

SEMINÁRNÍ PRÁCE

Dolní odhad osově síly způsobující ztrátu stability
neprizmatického prutu

Evžen Korec

Praha 2016

SEMINÁRNÍ PRÁCE

Dolní odhad osově síly způsobující ztrátu stability
nepřizmatického prutu

Autor: Evžen Korec

Škola: ČVUT, Fakulty stavební, Katedra
matematiky, Katedra mechaniky

Vedoucí seminární práce:

doc. RNDr. Ivana Pultarová, Ph.D.

prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Praha 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval samostatně, použil jsem pouze podklady (literaturu, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu a postup při zpracování a dalším nakládání s prací je v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V dne podpis:

Poděkování

Chtěl bych velice poděkovat panu prof. Ing. Milanu Jiráskovi, DrSc. a paní doc. RNDr. Ivaně Pultarové, CSc. za nesmírně laskavou pomoc, cenné rady a motivaci, kterou mi během vzniku této práci práce poskytovali a nesmírně vřelý a osobní přístup, kterého si velice vážím. Dále bych chtěl velice poděkovat panu doc.RNDr.Aleši Nekvindovi, CSc. za nesmírně cenné rady, nápady, připomínky, podporu a možnost účastnit se jeho přednášek matematiky 4, které mi poskytly jedinečný zážitek a umožnili mi lépe pochopit řadu matematických idejí, na které jsem narazil během vypracovávání této práce. Přál bych si také velice poděkovat panu doc. Janu Zemanovi, PhD. za nesmírně cenné rady, nápady, připomínky a chtěl bych také velmi poděkovat jemu a ještě jednou panu prof. Ing. Milanu Jiráskovi, DrSc. za uspořádání speciálního cvičení, které mi poskytlo mimořádný zážitek z krásy propojování matematických a inženýrských myšlenek.

Anotace

Hlavním cílem této práce je najít způsob, jak vypočítat velikost osové síly, při které dojde ke ztrátě stability neprizmatického prutu (ve smyslu této práce prutu s proměnným průřezem) s přímou střednicí. Ukážeme mechanický popis celého problému, který vede k tomu, že najít F_k znamená hledat vlastní čísla úlohy

$$-EI_y(x)w''(x) - F_k w(x) = 0, \quad w(0) = w(l) = 0.$$

Hlavní překážkou řešení této rovnice je variabilita I_y , přičemž ukážeme, že pro některé tvary I_y (buď ve tvaru konstanty nebo speciální kvadratické funkce) umíme úlohu vyřešit analyticky. Pro ostatní případy nastíníme několik numerických metod, kterými je možné najít dolní odhad prvního vlastního čísla úlohy uvedené výše, tedy F_k , přičemž mimo jiné se budeme zabývat metodou založenou na metodě konečných prvků.

Klíčová slova

Vlastní čísla, obyčejná diferenciální rovnice, metoda konečných prvků, ztráta stability neprizmatického prutu.

Obsah

Úvod	1
1 Mechanická formulace problému	3
1.1 Úloha ztráty stability ideálně přímého prutu	3
2 Vlastní čísla úlohy	8
2.1 Fundamentální aspekty matematického řešení úlohy.....	8
2.2 Řešení úlohy s konstantním I_y	9
2.3 Řešení úlohy s $I_y = kx^2$	10
2.4 Variační formulace úlohy	13
2.5 Řešení úlohy metodou konečných prvků	16
2.6 Zaručený dolní odhad λ_1 úlohy řešené metodou konečných prvků	18
2.7 Získání $\lambda_{1,L}$ jiným způs. a s tím souv. nastínění možnosti získání $\lambda_{2,L}$	21
3 Výsledky numerických experimentů	28
3.1 Zadání úlohy a způsob výpočtu	28
3.2 Výsledky numerických experimentů	30

Závěry 31

Reference 38

Úvod

V této práci se budeme zabývat hledáním velikosti síly, kterou můžeme osově zatěžovat staticky určitý prut s přímou střednicí, tedy spojnicí težišť průřezů prutu kolmých na jeho osu, kterou prut nahrazujeme ve výpočtech, aniž by došlo k jeho kolapsu z důvodu takzvané ztráty stability. Ztráta stability je nesmírně pozoruhodným jevem, na kterém je zajímavý už samotný fakt, že má velmi efektní a výraznou interpretaci jak z praktického, tak inženýrsko-matematického hlediska. Z praktického pohledu je ztráta stability spojena s velmi rychlou a často fatální destrukcí prutu, který je zatěžován až do úrovně ztráty stability, a to až do té míry, že prut již není schopen nadále plnit svou statickou funkci. Intuitivně sice není mnoho překvapivého na tom, že pokud zatěžujeme prut s přímou střednicí stále větší silou, tak určitou velikost síly už není schopen "přenést". Asi bychom očekávali, že velikost síly, kterou může prut přenést aniž by došlo k jeho kolapsu, je spojena s pevností materiálu a velikostí prutu. Ke zhroucení prutu může opravdu dojít z důvodu ztráty pevnosti, kdy tlak působený zatížením je tak velký, že dojde k "drcení" materiálu prutu, ve kterém dochází k porušování molekulárních vazeb. Pokud bychom ale experimentálně osově zatěžovali různé pruty s přímou střednicí rozličných tvarů a z rozdílného materiálu, zjistili bychom, že dojde k destrukci některých prutů ještě dříve, než zatěžující síla dosáhnou meze pevnosti. A právě u těchto prutů došlo ke kolapsu nikoliv z důvodu ztráty pevnosti, ale z důvodu ztráty stability. Při výpočtu účinků osového zatížení na prut musíme totiž vzít v potaz, že ačkoliv jsme na začátku tvrdili, že se budeme zabývat pruty s přímou střednicí, tak prut nemůže být nikdy vyroben tak, aby jeho střednice byla dokonalá úsečka, vždy se jedná o křivku. Navíc si můžeme představit, že prut (představme si například sloup) je kromě osového zatížení, které pokládejme za výrazně převažující nad ostatními typy zatížení, ještě vystaven působení drobných zatížení jako jsou silové účinky pohybu vzduchu, atd, což může způsobit vybočení střednice, byť je lidským okem nepozorovatelné. Z tohoto důvodu nestačí při analýze účinků zatížení na prut brát v potaz pouze tlakové účinky síly, ale také momentové účinky, které při určité velikosti zatěžující síly mohou způsobit právě ztrátu stability.

Ztrátě stability se věnoval už v polovině 18. století legendární švýcarský matematik Leonhard Euler, který v roce 1757 analyticky odvodil velikost síly, při které dojde ke ztrátě stability prizmatického sloupu. Jeho revoluční postup, který je dodnes předmětem výuky na technických univerzitách, vychází ze sestavení rovnice statické rovnováhy (jejímž řešením je funkce popisující posun libovolného bodu střednice), ve které se objevuje síla, při jejímž působení dojde ke ztrátě stability prutu, jakožto parametr. Euler si zřejmě nějakým způsobem uvědomil, že ke kolapsu prutu popsaného touto rovnicí dojde tehdy, pokud má parametr (tedy síla) takovou hodnotu, že úloha má nekonečně mnoho řešení. Tento pozoruhodný poznatek je zmíněnou inženýrsko-matematickou interpretací jevu ztráty stability.

Ve konceptu ztráty stability se tedy elegantně snoubí nebezpečný lidským okem dobře pozorovatelný jev z reálného života, tedy kolaps prutu a ryze abstraktní matematická otázka existence nekonečně mnoha řešení rovnice. Jev ztráty stability je tak ztělesněním neodlučitelnosti inženýrského a matematického poznání.

Ačkoliv pomocí Eulerova modelu ztráty stability umíme odpovědět na otázku, jak velkou silou bychom museli zatěžovat prizmatický prut (tedy konstantního průřezu z dokonale homogenního materiálu), aby došlo ke ztrátě stability, stále nevíme, jak velkou silou bychom museli zatěžovat neprizmatický prut (tím myslíme proměnného průřezu z dokonale homogen-

ního materiálu). Na tuto otázku se budeme snažit v této práci odpovědět.

1 Mechanická formulace problému

1.1 Úloha ztráty stability ideálně přímého prutu

Úvahy v celé této práci jsou obecně motivovány snahou nalézt maximální hodnotu síly, kterou můžeme zatěžovat prut (prut chápeme jako trojrozměrný hmotný objekt, u kterého jeden rozměr výrazně převažuje nad zbylými dvěma rozměry), aniž by došlo k naprostému kolapsu prutu a ztráty jeho statické funkce. Předpokládáme, že střednice prutu, tedy spojnice těžišť jednotlivých příčných řezů je úsečka. Silou rozumíme sílu, která působí ve směru této střednice na jednom z okrajů prutu a působí přímo na střednici prutu, takže nevyvolává žádný dodatečný moment. Při dalším posuzování účinků působících sil na konstrukci budeme náš prut nahrazovat právě touto střednicí, což je správné, protože vnější síly i výslednice vnitřních sil jí jakožto spojnicí těžišť prochází a také užitečné, protože to umožňuje jednodušší matematickou formulaci úlohy.

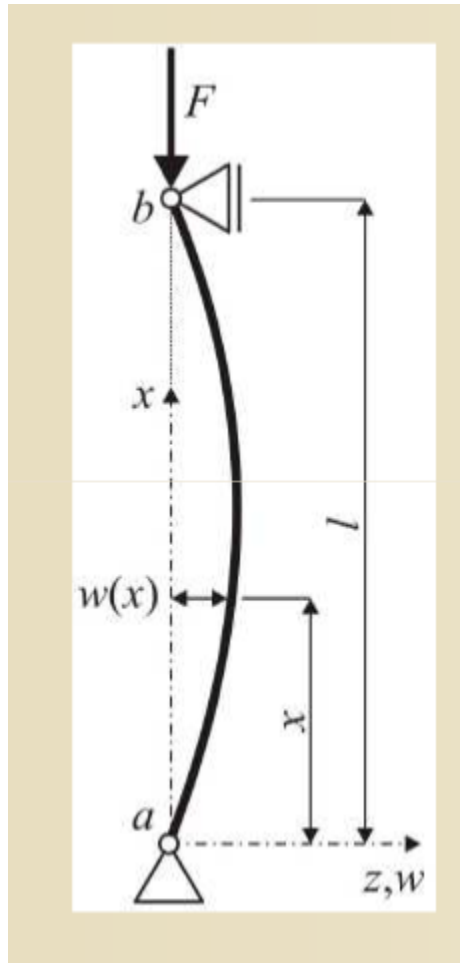
Pro další zjednodušení dalších úvah dále budeme předpokládat, že na prut působí pouze osová síla a jí odpovídající reakce, ale žádné další zatížení. Tento předpoklad není zcela reálný, protože ve stavebním inženýrství obvykle uvažujeme, že tělesa jsou umístěna v gravitačním poli Země a působí na ně tedy gravitační síla, kterou bychom do našeho jednorozměrného modelu mohli zavést jako spojitě liniové zatížení. Ačkoliv předpoklad absence působení gravitační síly není zcela reálný, je do jisté míry z mechanického hlediska ospravedlnitelný faktem, že osově zatížení, které může být vyvoláno tíhovým působením zbytku konstrukce na námi zkoumaný prut, může být mnohonásobně větší než celková velikost působící gravitační síly. V dalším textu tedy působení gravitační síly ani vnějšího zatížení nebudeme uvažovat, nicméně jeho zahrnutí do dále uvedených modelů by bylo možné pravděpodobně i bez výraznějších změn.

Naším dalším předpokladem z mechanického hlediska bude fakt, že prut je podepřen tzv. jako prostý nosník a konstrukce je tzv. staticky určitá. Náš jednorozměrný prut má v rovině tzv. tři stupně volnosti. Ty jsou mu ale odebrány vazbami, přesněji pevným kloubem a posuvným kloubem. Tento předpoklad je v dalších úvahách velmi důležitý, protože u staticky určité konstrukce dokážeme pouze ze znalosti vnějšího zatížení určit reakce v podporách, což způsobí, že úlohu budeme moci matematicky formulovat jako obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu. Pokud bychom neuvažovali, že se jedná o staticky určitou konstrukci, mohla by nastat situace, že úloha je tzv. staticky neurčitá, tedy počet stupňů volnosti odebraných vazbami je větší než počet stupňů volnosti konstrukce (v našem případě 3) a nebylo by možné pouze ze znalosti vnějších sil vypočítat reakce v podporách, což by mělo za následek, že bychom museli úlohu formulovat jako obyčejnou diferenciální rovnici čtvrtého řádu, což by následující úvahy ztížilo.

Posledním předpokladem bude fakt, že po deformaci nosníku vlivem působících sil zůstává libovolný příčný řez prutem (tedy původně řez kolmý na střednici) rovinný a stále kolmý na deformovanou střednici a že deformace jsou řádově menší než je délka prutu. Tento předpoklad je nazýván Navierova - Bernoulliho hypotéza [1] a vede k výraznému zjednodušení popisu našeho problému.

Předpokládáme také, že prut je vytvořen z jednoho zcela homogenního materiálu a že se deformuje lineárně pružně, tedy že napětí v tlaku je přímo úměrné poměrnému zkrácení.

Poznamenejme ještě, že uvažujeme prut o obecně nekostantním průřezu.



Obrázek 1: Znázornění přímé střednice prutu před a její možný tvar po dočasném působení příčného zatížení, zdroj: [18]

Rovinná idealizace střednice prutu a sil na ní působících je graficky znázorněna na následujícím Obrázku 1.

Připomeňme, že naším cílem je zjistit maximální možnou hodnotu osové síly, kterou můžeme na prut působit, aniž by došlo ke kolapsu prutu a ztráty jeho statické funkce, a to za předpokladů, které jsem stanovili výše. K fatální deformaci prutu (rozumějme jeho rozpadu na více částí) může obecně dojít buď tzv. ztrátou stability nebo tzv. ztrátou pevnosti. Oba pojmy objasníme dále. Snažíme se tedy najít:

- a) velikost kritické síly F_k , při které dojde ke ztrátě pevnosti
- b) velikost kritické síly F_k , při které dojde ke ztrátě stability.

Při posuzování hlediska a) budeme uvažovat, že v jednotlivých průřezích kolmých na střednici prutu vznikne vlivem působící síly pouze rovnoměrné tlakové napětí. Materiál, ze kterého je prut tvořen, ale nemůže být namáhán libovolným napětím, aniž by nedošlo k jeho porušení. Může být namáhán pouze do napětí, které je nazýváno mez pevnosti. Pokud tuto mez překročíme, můžeme pozorovat rozdrčení materiálu a kolaps prutu. Velikost kritické síly, při které dojde ke ztrátě pevnosti tedy vypočteme jako:

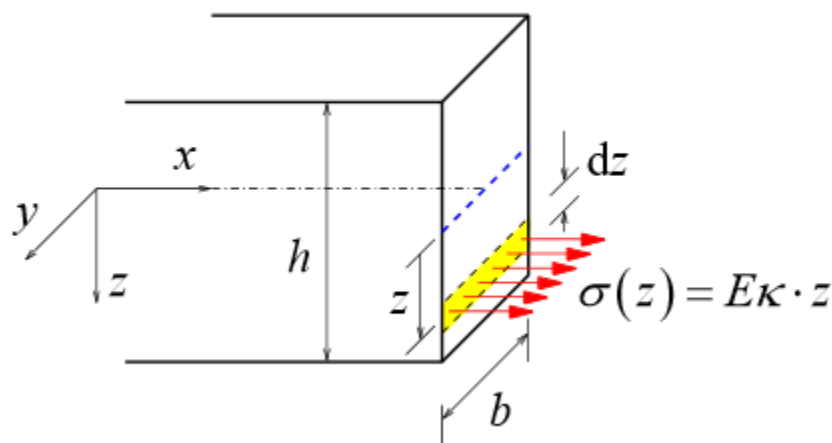
$$F_k = \sigma_p A_{min},$$

kde F_k je kritická síla, σ_p je mez pevnosti daného materiálu a A_{min} je nejmenší obsah průřezu prutu kolmého na jeho střednici.

Dokonale přímý prut (tedy prut, jehož střednice je geometricky úsečka) nemůže být namáhán jiným než tlakovým napětím, jehož mezní hodnoty jsme posoudily jakožto a). V reálných podmínkách zaprvé není možné nikdy vyrobit prut, jehož střednice nebude vždy být jen minimální odlišná od úsečky a zadruhé může dojít k tomu, že prut bude kromě již zmíněného stálého zatížení (tedy osové síly) dočasně vystaven zatížení, které bude obsahovat nenulovou složku ve směru osy z . Pro lepší představu uvažujme např. zatížení větrem, či si představme, že se o prut někdo opře. Obecně uvažujme, že působící síla je libovolně malá. Vlivem složky zatížení ve směru osy z dojde k deformaci střednice, které způsobí průhyb střednice prutu ve směru osy z tak, že již nebude přímá, což je označováno jako imperfekce střednice. Opět uvažujme, že průhyb ve směru osy z v jednotlivých bodech bude řádově menší než délka prutu a obecně uvažujme, že velikost deformace v libovolném bodě (kromě bodů, ve kterých jsou podpory - tam je posun ve směru z nulový) je velmi malá, můžeme říci, že libovolně malá, ale větší než nula. Příklad zdeformované střednice je znázorněn na Obrázku 1.

V případě, že původní zatížení namáhá deformovanou střednici, ale v jednotlivých průřezech nevzniká pouze rovnoměrné normálové napětí způsobené tlakovými účinky působící síly, ale vzniká také další normálové napětí, které je ovšem v různých oblastech průřezů různé velké, vzhledem k jednotlivým průřezům je tedy nerovnoměrné. Přesněji můžeme říci, že toto normálové napětí se bude po průřezích měnit ve směru osy z . V některých oblastech průřezů prutu bude kladné, v jiných záporné. Takové nerovnoměrné napětí ale vyvolá ohyb prutu. Výslednicí tohoto nerovnoměrného napětí v jednotlivých průřezích je ohybový moment. Ve všech následujících úvahách budeme momentem chápat moment okolo osy y a budeme předpokládat, že prut se může ohýbat pouze okolo této osy.

Výše uvedená situace je graficky znázorněna na Obrázku 2.



Obrázek 2: Znázornění nerovnoměrného normálového napětí v průřezu prutu, zdroj:[17]

Je možné experimentálně ukázat, že prut byť s minimálně imperfektní střednicí může

být při působení osově síly fatálně deformován ohybem (tedy dojde k rozlomení prutu) ještě dříve, než normálové napětí, které v konstrukci vzniká vlivem tlakového namáhání, dosáhne meze pevnosti. Obvykle se v souvislosti s tímto jevem hovoří o ztrátě stability. Není ale zcela zřejmé, jak spočítat velikost síly, při které ke ztrátě stability dojde. Tuto sílu můžeme např. podle [17] vypočítat následujícím způsobem.

Nejdříve si uvědomme, že pro velikost ohybového momentu M_y působícího v libovolném průřezu kolmého na střednici našeho prutu platí vztah níže, jak je znázorněno na Obrázku 2:

$$M_y(x) = EI_y(x)\kappa_y(x),$$

kde I_y je moment setrvačnosti vzhledem k ose y , κ_y je křivost a E je modul pružnosti materiálu.

Poznamenejme, že pro daný průřez (tedy danou hodnotu x) je I_y definován jako:

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

kde A je plocha průřezu našeho prutu v daném bodě x .

Z této definice přímo vyplývá, že $I_y \geq 0$ a navíc platí, že $I_y \neq 0$ (a tedy $I_y > 0$), protože pokud by rovnost platila, je možné dovodit, že pak by plocha daného průřezu musela být nulová a námi zkoumaný prut by tedy byl v takovém průřezu přerušen, což nepředpokládáme. Zároveň zdůrazněme, že funkce momentu setrvačnosti je sice definována ve všech bodech x našeho prutu, ale nemusí být ve všech bodech spojitá, což jednak dává fyzikální smysl, průřez se opravdu může skokově měnit, a jednak to může mít velmi pozitivní význam pro řešení úlohy (1). Budeme předpokládat, že funkce má konečný počet bodů nespojitosti a že $I_y \in L^2$, přičemž vymezení tohoto prostoru se budeme věnovat v následující kapitole.

Kvůli předpokladu kolmosti a rovinnosti průřezů i po deformaci ale můžeme uvažovat, že

$$\kappa_y(x) = -w''(x),$$

kde $w(x)$ je posun bodů střednice kvůli deformaci ve směru osy z .

Zároveň můžeme kvůli faktu, že známe reakce vyjádřit $M_y(x)$ jako:

$$M_y(x) = F_k w(x),$$

kde $w(x)$ je posun bodů střednice kvůli deformaci ve směru osy z , moment setrvačnosti vzhledem k ose y a κ_y je křivost.

Pokud oba vztahy dosadíme do rovnice (1) zjistíme, že F_k musí splňovat rovnici

$$F_k w(x) = -EI_y(x)w''(x).$$

Zároveň víme, že podpory prutu neumožňují pohyb ve směru osy z a tedy

$$w(0) = w(l) = 0.$$

kde l je délka prutu.

Společně se získanou rovnicí tak dostáváme

$$-EI_y(x)w''(x) - F_k w(x) = 0, \quad w(0) = w(l) = 0, \quad (1)$$

Vidíme tedy, že jsme dospěli k obyčejné diferenciální rovnici druhého řádu se dvěma okrajovými podmínkami. Podle [3] platí, že taková úloha má buď právě jedno nebo nekonečně mnoho řešení. Matematická formulace našeho problému je tedy kompletní.

Dá se experimentálně ukázat, že ke ztrátě stability dochází právě tehdy, pokud má úloha (1) nekonečně mnoho řešení. To můžeme interpretovat například tak, že průhyb $w(x)$ našeho prutu je libovolně velký, což od stabilní konstrukce intuitivně spíše neočekáváme.

Naší otázku "Jaká je velikost osově síly, při které dojde u našeho prutu ke ztrátě stability?" jsme tak převedli na čistě matematický problém "Jak velká musí být v úloze (1) hodnota F_k , aby měla tato úloha nekonečně mnoho řešení $w(x)$." V následující kapitole popíšeme, že odpověď na tuto otázku je relativně snadné, pokud je $I_y(x)$ konstantní funkcí a naopak relativně velmi komplikované, pokud $I_y(x)$ není konstantou a budeme se zabývat analytickými a numerickými možnostmi řešení úlohy (1).

2 Vlastní čísla úlohy (1)

2.1 Fundamentální aspekty matematického řešení úlohy (1)

V této kapitole se pokusíme nastínit některé fundamentální aspekty řešitelnosti a povahy řešení úlohy (1). Nejdříve charakterizujeme samotnou rovnici. Jak již bylo řečeno naznačeno na konci předešlé kapitoly, námi řešenou rovnici můžeme například podle [2] označit jako obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s nulovou pravou stranou a okrajovými podmínkami. Zároveň definujme, jaké funkce $w(x)$ pokládáme za řešení úlohy (1). Z tvaru rovnice (1) je zjevné, že aby funkce $w(x)$ mohla být řešením úlohy (1), musí existovat její druhá derivace ve všech $x \in \langle 0, l \rangle$ a v krajních bodech musí být nulová. Vzhledem k existenci druhé derivaci na $x \in \langle 0, l \rangle$, musí být první derivace na tomto intervalu spojitá a z toho plyne i spojitost funkce samotné na tomtéž intervalu. Dá se ukázat (např. viz [4]), že funkce, které splňují všechny výše zmíněné podmínky včetně podmínek okrajových tvoří tzv. lineární prostor funkcí, který je v [4] značen jako $C^2\langle 0, l \rangle$. Celkově tedy pro úlohu (1) s uvážením okrajových podmínek definujme definiční obor D pro možná řešení úlohy (1) $w(x)$ jako množinu

$$D = \{w : w \in C^2\langle 0, l \rangle, w(0) = w(l) = 0\}.$$

Naše požadavky na řešení jsou velmi silné, v následující kapitole je variační formulací úlohy (1) poněkud zeslabíme, abychom mohli s úlohou lépe pracovat.

Zbývá ještě definovat, jaké funkce budeme považovat za přípustné pro $I_y(x)$. Mohli bychom teoreticky uvažovat například pouze funkce spojitě, což prozatím požadujeme pro funkce, které mají řešit úlohu (2), ale to by vedlo k tomu, že bychom při řešení úlohy (2) zcela zanedbaly například takové pruty, které skokově mění svůj průřez. Takový případ je zcela reálný a nebylo by přínosné takové tvary prutů ignorovat. V dalších kapitolách také ukážeme, že pokud alespoň připustíme, aby $I_y(x)$ mohlo mít konečně mnoho bodů nespojitosti, budeme moci za $I_y(x)$ volit po částech konstantní funkce, což bude pro řešení úlohy (2) klíčové. Připusťme tedy, aby $I_y(x)$ mohlo mít konečně mnoho bodů nespojitosti a za tímto účelem definujme že $I_y \in L_I^2$, čímž myslíme

$$L_I^2 = L_I^2(0, l) = \{I_y; I_y > 0; \int_0^l I_y^2 dx < \infty\}.$$

Požadavek, aby $I_y > 0$ vychází z předpokladů o I_y v minulé kapitole. Zároveň dodejme, že integrálem myslíme Lebesgueův integrál.

Připomeňme, že vyřešit úlohu (1) pro nás znamená najít takovou hodnotu F_k , aby měla úloha nekonečně mnoho řešení $w(x)$. V souvislosti s takto formulovanou otázkou obvykle o hledaném F_k hovoříme jako o vlastním čísle úlohy (1) a o úloze (1) jako o úloze vlastních čísel. Řešení úlohy příslušná danému vlastnímu číslu nazýváme vlastní funkce. [2] Abychom mohli využít poznatků z [2], upravme úlohu (1) na následující tvar vydělením celé rovnice $EI_y(x)$, což je ekvivalentní úprava výrazu, neboť $I_y(x) > 0$, jak je řečeno v předchozí kapitole. F_k označme jako λ_i , jak je v [2] obvyklé. Abychom našli řešení úlohy (1), budeme se snažit vyřešit tuto úlohu, kterou si označme jako (2).

$$-(w'(x))' - \frac{\lambda_i}{EI_y(x)}w(x) = 0, \quad w(0) = w(l) = 0. \quad (2)$$

Výrazy $-(w'(x))'$ a $\frac{1}{EI_y(x)}w(x)$ můžeme chápat jako tzv. diferenciální operátory (viz [2]), které přiřazují funkcím w jinou funkci. Označme je následujícím způsobem.

$$Aw = -(w'(x))', \quad Bw = \frac{1}{EI_y(x)}w(x).$$

Získáváme tak operátorový tvar rovnice (2)

$$Aw - \lambda_i Bw = 0, \quad w(0) = w(l) = 0. \quad (3)$$

Oba operátory jsou podle [2] (a vzhledem k našim předpokladům o funkci $I_y(x)$ uvedeným v předchozí kapitole) lineární a pozitivně definitní operátory na D_A , což je podmínkou platnosti následujících tvrzení o hledaném λ_i , které vycházejí z věty 94 v [2] a z dalších informací z v [2] a [3].

(a) Pokud je λ_i vlastním číslem úlohy (2), pak má úloha nekonečně mnoho řešení.

(b) Existuje spočetně mnoho, a to kladných reálných vlastních čísel λ_i , která tvoří rostoucí posloupnost. Platí tedy, že první vlastní číslo je nejmenší ze všech vlastních čísel úlohy. Ke každému z vlastních čísel přísluší nekonečně mnoho řešení úlohy (1) $w(x)$, tedy vlastních funkcí, vždy však jen konečný počet lineárně nezávislých vlastních funkcí.

Domníváme se, že je důležité podotknout, že ačkoliv je vlastních čísel podle bodu (b) spočetně mnoho, naším cílem je najít pouze první vlastní číslo, které označujeme λ_1 neboť pokud kritická osová síla F_k dosáhne hodnoty λ_1 , dojde ke ztrátě stability našeho prutu. Dalším vlastním číslem je v intencích námi zkoumané úlohy poněkud komplikované přiřadit přímý fyzikální význam, protože prut již po dosažení první kritické hodnoty zatížení λ_1 již není celiství a není možné ho tak dále zatěžovat na hodnotu kritického zatížení λ_2 atd.

Ačkoliv nám body (a) až (b) poskytují velmi zásadní informace o vlastních číslech úlohy (2), neříkají nám, jak (pro konkrétní volbu E a $I_y(x)$) λ_1 nalézt. Analytická řešení úlohy (2) jsou známá pouze pro speciální volbu $I_y(x)$, a to pokud $I_y(x) = c$, kde c je kladná reálná konstanta a $I_y(x) = ax^2$, kde a je kladná reálná konstanta. Pro jiné volby $I_y(x)$ se musíme spokojit s numerickým řešením úlohy, což má ale řadu dalších úskalí, jak ukážeme v dalších kapitolách.

2.2 Řešení úlohy (2) s konstantním I_y

Zdůrazněme, že pro tento případ platí všechna tvrzení předchozí kapitoly. Za předpokladu, že $I_y(x)$ je konstantní funkcí s jedinou hodnotou pro $\forall x \in \langle 0, l \rangle$, můžeme zapsat

$$\lambda_{EI} = \frac{1}{EI_y} \lambda_i$$

a řešit úlohu (2) vzhledem k λ_{EI} . Analytickým postupem uvedeným v [2] můžeme ukázat, že vlastní čísla této úlohy můžeme zapsat ve tvaru:

$$\lambda_{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

a tedy

$$\lambda_i = EI_y \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

První vlastní číslo (a tedy hodnota kritické síly F_k) je tedy ve tvaru

$$\lambda_1 = EI_y \frac{\pi^2}{l^2}.$$

2.3 Řešení úlohy (2) s $I_y(x) = kx^2$

V tomto případě předpokládáme, že $I_y(x) = kx^2$, kde a je kladná nenulová reálná konstanta. Abychom byli schopni analyticky najít vlastní čísla takto formulované úlohy, budeme rovnici úlohy (2) řešit na jistém intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $b = a + l$ a ne na intervalu $\langle 0, l \rangle$ jako v předchozích případech, přičemž budeme požadovat okrajové podmínky $w(a) = w(b) = 0$, abychom vyhověli požadavkům úlohy (2). Úlohu tak v podstatě "posuneme" v souřadném systému po ose x doprava o konstantu a . Vlastní čísla posunuté úlohy řešené na intervalu $\langle a, b \rangle$ jsou ale stejná jako úlohy řešené na intervalu $\langle 0, l \rangle$. Vlastní funkce úlohy řešené na $\langle a, b \rangle$ jsou vůči vlastním funkcím úlohy řešené na $\langle 0, l \rangle$ posunuté v souřadném systému po ose x doprava o konstantu a . Analytickým způsobem můžeme odvodit, že vlastní čísla úlohy (2) s $I_y(x) = kx^2$ můžeme vyjádřit jako

$$\lambda_i = \frac{\pi^2 n^2 Ek}{\left(\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)\right)} - \frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

a první vlastní číslo ve tvaru

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2 Ek}{\left(\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)\right)} - \frac{1}{4}.$$

Toto vyjádření můžeme odvodit následujícím způsobem. Řešíme úlohu

$$-(w'(x))' - \frac{\lambda_i}{Ekx^2} w(x) = 0, \quad w(0) = w(l) = 0.$$

Můžeme zapsat

$$\lambda_{Ek} = \frac{1}{Ek} \lambda_i$$

a řešit úlohu (2) vzhledem k λ_{Ek} , tedy

$$-(w'(x))' - \frac{\lambda_{Ek}}{x^2} w(x) = 0, \quad w(0) = w(l) = 0.$$

Pokud předpokládáme řešení této rovnice ve tvaru $w = x^r$ a dosadíme tento tvar do rovnice (2), získáme charakteristickou rovnici

$$r^2 - r + \lambda_{Ek} = 0$$

Tato rovnice má kořeny

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda_{Ek}}}{2}$$

Pokud platí, že $1 - 4\lambda_{Ek} \neq 0$ pak pro $1 - 4\lambda_{Ek} > 0$ respektive $1 - 4\lambda_{Ek} < 0$ dostáváme z této rovnice dva různé reálné respektive komplexní kořeny r_1, r_2 , tyto funkce jsou v obou případech lineárně nezávislé a tvoří fundamentální systém úlohy (2) (viz [3]). Každé řešení úlohy (2) můžeme zapsat ve tvaru

$$w(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pokud do tohoto tvaru dosadíme okrajové podmínky $w(a) = 0$, $w(b) = 0$, jejichž platnost požadujeme, získáváme

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 a^{r_1} + C_2 a^{r_2}, \\ 0 &= C_1 b^{r_1} + C_2 b^{r_2}. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostáváme

$$C_2 = -C_1 \frac{a^{r_1}}{a^{r_2}},$$

a tedy

$$0 = C_1 b^{r_1} + -C_1 \frac{a^{r_1}}{a^{r_2}} b^{r_2}.$$

Protože $b^{r_2} \neq 0$, platí

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \frac{b^{r_1}}{b^{r_2}} - C_1 \frac{a^{r_1}}{a^{r_2}} b^{r_2}, \\ 0 &= C_1 b^{r_1-r_2} - C_1 a^{r_1-r_2}, \\ 0 &= C_1 (b^{r_1-r_2} - a^{r_1-r_2}). \end{aligned}$$

Protože hledáme vlastní čísla úlohy, budeme nadále uvažovat, že $C_1 \neq 0$, protože pokud by to tak nebylo, platilo by $C_2 = 0$ a řešení by tedy byla nulová funkce, což odporuje definici vlastních čísel.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1-r_2} = 1.$$

Nyní vidíme, že abychom splnili okrajové podmínky, pokud $1 - 4\lambda_{Ek} > 0$ (r_1, r_2 jsou tedy reálná čísla), musí platit $r_1 = r_2$, což je ale spor, protože to znamená $1 - 4\lambda_i = 0$, což nepředpokládáme. Musí tedy platit $1 - 4\lambda_{Ek} < 0$ a r_1, r_2 musí být komplexní čísla. V takovém případě ale můžeme zapsat

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^{r_1-r_2} &= e^{2\pi i n}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ e^{(r_1-r_2)\ln\left(\frac{a}{b}\right)} &= e^{2\pi i n}, \end{aligned}$$

a tedy

$$(r_1 - r_2) \ln \left(\frac{a}{b} \right) = 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Protože ale pro $r_1 - r_2$ platí

$$r_1 - r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{Ek}}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda_{Ek}}}{2} = \sqrt{1 - 4\lambda_{Ek}},$$

pak

$$\sqrt{1 - 4\lambda_{Ek}} \ln \left(\frac{a}{b} \right) = 2\pi i n,$$

$$\sqrt{1 - 4\lambda_{Ek}} = \frac{2\pi i n}{\ln \left(\frac{a}{b} \right)},$$

$$1 - 4\lambda_{Ek} = \frac{4\pi^2 i^2 n^2}{\ln^2 \left(\frac{a}{b} \right)},$$

$$\lambda_{Ek} = \frac{\pi^2 n^2}{\ln^2 \left(\frac{a}{b} \right)} - \frac{1}{4},$$

a tedy

$$\frac{\pi^2 n^2}{\ln^2 \left(\frac{a}{b} \right)} - \frac{1}{4} = \frac{1}{Ek} \lambda_i$$

$$\lambda_i = \frac{\pi^2 n^2 Ek}{\ln^2 \left(\frac{a}{b} \right)} - \frac{1}{4} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dosud jsme předpokládali, že $1 - 4\lambda_{Ek} \neq 0$. Nyní se zabývejme situací $1 - 4\lambda_{Ek} = 0$, tedy $\lambda_{Ek} = \frac{1}{4}$. Dosazením je možné ověřit, že každá funkce splňující rovnici (2) by musela jít vyjádřit ve tvaru

$$w(x) = C_1 x^{\frac{1}{2}} + C_2 x^{\frac{1}{2}} \log(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pokud bychom dosadily okrajové podmínky $w(a) = 0$, $w(b) = 0$, z odpovídající soustavy rovnic by vyplynulo, že $a = b$, což je spor a pro případ $\lambda_{Ek} = \frac{1}{4}$ tedy nedokážeme splnit okrajové podmínky.

2.4 Variační formulace úlohy (2)

V předchozích kapitolách jsme představili takové volby $I_y(x)$ v úloze (2), že jsme byli schopni najít analytický předpis pro vlastní čísla této úlohy. Pro obecnou volbu $I_y(x)$ ale není takový předpis znám a není známa dokonce ani technika, jak nalézt fundamentální systém (ve smyslu věty 1.7 v [3]) takové úlohy (máme na mysli úlohu zadanou stejnou diferenciální rovnicí ale bez uvážení okrajových podmínek). Jak již bylo naznačeno v předchozích kapitolách, musíme se spokojit s hledáním přibližné hodnoty vlastních čísel úlohy některou z numerických metod. V této práci budeme pro účely numerického řešení úlohy (2) uvažovat metodu konečných prvků, ačkoliv se jistě nejedná o jedinou možnost. Abychom mohli přistoupit k použití této metody, musíme úlohu (2) formulovat takzvaně variačně. Namísto úlohy (2) se tak budeme zabývat variačně formulovanou úlohou (2), kterou budeme značit jako (4) a budeme hledat hodnoty λ , pro které bude mít úloha (4) nekonečně mnoho řešení.

Z [2] vyplývá, že variační formulace spočívá mimo jiné na faktu, že pokud nějaká funkce řeší úlohu (2), tak zároveň minimalizuje hodnotu takzvaného funkcionálu energie (viz článek 76 [2]) na množině D . Pokud tedy známe funkcionál energie, můžeme se snažit najít řešení úlohy (2) jako minimum tohoto funkcionálu na D . Variační formulace dále vyžaduje "rozšíření" množiny funkcí D , na které hledáme řešení, na množinu H a v souvislosti s tím i užití zobecněného chápání derivací a okrajových podmínek. (Jak je uvedeno v [2], kde je odkazováno na podrobné rozebrání této teorie v [5]). Dle [2] můžeme H definovat jako

$$H = H_0^1(0, l) = \{w; \int_0^1 (w')^2 dx < \infty, w(0) = 0, w(l) = 0\}.$$

Integrálem je myšlen Lebesgueův integrál (viz [4]) a derivacemi jsou míněny takzvané "zobecněné" derivace (viz [4]). Okrajové podmínky jsou také míněny ve "zobecněném" smyslu (viz [4]).

Sestavit funkcionál energie pro úlohu (2) je možné způsobem uvedeným v [2]. Je ale možné ukázat (viz [2]), že úloha minimalizace funkcionálu energie je z hlediska jejích řešení ekvivalentní úloze najít takové w , že:

$$(Aw - \lambda Bw, v) = 0 \quad \forall v \in H \quad (4)$$

Skalárním součinem máme na mysli skalární součin na H , který definujeme jako:

$$(w, v) = \int_0^l wv dx.$$

Integrálem je stále myšlen Lebesgueův integrál a derivacemi jsou míněny "zobecněné" derivace.

Úlohu označenou jako (4) budeme pokládat za variační formulaci naší úlohy (2). Vzhledem ke skalárnímu součinu, který využíváme, můžeme úlohu (4) ekvivalentně zapsat jako

$$-\int_0^l w''v dx - \lambda \int_0^l \frac{1}{EI_y} wv dx = 0$$

a po aplikaci metody per partes a nulových okrajových podmínek

$$\int_0^l w'v' dx = \lambda \int_0^l \frac{1}{EI_y} wv dx$$

Je možné ukázat, že integrál na levé straně rovnice je v podstatě skalární součin funkcí w a v na H , který je definován jako

$$a(w, v) = \int_0^l w'v' dx,$$

Podle [6] je také možné ukázat, že i integrál na pravé straně rovnice je vyjádřením jiného z možných skalárních součinů na H , a to

$$(w, v) = \int_0^l \frac{1}{EI_y} wv dx.$$

Chápání integrálů na pravé i levé straně jakožto skalárních součinů nám umožní velmi efektivní práci s rovnicí tvaru (4), neboť skalární součin má velmi výhodné vlastnosti (viz [2]). Úlohu (4) tak můžeme po zavedení odpovídajících skalárních součinů zapsat následovně:

$$a(w, v) = \lambda(w, v).$$

K takto zavedeným skalárním součinům na H můžeme definovat odpovídající normy na H , které budeme značit následovně.

$$\|w\|_A = \sqrt{a(w, w)}, \quad \|w\| = \sqrt{(w, w)}.$$

Teoreticky sice stále nevíme, jak prakticky nalézt řešení úlohy (4), ale mohli bychom se pokusit vyřešit úlohu (4) nikoliv na celém H , ale na nějakém vektorovém podprostoru s konečnou dimenzí H_p , kde $H_p \subset H$. V podstatě se tak snažíme minimalizovat funkcionál energie namísto ne celém na H na H_p . Tento postup budeme označovat jako variační metodu. Je možné ukázat [2], že pokud řešíme úlohu (4) na prostoru konečné dimenze, stačí, aby rovnice úlohy (4) byla z hlediska v splněna pro všechny bázové funkce prostoru H_p . Těchto funkcí je ale konečně mnoho. Formulace úlohy (4) ve tvaru

$$(Aw - \lambda Bw, v_i) = 0 \quad \forall v_i, i = 1 \dots n, n \in \mathbf{N} \quad (5)$$

kde v_i jsou prvky báze H_p je podle [2] označována jako Galerkinova metoda. Tento přístup by se dal interpretovat také tak, že se snažíme provést jakousi "kolmou" projekci skutečného řešení úlohy v H na H_p .

Vzhledem k tomu, že H_p má konečnou dimenzi, má i bázi s konečným počtem prvků (viz [6]). Je možné ukázat (viz [2]), že úloha (5) vede k úloze najít zobecněný vlastní vektor a zobecněná vlastní čísla matic \mathbf{A} a \mathbf{B} . Přesnějším vymezení se budeme věnovat v následující kapitole.

Variační formulace v podstatě zobecňuje pojem řešení úlohy (2) a nová variačně formulovaná úloha (4), tak může mít teoreticky více řešení než úloha (2). Je ale možné ukázat (viz [2?]), že vlastní čísla úlohy (4), která z hlediska úlohy (4) chápeme jako taková $\lambda_i \in \mathbf{R}$, pro která má tato úloha nekonečně mnoho řešení jsou stejná jako úlohy (2) a podle [2] a pro ně platí následující vlastnosti.

(a) Pokud je λ vlastním číslem úlohy (4), pak má úloha nekonečně mnoho řešení.

(b) Existuje spočetně mnoho, a to kladných reálných vlastních čísel λ , která tvoří rostoucí posloupnost. Platí tedy, že první vlastní číslo je nejmenší ze všech vlastních čísel úlohy. Ke

každému z vlastních čísel přísluší nekonečně mnoho řešení úlohy (4) $w(x)$, tedy vlastních funkcí, vždy však jen konečný počet lineárně nezávislých vlastních funkcí.

(c) Vlastní funkce příslušné různým vlastním číslům jsou ortogonální v H vzhledem ke skalárním součinům $a(w, v)$ a (w, v) .

(d) Ortonormální systém vlastních funkcí (získaný ortonormalizací vlastních funkcí např. tzv Gram-Schmidtovým ortonormalizačním procesem viz [4]) rovnice (2) tvoří bázi jak v prostoru H . O vlastních funkcích při následujících úvahách tedy budeme předpokládat, že jsou ortonormální.

(e) Podle [6] je možné ukázat, že na definičním oboru H úlohy (4) platí takzvaná Friedrichs-Poincarého nerovnost, která tvrdí, že pro každou funkci $w \in H$ a pro nejmenší vlastní číslo úlohy (4) (a to pro libovolnou volbu E a I_y v souladu s dříve uvedenými předpoklady) λ_{1, I_y} platí

$$\lambda_{1, I_y} \|w\|^2 \leq a(w, w) = \|w\|_A^2.$$

(f) Pokud bychom řešili dvě úlohy (4), které si označme (4.1) a (4.2) ve kterých bychom volili stejnou hodnotu E , tedy $E_1 = E_2$ a funkce I_{y1} a I_{y2} obecně různé, ale takové, aby $I_{y1} \leq I_{y2}$, pak pro nejmenší vlastní čísla úlohy (4) platí, že $\lambda_{1, I_{y1}} \leq \lambda_{1, I_{y2}}$.

To můžeme podle [7] dokázat následujícím způsobem. Předpokládejme, že $u_{1, I_{y1}}$ jsou vlastní funkce odpovídající $\lambda_{1, I_{y1}}$ a $u_{1, I_{y2}}$ vlastní funkce odpovídající $\lambda_{1, I_{y2}}$. $\lambda_{1, I_{y2}}$ musí splňovat vztah

$$a(u_{1, I_{y2}}, v) = \lambda_{1, I_{y2}} (u_{1, I_{y2}}, v)$$

Pokud v předchozí rovnici zvolíme $v = u_{1, I_{y2}}$, což určitě můžeme, protože $u_{1, I_{y2}} \in H$, dostáváme výraz

$$a(u_{1, I_{y2}}, u_{1, I_{y2}}) = \lambda_{1, I_{y2}} (u_{1, I_{y2}}, u_{1, I_{y2}}),$$

což je ekvivalentní s

$$\|u_{1, I_{y2}}\|_A^2 = \lambda_{1, I_{y2}} \|u_{1, I_{y2}}\|^2.$$

Protože ale podle Friedrichs-Poincarého nerovnosti (viz bod (e)) platí, že

$$\lambda_{1, I_{y1}} \|u_{1, I_{y2}}\|^2 \leq \|u_{1, I_{y2}}\|_A^2,$$

dostáváme

$$\lambda_{1, I_{y1}} \|u_{1, I_{y2}}\|^2 \leq \lambda_{1, I_{y2}} \|u_{1, I_{y2}}\|^2,$$

což znamená

$$\lambda_{1, I_{y1}} \leq \lambda_{1, I_{y2}}.$$

Je dokonce možné ukázat, že stejná nerovnost neplatí pouze pro první vlastní čísla úloh (4.1) a (4.2), ale pro jakákoliv další vlastní čísla. Platí tedy nerovnost

$$\lambda_{i,I_{y1}} \leq \lambda_{i,I_{y2}}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

To je možné dokázat pomocí takzvaného Courant–Fischer–Weylova min-max principu, jak je uvedeno v [7]. Kompletní důkaz je uveden v [7], přičemž v této práci ho uvádíme v příloze. Dovolíme si čtenáře upozornit, že v důkazu je u některých jevů užito jiného symbolického značení.

2.5 Řešení úlohy (4) metodou konečných prvků

Jak jsme uvedli v předchozí kapitole, budeme se snažit nalézt přibližné řešení úlohy (4) pomocí Galerkinovy metody. Využijeme jednu z podob Galerkinovy metody, a to metodu konečných prvků (viz [2]), která za funkce v_i volí po částech lineární funkce tvaru, který dále popíšeme. Budeme volit n těchto speciálních po částech lineárních funkcí a tedy $i = 1 \dots n$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto funkce tvoří bázi prostoru $H_p \subset H$ o dimenzi n .

Zvolíme tedy n , $n \in \mathbb{N}$ bázových funkcí $v_i(x)$, $i = 1 \dots n$ budou tedy po částech lineární a pro každou z nich platí, že $x \in \langle 0, l \rangle$ a $v_i(x) \in \langle 0, 1 \rangle$. Zároveň uvažujme, že zkoumaný interval $\langle 0, l \rangle$ rozdělíme pomocí n dělicích bodů x_i , $i = 1 \dots n$ (přičemž krajní body intervalu, tedy $x = 0$ a $x = l$ nepokládáme za dělicí body) na $n + 1$ intervalů stejné délky h , pro kterou platí

$$h = \frac{l}{n + 1}.$$

V každém z dělicích bodů bude právě jedna z funkcí $v_i(x)$ nabývat maxima na $\langle 0, l \rangle$. Každá z $v_i(x)$ bude tedy na $\langle h(i - 1), hi \rangle$ rostoucí lineární funkcí procházející body $(h(i - 1), 0)$ a $(hi, 1)$ se směrnici $K = \frac{1}{h} = (n + 1)$ a na $\langle hi, h(i + 1) \rangle$ klesající lineární funkcí procházející body $(hi, 1)$ a $(h(i + 1), 0)$ se směrnici $K = -\frac{1}{h} = -(n + 1)$. Na $\langle 0, l \rangle \setminus (h(i - 1), h(i + 1))$ platí $v_i(x) = 0$.

Velmi volně řečeno tak dostáváme bázové funkce ve tvaru stříšek se zlomy v dělicích bodech.

Za účelem zjednodušení numerického zpracování úlohy budeme $I_y(x)$ idealizovat jako funkci po částech konstantní na intervalech $\langle h(i - 1), hi \rangle$, $i = 1 \dots n$. Za $I_y(x)$ na každém z těchto intervalů pak budeme považovat hodnotu funkce vypočtenou ve středu intervalu.

Pokud hledáme přibližná řešení úlohy (4), která budeme značit w_h a přibližná vlastní čísla úlohy (4), která budeme značit λ_{hi} na prostoru H_p s konečnou dimenzí, musí být i všechny řešení w_h takové úlohy, stejně jako jakákoliv jiná funkce z H_p lineární kombinací námi vybraných bázových funkcí v_i , tedy

$$w_h = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \quad i = 1 \dots n.$$

Pokud za w_h do rovnice (5), dosadíme výše uvedenou sumu, získáme maticovou rovnici následujícího tvaru, ve které se budou vyskytovat matice \mathbf{A} a \mathbf{B} rozměrů $n \times n$ a \mathbf{v} je vektor koeficientů α_i

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{v} = 0.$$

Tuto rovnici jsme řešili za použití výpočetního prostředí Matlab, který k hledání λ_i využívá v závislosti na vlastnostech matic \mathbf{A} a \mathbf{B} buď Choleskyho nebo Schurův rozklad [8].

Je možné ukázat (viz [2]), že při takové volbě báze funkcí, kterou jsme učinili, dostáváme přibližná řešení úlohy (4) w_h a vlastní čísla λ_{hi} se zvětšujícím se počtem báze funkcí stále přesnější a teoreticky při volbě nekonečně mnoha těchto báze funkcí metoda takzvaně konverguje k přesným vlastním funkcím a vlastním číslům úlohy (4) (viz [2]).

Hlavním objektem našeho zájmu je numerická hodnota nejmenšího vlastního čísla λ_{1h} . Je možné ukázat, že přibližná hodnota nejmenšího vlastního čísla úlohy (4) λ_{1h} nalezená metodou konečných prvků rozebranou výše je vždy větší nebo rovna přesné hodnotě vlastního čísla úlohy (4) λ_1 , tedy

$$\lambda_1 \leq \lambda_{1h}.$$

Tuto skutečnost je možné dokázat následujícím způsobem. Pro libovolné w_h a λ_{1h} musí platit

$$a(w_h, w_h) = \lambda_{1h}(w_h, w_h).$$

Z Friedrichs-Poincarého nerovnosti ale zároveň plyne

$$\lambda_1 \|w_h\|^2 \leq \|w_h\|_A^2,$$

a tedy

$$\lambda_1 \|w_h\|^2 \leq \lambda_{1h} \|w_h\|^2,$$

což znamená

$$\lambda_1 \leq \lambda_{1h}.$$

Tato skutečnost je pro nás z inženýrského hlediska mimořádně nevýhodná. Připomeňme, že fyzikální význam nejmenšího vlastního čísla úlohy (4) je velikost kritické síly F_k , při které dojde k vybočení našeho (z hlediska průřezu) neprizmatického prutu. Metoda konečných prvků aplikovaná na úlohu (4) nám tak dává za všech okolností horní odhad velikosti této síly. Mnohem výhodnější by pro nás ale byl dolní odhad velikosti kritické síly, protože bychom věděli, jak velkou osovou silou můžeme nosník zatěžovat, aby zaručeně nedošlo ke ztrátě stability tohoto nosníku. Způsobem, jak získat tento dolní odhad, se budeme zabývat v následujících kapitolách.

Na závěr této podkapitoly pokládáme za důležité zdůraznit, že hodnota λ_{1h} je zatížena chybami plynoucími z numerického zpracování úlohy. Jedná se jednak o chybu ze zaokrouhlení a také možnou chybu plynoucí z aproximace $I_y(x)$ jako po částech konstantní funkce. Úlohu tak v podstatě vypočteme pro jinou funkci $I_y(x)$ než pro jakou řešíme úlohu (1) plynoucí z fyzikální formulace problému. V dalších kapitolách nastíníme způsob, jak by bylo možné získat dolní odhad λ_{1h} , ale je třeba mít na paměti, že proces, který nastíníme se nijak nezabývá odstraněním těchto dvou chyb. Pokud budeme předpokládat, že chyba ze zaokrouhlení je velmi malá, zůstává nám stále chyba plynoucí z aproximace $I_y(x)$. Aby úvahy v dalších kapitolách zůstaly v platnosti, bylo by potřeba, aby pro po částech konstantní aproximaci $I_y(x)$, kterou pro názornost nazvěme $I_{yA}(x)$ platilo

$$I_{yA}(x) \leq I_y(x), \forall x \in \langle 0, l \rangle.$$

Z důvodu platnosti bodu (f) v předchozí kapitole zůstanou úvahy v následujících kapitolách v platnosti.

2.6 Zaručený dolní odhad λ_1 úlohy (4) řešené metodou konečných prvků

V předchozí kapitole jsme uvedli, že metoda konečných prvků aplikovaná na úlohu (4) nám vždy poskytne horní odhad přesné hodnoty λ_1 úlohy (4). V této podkapitole se pokusíme nastínit metodu, která umožňuje za jistých předpokladů, které dále uvedeme, k již nalezené hodnotě λ_{1h} nalézt dolní odhad $\lambda_{1,L}$. Postup, který uvádíme, přímo vychází z článku [9]. Pro účely této práce byl sestaven pomocný text [7], ve kterém jsou nejdůležitější tvrzení, která tato metoda využívá, dokázány. Metodu jsme zpracovávali v numerickém prostředí Matlab.

Z důkazu vyplývá několik předpokladů, které musíme zaručit, abychom mohli metodu správně použít.

Předpoklad (a)

Musíme znát dolní odhad λ_2 úlohy (4), který nazvěme $\lambda_{2,L}$, který je ale větší než λ_1 úlohy (4), tedy

$$0 < \lambda_{1,L} \leq \lambda_1 < \lambda_{2,L} < \lambda_2.$$

Tento předpoklad je relativně obtížně realizovatelný. Jak jsme uvedli v 1. kapitole, fyzikální význam můžeme z pohledu úlohy (1) přiřadit pouze prvnímu vlastnímu číslu λ_1 , které odpovídá velikosti kritické osové síly F_k , při kterém dojde ke ztrátě stability našeho prutu. F_k tak již nemůže nabýt hodnoty λ_2 , protože prut již není celistvý. Tato skutečnost nám brání λ_2 experimentálně změřit a sestavit tak dolní odhad $\lambda_{2,L}$. Zůstává tedy otázka, zda není možné sestavit dolní odhad této veličiny matematicky. Tomuto aspektu se budeme věnovat v následující kapitole.

Prozatím ale předpokládejme, že $\lambda_{2,L}$ najdeme heuristickým způsobem. Při numerickém zpracování jsme heuristicky odhadli

$$\lambda_{2,L} = \frac{\lambda_{1h} + \lambda_{2h}}{2},$$

kde λ_{2h} je horní odhad druhého vlastního čísla úlohy (4) metodou konečných prvků, který můžeme získat postupem uvedeným v předchozí kapitole.

Předpoklad (b)

Musíme znát, byť třeba velmi hrubý, dolní odhad λ_1 úlohy (4), který si označme $\lambda_{1,LL}$. Ačkoliv tento předpoklad se může na první pohled zdát relativně zvláštní, protože dolní odhad λ_1 máme teprve po aplikaci rozebírané metody obdržet, není zdaleka nere realizovatelný. Tento odhad můžeme sestavit následujícím způsobem.

Nejdříve si uvědomme, že z bodu (f) v podkapitole 2.4 vyplývá, že pokud bychom úlohu (4) dokázali vyřešit (Předpokládejme, že původně řešíme úlohu (4) pro I_{y2} pro I_{y1} , takové že $I_{y1} \leq I_{y2}$, našli bychom $\lambda_{1,L}$).

Dále si uvědomme, že umíme najít vlastní čísla úlohy (2) analyticky, pokud I_y je konstanta (viz podkapitola 2.2) nebo kvadratická funkce ve speciálním tvaru (viz podkapitola 2.3). Navíc

vezměme v potaz, že, jak jsme uvedli v podkapitole 2.4, vlastní čísla úloh (2) a (4) jsou identická.

Z toho vyplývá, že pokud najdeme λ_1 úlohy (2) pro I_{y1} , takové že $I_{y1} \leq I_{y2}$, nalezneme $\lambda_{1,LL}$ úlohy (2) i (4). Poznamenejme, že I_{y1} můžeme zvolit například tak, že

$$I_{y1} = \inf(I_{y2}(x)), \forall x \in \langle 0, l \rangle.$$

Můžeme jistě zvolit i $I_{y1} < \inf(I_{y2}(x)), \forall x \in \langle 0, l \rangle$, ale náš odhad bude podle bodu (f) v podkapitole 2.4 méně přesný.

Tento způsob nám umožňuje najít $\lambda_{1,LL}$ úlohy (2), aniž bychom se museli zabývat slabou formulací úlohy a aplikací metody konečných prvků na úlohu (2). (Poznamenejme, že bod (f) z podkapitoly 2.4 můžeme aplikovat nejenom na úlohu (4), ale i na úlohu (2), protože vlastní čísla obou úloh jsou identická.) Dodejme také, že stejným způsobem bychom mohli pro dolní odhad úlohy (4) (i (2)) využít speciální tvar kvadratické funkce uvedený v podkapitole 2.3. Tato volba I_{y1} může ale působit praktické potíže ohledně toho, jak zvolit I_{y1} , aby zároveň platilo $I_{y1} \leq I_{y2}$. Zároveň ale poznamenejme, že pokud průběh I_{y2} "odpovídá" v jistém smyslu kvadratické funkci ve smyslu podkapitoly 2.3, může být využití této funkce pro aproximaci I_{y2} výhodnější, protože může podle bodu (f) v podkapitole 2.4 být tato aproximace přesnější.

Předpoklad (c)

Posledním předpokladem je (zejména z důvodu formalismu důkazu, který je uveden v příloze), že pro vlastní funkce w_h platí, že $\|w_h\| = 1$, což můžeme zaručit podle bodu (d) v kapitole 2.4 a že $(w_h, w_1) > 0$, což můžeme také zaručit vždy.

Metoda získání $\lambda_{1,L}$ podle [6]

Za předpokladu, že splníme výše uvedené předpoklady, můžeme podle [6] na základě znalosti λ_{1h} najít $\lambda_{1,L}$ z následujícího vztahu:

$$\lambda_{1,L} = \lambda_{1h} - (1 - \lambda_{1h}/\lambda_{2,L})^{-2} (1 - \alpha_h^2/4)^{-1} \|\eta_h\|_a^2, \quad (6)$$

kde

$$\alpha_h = \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \beta_h^2} \right)}, \quad (7)$$

$$\beta_h = (1 - \lambda_{1h}/\lambda_{2,L})^{-1} \|\eta_h\|. \quad (8)$$

Předpokládáme, že $\beta_h < 1$, čehož podle [6] můžeme docílit vždy dostatečným zmenšením členu $\|\eta_h\|$, jak ukážeme dále. Vidíme, že odhad $\lambda_{1,L}$ je závislý ještě na η_h , což je funkce, která je dána vztahem

$$a(\eta_h, v) = \lambda_{1h}(w_h, v) - a(w_h, v), \quad \forall v \in H. \quad (9)$$

Tento vztah můžeme získat tak, že si uvědomíme, že podle našich předpokladů musí platit

$$0 = \lambda_{1h}(w_h, v) - a(w_h, v), \quad \forall v \in H.$$

Zároveň je možné ukázat, že výraz na levé straně rovnice je spojitý lineární (pro každé $v \in H$) funkcionál (viz [4]) a protože je navíc možné ukázat (viz [4]), že H je Hilbertův prostor, tedy je

úplný vzhledem k jistému skalárnímu součinu, můžeme aplikovat Rieszovu větu o reprezentaci a prohlásit, že existuje právě jedna funkce η_h , že platí

$$a(\eta_h, v) = \lambda_{1h}(w_h, v) - a(w_h, v), \quad \forall v \in H.$$

Člen η_h je pro náš odhad $\lambda_{1,L}$ velice důležitý, protože má velký vliv na přesnost získaného odhadu $\lambda_{1,L}$. Obecně platí, že čím menší (ve smyslu normy tohoto prvku) tento člen bude, tím bližší bude $\lambda_{1,L}$ skutečné hodnotě λ_1 . Rovnice výše nám ale přímo neříká, jak η_h najít. Pro účely odhadu $\lambda_{1,L}$ výše uvedeným způsobem ale nepotřebujeme nutně znát η_h , stačil by nám například horní odhad $\|\eta_h\|_A$, ze kterého bychom z Friedrichs-Poincarého nerovnosti (viz podkapitola 2.4) získali dolní odhad $\|\eta_h\|$. Je možné ukázat (viz [6]), že pokud tyto odhady dosadíme za $\|\eta_h\|_A$ a $\|\eta_h\|$, zůstanou vztahy (6), (7) a (8) v platnosti.

Horní odhad $\|\eta_h\|_A$ můžeme podle [6] získat následujícím způsobem. V následujících úpravách předpokládáme, že $v \in H$ pro σ platí $\sigma' \in L^2$. Derivace jsou myšleny ve zobecněném smyslu (viz [2]).

$$\begin{aligned} a(\eta_h, v) &= \lambda_{1h}(w_h, v) - a(w_h, v) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h v \, dx - \int_0^1 w'_h v' \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h v \, dx - \int_0^1 (w'_h + \sigma) v' \, dx + \int_0^1 \sigma v' \, dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h - \sigma' \right) v \, dx - \int_0^1 (w'_h + \sigma) v' \, dx \end{aligned} \quad (10)$$

a proto

$$\begin{aligned} |a(\eta_h, v)| &\leq \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h - \sigma' \right) v \, dx \right| + \left| \int_0^1 (w'_h + \sigma) v' \, dx \right| \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h - \sigma' \right)^2 dx} \sqrt{\int_0^1 v^2 dx} + \left| \int_0^1 (w'_h + \sigma) v' \, dx \right| \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h - \sigma' \right)^2 dx} \sqrt{\int_0^1 v^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 (w'_h + \sigma)^2 dx} \sqrt{\int_0^1 v'^2 dx} \\ &\leq \|v\| \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h - \sigma' \right)^2 dx} + \|v\|_A \sqrt{\int_0^1 (w'_h + \sigma)^2 dx} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,LL}}} \|v\|_A \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h - \sigma' \right)^2 dx} + \|v\|_A \sqrt{\int_0^1 (w'_h + \sigma)^2 dx}. \end{aligned}$$

Pokud za v dosadíme η_h , dostáváme

$$\begin{aligned} \|\eta_h\|_A &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,LL}}} \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h - \sigma' \right)^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 (w'_h + \sigma)^2 dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,LL}}} \left\| \frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h - \sigma' \right\| + \|w'_h + \sigma\|. \end{aligned} \quad (11)$$

Abychom získali horní odhad členu $\|\eta_h\|_A$ co nejmenší (jak jsme již zmínili, čím menší tento odhad je, tím přesnější je odhad $\lambda_{1,L}$), budeme se snažit minimalizovat výraz na levé straně nerovnosti (11). Bylo by ideální, pokud by co nejpřesněji platilo

$$\sigma \approx -w'_h \quad \text{a} \quad \sigma' \approx \frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h.$$

Tyto dva členy ale už je možné vypočítat, protože známe nekonečně mnoho vlastních funkcí w_h odpovídajících λ_{1h} (stačí si vybrat jednu z nich, ostatní jsou jen její lineární kombinace). Problém spočívá v tom, že pokud si vybereme jeden z požadavků výše a splníme ho zcela přesně, například pokud na základě znalosti $-w'_h$ najdeme σ , máme již jednoznačně determinovaný vztah pro σ' , který ale pravděpodobně nebude přesně odpovídat požadavku $\sigma' \approx \frac{1}{EI_y} \lambda_{1h} w_h$.

S tím souvisí problém skrytý v povaze w_h . Představme si, že se budeme snažit splnit především požadavek $\sigma \approx -w'_h$. w_h je po částech lineární funkce a funkce $-w'_h$ je tedy po částech konstantní. Nalezli jsme tedy σ . Pro sigma jsme ale požadovali, aby a nyní požadujeme, aby $\sigma' \in L^2$, což ale nyní neplatí, protože σ jako po částech konstantní funkce nemá derivaci na celém $x \in \langle 0, l \rangle$ ani ve zobecněném smyslu. Pokud bychom ale dokázali funkci σ transformovat tak, aby byla co nejbližší původní po částech konstantní funkci, ale zároveň byla po částech lineární, existovala by již $\sigma' \in L^2$, která by byla po částech konstantní. Tuto transformaci můžeme jistě provést vícero způsoby, ale my jsme ji po účely numerického zpracování provedli tak, že jsme vybrali body uprostřed každého z intervalů, na kterém je σ po částech konstantní (což chceme změnit) a každé dva nejbližší body (ve smyslu absolutní hodnoty rozdílu x-ových souřadnic bodů) jsme propojili úsečkou. Úsečku mezi prvním a druhým bodem jsme "protáhli" od prvního bodu do bodu se souřadnicí $x = 0$ a úsečku mezi předposledním a posledním bodem jsme také protáhli až do bodu se souřadnicí $x = l$. Nyní tedy víme, jak nalézt horní odhad $\|\eta_h\|_A$. Zůstává ale otázka, jak nalézt takový horní odhad $\|\eta_h\|_A$, aby $\beta_h < 1$. V numerických realizacích, které jsme provedli, se mám toho podařilo docílit dostatečným zvětšením počtu bázevých funkcí ("konečněprvkových" funkcí) pro danou úlohu.

Z numerických pokusů, které jsme výše popsáním způsobem provedli, totiž vyplynulo, že čím více jsme pro danou úlohu (4) (tedy s pevným výběrem E , I_y a l) volily "konečněprvkových" bázevých funkcí v_i (z čehož vyplývá, že interval $\langle 0, l \rangle$ byl rozdělen více uzlovými body), tím bylo β_h menší. Důvodem pravděpodobně bylo, že zvýšení počtu uzlových bodů způsobilo, že naše transformačně vytvořené po částech lineární σ bylo bližší původnímu po částech konstantnímu průběhu a člen $\|w'_h + \sigma\|$ v nerovnosti (11) byl tedy menší (tedy bližší nulové hodnotě), což vedlo ke snížení horního odhadu $\|\eta_h\|_A$. Pozorovali jsme také, že při zvýšení počtu bázevých funkcí došlo v souvislosti se snížením β_h (za předpokladu, že jsme zvolili dostatečný počet bázevých funkcí, aby $\beta_h < 1$) i k zvýšení $\lambda_{1,L}$. $\lambda_{1,L}$ tedy představovalo bližší odhad λ_1 .

2.7 Metoda získání $\lambda_{1,L}$ jiným způsobem a s tím související nastínění možnosti získání $\lambda_{2,L}$

Ačkoliv jsme v minulé kapitole nastínili teoretickou metodu, jak je možné získat z úlohy (4) řešené metodou konečných prvků $\lambda_{1,L}$, stále nevíme, jak najít (jinak než heuristicky) dolní odhad $\lambda_{2,L}$. V této podkapitole se pokusíme nastínit, jak by bylo možné takový odhad nalézt.

Navzdory tomu, že jsme se dosud zabývali řešením úlohy (4), jejíž formulace byla založena na rafinovaném zavedení slabých řešení a variačních metod, konstatovali jsme, že vlastní čísla

úlohy (4) jsou identická jako úlohy (2). Dosud jsme nenalezli způsob, jak z úlohy (4) zjistit $\lambda_{2,L}$. Vraťme se tedy zpět k úloze (2) a pokusme se tento odhad nalézt z této formulace našeho problému.

$$-(w'(x))' - \frac{\lambda_i}{EI_y(x)}w(x) = 0, \quad w(0) = w(l) = 0.$$

Již jsme ale uvedli, že vlastní čísla úlohy (2) neumíme pro libovolné I_y analyticky zjistit. Ukázali jsme ale, že je to možné, pokud I_y je konstantní funkce na celém $\langle 0, l \rangle$ nebo nebo kvadratická funkce ve speciálním tvaru uvedeném v podkapitole 2.3. Z kapitoly 2.1 ale zároveň víme, že pokud by I_y v úloze (2) byla zvolena jako po částech konstantní funkce, má tato úloha spočetně mnoho vlastních čísel s příslušnými vlastnostmi uvedenými v kapitole 2.1, neboť operátor Bw je i pro po částech konstantní funkci I_y pozitivně definitní. Z bodu (f) v kapitole 2.4 také vyplývá, že pokud bychom libovolné I_y , které splňuje požadavky uvedené v kapitole 2.1 nahradily po částech konstantní funkcí $I_{y,konst.}$, přičemž by platilo $I_y \geq I_{y,konst.}$, $\forall x \in \langle 0, l \rangle$ a dokázali bychom nalézt vlastní čísla úlohy (2) s volbou $I_{y,konst.}$, byla by tato vlastní čísla, která označujeme jako $\lambda_{i,L}$, dolními odhady vlastních čísel λ_i úlohy (2) s I_y . Zdůrazněme, že bod (f) v kapitole 2.4 platí sice formálně pro úlohu (4) a nikoliv (2), ale protože vlastní čísla obou úloh jsou stejná, platí bod (f) i pro úlohu (2). Úlohu (2) s $I_{y,konst.}$ budeme značit jako (12).

$$-(w'(x))' - \frac{\lambda_{i,L}}{EI_{y,konst.}(x)}w(x) = 0, \quad w(0) = w(l) = 0. \quad (12)$$

Zdánlivě sice neumíme najít vlastní čísla λ_i (nebo alespoň λ_1 a λ_2 , která bychom potřebovali) úlohy (2), ale zjistili jsme, že je tak možné učinit například následujícím způsobem.

Nejdříve si rozdělme interval $\langle 0, l \rangle$, na kterém úlohu řešíme, na libovolný počet n otevřených intervalů stejné šířky h ($(n-1)h, nh$), $n = 1, 2 \dots K$, $n \in \mathbb{N}$, tedy na intervaly $(0, h)$, $(h, 2h) \dots ((K-1)h, Kh)$. Na každém z těchto intervalů nechť funkce $I_{y,konst.}$ nabývá právě jedné hodnoty. V každém z bodů $h, 2h \dots (K-1)h$ nechť má funkce $I_{y,konst.}$ stejnou funkční hodnotu jako na intervalu, který je od bodu nalevo. Význam tohoto specifického dělení spočívá v tom, že ačkoliv nedokážeme úlohu (2) s $I_{y,konst.}$ vyřešit na celém $\langle 0, l \rangle$, dokážeme říci něco o řešení úlohy (2) na každém z těchto otevřených intervalů, protože pro volbu I_y je konstanta umíme nalézt fundamentální systém této rovnice (viz [3]). Podle [3] tak platí, že (poznamenajme také, že $\lambda_{i,L}$ vnímáme jako parametr) každá vlastní funkce úlohy (2) na libovolném intervalu $((n-1)h, nh)$ jde vyjádřit jako

$$w_n = C_{1n} \cos \left(x \sqrt{\frac{\lambda_{i,L}}{EI_{n,y}(x)}} \right) + C_{2n} \sin \left(x \sqrt{\frac{\lambda_{i,L}}{EI_{n,y}(x)}} \right), \quad C_{1n}, C_{2n} \in \mathbb{R}$$

Pokud si označíme

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{EI_{n,y}(x)}},$$

získáváme tvar

$$w_n = C_{1n} \cos \left(x \sqrt{\lambda_{i,L} \omega_n} \right) + C_{2n} \sin \left(x \sqrt{\lambda_{i,L} \omega_n} \right), \quad C_{1n}, C_{2n} \in \mathbb{R}$$

Dodejme, že $EI_{iy}(x)$ je hodnota funkce $I_{y,konst.}$ na $((n-1)h, nh)$. Uvědomme si, že vlastní funkce úlohy (2) s nekonstantním I_y na intervalu $((n-1)h, nh)$ musí být součástí množiny funkcí w_n na intervalu $((n-1)h, nh)$. Pro tyto vlastní funkce platí rovnost výše pro $\lambda_{i,L}$, která jsou vlastními čísly úlohy (12).

Připomeňme, že o vlastních funkcích této úlohy v kapitole 2.1 předpokládáme, že jsou spojitě a že dokonce i derivace vlastních funkcí jsou spojitě. Pokud by se nám podařilo najít takové vlastní funkce w_n na všech intervalech $((n-1)h, nh)$, že by se tyto funkce na sebe v bodech $h, 2h, 3h \dots Kh$ spojitě "napojovali", tvořil by každý součet těchto spojitě "napojených" funkcí vlastní funkci úlohy (2) s nekonstantním I_y . Taková funkce musí jistě splňovat i okrajové podmínky $w(0) = w(l) = 0$.

Abychom docílili spojitosti jednotlivých w_n , budeme tedy požadovat, aby platilo

$$w_1(0) = 0, w_1(h) = w_2(h), w_2(2h) = w_3(2h) \dots w_{K-1}(Kh) = w_K(Kh), w_K(l) = 0.$$

Stejně podmínky budeme požadovat i pro w'_n , přičemž

$$w'_n = -C_{1n} \sqrt{\frac{\lambda_{i,L}}{EI_{n,y}(x)}} \sin \left(x \sqrt{\frac{\lambda_{i,L}}{EI_{n,y}(x)}} \right) + C_{2n} \sqrt{\frac{\lambda_{i,L}}{EI_{n,y}(x)}} \cos \left(x \sqrt{\frac{\lambda_{i,L}}{EI_{n,y}(x)}} \right), C_{1n}, C_{2n} \in \mathbb{R}$$

Pokud si označíme

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{EI_{n,y}(x)}},$$

získáváme tvar

$$w_n = -C_{1n} \sqrt{\lambda_{i,L}} \omega_n \sin \left(x \sqrt{\lambda_{i,L}} \omega_n \right) + C_{2n} \sqrt{\lambda_{i,L}} \omega_n \cos \left(x \sqrt{\lambda_{i,L}} \omega_n \right), C_{1n}, C_{2n} \in \mathbb{R}$$

$$w'_1(h) = w'_2(h), w'_2(2h) = w'_3(2h) \dots w'_{K-1}(Kh) = w'_K(Kh).$$

Rovnice spojitosti w_n a w'_n společně s okrajovými podmínkami můžeme vnímat jako soustavu $2K$ rovnic, ve které se vyskytuje $2K$ neznámých konstant C_{1n}, C_{2n} . V matici \mathbb{G} budou liché řádky postupně tvořeny podmínkami spojitosti w_n (v pořadí podle n) a sudé řádky budou reprezentovat podmínky spojitosti w'_n . je vektor konstant C_{1n}, C_{2n} . Soustava tedy bude mít tvar

$$\mathbf{G}\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{13}$$

kde matice \mathbf{G} je rovna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos(h\sqrt{\lambda_i}\omega_1) - \cos(h\sqrt{\lambda_i}\omega_2) & \sin(h\sqrt{\lambda_i}\omega_1) - \sin(h\sqrt{\lambda_i}\omega_2) & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & -\sqrt{\lambda_i}\omega_1 \sin(h\sqrt{\lambda_i}\omega_1) + \sqrt{\lambda_i}\omega_2 \sin(h\sqrt{\lambda_i}\omega_2) & \sqrt{\lambda_i}\omega_1 \cos(h\sqrt{\lambda_i}\omega_1) - \sqrt{\lambda_i}\omega_2 \cos(h\sqrt{\lambda_i}\omega_2) & \vdots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Z kapitoly 2.1 víme, že existuje nekonečně mnoho vlastních funkcí úlohy (12). Z toho vyplývá, že i úloha (13) musí mít nekonečně mnoho řešení, tedy existuje nekonečně mnoho konstant C_{1n}, C_{2n} , které splňují rovnici (13). Tato podmínka je podle [10] splněna, pokud determinant matice \mathbf{G} je roven nule, tedy formálně zapsáno

$$\det(\mathbf{G}) = 0. \quad (14)$$

Nalézt $\det(\mathbf{G})$ je jistě možné vždy pomocí různých technik (některé jsou uvedeny v [1]), ale sestavit tento determinant zcela obecně by bylo velmi obtížné a v této práci tak neučiníme. Namísto toho budeme hledat determinant až pro konkrétně zadanou úlohu.

Pro nás nejdůležitějším poznatkem ohledně rovnice (14) je fakt, že tato rovnice v sobě jako jedinou neznámou obsahuje $\sqrt{\lambda_{i,L}}$. Všechny ostatní prvky jsou konstanty. Řešením rovnice (14) je každé vlastní číslo úlohy (2) i (4). Pokud by se nám podařilo tuto rovnici (14) vyřešit, nalezneme vlastní čísla těchto. Dokázali jsme tedy najít alternativní postup, kterým je možné najít vlastní čísla úlohy (2). Můžeme si povšimnout, že jediným vstupem tohoto postupu, který musíme zvolit, je K (připomeňme, že se jedná o počet intervalů, na které dělíme $\langle 0, l \rangle$ a že K určuje rozměr matice \mathbf{G}) a šířka intervalů h . Pokud tyto parametry zvolíme, máme interval $\langle 0, l \rangle$ rozdělen na intervaly $((n-1)h, nh)$. Na každém z nich musíme zvolit konstantu $I_{n,y}$, tak aby $I_y \geq I_{n,y}, \forall x \in ((n-1)h, nh)$. Zároveň platí, že čím více zvětšujeme K , tím přesněji bude $I_{y, konst.}$ aproximovat I_y a $\lambda_{i,L}$ budou přesnějšími odhady λ_i .

Na levou stranu rovnice (14) se můžeme dívat jako na funkci proměnné $\lambda_{i,L}$. Tato funkce má relativně výhodné vlastnosti. Jednak je jistě spojitá na $(0, \infty)$, protože v matici \mathbf{G} se vyskytují jako funkce pouze prvky, které představují funkce spojité na $(0, \infty)$. Víme totiž, že funkce na levé straně rovnice vznikne jako determinant matice \mathbf{G} . Determinant ale vznikne různým sčítáním a násobením prvků matice \mathbf{G} . Prvky matice jsou ale vždy funkce spojité na $(0, \infty)$. Součet i součin spojitých na $(0, \infty)$ funkcí je ale vždy funkce spojitá (viz [1]) na $(0, \infty)$.

Zároveň je možné ukázat, že tato funkce je takzvaně Lipschitzovská na $(0, \infty)$ (viz [11] a [12]), tedy platí (funkci na levé straně rovnice (14) označme f)

$$\forall x, y \in (0, \infty), \exists C_L > 0, |f(x) - f(y)| < C_L |x - y|.$$

Derivace libovolného součinu či součtu prvků matice je opět funkce spojitá na $(0, \infty)$. Z toho plyne, že i derivace levé strany rovnice (14) bude spojitá na $(0, \infty)$. Spojitá funkce na $(0, \infty)$ je ale omezená na $(0, \infty)$ a z toho plyne, že derivace levé strany rovnice (14) je omezená funkce. Z toho ale podle [12] plyne, že funkce na levé straně rovnice (14) je Lipschitzovská. Z Lipschitzovskosti také plyne mimo jiné spojitost funkce na $(0, \infty)$.

Vyřešit rovnici (14) ale není nijak jednoduché. Nejistili jsme způsob, jak tuto rovnici pro libovolné K vyřešit analyticky. V další části této podkapitoly ukážeme, že i takřka nejjednodušší volba $K = 2$ vede na relativně složitý tvar úlohy (14). Musíme tedy přistoupit k numerickému řešení (14). Je ale otázka, jak zaručit, aby nám numerická metoda, kterou bychom úlohu (14) řešili, poskytla odhad $\lambda_{i,L}$ zdola. Horní odhad by mohl být větší než λ_i a nebyl by tedy dolním odhadem λ_i , což požadujeme. Navíc pokud se budeme snažit najít nějaké konkrétní $\lambda_{i,L}$, přesněji $\lambda_{1,L}$ a $\lambda_{2,L}$, které hledáme, narazíme na problém, jak určit interval, na kterém se dané $\lambda_{i,L}$ nachází, což pro úspěšnou aplikaci numerické metody potřebujeme (viz [15]). Navíc například pro Newtonovu metodu [15] bychom pro záruku nalezení správného $\lambda_{i,L}$ (jinak by se nám mohlo stát, že metoda nalezne například $\lambda_{2,L}$ namísto $\lambda_{1,L}$ a dojdeme

tak ke zcela mylným závěrům) a konvergenci metody potřebovali mimo jiné jisté znalosti monotónie a inflexe funkce levé strany rovnice (14) na daném intervalu. A i kdybychom dokázali všechny potřebné předpoklady zaručit, stále zůstává problém, jestli nám daná numerická metoda poskytne dolní nebo horní odhad daného $\lambda_{i,L}$. Abychom tento problém při hledání $\lambda_{2,L}$ namísto $\lambda_{1,L}$, která nás zajímají nejvíce, překonali pokusíme se v dalším odstavci nastínit postup, kterým by bylo možné najít požadované dolní odhady prvního a druhého vlastního čísla.

Návrh metody na získání $\lambda_{1,LLL}$ a $\lambda_{2,LLL}$ z rovnice (14)

Návrh metody, který bude obsahem tohoto odstavce, by měl nastínit způsob, kterým by bylo možné najít zaručené hodnoty $\lambda_{1,LLL}$ (tedy dolního odhadu $\lambda_{1,L}$) a $\lambda_{2,LLL}$ (tedy dolního odhadu $\lambda_{2,L}$) z rovnice (14). Jedná se ale opravdu pouze o návrh a nikoliv o exaktní popis metody, a to zejména proto, že se budeme při návrhu metody budeme opírat o nedokázaná tvrzení. Nejdříve si uvědomme, že můžeme najít hrubý dolní odhad veličiny $\lambda_{1,L}$, který jsme nazývali $\lambda_{1,LL}$, a to způsobem uvedeným v bodu (b) podkapitoly 2.6. (Na tomto místě zdůrazněme, že očekáváme, že pro $K \geq 1$ je $\lambda_{1,LLL} \geq \lambda_{1,LL}$ a $\lambda_{1,LLL}$ je tedy přesnějším dolním odhadem λ_1 než $\lambda_{1,LL}$.) Dále využijeme toho že funkce, která představuje levou stranu rovnice (14) je spojitá na $(0, \infty)$ a na každém uzavřeném podintervalu tohoto intervalu tedy platí Bolzanova věta (viz [10]). Stanovme předpoklad, že známe kladný dolní odhad rozdílu $l_L = \lambda_2 - \lambda_1$. Na základě těchto poznatků můžeme navrhnout následující numerickou metodu. V bodě $x_0 = \lambda_{1,LL}$ nalezneme funkční hodnotu (máme na mysli funkci levé strany rovnice (14)) a podívejme se, zda je funkční hodnota kladná nebo záporná. Nyní najdeme funkční hodnotu v bodě $x_1 = \lambda_{1,LL} + l_L$. Pokud funkční hodnota nezměnila své znaménko, vyhodnotíme znaménko funkce v bodě $x_2 = \lambda_{1,LL} + 2l_L$, přičemž budeme vyhodnocovat znaménko funkce v $x_i = \lambda_{1,LL} + il_L$, $i \in \mathbb{N}$ tak dlouho, dokud pro nějaké $i = \Theta$ nedojde ke změně znaménka funkce. Potom platí, že $x_{\Theta-1} = \lambda_{1,LL} + (\Theta - 1)l_L$ je dolním odhadem λ_1 , a tedy

$$\lambda_{1,L} = x_{\Theta-1} = \lambda_{1,LL} + (\Theta - 1)l_L.$$

Důvodem, proč se při prověřování znaménka posouváme zrovna o $l_L = \lambda_2 - \lambda_1$ je fakt, že pokud bychom se posouvali o hodnotu, která by byla větší než skutečný rozdíl druhého a prvního vlastního čísla, hrozilo by, že fakt, že funkce změnila znaménko neznamená, že se na intervalu $x_{\Theta-1}, x_{\Theta}$ nenachází právě jeden nulový bod funkce (tedy řešení rovnice (14)), ale možná i více nulových bodů. Mohlo by se nám tedy stát, že první vlastní číslo "přeskočíme" a změna znaménka nebude reflektovat první vlastní číslo, ale až druhé či jiné následující vlastní číslo a náš dolní odhad prvního vlastního čísla bude nesprávný. Pokud ale volíme $l_L = \lambda_2 - \lambda_1$, pak musí platit, že na intervalu $x_{\Theta-1}, x_{\Theta}$ se nachází právě jeden nulový bod funkce, což musí znamenat, že se jedná o λ_1 . Po nalezení odhadu $\lambda_{1,L} = x_{\Theta-1}$ můžeme vzít hodnotu $l_L < l_L$ a celý postup opakovat od bodu $x_{\Theta-1}$, čímž docílíme přesnějšího odhadu $\lambda_{1,L}$. Ze znalosti $\lambda_{1,L}$ a $l_L = \lambda_2 - \lambda_1$ můžeme zároveň najít $\lambda_{2,L}$ jako

$$\lambda_{2,L} = \lambda_{1,L} + l_L.$$

Tento výsledek by pro nás byl velice cenný, protože bychom ho mohli využít nalezení zaručeného dolního odhadu $\lambda_{1,L}$ pro řešení úlohy (4). Hodnota $\lambda_{2,L}$ nám pro použití této metody dosud scházela a museli jsme se spoléhat na heuristické zjištění $\lambda_{2,L}$. (Poznamenejme, že by se mohlo stát, že nemusí platit $\lambda_{1,L} + l_L > \lambda_1$, to ale můžeme snadno ověřit tak, že zjistíme, zda je v této hodnotě jiné znaménko funkce než v $\lambda_{1,L}$. Pokud ano, nerovnost platí, pokud

ne, přičteme k $\lambda_{1,L} + l_L$ ještě l_L a zjistíme, zda došlo ke změně znaménka. Proces budeme opakovat tak dlouho, dokud získaná hodnota nezmění znaménko.) Základním problémem postupu, který jsme dosud uvedli, je fakt, že najít $l_L = \lambda_2 - \lambda_1$ (nebo alespoň jeho kladný dolní odhad) je velmi problematické. Domníváme se ale, že je to možné, protože pro takzvaný Schrödingerův operátor, který je podobný levé straně naší úlohy (2) existují metody uvedené v článkách [13] a [14], které umožňují nalézt dolní odhad l_L . Velkým rozdílem levé strany naší úlohy (2) od Schrödingerova operátoru je ale přítomnost $I_y(x)$, což nám znemožňuje přímo využít postupy uvedené v článkách [13] a [14]. Jsme však přesvědčeni, že tento problém by se dal vyřešit následujícím způsobem. Již jsme dokázali, že platí, že pro menší $I_y(x)$ dostáváme i menší vlastní čísla. Domníváme se, že je možné dokázat, že pro menší $I_y(x)$ dostáváme vlastní čísla, která mají každé s každým menší vzdálenost. (Zdůrazněme, že pouze předpokládáme platnost tohoto výroku, doposud se nám ho nepodařilo dokázat) Mohli bychom tak pro danou úlohu (2) se zvoleným $I_{1y}(x)$ sestavit obdobnou úlohu s I_{2y} , tak že $I_{1y} \geq I_{2y} \forall x \in (0, l)$. Můžeme zvolit I_{2y} konstantní, například $I_{2y} = \inf(I_{1y})$. Podle našich předchozích tvrzení bychom mohli na úlohu (2) s I_{2y} aplikovat postupy uvedené v článkách [13] a [14] a nalézt dolní odhad vzdálenosti prvního a druhého vlastního čísla této úlohy. Tento odhad by podle nedokázaného tvrzení byl dolním odhadem vzdálenosti prvního a druhého vlastního čísla úlohy s $I_{1y}(x)$. Tuto hodnotu bychom pak položili rovnu l_L .

Při hledání $\lambda_{1,LLL}$ a $\lambda_{2,LLL}$ můžeme také využít Lipschitzovskosti funkce na levé straně rovnice (14). V případě, že by funkční hodnota v nějakém x_C byla velmi vysoká, mohli bychom zkusit najít ve vztahu pro Lipschitzovskost

$$|f(x_C) - f(x_D)| < C_L |x_C - x_D|$$

takové x_D , aby $|f(x_C) - f(x_D)| > 0$. Pokud pro libovolný krok metody platí $|f(x_C) - f(x_D)| > l_L$, můžeme položit $|f(x_C) - f(x_D)| = l_L$, což průběh metody urychlí.

Řešení rovnice (14) pro $K = 2$

Abychom trochu zjednodušili řešení této úlohy, budeme úlohu řešit nikoliv na intervalu $\langle 0, l \rangle$, ale na intervalu $\langle -k, k \rangle$, kde $k = \frac{l}{2}$. Jak jsme uvedli již v některých dřívějších kapitolách, tento posun nijak neovlivní hodnotu vlastních čísel námi uvažované úlohy, celou úlohu pouze "posuneme" po ose x .

Pokud položíme $w_1(0) = w_2(0)$, dostáváme $C_{11} = C_{21}$ a pokud položíme $w'_1(0) = w'_2(0)$ dostáváme $C_{12} = C_{22} \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Získané rovnosti nám umožňují redukovat matici \mathbf{G} z rozměru 4×4 na rozměr 2×2 , což pro nás bude velmi výhodné při výpočtu jejího determinantu.

Z podmínek $w(-k) = 0$ a $w(k) = 0$ dostáváme

$$w(-k) = C_{11} \cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1) + C_{12} \sin(-k\sqrt{\lambda_i}\omega_1)$$

$$w(k) = C_{21} \cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2) + C_{22} \sin(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2),$$

z čehož dostáváme

$$w(-k) = C_{11} \cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1) - C_{12} \sin(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1)$$

$$w(k) = C_{11} \cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2) + C_{12} \sin(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2).$$

Dostáváme tak matici \mathbf{G} ve tvaru

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1) & -\sin(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1) \\ \cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2) & \frac{\omega_1}{\omega_2}\sin(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2) \end{pmatrix}.$$

Požadujeme, aby $\det(\mathbf{G}) = 0$, což znamená

$$\cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1) \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2) + \sin(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1) \cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2) = 0.$$

Z toho dostáváme

$$-\cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1) \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2) = \sin(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1) \cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2).$$

Pokud budeme předpokládat, že $\cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2) \neq 0$ a $\cos(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1) \neq 0$, můžeme tuto rovnici upravit na

$$-\frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{tg}(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2) = \operatorname{tg}(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1).$$

To můžeme dále upravit na

$$-\sqrt{\frac{I_{2,y}}{I_{1,y}}} \operatorname{tg}(k\sqrt{\lambda_i}\omega_2) = \operatorname{tg}(k\sqrt{\lambda_i}\omega_1).$$

Obě strany rovnice můžeme velmi názorně reprezentovat graficky, a pokud bychom to udělali, zjistili bychom, že pokud

$$\omega_2 > \omega_1 \text{ pak } \lambda_{1,L} \in \left\langle \frac{\pi}{2\omega_2}, \frac{\pi}{2\omega_1} \right\rangle,$$

$$\omega_2 < \omega_1 \text{ pak } \lambda_{1,L} \in \left\langle \frac{\pi}{2\omega_1}, \frac{\pi}{2\omega_2} \right\rangle.$$

Při dalším hledání $\lambda_{1,L}$ jsme využili Newtonovu metodu. Abychom získali dolní odhad prvního vlastního čísla, tedy $\lambda_{1,L}$, využili jsme poznatku, že funkce levé strany rovnice (14) je spojitá a že v našem konkrétním případě je rostoucí na intervalech uvedených výše. Použili jsme následující postup. V $\lambda_{1,L}$ jsme zjistili funkční hodnotu a pokud byla záporná, bylo zřejmé, že se jedná o dolní odhad. Pokud byla funkční hodnota kladná, vyhodnotili jsme funkční hodnotu bodu, který se nacházel o jistou vzdálenost h nalevo na ose x . V tomto bodě jsme opět vyhodnotili funkční hodnotu a pokud byla záporná, x -ová souřadnice tohoto bodu byla $\lambda_{1,L}$. Pokud funkční hodnota nebyla záporná, opakovali jsme posun a vyhodnocení znaménka dokud jsme nenašli bod, ve kterém došlo ke změně znaménka. Délku h , o kterou jsme se "posouvali" po ose x , jsme volili podle bodu, ze kterého jsme se "posouvali" jako $h = \frac{\varepsilon}{f'(x)}$, kde ε je vhodně malá konstanta a $f'(x)$ je hodnota derivace funkce levé strany rovnice (14) v daném bodě a tedy směrnice tečny. Úvaha byla taková, že délka posunu se bude měnit nepřímo úměrně hodnotě derivace v daném bodě. Když budou derivace velké, bude se i funkční hodnota měnit rychle a h tak bude malé a když budou mít derivace malou hodnotu, bude h velké a budeme se tak pohybovat po velkých krocích, protože by bylo zbytečné se pohybovat po krocích malých.

3 Výsledky numerických experimentů

3.1 Zadání úlohy a způsob výpočtu

Na následujících numerických experimentech se pokusíme demonstrovat různé metody zjištění F_k v úloze (1), které jsme v předchozí kapitole nastínili. Tato práce se zabývá výpočtem kritické síly, při které dojde ke ztrátě stability prutu a proto si nejdříve zvolme charakteristiky tohoto prutu, které potřebujeme pro výpočet kritické síly F_k . Náš prut bude mít délku $l = 20m$ a bude vyroben z materiálu, který má Youngův modul pružnosti $E = 0.8 \cdot 10^{11}$, mohlo by se jednat například o bronz. Sloup bude mít směrem zdola nahoru stále větší průřez a jeho moment setrvačnosti $I_y(x) = 1.454343775045418 \cdot 10^{-7}x$. Úlohu budeme řešit na intervalu $\langle a, b \rangle$, $a = 42.44407834237486$, $b = 62.44407834237486$. Budeme tedy uvažovat, že pata sloupu má x-ovou souřadnici $a = 42.44407834237486$ a vrchol hlavice sloupu má x-ovou souřadnici $b = 62.44407834237486$. Tyto na první pohled zvláštní hodnoty volíme z následujících důvodů. V kapitole 2.3 jsme ukázali, že pokud za funkci momentu setrvačnosti volíme kvadratickou funkci ve speciálním tvaru, můžeme najít vlastní čísla této úlohy analyticky. Jedná se tedy o zcela výjimečný případ, kdy moment setrvačnosti není konstantní funkce, ale my přesto umíme najít přesnou hodnotu λ_i , tedy F_k . Tato hodnota je pro nás velice cenná, protože s ní můžeme srovnat výsledky poskytnuté dalšími numerickými metodami a porovnat jejich přesnost. Konkrétní hodnoty pro $I_y(x)$ a $\langle a, b \rangle$ jsme našli z následující úvahy. Zvolili jsme si, že pro metodu uvedenou v podkapitole 2.7 budeme uvažovat $K = 2$. To znamená, že funkci $I_y(x)$ budeme aproximovat po částech konstantní funkcí, která bude na první "polovině" intervalu $\langle a, b \rangle$ mít jednu hodnotu a na druhé polovině druhou. Hodnotu na první polovině intervalu jsme zvolili $I_{1,y} = 2.62 \cdot 10^{-4}$ (tato hodnota přibližně odpovídá momentu setrvačnosti kruhu o poloměru 10 cm) a abychom respektovali rozšiřování sloupu, zvolili jsme $I_{2,y} = 4 \cdot 10^{-4}$. K této po částech konstantní funkci $I_{y,konst.}$ jsme našli vhodnou $I_y = kx^2$ a vhodný interval $\langle a, b \rangle$ tak, aby platilo

$$I_y(a) = I_{1,y} \text{ a } I_y\left(a + \frac{l}{2}\right) = I_{2,y}.$$

Uvažujeme interval $\langle a, b \rangle$ a nikoliv $\langle 0, l \rangle$, protože z důvodu tvaru funkce $I_y = kx^2$ tento interval zvolit nemůžeme, protože by muselo platit, že $I_y(0) = 0$, což znamená průřez nulového obsahu, což nemůžeme fyzikálně připustit.

Z výše uvedených podmínek plyne

$$ka^2 = I_{1,y},$$

a

$$k\left(a + \frac{l}{2}\right)^2 = I_{2,y}.$$

Dostáváme tak soustavu dvou nelineárních rovnic. Základními úpravami je možné ukázat, že rovnice výše můžeme převést na kvadratickou rovnici s proměnnou a

$$a^2(I_{1,y} - I_{2,y}) + I_{1,y}\frac{l}{2}a + I_{1,y}\left(\frac{l}{2}\right)^2\frac{1}{4} = 0.$$

Z této rovnice dostáváme $k = 1.454343775045418 \cdot 10^{-7}$ a $a = 42.44407834237486$.

Shrňme tedy, že jsme postupovali tak, že jsme nejdříve zvolily aproximaci $I_{y,konst.}$ a zní jsme našli funkci I_y , která této aproximaci vyhovovala. Při řešení reálných úloh bychom jistě postupovali opačně, ale nám jde především o ověření přesnosti teoreticky nastíněných metod, takže nám tento postup vyhovuje.

V následující části podkapitoly budeme porovnávat způsoby, kterými je možné najít F_k (tedy prvního vlastního čísla) úlohy (1) (což byl cíl na začátku této práce), které jsme po teoretické stránce nastínili v předešlé kapitole. Uvedeme přesnou hodnotu F_k podle výpočtu v podkapitole 2.3, dále uvedeme horní odhad F_k získaný metodou konečných prvků podle podkapitoly 2.5 (tuto metodu nazýváme metoda horního odhadu pomocí MKP), hrubý dolní odhad F_k (kde I_y nahradíme konstantou) podle bodu b v kapitole 2.6 (tuto metodu nazýváme metoda konstantní aproximace), dolní odhad F_k založený na metodě z kapitoly 2.6 (tuto metodu nazýváme metoda dolního odhadu pomocí MKP) a naposledy dolní odhad založený na metodě z podkapitoly 2.7 (tuto metodu nazýváme metoda po částech konstantní aproximace). Při metodách založených na metodě konečných prvků uvedeme výsledky pro 100, 200 a 1000 použitých funkcí konečných prvků. Pro metodu po částech konstantní aproximace budeme volit $K = 2$, jak jsme již zmínili.

Jak jsme zdůraznili již v kapitole 2.5, metoda horního odhadu pomocí MKP (produkující λ_{1h}) je zatížena chybami plynoucími z numerického zpracování úlohy. Dále upozorňujeme, že při metodě dolního odhadu pomocí MKP využíváme heuristického dolního odhadu druhého vlastního čísla.

3.2 Výsledky numerických experimentů

Výsledky numerických experimentů uvádíme v tabulkách níže

NUMERICKÉ VYJÁDŘENÍ v kN			
Počet funkcí konečných prvků	100	200	1000
Přesná hodnota F_k	773,2677427	773,2677427	773,2677427
Metoda horního odhadu pomocí MKP	773,3288372	773,2831685	773,2683647
Metoda dolního odhadu pomocí MKP	758,8768322	769,8628868	773,1376626
Metoda konstantní aproximace	517,2089692	517,177799	517,1676952
Metoda po částech konstantní aproximace	618,3495012	618,3495012	618,3495012

PERCENTUELNÍ VYJÁDŘENÍ (v procentech přesné hodnoty F_k)			
Počet funkcí konečných prvků	100	200	1000
Přesná hodnota F_k	100	100	100
Metoda horního odhadu pomocí MKP	100,0079008	100,0019949	100,0000804
Metoda dolního odhadu pomocí MKP	98,13894856	99,55967956	99,98317787
Metoda konstantní aproximace	66,88614313	66,88211216	66,88080552
Metoda po částech konstantní aproximace	79,96576956	79,96576956	79,96576956

ROZDÍLY PERCENTUELNÍHO VYJÁDŘENÍ (pro různý počet kon.prvků)			
Počet funkcí kon. prvků (hrubší odhad)- počet funkcí kon. prvků (jemnější odhad)	100-200	200-1000	100-1000
Metoda horního odhadu pomocí MKP	0,005905932	0,001914457	0,007820389

ROZDÍLY PERCENTUELNÍ VYJÁDŘENÍ (pro různý počet kon.prvků)			
Počet funkcí konečných prvků (jemnější odhad) - počet funkcí kon. prvků (hrubší odhad)	200-100	1000-200	1000-100
Metoda dolního odhadu pomocí MKP	1,420730999	0,423498308	1,844229308

Obrázek 3: Výsledky numerických experimentů

Můžeme si povšimnout, že horní odhad vypočtený metodou horního odhadu pomocí konečných prvků je v námi zkoumaném případě velice přesný, pohybuje se jen minimálně nad 100 procent. Vidíme také, že dolní odhad metodou konečných prvků je navzdory tomu, že jsme použili heuristický odhad druhého vlastního čísla také velmi přesný, pohybuje se okolo 99 procent. Metoda konstantní aproximace nám poskytuje dolní odhad, který je dle očekávání poměrně hrubý, přibližně 66 procent. Dle očekávání nám metoda po částech konstantní aproximace poskytuje méně hrubý výsledek než metoda konstantní aproximace, přičemž můžeme pozorovat zlepšení přibližně o 13 procent vůči této hodnotě.

Závěry

V této práci jsme se zabývali způsobem, jak vypočítat velikost síly F_k , která způsobí ztrátu stability neprismatického prutu (v tom smyslu, že se mění tvar průřezu i obsah průřezu prutu). V kapitole 1 jsme ukázali, že tento problém je možné popsat rovnicí

$$-EI_y(x)w''(x) - F_k w(x) = 0, \quad w(0) = w(l) = 0.$$

Tuto úlohu jsme označili jako úlohu (1). Uvedli jsme, že je možné experimentálně ukázat, že k námi zkoumané ztrátě stability prutu dochází tehdy, pokud má úloha (1) nekonečně mnoho řešení. V kapitole 2 jsme se analyzovali úlohu (1) z matematického pohledu a zjistili jsme, že za předpokladu, že w hledáme na množině

$$D = \{w : w \in C^2(0, l), w(0) = w(l) = 0\}.$$

a pro I_y platí $I_y > 0$ (tento vztah platí z definice I_y) a I_y je z množiny

$$L_I^2 = L_I^2(0, l) = \{I_y; I_y > 0; \int_0^l I_y^2 dx < \infty\}.$$

existuje pro úlohu (1) spočetně mnoho hodnot kladných reálných, F_k , která tvoří rostoucí posloupnost, pro která má úloha (1) nekonečně mnoho řešení, přičemž tyto hodnoty nazýváme vlastní čísla úlohy (1) a řešení w pro každé vlastní číslo nazýváme vlastní funkce. Přestože vlastních čísel úlohy (1) je spočetně mnoho, zdůvodnili jsme, že hledáme pouze první, tedy nejmenší vlastní číslo úlohy (1), protože pouze první vlastní číslo pro nás má fyzikální význam. Uvedli jsme, že není znám způsob, jak pro libovolné I_y vyřešit úlohu (1) analyticky. Zmínili jsme, že analytické řešení umíme najít v případě, že I_y je konstanta a $I_y = kx^2$, $k \in \mathbb{R}$. V druhém případě jsme sestavili kompletní odvození, které vychází z postupu uvedeného v [16]. Pokud I_y neodpovídá ani jednomu z těchto dvou případů, musíme první vlastní číslo úlohy (1) hledat numericky. Zmínili jsme, že numerická metoda nám může poskytnou buď odhad prvního vlastního čísla zdola nebo zhora, přičemž jsme uvedli, že pro inženýrské využití je zásadní, abychom našli odhad zdola.

Dokázali jsme tvrzení, že pokud řešíme dvě úlohy (1) pro různé funkce I_y (ve kterých bychom volili stejnou hodnotu E), I_{y1} a I_{y2} , pro které platí $I_{y1} \leq I_{y2}$, pak pro nejmenší vlastní čísla těchto úloh úloh platí, že $\lambda_{1, I_{y1}} \leq \lambda_{1, I_{y2}}$. Dokázali jsme, že tato nerovnost platí i pro následující n -tá vlastní čísla obou úloh.

Tohoto poznatku jsme využili pro konstrukci metody konstantní aproximace, která spočívala v nahrazení I_y konstantní funkcí $I_{y, konst.}$ (na celém intervalu $(0, l)$), přičemž $I_y \geq I_{y, konst.}$. Tímto způsobem jsme našli dolní odhad λ_1 , který jsme nazvali $\lambda_{1, LL}$. Očekávali jsme, že tento odhad bude relativně méně přesný a na numerických pokusech, jejichž výsledky jsme uvedli ve třetí kapitole, jsme ukázali, že $\lambda_{1, LL}$ nalezené tímto způsobem odpovídalo přibližně 67 procentům skutečné hodnoty vlastního čísla.

Velmi podobného principu jsme využili pro konstrukci metody po částech konstantní aproximace, kdy jsme postupovali stejným způsobem jako při metodě konstantní aproximace, ovšem s rozdílem, že jsme nevyužili konstantní funkci, ale po částech konstantní funkci. Navzdory tomu, že tato funkce není spojitá, uvedli jsme, že výše zmíněné poznatky o vlastních číslech zůstávají v platnosti. Na základě zkoumání vlastních funkcí této úlohy a známých

vlastností vlastních funkcí jsme našli způsob jak sestavit rovnici, ze které je možné najít dolní odhad všech vlastních čísel úlohy (1), protože ty jsou řešením rovnice. Poukázali jsme na problém, že tuto rovnici je i v jednoduše zvolených případech velice komplikované řešit analyticky a je nutné se opět uchýlit k numerickému řešení. Při numerickém řešení je pro nás zásadní, abychom hodnotu dolního odhadu opět odhadli zdola (hledáme dolní odhad dolního odhadu prvního vlastního čísla). Nastínili jsme způsob konstrukce numerické metody, která by umožnila zaručeně najít dolní odhad prvního vlastní čísla a také druhého vlastního čísla (v případě druhého vlastního čísla jsme se ale opřeli o nedokázaný poznatek, že pokud řešíme dvě úlohy (1) pro různé funkce I_y (ve kterých bychom volili stejnou hodnotu E), I_{y1} a I_{y2} , pro které platí $I_{y1} \leq I_{y2}$, pak pro nejmenší vlastní čísla těchto úloh platí, že vlastní čísla úlohy s I_{y1} jsou vzájemně blíže než úlohy s I_{y2} . Metoda po částech konstantní aproximace podle našeho názoru představuje vylepšení metody konstantní aproximace, což jsme potvrdily numerickými experimenty, kde jsme i při relativně velmi hrubé aproximaci dosáhli zlepšení přibližně o 13 procent oproti metodě konstantní aproximace. Ačkoliv jsme zcela nedořešili nastíněnou numerickou metodu, pokládáme fakt, že metoda po částech konstantní aproximace převádí úlohu (1) ve tvaru diferenciální rovnice na úlohu ve tvaru "funkce rovná se nula" za velice užitečný. Tvar "funkce rovná se nula" můžeme již graficky znázornit (oproti diferenciální rovnici), což nám může poskytnout velmi užitečnou představu o přibližné hodnotě vlastních čísel.

Zabývali jsme se také způsobem, jak nalézt $\lambda_{1,L}$ pomocí metody konečných prvků. Tímto účelem jsme úlohu formulovali variačně ve tvaru

$$\int_0^l w'v' dx = \lambda_i \int_0^l \frac{1}{EI_y} wv dx \quad \forall v \in H,$$

tedy

$$a(w, v) = \lambda_i(w, v) \quad \forall v \in H.$$

přičemž jsme změnilí množinu D na které hledáme řešení na množinu H , kde

$$H = H_0^1(0, l) = \{w; \int_0^l (w')^2 dx < \infty, w(0) = 0, w(l) = 0\}.$$

Při řešení metodou konečných prvků jsme použili po částech lineární funkce. Ukázali jsme, že odhad λ_1 , který získáme z metody konečných prvků, je vždy nevyhnutelně horním odhadem λ_1 , který jsme nazvali λ_{1h} . V numerických experimentech pokusech, které jsme provedli, se hodnota λ_{1h} pohybovala jen minimálně přes 100 procent skutečné hodnoty λ_1 . Nabízí se tedy otázka, zda bychom z λ_{1h} nemohli získat dolní odhad prvního vlastního čísla tak, že bychom od λ_{1h} odečetli například 10 procent jeho hodnoty, čímž bychom v rámci numerických realizací, které jsme provedli, získali velmi přesný dolní odhad prvního vlastního čísla. Problém ale spočívá v tom, že ačkoliv λ_{1h} vyšlo v rámci našich numerických experimentů velmi příznivě, nedokážeme zaručit, že takto příznivý výsledek musí vyjít pro každou formulaci úlohy (1) a každou volbu I_y . Obecně neumíme říci zaručit žádný odhad, o kolik bude větší λ_{1h} než λ_1 . Nevíme tedy, zda máme od λ_{1h} odečíst 1, 2 či 20 procent a všechny tyto možnosti jsou přitom teoreticky možné.

Nalezli jsme způsob ale způsob, který byl v minulém roce uveřejněn v článku [9], který umožňuje ze znalosti λ_{1h} získaného například metodou konečných prvků nalézt dolní odhad

prvního vlastního čísla, který nyní nazýváme $\lambda_{1,L}$, a to za určitých předpokladů. Nejvýznamějším a zároveň nesmírně obtížně zaručitelným je předpoklad znalosti dolního odhadu druhého vlastního čísla úlohy (1), a to takového, že tento odhad je větší než první vlastní číslo úlohy (1). Tento odhad můžeme samozřejmě hledat heuristicky, například jako průměr horního odhadu prvního a druhého vlastního čísla získaného metodou konečných prvků, ale v takovém případě nedokážeme zaručit, zda z metody získáme správný dolní odhad prvního vlastního čísla. Řešením tohoto problému by mohlo být získání dolního odhadu druhého vlastního čísla metodou po částech konstantní aproximace.

Příloha

Důkaz nerovností z článku [6]

Let λ_h and u_h be some approximate solution of (5). Let $\eta_h \in V^1$ be defined by

$$a(\eta_h, v) = \lambda_h(u_h, v) - a(u_h, v), \quad v \in V^1.$$

Let

$$\alpha_h = \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \beta_h^2} \right)},$$

$$\beta_h = (1 - \lambda_h/\lambda_2)^{-1} \|\eta_h\|,$$

and let $\beta_h < 1$. Then the smallest eigenvalue λ_1 of (??) is bounded by

$$\lambda_1 \geq \lambda_h - (1 - \lambda_h/\lambda_2)^{-2} (1 - \alpha_h^2/4)^{-1} \|\eta_h\|_a^2. \quad (15)$$

Outline of the proof

(a) First we show $\lambda_1 \geq \lambda_h - \|u_h - u_1\|_a^2$.

(b) Then we prove

$$\|u_h - u_1\|_a^2 \leq (1 - \lambda_h/\lambda_2)^{-2} (1 - \alpha_h^2/4)^{-1} \|\eta_h\|_a^2. \quad (16)$$

Details of the proof

Let us start with proving the above three points. We have for any $v \in V^1$

$$\|v\|^2 \leq a(v, v)/\lambda_1 = \|v\|_a^2/\lambda_1. \quad (17)$$

We also have Parseval identity

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (v, u_k)^2$$

and $a(u_k, u_m) = \lambda_k(u_k, u_m) = 0$ for $k \neq m$, which results in

$$a(v, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (v, u_k)^2.$$

Since $\|u_1\| = 1$ and $\|u_h\| = 1$ we have

$$(u_h - u_1, u_1) = -\|u_1 - u_h\|^2/2.$$

Then

$$\begin{aligned} \lambda_h - \lambda_1 &= a(u_h, u_h) - a(u_1, u_1) \\ &= a(u_h - u_1, u_h - u_1) + 2a(u_h - u_1, u_1) \\ &= a(u_h - u_1, u_h - u_1) + 2\lambda_1(u_1, u_h - u_1) \\ &= a(u_h - u_1, u_h - u_1) - \lambda_1\|u_h - u_1\|^2, \end{aligned}$$

which yields

$$\lambda_1 \geq \lambda_h - \|u_h - u_1\|_a^2$$

which completes the first part (a) of the proof.

We have

$$a(\eta_h, \eta_h) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\eta_h, u_k)^2$$

and

$$\begin{aligned} (\eta_h, u_k) &= a(\eta_h, u_k) / \lambda_k = (\lambda_h(u_h, u_k) - a(u_h, u_k)) / \lambda_k \\ &= (\lambda_h(u_h, u_k) - \lambda_k(u_h, u_k)) / \lambda_k = (\lambda_h / \lambda_k - 1) (u_h, u_k). \end{aligned}$$

Thus

$$a(\eta_h, \eta_h) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\lambda_h / \lambda_k - 1)^2 (u_h, u_k)^2.$$

Denote

$$C_h = \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_2}\right)^2 < \min_{k=2, \dots, n} \left(1 - \frac{\lambda_h}{\lambda_k}\right)^2.$$

Then

$$\begin{aligned} a(\eta_h, \eta_h) &\geq \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k C_h (u_h, u_k)^2 + \lambda_1 (\lambda_h / \lambda_1 - 1)^2 (u_h, u_1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k C_h (u_h - u_1, u_k)^2 + \lambda_1 (\lambda_h / \lambda_1 - 1)^2 (u_h, u_1)^2 - C_h \lambda_1 (u_h - u_1, u_1)^2 \\ &= \lambda_1 (\lambda_h / \lambda_1 - 1)^2 (u_h, u_1)^2 + C_h a(u_1 - u_h, u_1 - u_h) - C_h \lambda_1 \|u_1 - u_h\|^4 / 4 \\ &\geq C_h a(u_1 - u_h, u_1 - u_h) - C_h \lambda_1 \|u_1 - u_h\|^4 / 4. \end{aligned}$$

Summarizing,

$$\|\eta_h\|_a^2 \geq C_h \|u_1 - u_h\|_a^2 - C_h \lambda_1 \|u_1 - u_h\|^4 / 4.$$

We have

$$\|\eta_h\|^2 = \sum_{k=1}^n (\eta_h, u_k)^2 = \sum_{k=1}^n (\lambda_h / \lambda_k - 1)^2 (u_h, u_k)^2$$

and

$$\begin{aligned} \|\eta_h\|^2 &= (\lambda_h / \lambda_1 - 1)^2 (u_h, u_1)^2 + \sum_{k=2}^n (1 - \lambda_h / \lambda_k)^2 (u_h - u_1, u_k)^2 \\ &\geq \sum_{k=2}^{\infty} C_h (u_h - u_1, u_k)^2 + (\lambda_h / \lambda_1 - 1)^2 (u_h, u_1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} C_h (u_h - u_1, u_k)^2 + (\lambda_h / \lambda_1 - 1)^2 (u_h, u_1)^2 - C_h (u_h - u_1, u_1)^2 \\ &= (\lambda_h / \lambda_1 - 1)^2 (u_h, u_1)^2 + C_h \|u_1 - u_h\|^2 - C_h \|u_1 - u_h\|^4 / 4 \\ &\geq C_h \|u_1 - u_h\|^2 - C_h \|u_1 - u_h\|^4 / 4. \end{aligned}$$

Then finally,

$$C_h \|u_1 - u_h\|^4/4 - C_h \|u_1 - u_h\|^2 + \|\eta_h\|^2 \geq 0.$$

Denoting $e_h = \|u_1 - u_h\|^2 \geq 0$ we get

$$\frac{C_h}{4} e_h^2 - C_h e_h + \|\eta_h\|^2 \geq 0.$$

Then

$$e_h^2 \leq 2 \left(1 - \sqrt{1 - \|\eta_h\|^2/C_h}\right) \quad \text{or} \quad e_h^2 \geq 2 \left(1 + \sqrt{1 - \|\eta_h\|^2/C_h}\right) \geq 2.$$

Since

$$e_h = \|u_h - u_1\|^2 = 2 - 2(u_h, u_1) \leq 2,$$

we have

$$\|u_h - u_1\| = \sqrt{e_h} \leq \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \|\eta_h\|^2/C_h}\right)} = \alpha_h.$$

Then

$$\begin{aligned} \|\eta_h\|_a^2 &\geq C_h \|u_1 - u_h\|_a^2 - C_h \lambda_1 \|u_1 - u_h\|^4/4 \\ &\geq C_h \|u_1 - u_h\|_a^2 - C_h \alpha_h^2 \|u_1 - u_h\|_a^2/4 \\ &= \|u_1 - u_h\|_a^2 C_h (1 - \alpha_h^2/4), \end{aligned}$$

or

$$\|u_1 - u_h\|_a^2 \leq \|\eta_h\|_a^2 (1 - \alpha_h^2/4)^{-1} (1 - \lambda_h/\lambda_2)^{-2},$$

which yields the second part (b) of the proof.

Remark. Note that if λ_2 is substituted by $\lambda_{2,L}$ in Theorem 1 then the assertion remains valid.

Důkaz nerovností z článku [7]

Let $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ and (\cdot, \cdot) be defined on V . Let $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$ and ϕ_k be eigenvalues and eigenfunctions, respectively, of a , thus

$$a(\phi_k, \phi_k) = \alpha_k(\phi_k, \phi_k),$$

and let $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots$ and ψ_k be eigenvalues and eigenfunctions, respectively, of b , thus

$$b(\psi_k, \psi_k) = \beta_k(\psi_k, \psi_k),$$

$k = 1, 2, \dots$, and let

$$a(v, v) \leq b(v, v)$$

for any $v \in V$.

Let us realize that due to the Courant-Fisher min-max principle

$$\alpha_n = \inf_{\text{orthogonal set}\{v_1, \dots, v_n\}} \left\{ \max_{v \in \text{span of}\{v_1, \dots, v_n\}; v \neq 0} \frac{a(v, v)}{(v, v)} \right\}$$

and

$$\beta_n = \inf_{\text{orthogonal set}\{v_1, \dots, v_n\}} \left\{ \max_{v \in \text{span of}\{v_1, \dots, v_n\}; v \neq 0} \frac{b(v, v)}{(v, v)} \right\}.$$

Then, for example,

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \inf_{\text{orthogonal set}\{v_1, v_2\}} \left\{ \max_{v \in \text{span of}\{v_1, v_2\}; v \neq 0} \frac{b(v, v)}{(v, v)} \right\} = \max_{v \in \text{span of}\{\psi_1, \psi_2\}; v \neq 0} \frac{b(v, v)}{(v, v)} \geq \\ &\geq \max_{v \in \text{span of}\{\psi_1, \psi_2\}; v \neq 0} \frac{a(v, v)}{(v, v)} \geq \inf_{\text{orthogonal set}\{v_1, v_2\}} \left\{ \max_{v \in \text{span of}\{v_1, v_2\}; v \neq 0} \frac{a(v, v)}{(v, v)} \right\} = \alpha_2. \end{aligned}$$

(By "orthogonal set" we mean a set of functions which are orthogonal with respect to (\cdot, \cdot) .)

Reference

- [1] JIRÁSEK, Milan. Pružnost a pevnost: 3 . přednáška [online]. 2015, [cit. 2016-02-07]. Dostupné z: <https://mech.fsv.cvut.cz/homeworks/student/PRPE-I2/prpe3.pdf>
- [2] REKTORYS, Karel. Matematika 43. 3.vydání Praha: ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01611-0.
- [3] ZINDULKA, Ondřej. Matematika 3. 3. Praha: ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03678-5.
- [4] BOUCHALA, Jiří. Úvod do funkcionální analýzy [online]. 2012 [cit. 2016-02-07]. Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/uvod-do-funkcionalni-analyzy.pdf>
- [5] REKTORYS, Karel. Variační metody: v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. 1.vydání. Praha: SNTL, 1974. ISBN 80-200-0714-8.
- [6] PULTAROVÁ, Ivana. Comparing eigenvalues [online]. [cit. 2016-02-07].
- [7] PULTAROVÁ, Ivana. Notes on the seminar work on a posteriori lower bound to smallest eigenvalue of an elliptic differential operator [online]. 2015 [cit. 2016-02-07].
- [8] Eig-Eigenvalues and eigenvectors. <Http://www.mathworks.com> [online]. [cit. 2016-02-07]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/eig.htmls-tid=srchtitle-requestedDomain=www.mathworks.com-inputarg-algorithm>
- [9] Eric Cances, Genevieve Dusson, Yvon Maday, Benjamin Stamm, Martin Vohralík. Guaranteed and robust a posteriori bounds for Laplace eigenvalues and eigenvectors: conforming approximations. 2015. hal-01194364
- [10] BUBENÍK, František a Ondřej ZINDULKA. Matematika 1. Praha: ČVUT, 2010. ISBN 978-80-01-04619-7.
- [11] Lipschitzovsky spojité zobrazení. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-08]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Lipschitzovsky-spojitaC3A9-zobrazenC3AD>
- [12] MAPLE Stejnoměrně spojitá funkce vs. Lipschitzovská funkce [online]. [cit. 2016-02-08]. Dostupné z: <http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/animace/k0021/spojitost/spojitost.html>
- [13] HE, Yue. ON SHARP LOWER BOUND OF THE GAP FOR THE FIRST TWO EIGENVALUES IN THE SCHRODINGER OPERATOR. TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICS. 2013, 1.(17.), 13.
- [14] SINGER, I.M., Bun WONG, Shing-Tung YAO a Stephen S.-T. YAU. HE, Yue. ON SHARP LOWER BOUND OF THE GAP FOR THE FIRST TWO EIGENVALUES IN THE SCHRODINGER OPERATOR. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienza 4 série. 1985, 2.(12.), 13.
- [15] KOCOUR, Pavel. Numerické metody [online]. [cit. 2016-02-08]. Dostupné z: <http://www.kvd.zcu.cz/cz/materialy/numet/-numet.html-Toc501178905>

- [16] PIERCE, Anthony. Lecture 30: Sturm-Liouville Problems involving the Cauchy-Euler Equation - Applications [online]. 2014, , 4 [cit. 2016-02-08]. Dostupné z: <https://www.math.ubc.ca/~peirce/M257-316-2012-Lecture-30.pdf>
- [17] JIRÁSEK, Milan. Pružnost a pevnost: 2 . přednáška Prut namáhaný jednoduchým ohybem [online]. 2015 [cit. 2016-02-08]. Dostupné z: <https://mech.fsv.cvut.cz/homeworks/student/PRPE-I2/prpe2.pdf>
- [18] Stabilita a vzpěrná pevnost tlačенých prutů [online]. 2015 [cit. 2016-02-08]. Dostupné z: <http://fast10.vsb.cz/michalcova/Pruznost13/pr-11-2013-stabilita.pdf>