskové teorie. Prvky založené na Kirchhoffově teorii tenkých desek problémem smykového zatuhnutí netrpí, neboť vliv posouvajících sil je zanedbán. Na druhou stranu, jejich implementace je náročnější vzhledem k vyšším požadavkům na spojitost aproximačních funkcí. V této práci jsou prezentovány prvky založené na diskrétní Kirchhoffově teorii. Ve vybraných diskrétních bodech jsou tedy vynuceny požadavky pro ohyb tenkých desek. Pro formulaci skořepinových prvků zde byly zvoleny dva

různé přístupy. Velice dobrého poměru mezi náročností výpočtu a přesností bylo dosaženo díky tzv. smíšené interpolaci tenzorových složek - MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components). Právě takto je formulován prvek MITC4, který je v rámci této práce představen. Druhým prvkem pro analýzu skořepin, který zde bude uveden, je prvek složený z deskového DKT prvku a stěnového prvku s rotačními stupni volnosti. Výhodou tohoto prvku je fakt, že prvek disponuje v každém uzlu šesti stupni volnosti a není tedy nutné dodatečně dopočítávat či zavádět chybějící tuhost.

Předkládaná diplomová práce vznikla jako součást řešení projektu TAČR č. TA 02011196 - Využití metod adaptivní a nelineární analýzy v návrhu železobetonových konstrukcí.

ÚVOD DO METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

Metoda konečných prvků (MKP) je přibližná metoda, která začala vznikat na konci první poloviny 20. století. Asi poprvé se myšlenka MKP objevila v práci Richarda Couranta v roce 1943, který navrhl možnost řešení spojitého problému rozdělením na konečný počet podoblastí [17]. Právě myšlenka diskretizace se jeví jako hlavní princip MKP. Tento přístup začali dále rozvíjet především inženýři pro řešení statických a dynamických úloh. Později se však ukázalo, že metoda konečných prvků je velice blízka v té době již dlouho známé Ritzově metodě, a díky tomu došlo k dalšímu prohloubení i po matematické stránce.

Na následujících několika stranách budou uvedeny základní vztahy z teorie pružnosti a principy [6, 7], které pomohou v dalších kapitolách ukázat, jakým způsobem byl program pro analýzu deskových a skořepinových konstrukcí sestaven.

2.1. Teorie pružnosti

Teorie pružnosti je částí mechaniky kontinua, která se zabývá vztahy mezi deformacemi a napětími tělesa. Pokud dochází pouze k malým deformacím, lze hovořit o lineární pružnosti. V této práci je dále uvažován lineární vztah mezi složkami napětí a

deformace, tzv. Hookeův zákon.

2.1.1. Základní neznámé

Za základní neznámé v teorii pružnosti lze považovat vektorové pole posunů \mathbf{u} , dále pak tenzorová pole deformací $\boldsymbol{\varepsilon}$ a tenzorová pole napětí $\boldsymbol{\sigma}$. Vzhledem k symetrii smykových složek tenzoru napětí a deformace bývají tyto tenzory často zapisovány v kompaktní vektorové formě

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \{u, v, w\}^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\}^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}^T,\end{aligned}$$

kde ε_i značí normálové složky deformace a σ_i značí normálové složky napětí. Složky γ_{ij} a τ_{ij} potom značí smykové složky deformace, respektive napětí.

2.1.2. Geometrické rovnice

Pomocí geometrických rovnic lze vyjádřit vztah právě mezi vektorem posunutí \mathbf{u} a vektorem deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$. V maticové formě platí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

kde

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

a tedy

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}.$$

2.1.3. Konstitutivní rovnice

Vztah mezi složkami tenzoru deformace a složkami tenzoru napětí dále vyjadřují tzv. konstitutivní vztahy. Pro lineárně pružné izotropní materiály lze aplikovat rozšířený Hookeův zákon, kde s uvažováním nulové počáteční deformace platí následující formulace

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.3)$$

kde

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix},$$

kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonův součinitel. S využitím měrné potenciální energie deformace $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ lze tyto vztahy také zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.4)$$

kde

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.5)$$

2.1.4. Rovnice rovnováhy

Tzv. Cauchyho rovnice rovnováhy jsou často nazývány jako rovnice statické. Vyjadřují vztahy mezi všemi vnitřními a vnějšími silami působícími na diferenciální element tělesa. Tuto soustavu parciálních diferenciálních rovnic lze v maticové formě vyjádřit následovně:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\partial\sigma + \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

kde vektor $\bar{\mathbf{X}} = \{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}^T$ je vektorem objemových sil.

2.1.5. Okrajové podmínky

Soubor šesti geometrických rovnic (2.1), šesti konstitutivních rovnic (2.3) a tří rovnic rovnováhy (2.6) tvoří kompletní systém pro řešení úlohy o patnácti neznámých (tři složky vektoru posunutí, šest složek tenzoru deformace a šest složek tenzoru napětí), nicméně vzhledem k tomu, že se jedná o formulaci pomocí diferenciálních rovnic, je třeba zavést okrajové podmínky. Podmínky lze definovat dvojího druhu, a to statické okrajové podmínky a podmínky kinematičké. Hranici tělesa lze rozdělit na část hranice tělesa Γ_p , která je podrobena podmínkám statickým, a část Γ_u , kde jsou aplikovány podmínky kinematičké.

Statické okrajové podmínky

Statické okrajové podmínky vyjadřují rovnováhu mezi napětím a vnějším zatížením na povrchu tělesa. Na hranici Γ_p platí

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \\ \bar{p}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{n}\sigma - \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Vektor $\bar{\mathbf{p}} = \{\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z\}^T$ značí předepsané povrchové síly na hranici Γ_p a v matici \mathbf{n} jsou uspořádány směrové kosiny vnější normály k povrchu této hranice.

Kinematické okrajové podmínky

Na části hranice Γ_u , kde je předepsána hodnota posunutí $\bar{\mathbf{u}}$ lze přemístění tělesa definovat podle kinematických okrajových podmínek, a tedy

$$\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

2.2. Princip virtuálních prací

Princip virtuálních prací (PVP) lze rozlišit na dva základní typy, a to

- princip virtuálních posunutí (PVp),
- princip virtuálních sil (PVs).

Vzhledem k tomu, že většina MKP programů, a také program zpracovaný v rámci této práce, jsou založeny na deformační variantě metody konečných prvků, která plyne z principu virtuálních posunutí, bude zde dále zpracován pouze tento přístup. Princip virtuálních posunutí lze vyjádřit vztahem

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} dV + \int_{\Gamma_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma, \quad (2.9)$$

kde levá strana rovnice odpovídá virtuální práci vnitřních sil a pravá strana virtuální práci sil vnějších. Virtuální posuny nesmí narušovat kinematické okrajové podmínky, a tedy $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ na Γ_u . Virtuální deformace musí být s virtuálními posuny svázány geometrickými rovnicemi, tedy $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \partial^T \delta \mathbf{u}$.

2.3. Variační principy

Přímým důsledkem principu virtuálních posunutí je tzv. Lagrangeův variační princip. Obdobně z principu virtuálních sil lze odvodit Castiglianův variační princip, tato práce se jím však nebude dále zabývat. Lagrangeův princip je založen na minimu potenciální energie a říká:

- "Ze všech kinematicky přípustných stavů pružného tělesa nastává takový stav, který dává potenciální energii systému minimální hodnotu."

Pro potenciální energii systému lze tedy psát

$$\Pi = E_i + E_e = \min, \quad (2.10)$$

kde E_i značí potenciální energii deformace a E_e odpovídá potenciální energii vnějších sil, a tedy

$$\Pi = \int_V W(\varepsilon) dV - \int_V \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} dV - \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma. \quad (2.11)$$

Kinematicky přípustný stav předpokládá spojitě posuny s po částech spojitými derivacemi v celé oblasti. Posuny musí na hranici Γ_u splňovat předepsané okrajové podmínky a s deformacemi musí svázány geometrickými rovnicemi. Položením variace funkcionálu potenciální energie nule lze získat

$$\delta\Pi = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int_V \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} dV - \int_{\Gamma_p} \delta\mathbf{u}^t \bar{\mathbf{p}} d\Gamma = 0.$$

Dosazením z konstitutivních rovnic (2.4) do prvního integrálu lze získat shodnou formulaci problému s formulací na základě principu virtuálních posunutí (2.9).

2.4. Ritzova metoda

Jak již bylo řečeno v úvodu této kapitoly, metoda konečných prvků je úzce spojena s Ritzovou metodou. V této části bude tedy ukázán postup v případě deformační varianty Ritzovy metody. Přibližné řešení bude hledáno ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{N}\mathbf{r},$$

kde funkce v \mathbf{u}_0 jsou zvoleny na základě kinematických okrajových podmínek, a tedy

$$\mathbf{u}_0 = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}^T \quad \text{na } \Gamma_u.$$

V matici \mathbf{N} jsou uspořádány báze funkce z prostoru V . Pro úlohu minimalizace potenciální energie systému (2.11) musí být tyto funkce na V spojitě a musí umožňovat splnění geometrických okrajových podmínek. Báze funkce musí být lineárně nezávislé a na hranici Γ_u musí navíc splňovat homogenní geometrické podmínky, tedy mít na této hranici nulovou hodnotu. Vektor \mathbf{r} je vektor neznámých posunutí.

Dosazením do geometrických rovnic a následně také do rovnic konstitutivních, lze vyjádřit aproximované pole deformace,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\partial}^T(\mathbf{u}_0 + \mathbf{N}\mathbf{r}), \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\partial}^T\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\partial}^T\mathbf{N}\mathbf{r}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r},\end{aligned}\tag{2.12}$$

respektive pole napětí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r}).\end{aligned}$$

Aproximované pole deformace (2.12) lze dosadit do vztahu pro výpočet měrné potenciální energie (2.5) a následně do funkcionálu potenciální energie systému (2.11)

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r})^T\mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r}), \\ \Pi &= \int_V \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r})^T\mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r})dV - \int_V (\mathbf{u}_0 + \mathbf{N}\mathbf{r})^T\bar{\mathbf{X}}dV - \int_{\Gamma_p} (\mathbf{u}_0 + \mathbf{N}\mathbf{r})^T\bar{\mathbf{p}}d\Gamma.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Vzhledem k formulaci Lagrangeova principu je hledáno minimum tohoto funkcionálu. Po bližším přezkoumání rovnice (2.13) je patrné, že po integraci je jedinou neznámou této úlohy vektor neznámých posunutí \mathbf{r} . Pro extrém funkce o více proměnných platí, že nastane v případě nulových hodnot prvních parciálních derivací podle všech proměnných. Zderivováním lze dospět k následující formulaci úlohy

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{r}} = \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r})dV - \int_V \mathbf{N}^T\bar{\mathbf{X}}dV - \int_{\Gamma_p} \mathbf{N}^T\bar{\mathbf{p}}d\Gamma = 0.\tag{2.14}$$

Jedná se o soustavu lineárních algebraických rovnic, zavedením matice tuhosti \mathbf{K} a vektorů zatížení \mathbf{R}_f a reakcí \mathbf{R}_u lze psát

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{R}_f + \mathbf{R}_u,$$

kde

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV,\tag{2.15}$$

$$\mathbf{R}_f = \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{X}} dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{N}^T \bar{p} d\Gamma,$$
$$\mathbf{R}_u = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV.$$

Rozdíl mezi klasickou Ritzovou metodou a metodou konečných prvků spočívá pouze ve volbě báзовých funkcí. Zatímco v Ritzově metodě jsou báзовé funkce voleny na celé řešené oblasti, v metodě konečných prvků jsou voleny funkce s velmi malým nosičem, až na nejbližší oblast kolem uzlových bodů jsou tedy nulové. Ačkoliv se tento rozdíl nemusí na první pohled zdát příliš důležitý, přináší spoustu výhod pro formulaci úlohy. Metoda konečných prvků díky své formulaci báзовých funkcí umožňuje relativně jednoduchou aproximaci komplikovaných oblastí řešení, proměnlivého po-depření a lze snadno docílit zpřesnění řešení.

ANALÝZA PLOŠNÝCH KONSTRUKCÍ

Za plošné konstrukce jsou považovány takové konstrukce, kde je jeden z rozměrů výrazně menší než zbylé dva. Dle statického působení lze plošné konstrukce rozdělit na stěny, desky a skořepiny. Vzhledem k relativně malé tloušťce takových konstrukcí je napětí σ_z velmi malé a lze ho tedy zanedbat. Stěny a desky jsou rovinné konstrukce, v případě stěn je uvažováno pouze zatížení v rovině konstrukce, desky jsou naopak zatěžovány kolmo ke střednicové ploše, tedy k rovině, která pólí tloušťku konstrukce. Skořepinové konstrukce jsou zakřivené a kombinují stěnové a deskové působení.

3.1. Stěny

Ačkoliv tématem této práce jsou deskové a skořepinové konstrukce a o stěnových konstrukcích práce přímo nepojednává, základní vztahy pro analýzu stěn zde budou i přesto stručně uvedeny, a to především z toho důvodu, že chování skořepin je možné vystihnout kombinací deskového a stěnového působení. Řešení stěn spadá mezi problémy rovinné napjatosti.

Úloha rovinné napjatosti

V úloze rovinné napjatosti jsou neznámé pouze dvě složky vektoru posunutí \mathbf{u} , a to posuny v rovině konstrukce. Vektor neznámých posunutí má tedy tvar

$$\mathbf{u} = \{u, v\}^T.$$

Odpovídající pole deformací $\boldsymbol{\varepsilon}$ má tvar

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

a pole napětí $\boldsymbol{\sigma}$ potom

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T.$$

Matici tuhosti materiálu \mathbf{D} použitou pro formulaci konstitutivních rovnic (2.3) lze pro rovinnou napjatost upravit na tvar

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Deformace ε_z je nenulová a lze ji dopočítat z

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\varepsilon_x + \varepsilon_y),$$

vzhledem k uvážení nulového napětí σ_z však tato deformace nepřispívá do práce vnitřních sil. Pro formulaci úlohy rovinné napjatosti je dále třeba upravit také geometrické rovnice, rovnice rovnováhy a okrajové podmínky. Tyto vztahy lze získat z obecných formulací v předchozí kapitole, konkrétně z (2.1), (2.6), (2.7) a (2.8), uvážením pouze složek odpovídajících výše uvedenému vektoru posunutí a polím deformací a napětí. Je také třeba přihlídnout k faktu, že je uvažováno pouze zatížení v rovině konstrukce.

3.2. Desky

Deskové a skořepinové konstrukce mohou být svým způsobem považovány za konstrukce třídímenzionální. Ačkoliv se teorie pružnosti pro třídímenzionální analýzu nepotýká se žádnými zásadními problémy, aplikace pro deskové a skořepinové konstrukce

je poněkud složitější. Tloušťka těchto konstrukcí je velmi malá v porovnání se zbylými dvěma rozměry a komplexní řešení používané pro 3D konstrukce je nejen zbytečně náročné, ale také se potýká s problémem smykového zatuhnutí.

Ještě dlouho před tím, než se objevily některé numerické metody, které by pomohly vyřešit problémy při výpočtech deskových konstrukcí, byly formulovány teorie, které nabízely zjednodušený pohled na deskové konstrukce. Za první formulaci deskové teorie je považována Kirchhoffova teorie z roku 1850. Tuto teorii lze použít pro analýzu tenkých desek. Upravené předpoklady uplatnil v roce 1945 Reissner a v lehce odlišné verzi v roce 1951 Mindlin. Tyto upravené teorie uvažují vliv smykového přetvoření a lze je tak na rozdíl od Kirchhoffovy teorie uplatnit i při analýze tlustých desek. Dle tloušťky lze desky rozdělit do tří kategorií:

- tenké desky $\frac{1}{100} \leq \frac{h}{l} \leq \frac{1}{10}$,
- tlusté desky $\frac{h}{l} \geq \frac{1}{10}$,
- membrány $\frac{h}{l} \leq \frac{1}{100}$,

kde h je tloušťka desky a l je rozměr v rovině desky. Pokud se jedná o membránové působení konstrukce, nelze uvažovat přenos ohybových účinků, nicméně je uvažován pouze přenos normálových sil ve střednicové rovině.

Ačkoliv Kirchhoffova teorie ohybu tenkých desek je historicky starší teorií, je v podstatě jen zvláštním případem Mindlinovy teorie. V následujícím textu bude tedy prezentována především Mindlinova teorie a Kirchhoffovy předpoklady budou zavedeny až při formulaci konkrétních konečných prvků.

Mindlinova teorie

Je uvažována deska se střednicovou plochou v rovině x, y . Mindlinova teorie tlustých desek vychází z následujících předpokladů:

- stlačení desky ve směru osy z je malé v porovnání s hodnotami průhybu, lze ho tedy zanedbat,
- normály ke střednicové rovině se po deformaci mění v pseudonormály, zůstávají tedy přímé, ale již nejsou ke střednicové rovině kolmé,
- normálové napětí σ_z je malé ve srovnání se složkami napětí působících ve směrech os x a y , proto se zanedbává.

Z prvního předpokladu vyplývá, že průhyb w desky je nezávislý na souřadnici z a je tedy pouze funkcí x a y . Z druhého předpokladu je patrné, že není uvažováno zborcení příčných průřezů, přemístění bodů na normále lze tedy chápat jako přemístění tuhého tělesa. Vztažením parametrů přemístění ke střednicové rovině lze obdržet nulové posuny ve střednicové rovině $u(x, y, 0)$ a $v(x, y, 0)$. Dále není třeba uvažovat pootočení kolem vlastní osy normály, tedy pootočení φ_z , jelikož normálu lze chápat jako body ležící na jedné úsečce, pootočení kolem vlastní osy nemá tedy žádný význam. Přemístění bodů pseudonormály lze tedy popsat pomocí tří stupňů volnosti, a to následovně

$$u(x, y, z) = z\varphi_y(x, y),$$

$$v(x, y, z) = -z\varphi_x(x, y),$$

$$w(x, y, z) = w(x, y).$$

Pro nenulové složky deformací potom platí:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} = z\kappa_x,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = z\kappa_y,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) = z\kappa_{xy},$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y},$$

kde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ jsou membránové složky tenzoru deformace a γ_{xz}, γ_{yz} jsou složky smykové. V maticové formě lze potom psát

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= z \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m &= \boldsymbol{\kappa} z = z \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\varphi}, \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= \nabla w + \mathbf{S} \boldsymbol{\varphi}, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\kappa}$ je vektor příslušných křivostí, tedy

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (3.2)$$

Desku si lze představit jako mnoho slabých vrstviček rovnoběžných se střednicovou plochou. Vzhledem k předpokladu velmi malého napětí σ_z , které je tedy zanedbáváno, lze považovat stav napětí v každé z těchto vrstviček za stav rovinné napjatosti, a tedy jej charakterizovat pomocí složek napětí σ_x, σ_y a τ_{xy} . Matice tuhosti materiálu má pro membránové složky napětí obdobný tvar jako pro stěny a lze tedy psát

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa} = z \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa},$$

pro smykové složky

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\gamma}.$$

Celková deformační energie je dána součtem energie příslušející ohybu a energie příslušející smyku

$$E_i = E_m + E_s. \quad (3.3)$$

Ze vztahů pro měrnou energii deformace (2.5) plyne

$$E_m = \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}_m) dV = \int_A \int_h \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D} z^2 \boldsymbol{\kappa} dz dA = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\kappa} dA, \quad (3.4)$$

$$E_s = \int_V W(\boldsymbol{\gamma}) dV = \int_A \int_h \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\gamma} dz dA = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma} dA,$$

kde

$$\mathbf{D}_m = \int_h \mathbf{D} z^2 dz, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{D}_s = k \int_h \mathbf{E} dz,$$

kde A je plocha střednicové roviny a k představuje smykový faktor zohledňující nerovnoměrné rozložení příčných smykových napětí po tloušťce. Pro případ konstantní tloušťky desky lze psát

$$\mathbf{D}_m = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

a

$$\mathbf{D}_s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3. Skořepiny

Zvláštním případem skořepin jsou tzv. stěnodesky. Jak již název napovídá, jedná se o rovinnou konstrukci, která kombinuje působení stěn a desek, zatížení tedy není omezeno svým směrem. Skořepina je pouze zobecněním stěnodesky, a to ve smyslu možnosti zakřivení konstrukce. Zakřivení se v praxi využívá pro snížení velikosti měrných ohybových účinků a posouvajících sil, ideálním stavem je takový tvar konstrukce, kdy jsou ohybové momenty a posouvající síly nulové, tzv. membránový stav. Pro nenulové měrné momenty se jedná o stav ohybový.

V průběhu let bylo navrženo několik různých přístupů, jak formulovat prvky pro skořepinové konstrukce. Z počátku bylo navrženo několik prvků, které byly díky interpolačním funkcím vyššího stupně schopny vystihnout zakřivený tvar konstrukce. Tato metoda se ukázala jako účinná, nicméně relativně časově náročná, proto se postupem času přešlo k práci na vývoji plochých prvků s interpolačními funkcemi nižšího stupně. Zakřivení konstrukce je v takovém případě modelováno pouze vhodným uspořádáním většího množství plochých prvků.

Díky této možnosti lze pro řešení skořepin zkombinovat působení stěnových a deskových prvků. Další možností, jak lze k analýze skořepin přistupovat, je vyjít z třídímní analýzy a upravit podmínky pro napětí a deformace s ohledem na chování skořepinových konstrukcí. Tento postup není závislý na žádné konkrétní teorii skořepin a může se tak jevit jako výhodnější. Na druhou stranu se ukázalo, že s nižším stupněm interpolačních funkcí se tento přístup potýká se smykovým zatuhnutím. Jako vhodné řešení tohoto problému se jeví použití redukované interpolace pro smykové složky napětí.

Základní vztahy pro skořepinové prvky

V případě skořepin jsou uvaženy posuny ve všech třech směrech, vektor posunutí má tedy tvar

$$\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T.$$

Pokud je skořepinový prvek sestaven kombinací stěnového a deskového prvku, je úloha formulována na základě vztahů pro stěny a pro desky s přihlédnutím ke konkrétní použité deskové teorii. Pokud je však prvek formulován na základě třídímní analýzy, jsou pro prvek ležící v rovině x, y uvažována následující pole deformací a napětí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\}^T, \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}^T.$$

Obdobně jako pro úlohu rovinné napjatosti je třeba upravit matici tuhosti materiálu, která je použita pro formulaci konstitutivních rovnic. Platí

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k\frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k\frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

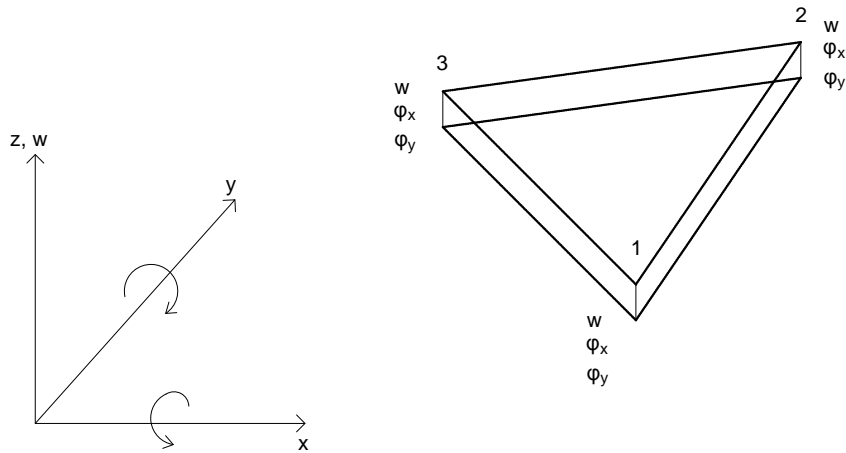
Vzhledem k uvážení pouze pěti složek pole deformací a pole napětí je třeba obdobně jako pro stěny upravit geometrické rovnice (2.1), rovnice rovnováhy (2.6) a okrajové podmínky (2.7), (2.8).

DESKOVÉ PRVKY

V rámci této kapitoly budou představeny dva prvky pro analýzu deskových konstrukcí.

4.1. Deskový prvek DKT

Jedním z prvků vybraných pro analýzu deskových konstrukcí v této práci je trojúhelníkový prvek DKT, z anglického Discrete Kirchhoff Triangle, který je velmi rozšířený v oblasti analýzy ohýbaných desek. Jedná se o trojúhelníkový prvek vycházející z Mindlinovy teorie desek, uvažuje tedy tři stupně volnosti v každém uzlu, konkrétně jsou to průhyb a dvě pootočení (obr. 4.1). Smykové složky deformace jsou pro tenké desky velmi malé v porovnání s ohybovými složkami a energie příslušející smykové deformaci je tedy při řešení zanedbávána. Požadavky Kirchhoffovy teorie ohybu tenkých desek jsou vynuceny pouze v diskrétních bodech, a to ve vrcholech a středech stran. Kirchhoffova teorie navíc kromě požadavků Mindlinovy teorie předpokládá, že normála ke střednicové rovině zůstává normálou i po deformaci, pootočení normály lze tedy vyjádřit pomocí derivace průhybu.



Obrázek 4.1.: Trojúhelníkový prvek DKT - Discrete Kirchhoff Triangle.

4.1.1. Vlastnosti prvku

Formulace prvku je převzatá z článku [1]. Vzhledem k tomu, že jsou zde zanedbány smykové účinky, deformační energie (3.3) je rovna pouze energii příslušející ohybu (3.4), a tedy

$$E_i = E_m = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\kappa} dA, \quad (4.1)$$

kde \mathbf{D}_m je matice tuhosti materiálu definovaná v (3.6). Z definice křivostí $\boldsymbol{\kappa}$ (3.2) plyne, že rovnice (4.1) obsahuje pouze první derivace pootočení φ_x a φ_y , je tedy potřeba zajistit pouze C^0 spojitost a to by mělo být relativně snadné. Vzhledem k tomu, že se v rovnici (4.1) nevyskytuje průhyb w , bude potřeba tuto neznámou vyjádřit pomocí pootočení φ_x a φ_y . Při formulaci prvku byly navrženy následující požadavky:

- Trojúhelníkový prvek by měl mít pouze devět stupňů volnosti, a to průhyb w a pootočení φ_x a φ_y v každém ze tří uzlů elementu

$$\mathbf{r}_e = \{w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, w_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, w_3, \varphi_{x3}, \varphi_{y3}\}^T.$$

- Podle Kirchhoffovy teorie, která předpokládá nulové příčné smykové deformace, platí pro pootočení normál v uzlových bodech:

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

- Vynucení Kirchhoffových předpokladů může být dále požadováno i v dalších diskrétních bodech.
- Musí být zachována spojitost φ_x a φ_y mezi jednotlivými prvky.

Výsledná formulace prvku uvažuje následující body:

- Průběh pootočení φ_x a φ_y po prvku je uvažován kvadratický.
- Kirchhoffovy předpoklady jsou vynuceny ve vrcholech a ve středech hran.
- Podél hran je uvažován kubický průběh průhybu w .
- Průběh pootočení střednice podél hrany prvku je uvažován lineární.

4.1.2. Sestavení prvku

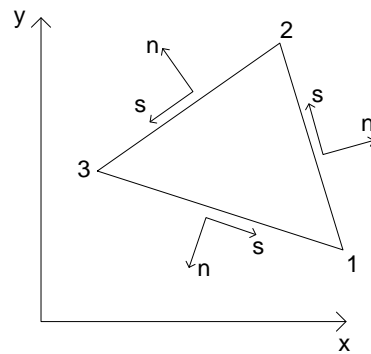
Transformace stupňů volnosti

Jedním z hlavních požadavků, který má prvek splňovat, je, aby všechny stupně volnosti byly soustředěny pouze do vrcholů prvku, celkem je tedy požadováno devět stupňů volnosti. Splnění Kirchhoffových předpokladů je ale požadováno i uprostřed hran, pootočení φ_x a φ_y uprostřed hran je tedy třeba vyjádřit pomocí uzlových stupňů volnosti.

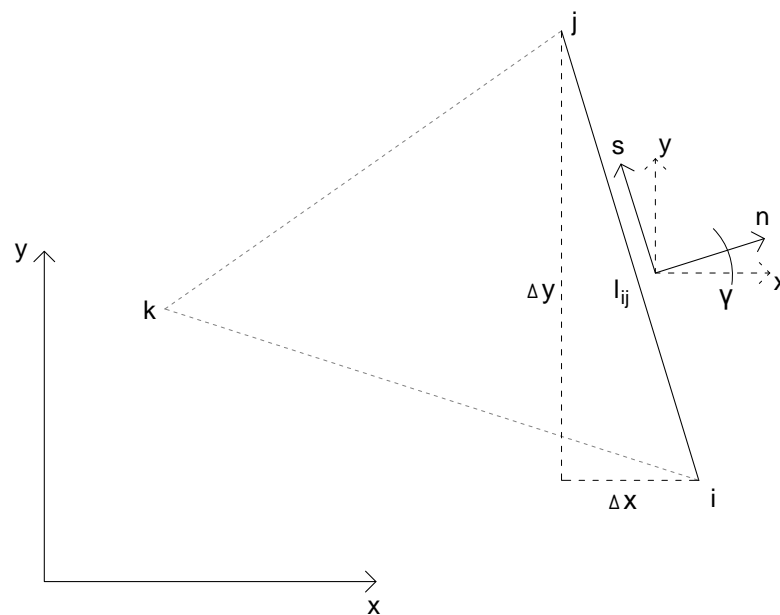
Pro každou hranu prvku lze uvažovat lokální systém souřadnic s a n (obr. 4.2). Pro posuny podél hrany prvku lze tedy psát

$$u_s = -z\varphi_n,$$

$$w(s, n, z) = w(s).$$



Obrázek 4.2.: Zavedení lokálního souřadného systému na hranách prvku.



Obrázek 4.3.: Znázornění hrany prvku pro odvození vztahů pro pootočení φ_n a φ_s uprostřed hrany prvku a následnou transformaci ze systému souřadnic s a n do kartézského systému.

Podél hrany ij (obr. 4.3) je uvažována kubická aproximace průhybu

$$w(s) = as^3 + bs^2 + cs + d,$$

pro derivaci průhybu tedy platí

$$w'(s) = 3as^2 + 2bs + c.$$

Na základě hodnot v uzlových bodech i a j lze stanovit následující okrajové podmínky

$$\begin{aligned} w(0) &= w_i, \\ w'(0) &= w'_i = \varphi_n(0), \\ w(l_{ij}) &= w_j, \\ w'(l_{ij}) &= w'_j = \varphi_n(l_{ij}) \end{aligned}$$

a tyto podmínky lze využít pro stanovení neznámých koeficientů a , b , c a d

$$w(0) = d = w_i,$$

$$w'(0) = c = w'_i,$$

$$\left. \begin{aligned} w(l_{ij}) &= al_{ij}^3 + bl_{ij}^2 + w'_i l_{ij} + w_i = w_j \\ w'(l_{ij}) &= 3al_{ij}^2 + 2bl_{ij} + w'_i = w'_j \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{w'_j - w'_i - 2bl_{ij}}{3l_{ij}^2} \\ b &= \frac{3(w_j - w_i)}{l_{ij}^2} - \frac{2w'_i - w'_j}{l_{ij}} \end{aligned}.$$

Derivace průhybu uprostřed hrany je potom dána vztahem

$$w'\left(\frac{l_{ij}}{2}\right) = w_i \left(-\frac{3}{2l_{ij}}\right) + w_j \left(\frac{3}{2l_{ij}}\right) + w'_i \left(-\frac{1}{4}\right) + w'_j \left(-\frac{1}{4}\right)$$

a pro pootočení φ_n tedy platí

$$\varphi_n(0) = w'_i,$$

$$\varphi_n(l_{ij}) = w'_j,$$

$$\varphi_n\left(\frac{l_{ij}}{2}\right) = w'\left(\frac{l_{ij}}{2}\right) = w_i \left(-\frac{3}{2l_{ij}}\right) + w_j \left(\frac{3}{2l_{ij}}\right) + w'_i \left(-\frac{1}{4}\right) + w'_j \left(-\frac{1}{4}\right).$$

Vzhledem ke kubickému průběhu průhybu a ke kvadratickému průběhu pootočení, které je stanoveno ve třech bodech, bude při použití kvadratické aproximace pootočení zajištěno splnění Kirchhoffových předpokladů podél celé hrany prvku, a tedy podél

celé hranice. Na základě předpokladu lineární aproximace potočení střednice podél hrany prvku lze pro potočení φ_s uprostřed hrany prvku psát

$$\varphi_s \left(\frac{l_{ij}}{2} \right) = \frac{1}{2} (\varphi_s(0) + \varphi_s(l_{ij})).$$

Vztah vyjadřující potočení φ_n a φ_s uprostřed hrany prvku pomocí stupňů volnosti ve vrcholech lze zapsat v maticové formě, a to

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n \\ \varphi_s \end{Bmatrix}_{\frac{l_{ij}}{2}} = \begin{bmatrix} -3/(2l_{ij}) & -1/4 & 0 & 3/(2l_{ij}) & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_{ni} \\ \varphi_{si} \\ w_j \\ \varphi_{nj} \\ \varphi_{sj} \end{Bmatrix}.$$

Pro sestavení matice tuhosti je třeba transformovat uvedené vztahy do kartézského souřadného systému (obr. 4.3). Toho lze docílit pomocí transformační matice T_{ij}

$$\begin{Bmatrix} \varphi_n \\ \varphi_s \end{Bmatrix} = T_{ij} \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = T_{ij}^T \begin{Bmatrix} \varphi_n \\ \varphi_s \end{Bmatrix},$$

kde

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} c_{ij} & -s_{ij} \\ s_{ij} & c_{ij} \end{bmatrix}$$

a

$$c_{ij} = \cos(\gamma_{ij}) = \frac{\Delta y}{l_{ij}},$$

$$s_{ij} = \sin(\gamma_{ij}) = -\frac{\Delta x}{l_{ij}}.$$

Pro pootočení ve středech hran tedy platí

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi_x \\ \varphi_y \end{array} \right\}_{\frac{l_{ij}}{2}} = \begin{bmatrix} c_{ij} & -s_{ij} \\ s_{ij} & c_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/(2l_{ij}) & -1/4 & 0 & 3/(2l_{ij}) & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \varphi_{ni} \\ \varphi_{si} \\ w_j \\ \varphi_{nj} \\ \varphi_{sj} \end{array} \right\},$$

kde

$$\left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \varphi_{ni} \\ \varphi_{si} \\ w_j \\ \varphi_{nj} \\ \varphi_{sj} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{ij} & s_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_{ij} & c_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{ij} & s_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s_{ij} & c_{ij} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \\ w_j \\ \varphi_{xj} \\ \varphi_{yj} \end{array} \right\}.$$

Upravením předchozích dvou vztahů lze získat

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi_x \\ \varphi_y \end{array} \right\}_{\frac{l_{ij}}{2}} = \mathbf{G}^{ij} \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \\ w_j \\ \varphi_{xj} \\ \varphi_{yj} \end{array} \right\},$$

kde

$$\mathbf{G}^{ij} = \begin{bmatrix} -3c_{ij}/(2l_{ij}) & -3s_{ij}/(2l_{ij}) \\ -1/4c_{ij}^2 + 1/2s_{ij}^2 & 1/4c_{ij}s_{ij} - 1/2c_{ij}s_{ij} \\ -1/4c_{ij}s_{ij} - 1/2c_{ij}s_{ij} & -1/4s_{ij}^2 + 1/2c_{ij}^2 \\ 3c_{ij}/(2l_{ij}) & 3s_{ij}/(2l_{ij}) \\ -1/4c_{ij}^2 + 1/2s_{ij}^2 & -1/4c_{ij}s_{ij} - 1/2c_{ij}s_{ij} \\ -1/4c_{ij}s_{ij} - 1/2c_{ij}s_{ij} & -1/4s_{ij}^2 + 1/2c_{ij}^2 \end{bmatrix}^T. \quad (4.2)$$

Uvedená matice \mathbf{G}^{ij} umožňuje vyjádření pootočení φ_x a φ_y uprostřed hrany, pomocí pootočení a průhybu v krajních bodech hrany, tedy pomocí stupňů volnosti ve vrcholech

trojúhelníka. Tuto matici lze napočítat pro všechny tři hrany trojúhelníka a uspořádat ji do celkové transformační matice \mathbf{T}^e

$$\begin{pmatrix} \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{y4} \\ \varphi_{x5} \\ \varphi_{y5} \\ \varphi_{x6} \\ \varphi_{y6} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ G_{11}^{12} & G_{12}^{12} & G_{13}^{12} & G_{14}^{12} & G_{15}^{12} & G_{16}^{12} & 0 & 0 & 0 \\ G_{21}^{12} & G_{22}^{12} & G_{23}^{12} & G_{24}^{12} & G_{25}^{12} & G_{26}^{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{11}^{23} & G_{12}^{23} & G_{13}^{23} & G_{14}^{23} & G_{15}^{23} & G_{16}^{23} \\ 0 & 0 & 0 & G_{21}^{23} & G_{22}^{23} & G_{23}^{23} & G_{24}^{23} & G_{25}^{23} & G_{26}^{23} \\ G_{14}^{31} & G_{15}^{31} & G_{16}^{31} & 0 & 0 & 0 & G_{11}^{31} & G_{12}^{31} & G_{13}^{31} \\ G_{24}^{31} & G_{25}^{31} & G_{26}^{31} & 0 & 0 & 0 & G_{21}^{31} & G_{22}^{31} & G_{23}^{31} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ w_3 \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_\varphi = \mathbf{T}^e \mathbf{r}_e.$$

Matice \mathbf{T}^e tedy zprostředkovává převod mezi stupni volnosti prvku a mezi pootočením φ_x a φ_y v šesti bodech prvku, a to ve vrcholech a středech hran. Díky tomu je možné použít kvadratickou aproximaci pro pootočení po prvku.

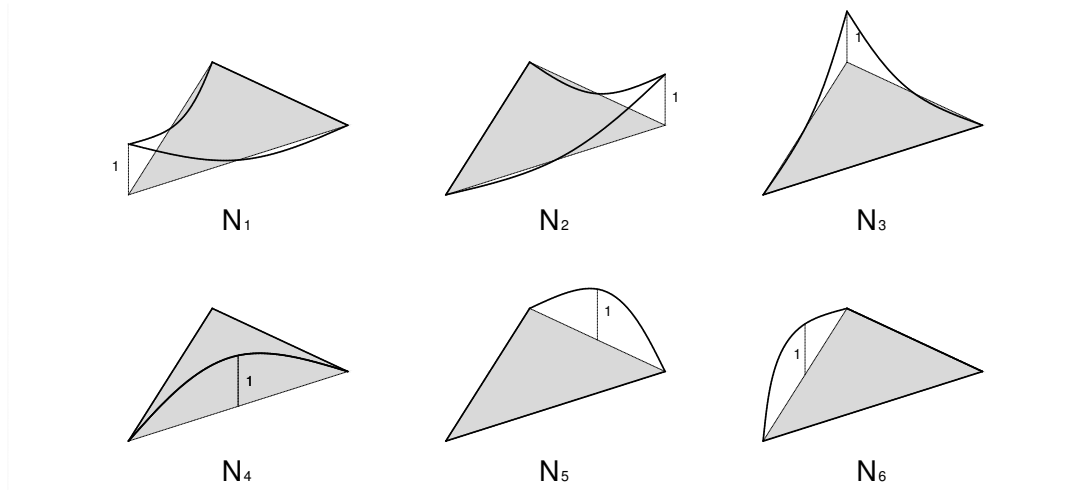
Geometrická matice

Je uvažována kvadratická aproximace pootočení, které lze tedy vyjádřit pomocí šesti uzlových hodnot

$$\varphi_x(x, y) = \sum_{i=1}^6 N_i(x, y) \varphi_{xi},$$

$$\varphi_y(x, y) = \sum_{i=1}^6 N_i(x, y) \varphi_{yi}.$$

Bázové funkce N_i pro kvadratickou aproximaci na trojúhelníku jsou zobrazeny na obrázku (4.4) a mají následující tvar



Obrázek 4.4.: Bázové funkce trojúhelníkového prvku s kvadratickou aproximací [2].

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \zeta_1(2\zeta_1 - 1), \\
 N_2 &= \zeta_2(2\zeta_2 - 1), \\
 N_3 &= \zeta_3(2\zeta_3 - 1), \\
 N_4 &= 4\zeta_1\zeta_2, \\
 N_5 &= 4\zeta_2\zeta_3, \\
 N_6 &= 4\zeta_3\zeta_1,
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

kde ζ_1 , ζ_2 a ζ_3 jsou přirozené souřadnice na trojúhelníku [6]. Pootočení φ_x a φ_y po celém prvku lze tedy zapsat následovně

$$\begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^e \mathbf{r}_\varphi,$$

kde

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix}.$$

S využitím transformační matice T_e lze vektor uzlových pootočení \mathbf{r}_φ vyjádřit pomocí pootočení a průhybů ve vrcholech \mathbf{r}_e

$$\begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^e \mathbf{T}^e \mathbf{r}_e.$$

Geometrická matice prvku je potom dána vztahem

$$\mathbf{B} = \mathbf{\partial}^T \mathbf{N}^e \mathbf{T}^e.$$

Matice tuhosti

Pro matici tuhosti byl odvozen (2.15) následující vztah

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV,$$

$$\mathbf{K} = \int_A \int_h \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dh dA.$$

Aplikací matice \mathbf{D}_m odvozené v (3.5)

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B} dA.$$

Pro vyčíslení matice tuhosti je použita Gaussova numerická integrace [6]. Vzhledem k použití kvadratické aproximace je použita tříbodová integrační formule, která je v tomto případě dostatečná pro přesné vyčíslení integrálu.

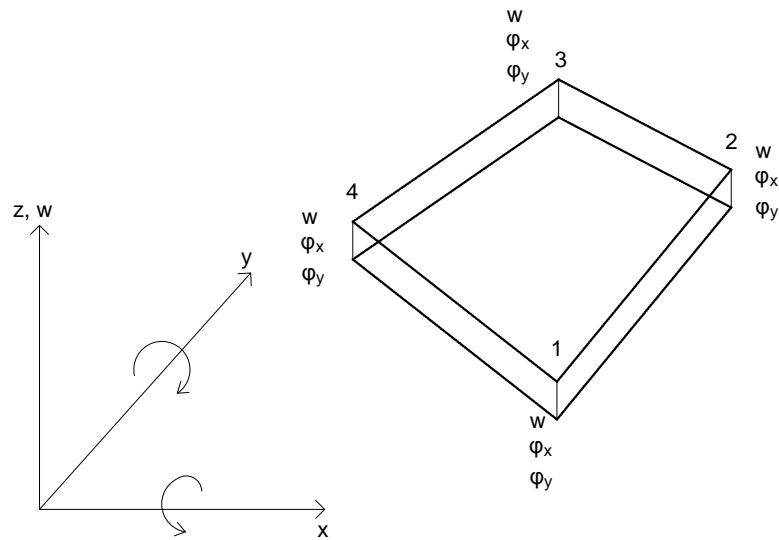
4.2. Deskový prvek DKQ

Druhým prvkem, který bude představen v rámci prvků pro analýzu deskových konstrukcí je DKQ prvek, z anglického Discrete Kirchhoff Quadrilateral. Jedná se o prvek založený na stejných principech jako DKT prvek, nicméně v tomto případě se jedná o prvek čtyřúhelníkový, celkově má tedy 12 stupňů volnosti (obr. 4.5). Vlastnosti prvku a předpoklady pro jeho sestavení jsou stejné jako pro trojúhelníkový DKT prvek, nebudou zde proto znovu opakovány.

4.2.1. Sestavení prvku

Transformace stupňů volnosti

Odobně jako u trojúhelníkového prvku, i pro čtyřúhelníkový prvek je potřeba vyjádřit pootočení uprostřed hran pomocí stupňů volnosti ve vrcholech. Matice \mathbf{G}^{ij} (4.2) pro tuto



Obrázek 4.5.: Čtyřúhelníkový prvek DKQ - Discrete Kirchhoff Quadrilateral.

transformaci na hraně prvku byla odvozena v podkapitole 4.1.2. Pro připomenutí

$$\begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}_{\frac{l_{ij}}{2}} = \mathbf{G}^{ij} \begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \\ w_j \\ \varphi_{xj} \\ \varphi_{yj} \end{Bmatrix}.$$

Pro transformaci pro celý prvek pomocí matice \mathbf{T}^e potom platí

$$\begin{pmatrix} \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{y4} \\ \varphi_{x5} \\ \varphi_{y5} \\ \varphi_{x6} \\ \varphi_{y6} \\ \varphi_{x7} \\ \varphi_{y7} \\ \varphi_{x8} \\ \varphi_{y8} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ G_{11}^{12} & G_{12}^{12} & G_{13}^{12} & G_{14}^{12} & G_{15}^{12} & G_{16}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{21}^{12} & G_{22}^{12} & G_{23}^{12} & G_{24}^{12} & G_{25}^{12} & G_{26}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{11}^{23} & G_{12}^{23} & G_{13}^{23} & G_{14}^{23} & G_{15}^{23} & G_{16}^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{21}^{23} & G_{22}^{23} & G_{23}^{23} & G_{24}^{23} & G_{25}^{23} & G_{26}^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{11}^{34} & G_{12}^{34} & G_{13}^{34} & G_{14}^{34} & G_{15}^{34} & G_{16}^{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{21}^{34} & G_{22}^{34} & G_{23}^{34} & G_{24}^{34} & G_{25}^{34} & G_{26}^{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{14}^{41} & G_{15}^{41} & G_{16}^{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{11}^{41} & G_{12}^{41} & G_{13}^{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{24}^{41} & G_{25}^{41} & G_{26}^{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{21}^{41} & G_{22}^{41} & G_{23}^{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ w_3 \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \\ w_4 \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{y4} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_\varphi = \mathbf{T}^e \mathbf{r}_e.$$

Geometrická matice

Opět je uvažována kvadratická aproximace pootočení, pro čtyřúhelníkový prvek bude tentokrát využito osm uzlových hodnot

$$\varphi_x(x, y) = \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) \varphi_{xi},$$

$$\varphi_y(x, y) = \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) \varphi_{yi}.$$

Bázové funkce N_i pro kvadratickou aproximaci na čtyřúhelníku mají následující tvar

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{1}{4}((1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)), \\
 N_2 &= -\frac{1}{4}((1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta)), \\
 N_3 &= -\frac{1}{4}((1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta)), \\
 N_4 &= -\frac{1}{4}((1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta)), \\
 N_5 &= \frac{1}{2}((1 - \xi^2)(1 - \eta)), \\
 N_6 &= \frac{1}{2}((1 + \xi)(1 - \eta^2)), \\
 N_7 &= \frac{1}{2}((1 - \xi^2)(1 + \eta)), \\
 N_8 &= \frac{1}{2}((1 - \xi)(1 - \eta^2)),
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde ξ a η jsou přiřazené souřadnice [6]. Funkce budou obdobně jako pro trojúhelníkový prvek uspořádány do matice bázových funkcí

$$\begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^e \mathbf{r}_\varphi,$$

kde

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix}.$$

S využitím transformační matice \mathbf{T}^e lze pootočení aproximovat pomocí stupňů volnosti prvku

$$\begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^e \mathbf{T}^e \mathbf{r}_e.$$

Geometrická matice prvku je potom dána vztahem

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{N}^e \mathbf{T}^e.$$

Matice tuhosti

Výsledný vztah pro matici tuhosti prvku (2.15) lze získat analogickou úvahou jako u trojúhelníkového prvku DKT

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B} dA.$$

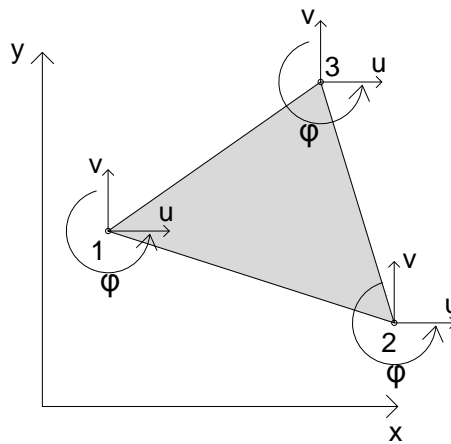
Pro vyčíslení přesné hodnoty integrálu byly s přihlédnutím ke kvadratické aproximaci zvoleny 2x2 integrační body v rovině prvku.

SKOŘEPINOVÉ PRVKY

Pro skořepinové konstrukce zde budou představeny dva prvky, přičemž každý z prvků vychází z jiného přístupu k formulaci skořepinových prvků.

5.1. Stěnodeskový prvek s rotačními stupni volnosti

Jak již bylo uvedeno na začátku této práce, skořepinové konstrukce jsou vystaveny jak ohybovým, tak membránovým účinkům zatížení. Jednou z možností, jak zkonstruovat prvek pro analýzu skořepinových konstrukcí, je kombinace prvku pro řešení ohýbaných konstrukcí a prvku pro analýzu membránového působení. V této práci je tímto způsobem sestrojen trojúhelníkový prvek se šesti stupni volnosti v každém uzlu. Část přenášející ohybové účinky zde reprezentuje DKT prvek, který byl prezentován v této práci v rámci analýzy deskových konstrukcí. Pro přenos membránových účinků zatížení byl použit stěnodeskový prvek s rotačními stupni volnosti, který bude představen nyní. Formulace tohoto prvku byla ukázána v [10, 11].



Obrázek 5.1.: Trojúhelníkový prvek s rotačními stupni volnosti.

5.1.1. Stěnový prvek s rotačními stupni volnosti

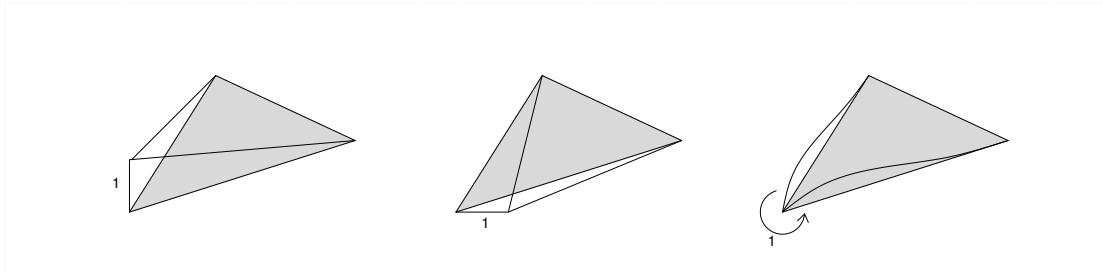
Tento prvek narozdíl od klasického stěnového prvku uvažuje v každém uzlu jako stupně volnosti nejen posuny u a v , ale také rotaci φ_z kolem normály roviny prvku. Má tedy tři stupně volnosti v každém uzlu (obr. 5.1). Vektor neznámých posunutí má tedy tvar

$$\mathbf{r}_e = \{u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2, u_3, v_3, \varphi_3\}^T.$$

Sestavení prvku

Detailní odvození tohoto prvku je předvedeno v [2]. Pro účely této práce zde budou uvedeny pouze hlavní vztahy pro sestavení matice tuhosti. Pro sestavení prvku se vychází z předpokladu kvadratické aproximace posunů u a v , neznámé posuny jsou tedy zavedeny ve vrcholech a ve středech hran trojúhelníka. Podobně jako u deskového prvku DKT je cílem soustředit všechny stupně volnosti do vrcholů, je tedy nutné vyjádřit posuny ve středech hran pomocí posunů a rotace ve vrcholech. Lze ukázat, že pro tuto transformaci posunů uprostřed hrany ij platí následující vztahy

$$u\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{u_i + u_j}{2} + \frac{y_j - y_i}{8}(\varphi_j - \varphi_i),$$



Obrázek 5.2.: Tvarové funkce trojúhelníkového prvku s rotačními stupni volnosti.

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{v_i + v_j}{2} + \frac{x_j - x_i}{8}(\varphi_i - \varphi_j).$$

Pro posuny u a v lze tedy psát

$$\begin{aligned} u = & N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 \left(\frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{y_2 - y_1}{8} (\varphi_2 - \varphi_1) \right) \\ & + N_5 \left(\frac{u_2 + u_3}{2} + \frac{y_3 - y_2}{8} (\varphi_3 - \varphi_2) \right), \\ & + N_6 \left(\frac{u_3 + u_1}{2} + \frac{y_1 - y_3}{8} (\varphi_1 - \varphi_3) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = & N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 \left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{8} (\varphi_1 - \varphi_2) \right) \\ & + N_5 \left(\frac{v_2 + v_3}{2} + \frac{x_3 - x_2}{8} (\varphi_2 - \varphi_3) \right), \\ & + N_6 \left(\frac{v_3 + v_1}{2} + \frac{x_1 - x_3}{8} (\varphi_3 - \varphi_1) \right) \end{aligned}$$

kde N_i jsou bázové funkce pro kvadratickou aproximaci na trojúhelníku (4.3). Aproximace posunů lze tedy vyjádřit následovně

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^e \mathbf{r}_e,$$

kde

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_{uv1} & 0 & N_{u\varphi1} & N_{uv2} & 0 & N_{u\varphi2} & N_{uv3} & 0 & N_{u\varphi3} \\ 0 & N_{uv1} & N_{v\varphi1} & 0 & N_{uv2} & N_{v\varphi2} & 0 & N_{uv3} & N_{v\varphi3} \end{bmatrix}$$

a

$$\begin{aligned} N_{uv1} &= N_1 + \frac{N_4}{2} + \frac{N_6}{2}, \\ N_{uv2} &= N_2 + \frac{N_5}{2} + \frac{N_4}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{uv3} &= N_3 + \frac{N_6}{2} + \frac{N_5}{2}, \\
N_{u\varphi 1} &= N_6 \frac{y_1 - y_3}{8} - N_4 \frac{y_2 - y_1}{8}, \\
N_{u\varphi 2} &= N_4 \frac{y_2 - y_1}{8} - N_5 \frac{y_3 - y_2}{8}, \\
N_{u\varphi 3} &= N_5 \frac{y_3 - y_2}{8} - N_6 \frac{y_1 - y_3}{8}, \\
N_{v\varphi 1} &= -N_6 \frac{x_1 - x_3}{8} + N_4 \frac{x_2 - x_1}{8}, \\
N_{v\varphi 2} &= -N_4 \frac{x_2 - x_1}{8} + N_5 \frac{x_3 - x_2}{8}, \\
N_{v\varphi 3} &= -N_5 \frac{x_3 - x_2}{8} + N_6 \frac{x_1 - x_3}{8}.
\end{aligned}$$

Dle (2.12) je geometrická matice \mathbf{B} dána vztahem

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\vartheta}^T \mathbf{N},$$

kde $\boldsymbol{\vartheta}$ je část operátorové matice (2.2) odpovídající rovinné úloze. Pro matici tuhosti \mathbf{K} platí

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA,$$

kde matice konstitutivních vztahů \mathbf{D} odpovídá případu rovinné napjatosti (3.1). Při výpočtu byly použity čtyři integrační body.

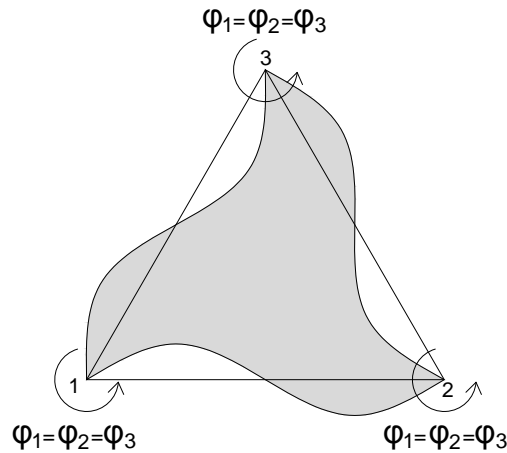
Módy nulové energie

Při MKP výpočtu mohou nastat stavy, kdy speciální kombinaci posunů a rotací přísluší nulová deformační energie, taková úloha pak vede na singulární matici tuhosti. Tyto stavy lze identifikovat pomocí spektrálního rozkladu matice tuhosti, pro stěnový prvek s rotačními volnosti tento stav nastane pro shodné rotace ve všech třech vrcholech (obr. 5.3). Tento problém je zde vyřešen přidáním malého množství energie do matice tuhosti. Dle [18] lze přidanou energii vyjádřit následovně

$$E_R = \alpha_R V \varphi_R^T \mathbf{G} \varphi_R,$$

kde $\alpha_R = 10^{-6}$ je předem zvolený parametr, A je plocha prvku a φ_R je relativní rotace v těžišti prvku, kde

$$\varphi_R = \varphi_T - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i$$



Obrázek 5.3.: Deformace prvku při stavu nulové energie.

$$\varphi_T = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_T - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_T \right).$$

5.1.2. Formulace skořepinového prvku

Vzhledem k tomu, že každý z prvků, ze kterých se při formulaci vychází, odpovídá jiným stupňům volnosti, lze výsledné vztahy pro skořepinový prvek získat velice snadno. Pro řešení stěnodesek lze úlohu vyřešit zvlášť pro membránový stav a zvlášť pro ohyb. Aby bylo možné aplikovat prvek i na řešení skořepin, je třeba sestavit celkovou matici tuhosti, která zahrnuje oba stavy. Trojúhelníkovému prvku se šesti stupni volnosti odpovídá následující vektor neznámých posunutí

$$\mathbf{r}_e = \{u_1, v_1, w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{z1}, u_2, v_2, w_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \varphi_{z2}, u_3, v_3, w_3, \varphi_{x3}, \varphi_{y3}, \varphi_{z3}\}^T.$$

Matice konstitutivních vztahů bude mít tedy tvar

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{ROT}^{11} & D_{ROT}^{12} & 0 & 0 & 0 & D_{ROT}^{13} \\ D_{ROT}^{21} & D_{ROT}^{22} & 0 & 0 & 0 & D_{ROT}^{23} \\ 0 & 0 & D_{DKT}^{11} & D_{DKT}^{12} & D_{DKT}^{13} & 0 \\ 0 & 0 & D_{DKT}^{21} & D_{DKT}^{22} & D_{DKT}^{23} & 0 \\ 0 & 0 & D_{DKT}^{31} & D_{DKT}^{32} & D_{DKT}^{33} & 0 \\ D_{ROT}^{31} & D_{ROT}^{32} & 0 & 0 & 0 & D_{ROT}^{33} \end{bmatrix},$$

kde D_{ROT} odpovídá úloze rovinné napjatosti a D_{DKT} odpovídá matici \mathbf{D}_m (3.6). Analogicky je setavena i geometrická matice prvku

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{ROT}^{11} & B_{ROT}^{21} & 0 & 0 & 0 & B_{ROT}^{31} \\ B_{ROT}^{12} & B_{ROT}^{22} & 0 & 0 & 0 & B_{ROT}^{32} \\ 0 & 0 & B_{DKT}^{11} & B_{DKT}^{12} & B_{DKT}^{13} & 0 \\ 0 & 0 & B_{DKT}^{12} & B_{DKT}^{22} & B_{DKT}^{23} & 0 \\ 0 & 0 & B_{DKT}^{13} & B_{DKT}^{23} & B_{DKT}^{33} & 0 \\ B_{ROT}^{13} & B_{ROT}^{23} & 0 & 0 & 0 & B_{ROT}^{33} \\ B_{ROT}^{14} & B_{ROT}^{24} & 0 & 0 & 0 & B_{ROT}^{34} \\ B_{ROT}^{15} & B_{ROT}^{25} & 0 & 0 & 0 & B_{ROT}^{35} \\ 0 & 0 & B_{DKT}^{14} & B_{DKT}^{24} & B_{DKT}^{34} & 0 \\ 0 & 0 & B_{DKT}^{15} & B_{DKT}^{25} & B_{DKT}^{35} & 0 \\ 0 & 0 & B_{DKT}^{16} & B_{DKT}^{26} & B_{DKT}^{36} & 0 \\ B_{ROT}^{16} & B_{ROT}^{26} & 0 & 0 & 0 & B_{ROT}^{36} \\ B_{ROT}^{17} & B_{ROT}^{27} & 0 & 0 & 0 & B_{ROT}^{37} \\ B_{ROT}^{18} & B_{ROT}^{28} & 0 & 0 & 0 & B_{ROT}^{38} \\ 0 & 0 & B_{DKT}^{17} & B_{DKT}^{27} & B_{DKT}^{37} & 0 \\ 0 & 0 & B_{DKT}^{18} & B_{DKT}^{28} & B_{DKT}^{38} & 0 \\ 0 & 0 & B_{DKT}^{19} & B_{DKT}^{29} & B_{DKT}^{39} & 0 \\ B_{ROT}^{19} & B_{ROT}^{29} & 0 & 0 & 0 & B_{ROT}^{39} \end{bmatrix}^T,$$

kde B_{ROT} odpovídá matici stěnového prvku s rotačními stupni volnosti a B_{DKT} odpovídá matici DKT prvku. Celková matice tuhosti potom opět plyne ze vztahu

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA.$$

Transformace do prostoru

Až doposud byl prvek formulován v rovině. Pro použití prvku pro analýzu skořepinových konstrukcí je nutné provést transformaci do prostoru. Pro převod vektoru z lokálního systému do globálního platí

$$\mathbf{r}_L = \mathbf{A}\mathbf{r}_G,$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

a \mathbf{a} je matice složená ze směrových kosínů mezi osami x, y, z lokálního a X, Y, Z globálního systému. Tyto hodnoty jsou v matici \mathbf{a} uspořádány následovně

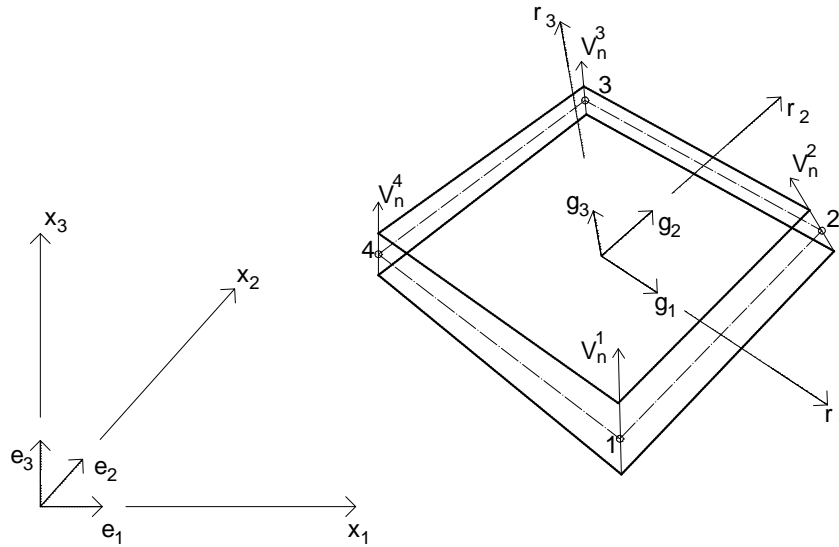
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}.$$

Globální matici tuhosti lze pak získat ze vztahu

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_L \mathbf{A}.$$

5.2. Skořepinový prvek MITC4

Formulace tohoto prvku vychází z prvku pro třídímní analýzu vylepšeného tak, aby nedocházelo ke smykovému uzamknutí. Název představovaného čtyřúhelníkového prvku MITC4 plyne z anglického spojení Mixed Interpolation of Tensorial Components, do češtiny volně přeloženo jako smíšená interpolace tenzorových složek. Po praktické stránce z tohoto přístupu vyplývá, že je pro příčné smykové deformace použita jiná interpolace než pro zbylé složky vektoru deformací. Tento přístup byl navržen v článku [4].



Obrázek 5.4.: Čtyřúhelníkový prvek pro analýzu skořepin - MITC4.

5.2.1. Základní vztahy

Geometrie prvku je znázorněna na obrázku 5.4 a lze ji popsat následovně

$$x_i = \sum_{k=1}^4 h_k x_i^k + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^4 a_k h_k V_{ni}^k, \quad (5.1)$$

kde $h_k(r_1, r_2)$ jsou dvoudimenzionální interpolační funkce odpovídající uzlu k , r_i jsou přirozené souřadnice, x_i vyjadřuje souřadnice kartézského systému pro libovolný bod, x_i^k odpovídá kartézským souřadnicím k -tého uzlu, V_{ni}^k jsou složky řídicího vektoru v uzlu k a a_k je tloušťka skořepiny v uzlu měřená podél řídicího vektoru. Pro posunutí libovolného bodu platí

$$u_i = \sum_{k=1}^4 h_k u_i^k + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^4 a_k h_k (-V_{2i}^k \alpha_k + V_{1i}^k \beta_k), \quad (5.2)$$

kde u_i jsou posuny ve směru os x_i a α a β jsou rotace řídicího vektoru V_n^k kolem V_1^k a V_2^k , kde

$$V_1^k = \frac{\mathbf{e}_2 \times V_n^k}{\|\mathbf{e}_2 \times V_n^k\|},$$

$$V_2^k = V_n^k \times V_1^k.$$

Vektor \mathbf{e}_2 je bázovým vektorem kartézského systému souřadnic. Vektor neznámých posunutí takto formulovaného prvku má tvar

$$\mathbf{r}_e = \{u_1^1, u_2^1, u_3^1, \alpha_1, \beta_1, u_1^2, u_2^2, u_3^2, \alpha_2, \beta_2, u_1^3, u_2^3, u_3^3, \alpha_3, \beta_3, u_1^4, u_2^4, u_3^4, \alpha_4, \beta_4\}^T.$$

Pro interpolaci posunutí a geometrie jsou využity bilineární aproximační funkce, které mají na čtyřúhelníku tvar

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}(1+r_1)(1+r_2), \\ h_2 &= \frac{1}{4}(1-r_1)(1+r_2), \\ h_3 &= \frac{1}{4}(1-r_1)(1-r_2), \\ h_4 &= \frac{1}{4}(1+r_1)(1-r_2). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Pro derivace $h_{k,i}$ interpolačních funkcí podle r_i platí

$$\begin{aligned} h_{1,1} &= \frac{\partial h_1}{\partial r_1} = \frac{1}{4}(1+r_2), & h_{1,2} &= \frac{\partial h_1}{\partial r_2} = \frac{1}{4}(1+r_1), \\ h_{2,1} &= \frac{\partial h_2}{\partial r_1} = -\frac{1}{4}(1+r_2), & h_{2,2} &= \frac{\partial h_2}{\partial r_2} = \frac{1}{4}(1-r_1), \\ h_{3,1} &= \frac{\partial h_3}{\partial r_1} = -\frac{1}{4}(1-r_2), & h_{3,2} &= \frac{\partial h_3}{\partial r_2} = -\frac{1}{4}(1-r_1), \\ h_{4,1} &= \frac{\partial h_4}{\partial r_1} = \frac{1}{4}(1-r_2), & h_{4,2} &= \frac{\partial h_4}{\partial r_2} = -\frac{1}{4}(1+r_1). \end{aligned} \tag{5.4}$$

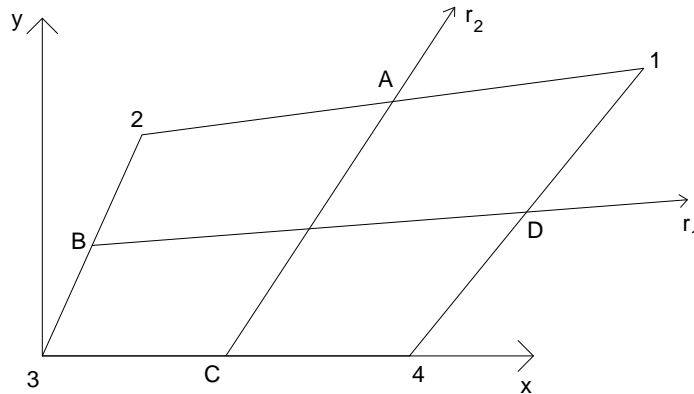
5.2.2. Sestavení prvku

Hlavním problémem takto formulovaného prvku je smykové zatuhnutí pro tenké konstrukce. Použitím interpolace posunutí dle (5.2) vychází příčné smykové deformace nenulové i pro namáhání konstantním ohybovým momentem. Z tohoto důvodu bylo navrženo nepočítat tyto deformace z posunutí vyjádřených v (5.2), ale interpolovat tyto složky takovým způsobem, který by umožnil obdržení konstantní aproximace smykových složek deformace podél směrů r_1 a r_2 , tedy

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{13} &= \frac{1}{2}(1+r_2)\tilde{\epsilon}_{13}^A + \frac{1}{2}(1-r_2)\tilde{\epsilon}_{13}^C, \\ \tilde{\epsilon}_{23} &= \frac{1}{2}(1+r_1)\tilde{\epsilon}_{23}^D + \frac{1}{2}(1-r_1)\tilde{\epsilon}_{23}^B, \end{aligned} \tag{5.5}$$

kde \sim značí vyjádření v systému přirozených souřadnic a složky $\tilde{\epsilon}_{13}^A$, $\tilde{\epsilon}_{23}^B$, $\tilde{\epsilon}_{13}^C$ a $\tilde{\epsilon}_{23}^D$ odpovídají hodnotám příslušných deformací ve středech hran prvku spočtených z posunutí, tj. například

$$\tilde{\epsilon}_{13}^A = \left(\frac{\partial u}{\partial r_3} + \frac{\partial w}{\partial r_1} \right) \Big|_A.$$



Obrázek 5.5.: Uvažovaná poloha prvku v lokálním souřadném systému.

Vzhledem k tomu, že celková geometrická matice je vyjádřena v kartézském systému souřadnic, je nutné vztahy pro výpočet příčných smykových deformací transformovat do tohoto systému.

Je uvažován prvek se střednicovou plochou ležící v rovině x, y (obr. 5.5). V systému přirozených souřadnic r_1, r_2 a r_3 je vhodné zavést tzv. kovariantní a kontravariantní báze. Pro kovariantní báze vektory \mathbf{g}_i ($i = 1, 2, 3$) platí

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i}. \quad (5.6)$$

Kontravariantní báze vektory \mathbf{g}^j ($j = 1, 2, 3$) lze dopočítat ze vztahu

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j, \quad (5.7)$$

kde δ_i^j je tzv. Kroneckerovo delta, $\delta_i^j = 1$ pro $i = j$ a $\delta_i^j = 0$ pro $i \neq j$. Pro složky $\tilde{\epsilon}_{ij}$ lze psát

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \cdot \mathbf{g}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} \cdot \mathbf{g}_i \right), \\ \tilde{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r_i} \frac{\partial x}{\partial r_j} + \frac{\partial u}{\partial r_j} \frac{\partial x}{\partial r_i} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dosazením z (5.1) a (5.2) do rovnice (5.8) a napočítáním konkrétních hodnot interpolačních funkcí a jejich derivací v bodech A, B, C, D lze vyjádřit vztahy pro $\tilde{\varepsilon}_{13}^A, \tilde{\varepsilon}_{23}^B, \tilde{\varepsilon}_{13}^C$ a $\tilde{\varepsilon}_{23}^D$, a tedy

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}_{13}^A &= \frac{1}{8} [(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2) \cdot \frac{1}{2}(a_1 V_n^1 + a_2 V_n^2) + \\
 &\quad (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) \cdot \frac{1}{2}(a_1(-V_2^1 \alpha_1 + V_1^1 \beta_1) + a_2(-V_2^2 \alpha_2 + V_1^2 \beta_2))] , \\
 \tilde{\varepsilon}_{13}^C &= \frac{1}{8} [(\mathbf{u}^4 - \mathbf{u}^3) \cdot \frac{1}{2}(a_3 V_n^3 + a_4 V_n^4) + \\
 &\quad (\mathbf{x}^4 - \mathbf{x}^3) \cdot \frac{1}{2}(a_3(-V_2^3 \alpha_3 + V_1^3 \beta_3) + a_4(-V_2^4 \alpha_4 + V_1^4 \beta_4))] , \\
 \tilde{\varepsilon}_{23}^B &= \frac{1}{8} [(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^4) \cdot \frac{1}{2}(a_1 V_n^1 + a_4 V_n^4) + \\
 &\quad (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^4) \cdot \frac{1}{2}(a_1(-V_2^1 \alpha_1 + V_1^1 \beta_1) + a_4(-V_2^4 \alpha_4 + V_1^4 \beta_4))] , \\
 \tilde{\varepsilon}_{23}^D &= \frac{1}{8} [(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^3) \cdot \frac{1}{2}(a_2 V_n^2 + a_3 V_n^3) + \\
 &\quad (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^3) \cdot \frac{1}{2}(a_2(-V_2^2 \alpha_2 + V_1^2 \beta_2) + a_3(-V_2^3 \alpha_3 + V_1^3 \beta_3))] .
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Výsledné vztahy pro $\tilde{\varepsilon}_{13}$ a $\tilde{\varepsilon}_{23}$ lze vyjádřit dosazením vztahů (5.9) do rovnic (5.5). Pro transformaci do kartézského systému souřadnic lze využít vztahu

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} \mathbf{g}^j \mathbf{g}^i = \varepsilon_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l,$$

kde ε_{kl} jsou složky tenzoru deformací v kartézském souřadném systému s bázovými vektory \mathbf{e}_k a \mathbf{e}_l . Uvážením symetrie tenzoru deformací lze vyjádřit složky vektoru deformací γ_{xz} a γ_{yz} , a to následovně

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= 2\tilde{\varepsilon}_{13}(\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{g}^3 \cdot \mathbf{e}_3) + 2\tilde{\varepsilon}_{23}(\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{g}^3 \cdot \mathbf{e}_3), \\
 \gamma_{yz} &= 2\tilde{\varepsilon}_{13}(\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{g}^3 \cdot \mathbf{e}_3) + 2\tilde{\varepsilon}_{23}(\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{g}^3 \cdot \mathbf{e}_3)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Výsledné vztahy pro příčné smykové deformace lze obdržet dosazením z (5.5) a (5.9) do (5.10).

Pro ostatní složky vektoru deformace (3.7) lze využít vztahy plynoucí z (2.1) a (2.2), tedy

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Pro derivace posunů u_1 a u_2 podle přirozených souřadnic platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial r_1} &= \sum_{k=1}^4 h_{k,1} u_i^k + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^4 a_k h_{k,1} (-V_{2i}^k \alpha_k + V_{1i}^k \beta_k), \\ \frac{\partial u_i}{\partial r_2} &= \sum_{k=1}^4 h_{k,2} u_i^k + \frac{r_3}{2} \sum_{k=1}^4 a_k h_{k,2} (-V_{2i}^k \alpha_k + V_{1i}^k \beta_k), \\ \frac{\partial u_i}{\partial r_3} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 a_k h_k (-V_{2i}^k \alpha_k + V_{1i}^k \beta_k),\end{aligned}\tag{5.12}$$

kde $h_{k,i}$ jsou derivace interpolačních funkcí definované v (5.4). Z věty o derivaci složené funkce plyne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r_1} \\ \frac{\partial}{\partial r_2} \\ \frac{\partial}{\partial r_3} \end{pmatrix},\tag{5.13}$$

kde J je tzv. Jakobián

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_3}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial x_3}{\partial r_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_3} & \frac{\partial x_2}{\partial r_3} & \frac{\partial x_3}{\partial r_3} \end{bmatrix}.$$

Výsledné vztahy pro složky vektoru deformací $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ lze vyjádřit dosazením z (5.12) a (5.13) do (5.11).

Geometrická matice

Dle (2.12) geometrická matice \mathbf{B} zprostředkovává vztah mezi vektorem deformací a vektorem neznámých posunutí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{r}_e.$$

Geometrickou matici pro tento prvek lze tedy sestavit vytknutím jednotlivých stupňů volnosti z výše uvedených formulací složek vektoru deformace.

Matice tuhosti

Celková matice tuhosti je opět dána vztahem

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV,$$

kde konstitutivní matice \mathbf{D} zohledňuje vlastnosti skořepin (3.8). Při praktickém výpočtu byly použity 2x2x2 integrační body.

Transformace do prostoru

Vzhledem k tomu, že předvedená formulace prvku uvažovala střednicovou plochu v rovině x, y , je opět nutné provést transformaci do prostoru. Pro převod vektoru posunutí a matice tuhosti z lokálního systému do globálního platí

$$\mathbf{r}_L = \mathbf{A}\mathbf{r}_G,$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_L \mathbf{A}.$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Pro převod rotací je zde použita submatice \mathbf{b} , která zohledňuje pouze dvě rotace ve vektoru posunutí v lokálním systému. V globálním souřadném systému je ve výsledku uvažováno šest stupňů volnosti v každém uzlu. Pro submatice \mathbf{a} a \mathbf{b} platí

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \end{bmatrix}.$$

IMPLEMENTACE DO PROSTŘEDÍ MATLAB

Jedním z hlavních výstupů této práce je program¹ napsaný v prostředí MATLAB [14]. Program je určen pro analýzu deskových a skořepinových konstrukcí, k dispozici jsou dva deskové a dva skořepinové prvky představené v předchozích kapitolách. Program je určen především k porovnání těchto prvků, je v něm tedy připraveno několik příkladů, na kterých jsou prvky testovány. Struktura programu je však navržena takovým způsobem, aby bylo snadné zadat libovolnou úlohu.

Vstupní data

Před spuštěním programu je potřeba definovat řešený problém. Je nutné:

- zvolit typ prvku,
- zadat materiálové charakteristiky - E, ν ,
- formulovat řešenou úlohu.

Způsob, jakým by měla být úloha formulována je patrný z následujícího příkladu.

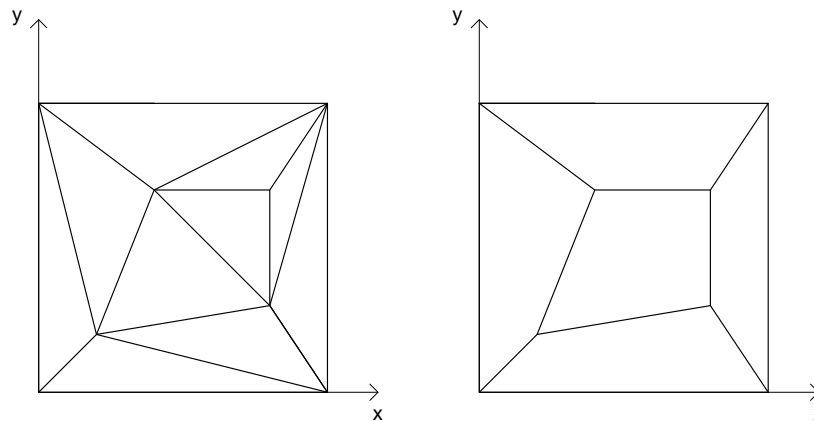
¹Program je k práci přiložen na CD.

```

1 % DKT – PATCH – BENDING
2
3 % Poissonuv soucinitel
4  $\nu_y = 0.30;$ 
5 % Younguv modul pružnosti
6  $E = 2.1 \cdot 10^6;$ 
7 % Smykový faktor
8  $k = 1.0;$ 
9
10 % Tloušťka konstrukce
11  $h = 1.0;$ 
12
13 % Pole souřadnic uzlu
14  $xy = [0 \ 10 \ 0;$ 
15          $0 \ 0 \ 0;$ 
16          $4 \ 7 \ 0;$ 
17          $2 \ 2 \ 0;$ 
18          $8 \ 7 \ 0;$ 
19          $8 \ 3 \ 0;$ 
20          $10 \ 10 \ 0;$ 
21          $10 \ 0 \ 0];$ 
22
23 % Pole kódových čísel
24  $lm = [ \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 10 \ 11 \ 12;$ 
25          $1 \ 2 \ 3 \ 10 \ 11 \ 12 \ 7 \ 8 \ 9;$ 
26          $4 \ 5 \ 6 \ 22 \ 23 \ 24 \ 10 \ 11 \ 12;$ 
27          $10 \ 11 \ 12 \ 22 \ 23 \ 24 \ 16 \ 17 \ 18;$ 
28          $10 \ 11 \ 12 \ 16 \ 17 \ 18 \ 7 \ 8 \ 9;$ 
29          $7 \ 8 \ 9 \ 16 \ 17 \ 18 \ 13 \ 14 \ 15;$ 
30          $7 \ 8 \ 9 \ 13 \ 14 \ 15 \ 19 \ 20 \ 21;$ 
31          $7 \ 8 \ 9 \ 19 \ 20 \ 21 \ 1 \ 2 \ 3;$ 
32          $16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 13 \ 14 \ 15;$ 
33          $16 \ 17 \ 18 \ 22 \ 23 \ 24 \ 19 \ 20 \ 21 ];$ 
34
35 % Umístění zatížení
36  $lf = [21 \ 24];$ 
37 % Velikost zatížení
38  $f = [5.0 \ 5.0];$ 
39 % Podeprné stupně volnosti
40  $sp = [1 \ 3 \ 4 \ 6];$ 

```

Jedná se o vstupní data pro patch test deskového DKT prvku. Síť konstrukce je zobrazena na obrázku 6.1. Okrajové podmínky jsou zadány pomocí vektorů lf , f a sp , kde lf stanovuje jakému stupni volnosti zatížení odpovídá, f udává velikosti jednotlivých sil (momentů) a sp udává kódová čísla odebraných stupňů volnosti. Pro formulaci úlohy je také možné zvolit jednu z předem připravených funkcí. Jsou připraveny



Obrázek 6.2.: Sestavy trojúhelníkových (vlevo) a čtyřúhelníkových (vpravo) prvků použité pro patch testy.

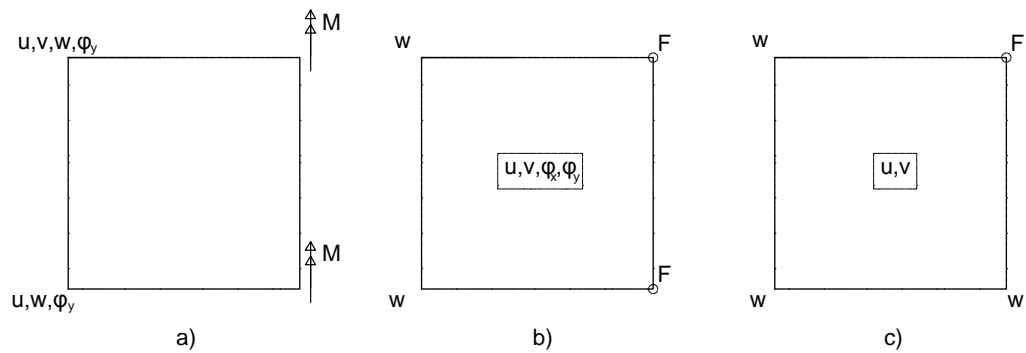
provedené v rámci této práce byla zvolena síť prvků znázorněná na obrázku 6.2. Všechny testy byly provedeny pro dvě různé tloušťky t konstrukce, a to $t = 1.0$ a $t = 0.001$.

6.1.1. Deskové prvky DKT a DKQ

Pro otestování deskových prvků DKT a DKQ byly zvoleny dva testy, a to test, kdy je konstrukce zatížena konstantním momentem (obr. 6.3 a) a konstrukce zatížená kroučící silou (obr. 6.3 c). Oba testy byly splněny pro oba prvky. V případě zatížení konstantním momentem byl obdržen lineární průběh rotací v obou směrech, a to pro obě testované tloušťky konstrukce. Pro konstrukci zatíženou kroucením byly pro obě tloušťky obdrženy konstantní křivosti v obou směrech konstrukce.

6.1.2. Stěnodeskový prvek s rotačními stupni volnosti

Stěnodeskový prvek s rotačními stupni volnosti (dále jako RDKT) byl otestován na stejných příkladech jako předchozí dva prvky. Vzhledem k způsobu formulace tohoto



Obrázek 6.3.: Způsob zatížení a podepření pro jednotlivé patch testy. Popsané posuny a rotace značí odebrané stupně volnosti (pokud jimi prvek disponuje), stupně volnosti uvedené v rámečku jsou odebrány na celém prvku. Síla F působí kolmo ke střednicové rovině.

prvku je zřejmé, že výsledky byly shodné s výsledky deskového DKT. Prvek byl dále otestován pro membránové působení, tedy pro stavy konstantního napětí σ_x , σ_y , τ_{xy} , kterým vyhověl.

6.1.3. Skořepinový prvek MITC4

Prvek MITC4 byl otestován na všech doposud uvedených příkladech. Prvek splnil všechny testy pro obě tloušťky konstrukce, pouze pro zatížení kroutící silou bylo možné pozorovat ve vektoru posunutí malou nesymetrii (třetí platná číslice) v případě $t = 1.0$. To je způsobeno nesymetrickým zastoupením příčných smykových deformací. Pro prvek MITC4 byl navíc proveden patch test pro stav konstantní příčné smykové deformace (obr. 6.3 b). Tento test byl opět splněn, lineární průběh průhybu byl obdržen pro obě tloušťky konstrukce.

6.1.4. Výsledky patch testů

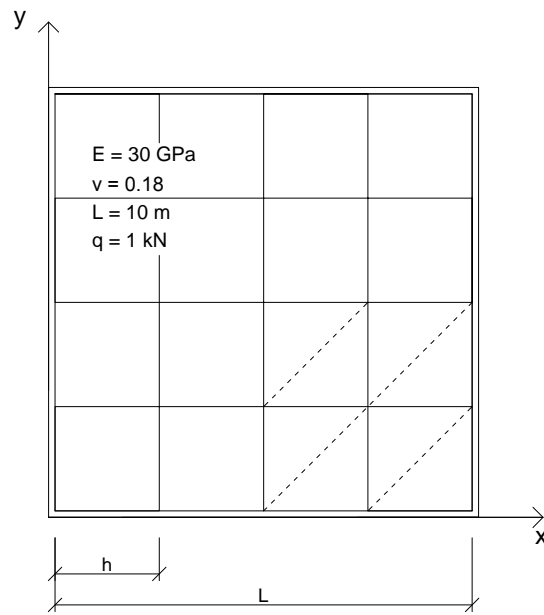
test	prvek			
	DKT	DKQ	RDKT	MITC
konstantní křivost	✓	✓	✓	✓
konstantní kroucení	✓	✓	✓	✓
konstantní smyk	-	-	-	✓
$\sigma_x = konst.$	-	-	✓	✓
$\sigma_y = konst.$	-	-	✓	✓
$\tau_{xy} = konst.$	-	-	✓	✓

NUMERICKÉ VÝSLEDKY

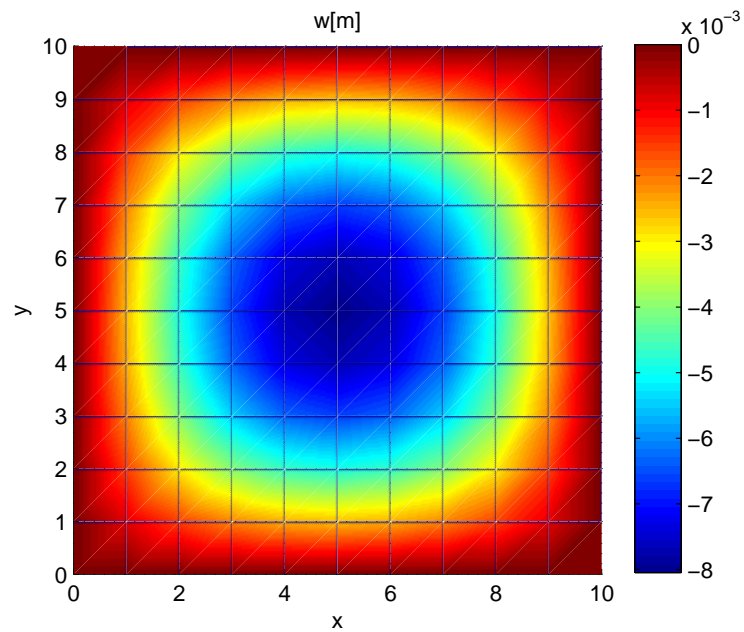
V této kapitole je provedeno několik výpočtů na složitějších konstrukcích. Cílem je porovnat obdržené výsledky s ostatními dostupnými prvky a případně i s dostupným přesným řešením.

7.1. Kloubově podepřená deska

Pro otestování prvků na deskových konstrukcích byla zvolena kloubově podepřená deska (obr. 7.1). Testy byly provedeny pro různé tloušťky konstrukce a pro různou jemnost dělení sítě. Výpočet byl proveden s využitím všech prezentovaných prvků s výjimkou stěnodeskového prvku s rotačními stupni volnosti, který se pro řešení desek shoduje s DKT prvkem. Výsledky byly porovnány i s některými dalšími prvky [16] implementovanými v programu OOFEM. Z těchto prvků byl vybrán tzv. Constant Curvature Triangle (CCT), který je založen na Mindlinově teorii a uvažuje konstantní křivosti po prvku. Druhým prvkem pro porovnání je Mindlinovský čtyřúhelníkový prvek s lineární aproximací s uvážením plné a redukované integrace, dále budou tyto prvky značeny Q4FI, respektive Q4RI. Hodnoty průhybu uprostřed desky jsou uvedeny v tabulce 7.1.



Obrázek 7.1.: Kloubově podepřená deska zatížená konstantním tlakem.



Obrázek 7.2.: Průhyb kloubově podepřené desky o tloušťce $t=0.125$ spočtený prvkem DKQ.

		w[m]		
	t/L	h = 1 m	h = 0.5m	h = 0.25m
DKT	0.5	$1.25 \cdot 10^{-7}$	$1.26 \cdot 10^{-7}$	$1.26 \cdot 10^{-7}$
	0.05	$1.25 \cdot 10^{-4}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$
	0.0125	$8.00 \cdot 10^{-3}$	$8.04 \cdot 10^{-3}$	$8.05 \cdot 10^{-3}$
DKQ	0.5	$1.26 \cdot 10^{-7}$	$1.26 \cdot 10^{-7}$	$1.26 \cdot 10^{-7}$
	0.05	$1.26 \cdot 10^{-4}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$
	0.0125	$8.05 \cdot 10^{-3}$	$8.05 \cdot 10^{-3}$	$8.05 \cdot 10^{-3}$
MITC4	0.5	$2.83 \cdot 10^{-7}$	$2.84 \cdot 10^{-7}$	$2.85 \cdot 10^{-7}$
	0.05	$1.29 \cdot 10^{-4}$	$1.31 \cdot 10^{-4}$	$1.32 \cdot 10^{-4}$
	0.0125	$8.04 \cdot 10^{-3}$	$8.07 \cdot 10^{-3}$	$8.09 \cdot 10^{-3}$
CCT	0.5	$2.60 \cdot 10^{-7}$	$2.64 \cdot 10^{-7}$	$2.65 \cdot 10^{-7}$
	0.05	$1.23 \cdot 10^{-4}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-4}$
	0.0125	$7.69 \cdot 10^{-3}$	$7.99 \cdot 10^{-3}$	$8.04 \cdot 10^{-3}$
Q4RI	0.5	$2.67 \cdot 10^{-7}$	$2.65 \cdot 10^{-7}$	$2.65 \cdot 10^{-7}$
	0.05	$1.27 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-4}$
	0.0125	$8.03 \cdot 10^{-3}$	$8.05 \cdot 10^{-3}$	$8.05 \cdot 10^{-3}$
Q4FI	0.5	$2.65 \cdot 10^{-7}$	$2.65 \cdot 10^{-7}$	$2.65 \cdot 10^{-7}$
	0.05	$7.61 \cdot 10^{-5}$	$1.09 \cdot 10^{-4}$	$1.22 \cdot 10^{-4}$
	0.0125	$6.82 \cdot 10^{-3}$	$2.18 \cdot 10^{-3}$	$4.81 \cdot 10^{-3}$

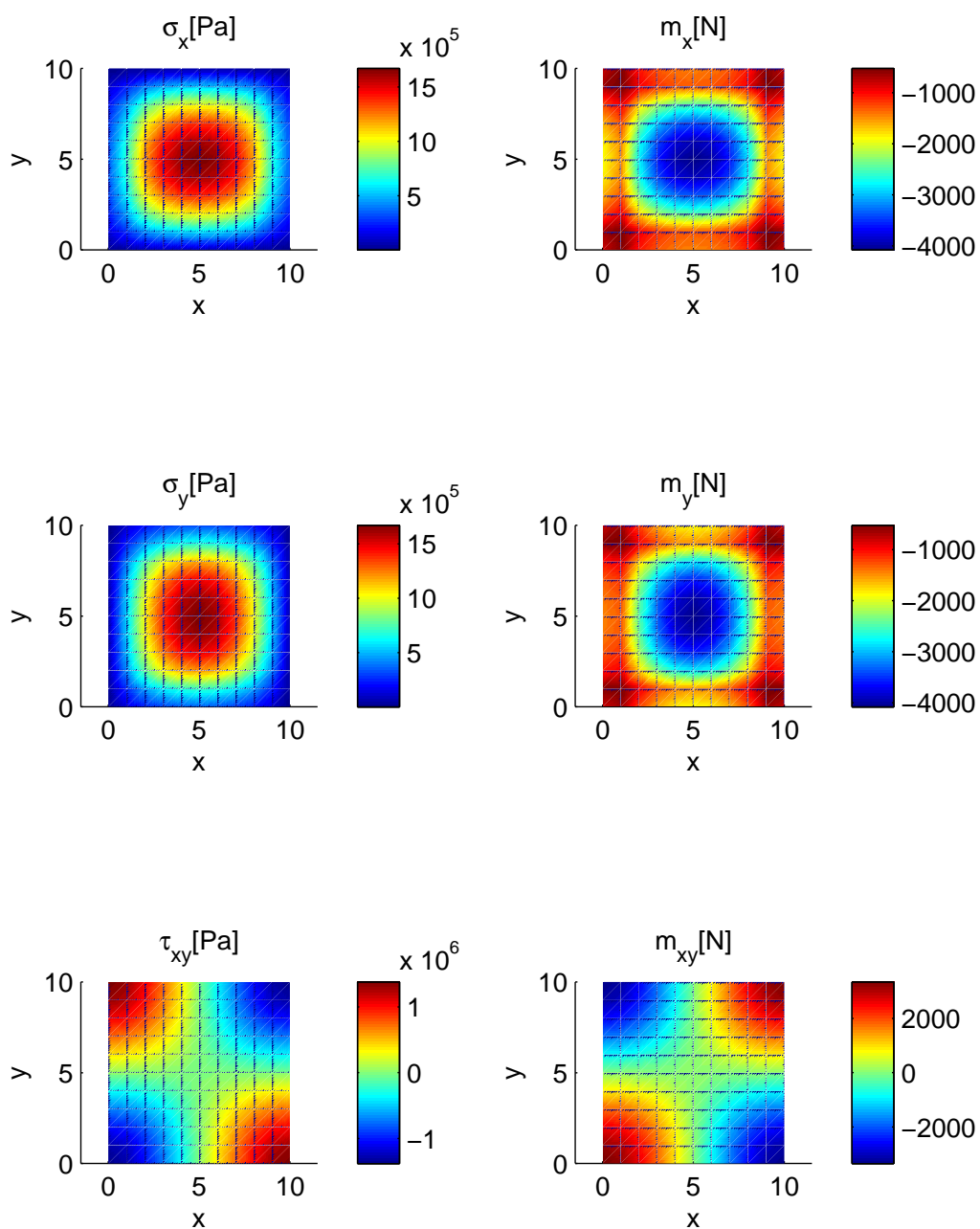
Tabulka 7.1.: Hodnoty průhybu po obvodě kloubově podepřené desky pro různé tloušťky t konstrukce a různou jemnost dělení sítě.

Z výsledků pro tlustou desku ($t/L=0.5$) je patrný rozdíl mezi prvky, které zanedbávají vliv posouvajících sil (DKT, DKQ) a mezi prvky, které vliv posouvajících sil uvažují. Průhyby první skupiny prvků vycházejí podstatně menší, pro analýzu tlustých desek nejsou tedy tyto prvky vzhledem k úvážení Kirchhoffových předpokladů vhodné. Se snižováním tloušťky konstrukce naopak nastává problém u řady ostatních prvků. Prvek CCT vykazuje pro malou tloušťku konstrukce pomalejší konvergenci, nicméně při použití dostatečného množství prvků umožní vyčíslit obdobnou hodnotu průhybu, jako ostatní prvky. U čtyřúhelníkového prvku Q4FI s plnou integrací lze pozorovat výrazné smykové uzamknutí, tento prvek je tedy nemožné použít pro ohýbané konstrukce. Prvek MITC4 vykazuje jak pro tenkou, tak pro tlustou desku o něco vyšší hodnoty průhybu, nicméně z výsledků je patrné, že díky upravení příčných smykových složek deformace nedochází ke smykovému zatuhnutí a prvek je tedy vhodný pro výpočet konstrukcí bez ohledu na jejich tloušťku.

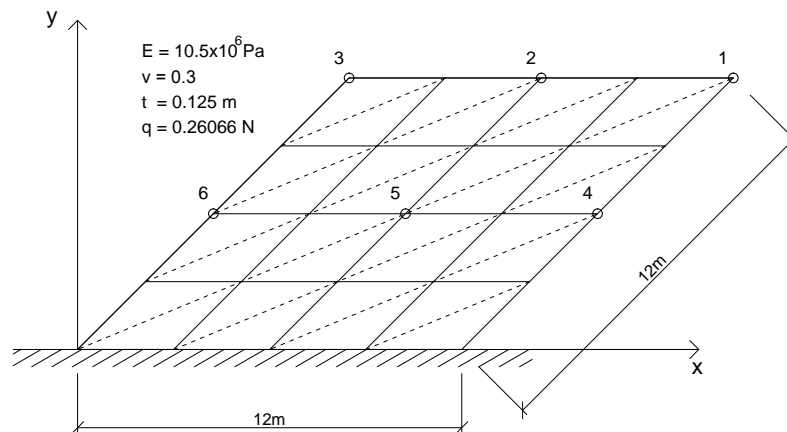
Na obrázku 7.2 je zobrazen průhyb desky, z vektoru posunutí byly dále spočteny hodnoty napětí a momentů ukázané na obrázku 7.3.

7.2. Zkosená konzola

Jako další příklad pro otestování prvků na deskových konstrukcích je zkosená konzola. Jedná se o tenkou vetknutou zkosenou desku, která je zatížena konstantním spojitým zatížením obr. 7.4. Analýza byla opět provedena pro oba deskové prvky a pro skořepinový prvek MITC4. Porovnávány byly hodnoty průhybu v šesti různých bodech. Byla zvolena síť s dělením 4×4 . Pro porovnání jsou uvedeny také hodnoty získané použitím čtyřúhelníkového izoparametrického prvku s 16-ti uzly (dále značen Q16) [4] a hodnoty získané experimentálně [4]. Pro prvek Q16 byla použita síť 2×2 .



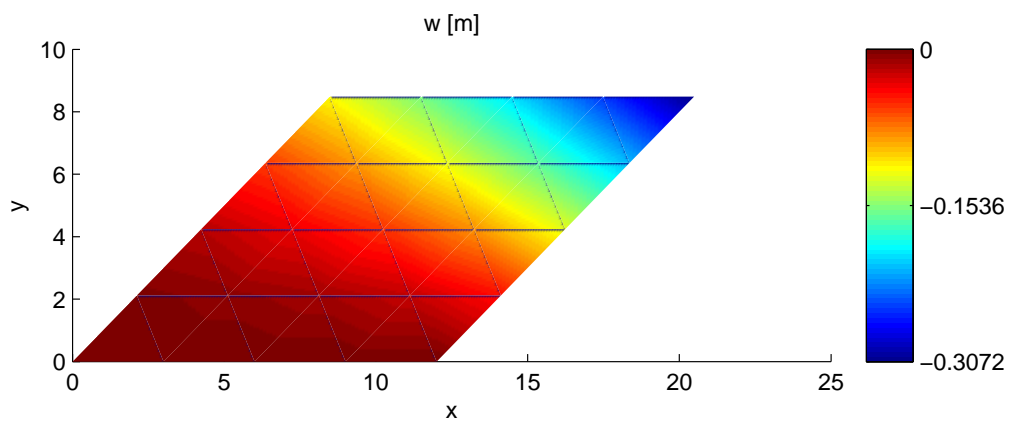
Obrázek 7.3.: Hodnoty napětí v dolních vláknech spočtených pomocí MITC4 (vlevo) a momentů spočtených pomocí DKQ (vpravo).



Obrázek 7.4.: Zkosená konzola s naznačením použité sítě prvků.

Na obrázku 7.5 je znázorněn průhyb konstrukce, výsledné hodnoty jsou uvedeny v tabulce 7.2. Z výsledků je patrné, že prvky DKT a DKQ dosahují lepších výsledků než prvky MITC4 a Q16. Formulace prvku Q16 je obdobná jako pro prvek MITC4, vzhledem k použití interpolačních funkcí vyššího stupně u tohoto prvku však není nutné dodatečně řešit smykové zamykání. Z obdržných výsledků je zřejmé, že prvek MITC4 je díky navrženému opatření schopný vystihnout ohyb obdobně jako prvek Q16, výpočet s interpolačními funkcemi nižšího stupně je navíc méně časově náročný.

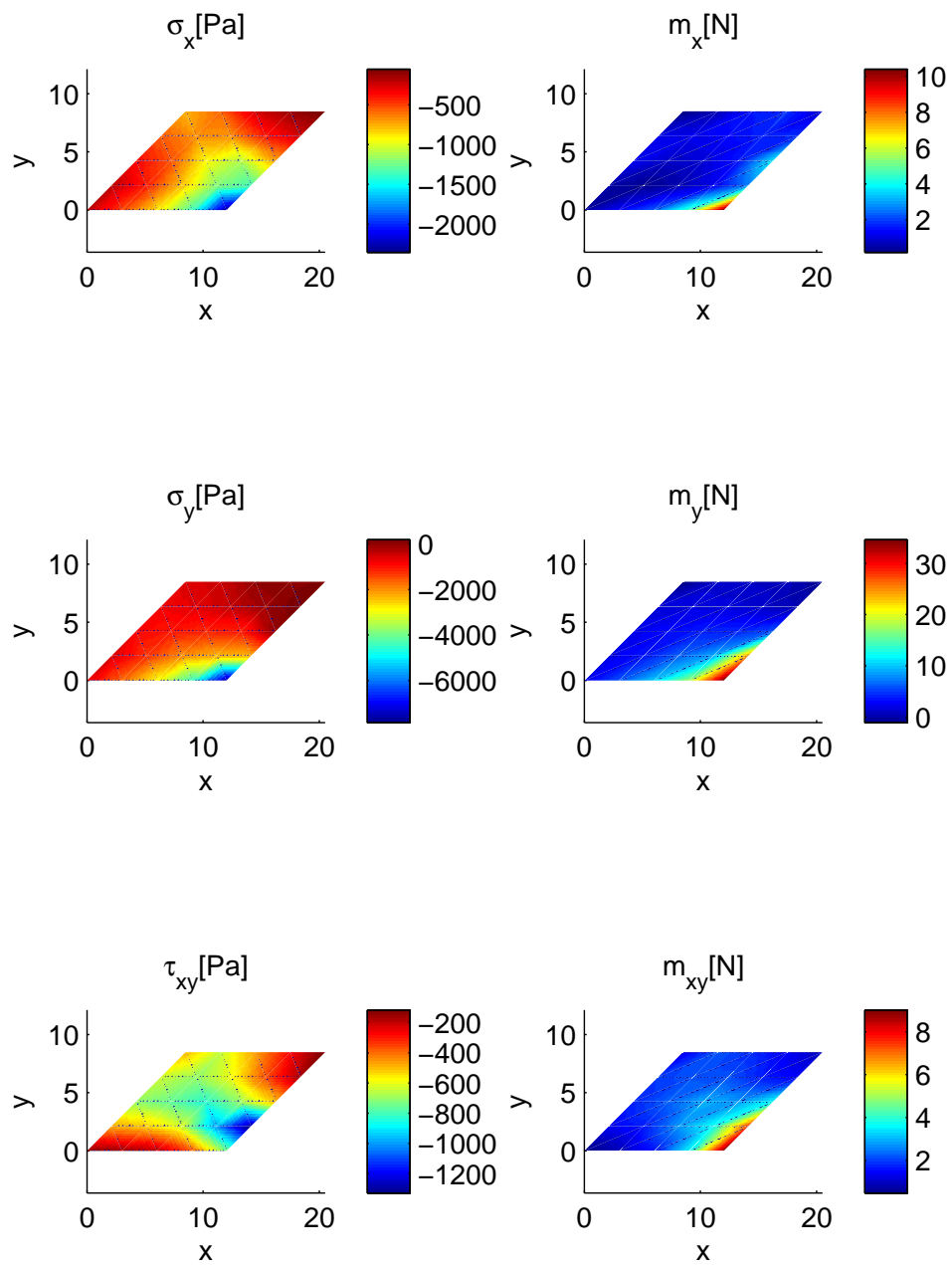
Z vektoru posunutí byly opět spočteny hodnoty napětí a momentů ukázané na obrázku 7.6.



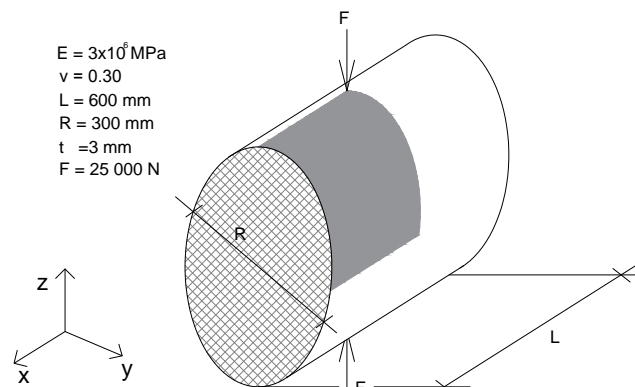
Obrázek 7.5.: Průhyb zkosené konzoly spočtený pomocí DKQ.

bod	w[m]					
	1	2	3	4	5	6
DKT	-0.303	-0.199	-0.113	-0.121	-0.056	-0.023
DKQ	-0.307	-0.203	-0.117	-0.125	-0.056	-0.020
MITC4	-0.277	-0.184	-0.106	-0.103	-0.046	-0.019
Q16	-0.266	-0.182	-0.110	-0.105	-0.048	-0.019
experiment	-0.297	-0.204	-0.121	-0.129	-0.055	-0.022

Tabulka 7.2.: Hodnoty průhybu zkosené konzoly.



Obrázek 7.6.: Hodnoty napětí v dolních vláknech spočtených pomocí MITC4 (vlevo) a momentů spočtených pomocí DKT (vpravo).



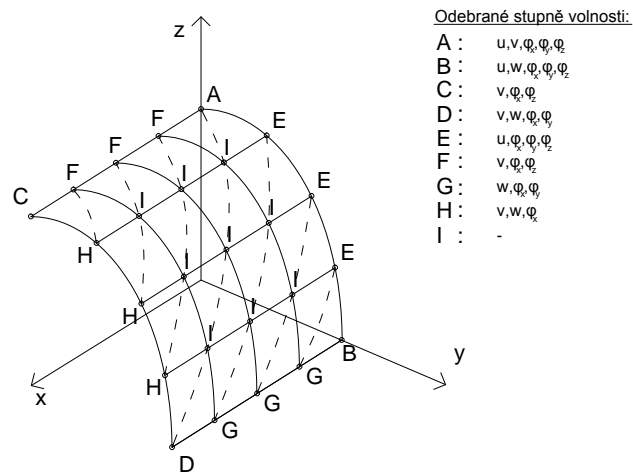
Obrázek 7.7.: Válcová skořepina zatížená protilehlými silami.

7.3. Skořepina tvaru válce

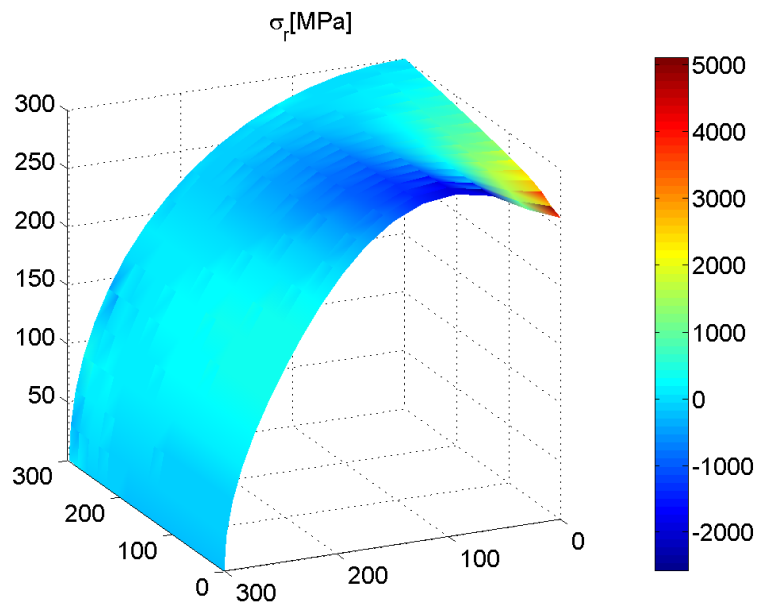
Skořepinové prvky byly navíc otestovány na třídimenzionální skořepinové konstrukci. Kromě prvků MITC4 a stěnodeskového prvku s rotačními stupni volnosti (RDKT), byl pro porovnání použit také prvek, který je sestaven obdobně jako prvek RDKT, pro deskovou část je zde však použit místo DKT prvku prvek CCT, jenž byl představen v rámci testů na deskových konstrukcích. Takto složený prvek bude dále značen jako RCCT. Byla vybrána konstrukce válce, která je často pro testování skořepin používána. Výhodou tohoto testu je analytické řešení [3], se kterým je možné porovnat vypočtené výsledky. Je uvažována válcová konstrukce s poměrem délky konstrukce ku poloměru $L/R = 2$ a poloměru ku tloušťce $R/t = 100$. Otvory válcové konstrukce jsou vyplněny tuhými membránami a konstrukce je zatížena dvěma protilehlými silami. Konstrukce je zobrazena na obrázku (7.7), pro analýzu byla vzhledem k symetrii použita pouze jedna osmina válce, okrajové podmínky jsou upřesněny na obrázku (7.8). Pro porovnání výsledného průhybu v místě zatížení byl použit vzorec

$$w_c = \bar{w}_c \frac{P}{Et},$$

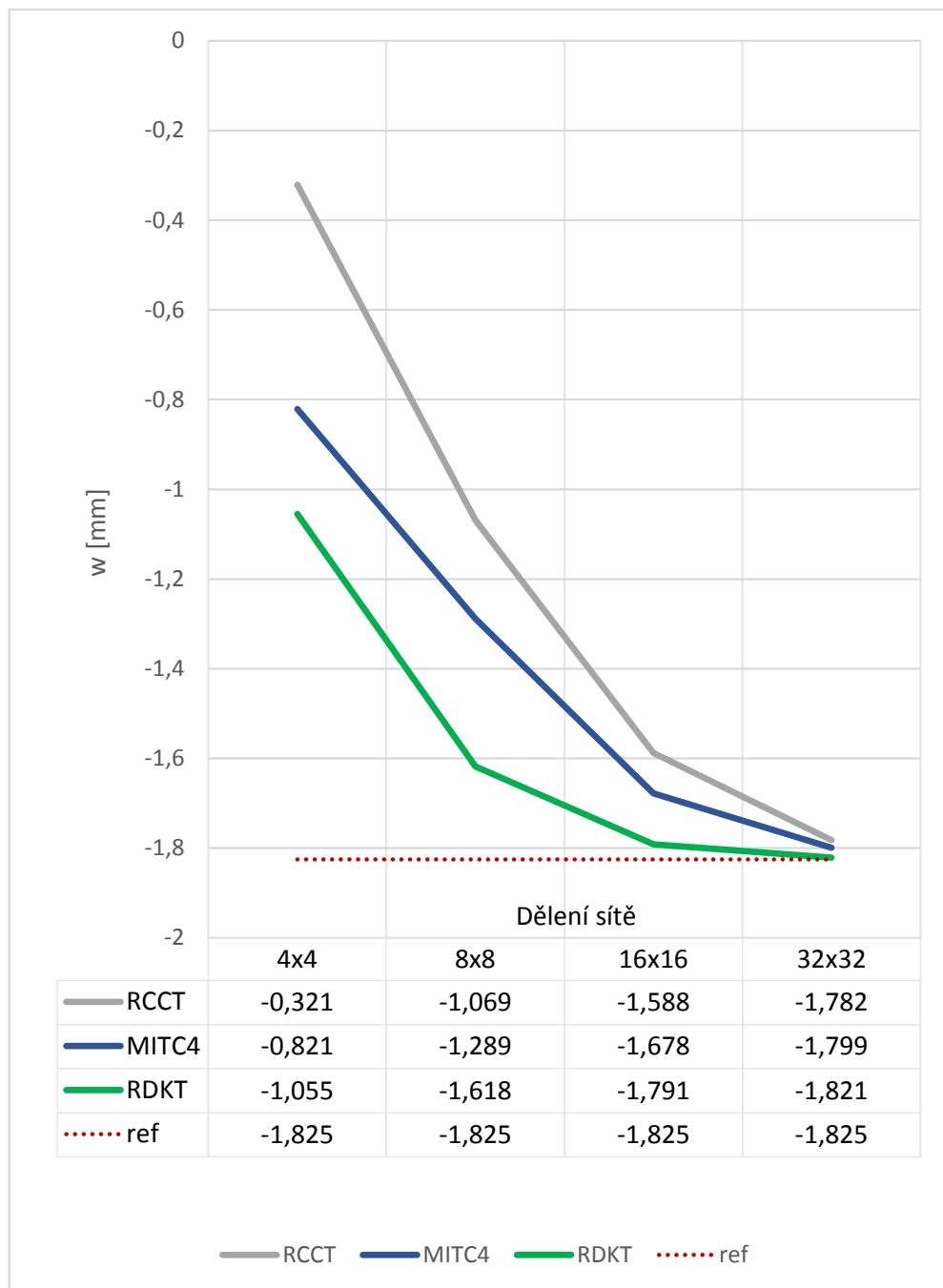
kde $\bar{w}_c = 164.24$ (viz [3]). Tvar deformované konstrukce je ukázán na obrázku (7.9). Výsledné hodnoty pro všechny tři prvky jsou zaznamenány v grafu a tabulce na obrázku (7.10).



Obrázek 7.8.: Část konstrukce použitá pro analýzu s vyznačením odebraných stupňů volnosti.



Obrázek 7.9.: Deformovaný tvar konstrukce válcové skořepiny (zobrazeny 25 x hodnoty skutečných posunů). Barevná škála znázorňuje normálové napětí v dolních vláknech v rovině y, z .



Obrázek 7.10.: Hodnoty průhybu válcové skořepiny v místě zatížení pro různé prvky a různou jemnost sítě.

Z výsledků je patrné, že všechny prvky konvergují k referenční hodnotě. Chování této tenké skořepiny nejlépe dokáže vystihnout složený prvek RDKT. Například výsledky získané pomocí RDKT na síti 16x16 jsou přesnější než výsledky RCCT na síti 32x32 a srovnatelné s výsledky MITC4 opět na síti 32x32. V praxi je tedy pro dosažení stejné přesnosti možné použít přibližně čtyřikrát méně uzlů, s tím se pojí výrazně nižší časová náročnost výpočtu. Nicméně i prvek MITC4 dosahuje dobré přesnosti, ani pro tenkou skořepinu zde nedochází ke smykovému uzamknutí.

ZÁVĚR

V práci byly představeny celkem čtyři typy prvků pro analýzu metodou konečných prvků. Dva prvky byly určeny pro ohyb tenkých desek, založené na diskrétní Kirchhoffově teorii, další dva prvky byly prvky skořepinové. Skořepinové prvky byly založeny na odlišných přístupech, jeden vznikl složením deskového a stěnového prvku, v případě druhého prvku se jedná v podstatě o vhodně upravený prvek pro třídimenziónní analýzu.

U každého prvku byly nejprve představeny základní předpoklady a stručně popsána jejich formulace. Následně byly odvozeny potřebné vztahy, nezbytné pro vlastní implementaci v prostředí MATLAB. Všechny popsané prvky byly do tohoto prostředí implementovány.

Program, který byl napsán, byl otestován na klasických patch testech. Všechny prvky těmto testům vyhověly. Následně byly provedeny výpočty na dvou deskových konstrukcích, za účelem porovnání byly pro tyto příklady uvedeny i výsledky získané pomocí dalších dostupných prvků. Skořepinové prvky byly dále otestovány na konstrukci válcové skořepiny.

Z provedených testů se ukázalo, že pro tenké deskové konstrukce je velice vhodné použít prvky založené na diskretní Kirchhoffově teorii, tedy prvky DKT a DKQ. Vzhledem k zanedbání vlivu posouvajících sil se tyto prvky nepotýkají s problémem smykového uzamknutí, ohyb tenkých desek jsou tedy schopné velice dobře vystihnout. Naopak pro analýzu tlustých desek jsou tyto prvky nevhodné, je tedy nutné při volbě těchto prvků zkontrolovat, zda se opravdu jedná o tenkou desku.

V případě prvku MITC4 byl při jeho formulaci uváženo, že prvky, jejichž formulace vychází z prvků třídídimenzionálních, se při použití interpolačních funkcí nižšího stupně potýkají s problémem smykového zatuhnutí. Pro vyřešení tohoto problému využívá prvek odlišnou interpolaci příčných smykových složek deformace. Z provedených testů vyplývá, že navržený způsob interpolace pro MITC4 se velice dobře vypořádá se smykovým zatuhnutím a lze ho tedy použít i pro analýzu tenkých desek a skořepin.

Z výsledků analýzy tenké válcové skořepiny je patrné, že oba představené skořepinové prvky (MITC4, RDKT) je možné pro analýzu tenkých skořepin použít. V porovnání s prvkem RCCT, jehož výsledky byly získány díky jeho implementaci v programu OOFEM, ukázaly oba prvky implementované v rámci této práce lepší schopnost vystihnout chování tenkých skořepin, prvek RDKT složený ze stěnového prvku s rotačními stupni volnosti a deskového DKT prvku dosáhl nejlepších výsledků. Velkou výhodou prvku MITC4 je pak zejména fakt, že jej lze použít stejně dobře jak pro tenké, tak i tlusté desky, jak potvrdily i provedené analýzy.

SEZNAM OBRÁZKŮ

4.1. Trojúhelníkový prvek DKT - Discrete Kirchhoff Triangle.	21
4.2. Zavedení lokálního souřadného systému na hranách prvku.	23
4.3. Znázornění hrany prvku pro odvození vztahů pro pootočení φ_n a φ_s uprostřed hrany prvku a následnou transformaci ze systému souřadnic s a n do kartézského systému.	23
4.4. Bázové funkce trojúhelníkového prvku s kvadratickou aproximací [2]. . .	28
4.5. Čtyřúhelníkový prvek DKQ - Discrete Kirchhoff Quadrilateral.	30
5.1. Trojúhelníkový prvek s rotačními stupni volnosti.	34
5.2. Tvarové funkce trojúhelníkového prvku s rotačními stupni volnosti. . .	35
5.3. Deformace prvku při stavu nulové energie.	37
5.4. Čtyřúhelníkový prvek pro analýzu skořepin - MITC4.	40
5.5. Uvažovaná poloha prvku v lokálním souřadném systému.	42
6.1. Síť prvků pro patch test definovaný v ukázce kódu pro formulaci úlohy.	48
6.2. Sestavy trojúhelníkových (vlevo) a čtyřúhelníkových (vpravo) prvků po- užité pro patch testy.	49
6.3. Způsob zatížení a podepření pro jednotlivé patch testy.	50
7.1. Kloubově podepřená deska zatížená konstantním tlakem.	53
7.2. Průhyb kloubově podepřené desky o tloušťce $t=0.125$ spočtený prvkem DKQ.	53

7.3. Hodnoty napětí v dolních vláknech spočtených pomocí MITC4 (vlevo) a momentů spočtených pomocí DKQ (vpravo).	56
7.4. Zkosená konzola s naznačením použité sítě prvků.	57
7.5. Průhyb zkosené konzoly spočtený pomocí DKQ.	58
7.6. Hodnoty napětí v dolních vláknech spočtených pomocí MITC4 (vlevo) a momentů spočtených pomocí DKT (vpravo).	59
7.7. Válcová skořepina zatížená protilehlými silami.	60
7.8. Část konstrukce použitá pro analýzu s vyznačením odebraných stupňů volnosti.	61
7.9. Deformovaný tvar konstrukce válcové skořepiny (zobrazeny 25 x hodnoty skutečných posunů). Barevná škála znázorňuje normálové napětí v dolních vláknech v rovině y, z	61
7.10. Hodnoty průhybu válcové skořepiny v místě zatížení pro různé prvky a různou jemnost sítě.	62

SEZNAM TABULEK

- 7.1. Hodnoty průhybu po obvodě kloubově podepřené desky pro různé tloušťky
t konstrukce a různou jemnost dělení sítě. 54
- 7.2. Hodnoty průhybu zkosené konzoly. 58

LITERATURA

- [1] Batoz, J.L.; Bathe, K.J.; Ho, L.W. *A study of three-node triangular plate bending elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pp. 1771-1812, 1980.
- [2] Dvořáková, E. *Prvek pro rovinnou úlohu s rotačními stupni volnosti*. Praha, 2013. Baka-lářská práce. ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Katedra mechaniky.
- [3] Lindberg, G.M.; Olson, M.D.; Cowper, G.R. *New developments in finite element analysis of shells*. Q. Bull. Div. Mech. Eng. and the National Aeronautical Establishment, National Research Council of Canada, Vol. 4, 1969.
- [4] Dvorkin, E.; Bathe, K.J. *A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis*. Eng. Comput., 1984, Vol. 1, 1983.
- [5] Španiel, M.; Horák, Z. *Úvod do metody konečných prvků*. Česká technika - naklada-telství ČVUT, 2011. ISBN 978-80-01-04665-4.
- [6] Bittnar, Z.; Šejnoha, J. *Numerické metody mechaniky 1*. Vydavatelství ČVUT, 1992. ISBN 80-01-00855.
- [7] Bittnar, Z.; Šejnoha, J. *Metoda konečných prvků 1*. Vydavatelství ČVUT, 1991. ISBN 80-01-00557-7.
- [8] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. *The finite element method for solid and structural me-chanics*. Elsevier Ltd., 2005. ISBN 0-7506-6321-9.

-
- [9] Reddy, J.N. *An Introduction to the finite element method*. McGraw-Hill Book Co., 2006. ISBN 007-124473-5.
- [10] Bergan, P.G.; Felippa, C.A. *A triangular membrane element with rotational degrees of freedom [online]*. Dostupný z WWW: colorado.edu/engineering/cas/Felippa.d/FelippaHome.d/Publications.d/BerganFelippa.CMAME.85.pdf
- [11] Allman, D.J. *A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis*. Computers & Structures Vol. 19, No. 1-2, pp. 1-8, 1984.
- [12] Providas, E.; Kattis M.A. *An assessment of two fundamental flat triangular shell elements with drilling rotations*. Computers & Structures 77, 129-139, 2000.
- [13] Lee, P.S.; Bathe, K.J. *The quadratic MITC plate and MITC shell elements in plate bending*. Advances in Engineering Software 41, 712-728, 2010.
- [14] MATLAB version R2014b, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2010.
- [15] Patzák, B.; Bittnar, Z. *Design of object oriented finite element code*. Advances in Engineering Software, 32(10-11):759–767, 2001.
- [16] Patzák, B. *Deský*. Podklad k přednáškám předmětu Numerická analýza 2, Fsv, ČVUT.
- [17] Courant, R. *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*. Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 1-23.
- [18] *Membrane isoparametric elements with rotational degrees of freedom (Serendipity family)*. Interní dokument společnosti SCIA Nemetschek.

Přílohy

IMPLEMENTACE GEOMETRICKÝCH MATIC DO PROSTŘEDÍ MATLAB

A.1. Deskový prvek DKT

```
1 % DESKOVY PRVEK DKT
2 % funkce pocita geometrickou matici B
3 % In:
4 % xe - vektor x-ovych souradnic uzlu prvku (x1,x2,x3)
5 % ye - vektor y-ovych souradnic uzlu prvku (y1,y2,y3)
6 % ksi, eta - souradnice integracnich bodu
7 %
8 % Out:
9 % Be - geometricka matice
10
11 function B = Be(xe, ye, ksi, eta)
12
13 [J, Ne, Nk] = Jacobi(xe, ye, ksi, eta);
14 iJ = inv(J);
15
16 dkdx = iJ(1, 1);
17 dedx = iJ(1, 2);
18 dkdy = iJ(2, 1);
19 dedy = iJ(2, 2);
20
21 dN=[ 0 Nk(1)*dkdx+Ne(1)*dedx 0 Nk(2)*dkdx+Ne(2)*dedx ...
22      0 Nk(3)*dkdx+Ne(3)*dedx 0 Nk(4)*dkdx+Ne(4)*dedx ...
23      0 Nk(5)*dkdx+Ne(5)*dedx 0 Nk(6)*dkdx+Ne(6)*dedx;
24      -Nk(1)*dkdy-Ne(1)*dedy 0 -Nk(2)*dkdy-Ne(2)*dedy 0 ...
```

```

25     -Nk (3) *dkdy-Ne (3) *dedy 0 -Nk (4) *dkdy-Ne (4) *dedy 0 ...
26     -Nk (5) *dkdy-Ne (5) *dedy 0 -Nk (6) *dkdy-Ne (6) *dedy 0;
27     -Nk (1) *dkdx-Ne (1) *dedx Nk (1) *dkdy+Ne (1) *dedy ...
28     -Nk (2) *dkdx-Ne (2) *dedx Nk (2) *dkdy+Ne (2) *dedy ...
29     -Nk (3) *dkdx-Ne (3) *dedx Nk (3) *dkdy+Ne (3) *dedy ...
30     -Nk (4) *dkdx-Ne (4) *dedx Nk (4) *dkdy+Ne (4) *dedy ...
31     -Nk (5) *dkdx-Ne (5) *dedx Nk (5) *dkdy+Ne (5) *dedy
32     -Nk (6) *dkdx-Ne (6) *dedx Nk (6) *dkdy+Ne (6) *dedy];
33
34 T = transform(xe, ye);
35
36 Be = dN*T;
37
38 end

```

A.2. Deskový prvek DKQ

```

1  % DESKOVY PRVEK DKQ
2  % funkce pocita geometrickou matici B
3  % In:
4  % xe - vektor x-ovych souradnic uzlu prvku (x1,x2,x3)
5  % ye - vektor y-ovych souradnic uzlu prvku (y1,y2,y3)
6  % ksi, eta - souradnice integracnich bodu
7  %
8  % Out:
9  % Be - geometricka matice
10
11 function Be = Be(xe, ye, ksi, eta)
12
13 [J, Ne, Nk] = Jacobi(xe, ye, ksi, eta);
14 iJ = inv(J);
15
16 dkdxdx = iJ(1, 1);
17 dedxdx = iJ(1, 2);
18 dkdydx = iJ(2, 1);
19 dedydx = iJ(2, 2);
20
21 dN = [ 0 Nk (1) *dkdx+Ne (1) *dedx 0 Nk (2) *dkdx+Ne (2) *dedx ...
22       0 Nk (3) *dkdx+Ne (3) *dedx 0 Nk (4) *dkdx+Ne (4) *dedx ...
23       0 Nk (5) *dkdx+Ne (5) *dedx 0 Nk (6) *dkdx+Ne (6) *dedx ...
24       0 Nk (7) *dkdx+Ne (7) *dedx 0 Nk (8) *dkdx+Ne (8) *dedx;
25     -Nk (1) *dkdy-Ne (1) *dedy 0 -Nk (2) *dkdy-Ne (2) *dedy 0 ...
26     -Nk (3) *dkdy-Ne (3) *dedy 0 -Nk (4) *dkdy-Ne (4) *dedy 0 ...
27     -Nk (5) *dkdy-Ne (5) *dedy 0 -Nk (6) *dkdy-Ne (6) *dedy 0 ...
28     -Nk (7) *dkdy-Ne (7) *dedy 0 -Nk (8) *dkdy-Ne (8) *dedy 0;
29     -Nk (1) *dkdx-Ne (1) *dedx Nk (1) *dkdy+Ne (1) *dedy ...
30     -Nk (2) *dkdx-Ne (2) *dedx Nk (2) *dkdy+Ne (2) *dedy ...
31     -Nk (3) *dkdx-Ne (3) *dedx Nk (3) *dkdy+Ne (3) *dedy ...

```

```

32     -Nk (4) *dkdx-Ne (4) *dedx Nk (4) *dkdy+Ne (4) *dedy ...
33     -Nk (5) *dkdx-Ne (5) *dedx Nk (5) *dkdy+Ne (5) *dedy ...
34     -Nk (6) *dkdx-Ne (6) *dedx Nk (6) *dkdy+Ne (6) *dedy ...
35     -Nk (7) *dkdx-Ne (7) *dedx Nk (7) *dkdy+Ne (7) *dedy ...
36     -Nk (8) *dkdx-Ne (8) *dedx Nk (8) *dkdy+Ne (8) *dedy];
37
38 T = transform(xe, ye);
39
40 Be = dN*T;
41
42
43 end

```

A.3. Stěnový prvek s rotačními stupni volnosti

```

1  % STENOVY PRVEK S ROTACNIMI STUPNI VOLNOSTI
2  % funkce pocita geometrickou matici B
3  % In:
4  % xe - vektor x-ovych souradnic uzlu prvku (x1,x2,x3)
5  % ye - vektor y-ovych souradnic uzlu prvku (y1,y2,y3)
6  % ksi, eta - souradnice integracnich bodu
7  %
8  % Out:
9  % Be - geometricka matice
10
11 function Be = Be(xe, ye, ksi, eta)
12
13 N1dk = 4*ksi-1;
14 N2dk = 0;
15 N3dk = -3+4*ksi+4*eta;
16 N4dk = 4*eta;
17 N5dk = -4*eta;
18 N6dk = 4*(1-2*ksi-eta);
19
20 N1de = 0;
21 N2de = 4*eta-1;
22 N3de = -3+4*eta+4*ksi;
23 N4de = 4*ksi;
24 N5de = 4*(1-2*eta-ksi);
25 N6de = -4*ksi;
26
27 A = N1dk*xe (1)+N2dk*xe (2)+N3dk*xe (3)+...
28     N4dk*(xe (1)+xe (2))/2+N5dk*(xe (2)+xe (3))/2+N6dk*(xe (1)+xe (3))/2;
29 B = N1dk*ye (1)+N2dk*ye (2)+N3dk*ye (3)+...
30     N4dk*(ye (1)+ye (2))/2+N5dk*(ye (2)+ye (3))/2+N6dk*(ye (1)+ye (3))/2;
31 C = N1de*xe (1)+N2de*xe (2)+N3de*xe (3)+...
32     N4de*(xe (1)+xe (2))/2+N5de*(xe (2)+xe (3))/2+N6de*(xe (1)+xe (3))/2;
33 D = N1de*ye (1)+N2de*ye (2)+N3de*ye (3)+...

```

```

34      N4de*( ye (1)+ye (2) ) /2+N5de*( ye (2)+ye (3) ) /2+N6de*( ye (1)+ye (3) ) /2;
35
36      dxdk = D/ (A*D-B*C) ;
37      dydk = -C/ (A*D-B*C) ;
38      dxde = -B/ (A*D-B*C) ;
39      dyde = A/ (A*D-B*C) ;
40
41      uvN1dk = N1dk+N4dk/2+N6dk/2;
42      uvN2dk = N2dk+N4dk/2+N5dk/2;
43      uvN3dk = N3dk+N5dk/2+N6dk/2;
44      uNw1dk =-N6dk*( ye (1)-ye (3) ) /8+N4dk*( ye (2)-ye (1) ) /8;
45      uNw2dk =-N4dk*( ye (2)-ye (1) ) /8+N5dk*( ye (3)-ye (2) ) /8;
46      uNw3dk =-N5dk*( ye (3)-ye (2) ) /8+N6dk*( ye (1)-ye (3) ) /8;
47      vNw1dk = N6dk*( xe (1)-xe (3) ) /8-N4dk*( xe (2)-xe (1) ) /8;
48      vNw2dk = N4dk*( xe (2)-xe (1) ) /8-N5dk*( xe (3)-xe (2) ) /8;
49      vNw3dk = N5dk*( xe (3)-xe (2) ) /8-N6dk*( xe (1)-xe (3) ) /8;
50
51      uvN1de = N1de+N4de/2+N6de/2;
52      uvN2de = N2de+N4de/2+N5de/2;
53      uvN3de = N3de+N5de/2+N6de/2;
54      uNw1de =-N6de*( ye (1)-ye (3) ) /8+N4de*( ye (2)-ye (1) ) /8;
55      uNw2de =-N4de*( ye (2)-ye (1) ) /8+N5de*( ye (3)-ye (2) ) /8;
56      uNw3de =-N5de*( ye (3)-ye (2) ) /8+N6de*( ye (1)-ye (3) ) /8;
57      vNw1de = N6de*( xe (1)-xe (3) ) /8-N4de*( xe (2)-xe (1) ) /8;
58      vNw2de = N4de*( xe (2)-xe (1) ) /8-N5de*( xe (3)-xe (2) ) /8;
59      vNw3de = N5de*( xe (3)-xe (2) ) /8-N6de*( xe (1)-xe (3) ) /8;
60
61      Be= [uvN1dk*dxdk+uvN1de*dxde, 0,  uNw1dk*dxdk+uNw1de*dxde, ...
62          uvN2dk*dxdk+uvN2de*dxde, 0,  uNw2dk*dxdk+uNw2de*dxde, ...
63          uvN3dk*dxdk+uvN3de*dxde, 0,  uNw3dk*dxdk+uNw3de*dxde;
64          0,  uvN1de*dyde+uvN1dk*dydk, vNw1de*dyde+vNw1dk*dydk, ...
65          0,  uvN2de*dyde+uvN2dk*dydk, vNw2de*dyde+vNw2dk*dydk, ...
66          0,  uvN3de*dyde+uvN3dk*dydk, vNw3de*dyde+vNw3dk*dydk;
67          uvN1de*dyde+uvN1dk*dydk, uvN1dk*dxdk+uvN1de*dxde, ...
68          uNw1de*dyde+uNw1dk*dydk+vNw1dk*dxdk+vNw1de*dxde, ...
69          uvN2de*dyde+uvN2dk*dydk, uvN2dk*dxdk+uvN2de*dxde, ...
70          uNw2de*dyde+uNw2dk*dydk+vNw2dk*dxdk+vNw2de*dxde, ...
71          uvN3de*dyde+uvN3dk*dydk, uvN3dk*dxdk+uvN3de*dxde, ...
72          uNw3dk*dydk+uNw3de*dyde+vNw3de*dxde+vNw3dk*dxdk ] ;
73
74      end

```

A.4. Skořepinový prvek MITC4

```

1  % SKOŘEPINOVY PRVEK MITC4
2  % funkce pocita geometrickou matici B
3  % In:
4  % xe - vektor x-ových souradnic uzlu prvku (x1,x2,x3)

```

```

5 % ye – vektor y-ových souradnic uzlu pruku (y1,y2,y3)
6 % Vn – pole slozek ridicich vektoru ve vrcholech
7 % ak – vektor tloustek konstrukce ve vrcholech
8 % r1, r2, r3 – souradnice integracnich bodu
9 %
10 % Out:
11 % Be – geometricka matice
12
13 function B= Be(r1, r2, r3, Vn, ak, xe, ye)
14
15 hk1(1) = 1/4*(1+r2);
16 hk1(2) = -1/4*(1+r2);
17 hk1(3) = -1/4*(1-r2);
18 hk1(4) = 1/4*(1-r2);
19
20 hk2(1) = 1/4*(1+r1);
21 hk2(2) = 1/4*(1-r1);
22 hk2(3) = -1/4*(1-r1);
23 hk2(4) = -1/4*(1+r1);
24
25 J = Jacobian(r1, r2, r3, ak, xe, ye, Vn);
26 Jinv = J^(-1);
27
28 r1dx = Jinv(1,1);
29 r2dx = Jinv(1,2);
30 r1dy = Jinv(2,1);
31 r2dy = Jinv(2,2);
32
33 hkx(1) = hk1(1)*r1dx + hk2(1)*r2dx;
34 hkx(2) = hk1(2)*r1dx + hk2(2)*r2dx;
35 hkx(3) = hk1(3)*r1dx + hk2(3)*r2dx;
36 hkx(4) = hk1(4)*r1dx + hk2(4)*r2dx;
37
38 hky(1) = hk1(1)*r1dy + hk2(1)*r2dy;
39 hky(2) = hk1(2)*r1dy + hk2(2)*r2dy;
40 hky(3) = hk1(3)*r1dy + hk2(3)*r2dy;
41 hky(4) = hk1(4)*r1dy + hk2(4)*r2dy;
42
43 [g1,g2,g3] = base(Vn,xe,ye,[0 0 0 0],ak,r1,r2);
44
45 cov = [g1;g2;g3];
46 contr = inv(cov);
47 G1 = contr(1:3,1);
48 G2 = contr(1:3,2);
49 G3 = contr(1:3,3);
50
51 RZ = ak(1)/8*...
52 [0 0 1/2*(1+r2) -(ye(1)-ye(2))/4*(1+r2) (xe(1)-xe(2))/4*(1+r2) ...
53 0 0 -1/2*(1+r2) -(ye(1)-ye(2))/4*(1+r2) (xe(1)-xe(2))/4*(1+r2) ...
54 0 0 -1/2*(1-r2) -(ye(4)-ye(3))/4*(1-r2) (xe(4)-xe(3))/4*(1-r2) ...

```

```

55 0 0 1/2*(1-r2) -(ye(4)-ye(3))/4*(1-r2) (xe(4)-xe(3))/4*(1-r2)];
56
57 SZ = h/8*...
58 [0 0 1/2*(1+r1) -(ye(1)-ye(4))/4*(1+r1) (xe(1)-xe(4))/4*(1+r1) ...
59 0 0 1/2*(1-r1) -(ye(2)-ye(3))/4*(1-r1) (xe(2)-xe(3))/4*(1-r1) ...
60 0 0 -1/2*(1-r1) -(ye(2)-ye(3))/4*(1-r1) (xe(2)-xe(3))/4*(1-r1) ...
61 0 0 -1/2*(1+r1) -(ye(1)-ye(4))/4*(1+r1) (xe(1)-xe(4))/4*(1+r1)];
62
63 XZ = RZ*2*G1(1)*G3(3) + SZ*2*G2(1)*G3(3);
64 YZ = RZ*2*G1(2)*G3(3) + SZ*2*G2(2)*G3(3);
65
66 e2 = [0 1 0];
67
68 V11 = cross(e2,Vn(1,:))/norm(cross(e2,Vn(1,:)));
69 V12 = cross(e2,Vn(2,:))/norm(cross(e2,Vn(2,:)));
70 V13 = cross(e2,Vn(3,:))/norm(cross(e2,Vn(3,:)));
71 V14 = cross(e2,Vn(4,:))/norm(cross(e2,Vn(4,:)));
72
73 V21 = cross(Vn(1,:),V11);
74 V22 = cross(Vn(2,:),V12);
75 V23 = cross(Vn(3,:),V13);
76 V24 = cross(Vn(4,:),V14);
77
78 B = zeros(6,20);
79
80 B(1:4,:) = [hkx(1) 0 0 ...
81             -r3/2*ak(1)*hkx(1)*V21(1) r3/2*ak(1)*hkx(1)*V11(1) ...
82             hkx(2) 0 0 ...
83             -r3/2*ak(2)*hkx(2)*V22(1) r3/2*ak(2)*hkx(2)*V12(1) ...
84             hkx(3) 0 0 ...
85             -r3/2*ak(3)*hkx(3)*V23(1) r3/2*ak(3)*hkx(3)*V13(1) ...
86             hkx(4) 0 0 ...
87             -r3/2*ak(4)*hkx(4)*V24(1) r3/2*ak(4)*hkx(4)*V14(1);
88             ...
89             0 hky(1) 0 ...
90             -r3/2*ak(1)*hky(1)*V21(2) r3/2*ak(1)*hky(1)*V11(2) ...
91             0 hky(2) 0 ...
92             -r3/2*ak(2)*hky(2)*V22(2) r3/2*ak(2)*hky(2)*V12(2) ...
93             0 hky(3) 0 ...
94             -r3/2*ak(3)*hky(3)*V23(2) r3/2*ak(3)*hky(3)*V13(2) ...
95             0 hky(4) 0 ...
96             -r3/2*ak(4)*hky(4)*V24(2) r3/2*ak(4)*hky(4)*V14(2);
97             ...
98             0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
99             ...
100            hky(1) hkx(1) 0 ...
101            -r3/2*ak(1)*(hkx(1)*V21(2)+hky(1)*V21(1)) ...
102            r3/2*ak(1)*(hky(1)*V11(1)+hkx(1)*V11(2)) ...
103            hky(2) hkx(2) 0 ...
104            -r3/2*ak(2)*(hkx(2)*V22(2)+hky(2)*V22(1)) ...

```

```
105      r3/2*ak(2)*(hky(2)*V12(1)+hky(2)*V12(2)) ...
106      hky(3) hkx(3) 0 ...
107      -r3/2*ak(3)*(hkx(3)*V23(2)+hky(3)*V23(1)) ...
108      r3/2*ak(3)*(hky(3)*V13(1)+hky(3)*V13(2)) ...
109      hky(4) hkx(4) 0 ...
110      -r3/2*ak(4)*(hkx(4)*V24(2)+hky(4)*V24(1)) ...
111      r3/2*ak(4)*(hky(4)*V14(1)+hky(4)*V14(2)) ] ;
112
113 B(5,:) = YZ;
114 B(6,:) = XZ;
115
116 end
```