

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA STAVEBNÍ

# **POROVNÁNÍ NUMERICKÝCH METOD PRO ANALÝZU NEJISTOT**

Autorka:

ELIŠKA JANOUCHOVÁ

Vedoucí práce:

Ing. ANIČKA KUČEROVÁ, Ph.D.

25. dubna 2013

## **Abstrakt**

*Značný vývoj efektivních metod pro stochastické modelování umožnil propagaci nejistot u složitých modelů. Cílem této soutěžní práce je shrnout a porovnat několik přístupů využívaných pro analýzu nejistot jako je polynomiální regrese založená na metodě Latin hypercube sampling, stochastická kolokační metoda nebo stochastická Galerkinova metoda. Výhody a nevýhody těchto metod jsou demonstrovány v porovnání s tradiční metodou Monte Carlo na jednoduchém ilustrativním příkladu rámové konstrukce.*

## **Abstract**

*An extensive development of efficient methods for stochastic modeling enabled uncertainty propagation through complex models. The aim of this competitive work is to review and compare several approaches for uncertainty analysis such as polynomial regression based on Latin hypercube sampling, stochastic collocation method or stochastic Galerkin method. The advantages and disadvantages of these methods are demonstrated within the comparison with the traditional Monte Carlo method on a simple illustrative example of a frame structure.*

## **Klíčová slova**

*propagace nejistot, stochastické modelování, polynomiální regrese, stochastická kolokace, stochastická Galerkinova metoda, metoda Monte Carlo*

## **Keywords**

*uncertainty propagation, stochastic modeling, polynomial regression, stochastic collocation, stochastic Galerkin method, Monte Carlo method*

# 1 Úvod

Vzhledem k životnosti staveb se musí zohlednit mnoho důležitých faktorů. Náležitá analýza spolehlivosti vyžaduje určit nejistoty, které se týkají jak podmínek okolního prostředí, tak materiálových vlastností. Vývoj nových technologií a s ním spjaté zvyšování výkonu výpočetní techniky umožnily aplikovat nedávno vyvinuté postupy v oblasti stochastické mechaniky na reálné inženýrské problémy.

Metody vyhodnocující nejistoty mohou být rozděleny do dvou skupin:

- i metody analýzy spolehlivosti, jako je spolehlivostní analýza prvního či druhého řádu (FORM/SORM z angl. *first (second) order reliability method*) určující pravděpodobnost poruchy na základě mezních stavů (Ditlevsen, 1996),
- ii metody zaměřené na vyhodnocování vyšších statistických momentů odezvy konstrukce jako je stochastická metoda konečných prvků (SFEM - z ang. *stochastic finite element methods*), o níž pojednávají práce (Matthies, 2007; Stefanou, 2009).

SFEM je výkonný nástroj ve výpočetní stochastické mechanice rozšiřující klasickou metodu konečných prvků (FEM) do stochastického systému obsahujícího konečné prvky, jejichž vlastnosti jsou náhodné (Ghanem, 1991).

Tato práce se zaměřuje na SFEM založený na polynomiálním chaosu (PCE - z angl. *polynomial chaos expansion*) použitým pro aproximaci odezvy modelu ve stochastickém prostoru. Po získání aproximace může být nejistota odezvy modelu spočtena pomocí metody Markov chain Monte Carlo využitě pro vzorkování parametrů modelu a vyhodnocení PCE místo plného numerického modelu. Účinnost této metody závisí na výpočetních požadavcích sestavení PCE a z nich vyplývající přesnosti aproximace.

Existuje několik přístupů pro vytvoření aproximace odezvy modelu pomocí PCE: lineární regrese (Blatman a Sudret, 2010), stochastická kolokační metoda (Babuska et al., 2007; Xiu, 2009) a stochastická Galerkinova metoda (Babuska et al., 2004; Matthies a Keese, 2005). Dále jsou popsány základní rozdíly mezi jednotlivými metodami.

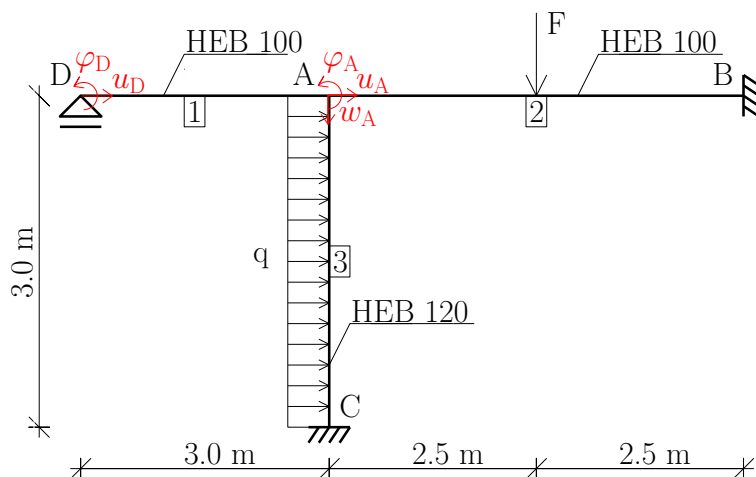
Lineární regrese se sestavuje pomocí sady simulací provedené na základě návrhu experimentů, který se obvykle získává pomocí metody Latin hypercube sampling. Koeficienty PCE se poté obdrží regresí výstupů modelu v návrhových bodech, která vede na řešení soustavy rovnic.

Další dvě metody jsou obě deterministické. Stochastická kolokace používá sadu simulací modelu provedenou pro řídkou mřížku (z angl. *sparse grid*), jež se sestaví pro zvolenou úroveň přesnosti. Výpočet koeficientů PCE je pak založen na explicitním vzorci. Stochastická Galerkinova metoda se především odlišuje od předchozích dvou tím, že vyžaduje modifikaci samotného numerického modelu. Další její nevýhodou je řešení velké soustavy rovnic pro získání koeficientů PCE.

Cílem této práce je porovnat tyto metody z hlediska výpočetní náročnosti a výsledné přesnosti na jednoduchém ilustrativním příkladu rámové konstrukce.

## 2 Motivace

Pro prozkoumání vlastností popsaných metod na inženýrské konstrukci byla vybrána jednoduchá rámová konstrukce převzatá z (Marek et al., 2003). Geometrie, rozmístění zatížení a podpory rámu jsou patrné z Obrázku 1.



Obrázek 1: Schéma rámové konstrukce.

Geometrické parametry jednotlivých nosníků jsou považovány za nejisté. Jejich hodnota se stanoví pomocí nominální hodnoty a nejisté odchylky definované předepsaným histogramem uvedeným v (Marek et al., 2003) a zobrazeným na Obrázku 2. Všechny nominální hodnoty, odpovídající náhodné proměnné a typy histogramů jsou uvedeny v Tabulce 1.

| Geometrický parametr | Nominální hodnota          | Proměnná       | Histogram |
|----------------------|----------------------------|----------------|-----------|
| Moment setrvačnosti  | $I_1 = 449.5 \text{ cm}^4$ | $I_{\sigma 1}$ | N1-05     |
| Moment setrvačnosti  | $I_2 = 449.5 \text{ cm}^4$ | $I_{\sigma 2}$ | N1-05     |
| Moment setrvačnosti  | $I_3 = 864.4 \text{ cm}^4$ | $I_{\sigma 3}$ | N1-05     |
| Délka                | $l_1 = 3 \text{ m}$        | $l_{\sigma}$   | N1-01     |
| Délka                | $l_2 = 5 \text{ m}$        | $l_{\sigma}$   | N1-01     |
| Délka                | $l_3 = 4 \text{ m}$        | $l_{\sigma}$   | N1-01     |

Tabulka 1: Geometrické parametry a odchylky.

Předepsaná zatížení jsou lineární kombinací vlastní tíhy, stálého a krátkodobého zatížení dle následujících vzorců:

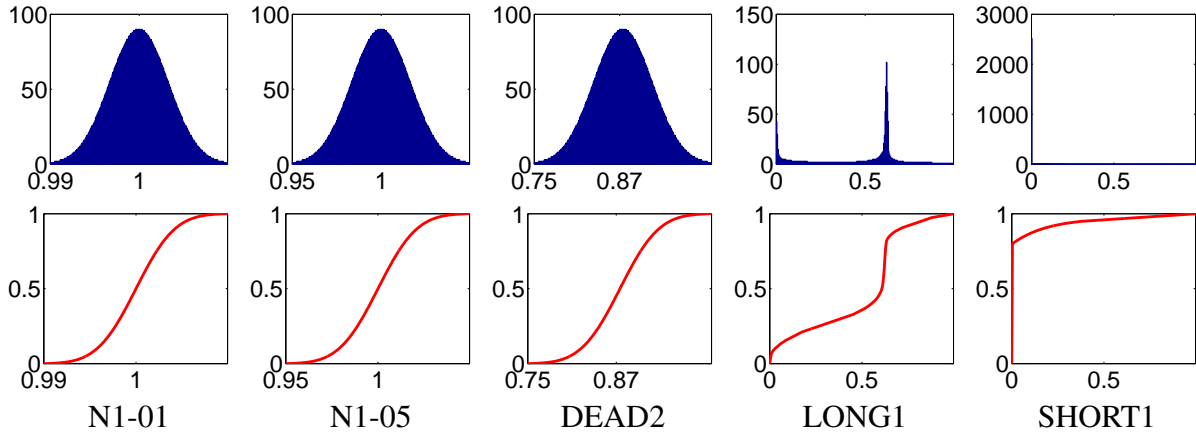
$$q = D_1 D_{\sigma 1} + S_1 S_{\sigma 1} + L_1 L_{\sigma 1} \text{ [kN/m]}, \quad (1)$$

$$F = D_2 D_{\sigma 2} + S_2 S_{\sigma 2} + L_2 L_{\sigma 2} \text{ [kN]}, \quad (2)$$

kde jednotlivá zatížení jsou statisticky nezávislá a jsou popsána náhodnými proměnnými. Všechna zatížení jsou tvořena extrémními hodnotami a proměnnými odchylkami definovanými pomocí histogramů uvedených v Tabulce 2 a znázorněných na Obrázku 2.

| Zatížení            | Extrémní hodnota         | Proměnná       | Histogram |
|---------------------|--------------------------|----------------|-----------|
| Vlastní tíha        | $D_1 = 11 \text{ kN/m}$  | $D_{\sigma_1}$ | DEAD2     |
| Krátkodobé zatížení | $S_1 = 9 \text{ kN/m}$   | $S_{\sigma_1}$ | SHORT1    |
| Dlouhodobé zatížení | $L_1 = 5.5 \text{ kN/m}$ | $L_{\sigma_1}$ | LONG1     |
| Vlastní tíha        | $D_2 = 3.5 \text{ kN}$   | $D_{\sigma_2}$ | DEAD2     |
| Krátkodobé zatížení | $S_2 = 2.2 \text{ kN}$   | $S_{\sigma_2}$ | SHORT1    |
| Dlouhodobé zatížení | $L_2 = 1.7 \text{ kN}$   | $L_{\sigma_2}$ | LONG1     |

Tabulka 2: Zatížení a odchylky.



Obrázek 2: Histogramy nejistých parametrů a odpovídající kumulativní distribuční funkce.

Narozdíl od příkladu uvedeném v (Marek et al., 2003), se tato práce zaměřuje na výpočet přetvoření ve styčnicku A. Jelikož je předpokládáno lineárně elastické chování konstrukce, může být neznámé přetvoření  $r$  spočteno metodou konečných prvků nebo deformační metodou, které jsou obě velmi dobře známé. Použitím druhé z nich lze přímo zapsat diskretizovanou formu rovnic rovnováhy:

$$\mathbf{K}r = f, \quad (3)$$

které po zavedení okrajových podmínek mají následující podobu:

$$\begin{bmatrix} \frac{A_1 I_{\sigma_1}}{12l_1} & 0 & -\frac{A_1 I_{\sigma_1}}{12l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1 I_{\sigma_1}}{3l_1} & 0 & \frac{I_1 I_{\sigma_1}}{2l_1^2 l_{\sigma}} & \frac{I_1 I_{\sigma_1}}{6l_1} \\ -\frac{A_1 I_{\sigma_1}}{12l_1} & 0 & \frac{A_1 I_{\sigma_1}}{12l_1} + \frac{A_2 I_{\sigma_2}}{12l_2} + \frac{I_3 I_{\sigma_3}}{l_3^3 l_{\sigma}^2} & 0 & \frac{I_3 I_{\sigma_3}}{2l_3^2 l_{\sigma}} \\ 0 & \frac{I_1 I_{\sigma_1}}{2l_1^2 l_{\sigma}} & 0 & \frac{I_1 I_{\sigma_1}}{l_1^3 l_{\sigma}^2} + \frac{I_2 I_{\sigma_2}}{l_2^3 l_{\sigma}^2} + \frac{A_3 I_{\sigma_3}}{12l_3} & \frac{I_1 I_{\sigma_1}}{2l_1^2 l_{\sigma}} - \frac{I_2 I_{\sigma_2}}{2l_2^2 l_{\sigma}} \\ 0 & \frac{I_1 I_{\sigma_1}}{6l_1} & \frac{I_3 I_{\sigma_3}}{2l_3^2 l_{\sigma}} & \frac{I_1 I_{\sigma_1}}{2l_1^2 l_{\sigma}} - \frac{I_2 I_{\sigma_2}}{2l_2^2 l_{\sigma}} & \frac{I_1 I_{\sigma_1}}{3l_1} + \frac{I_2 I_{\sigma_2}}{3l_2} + \frac{I_3 I_{\sigma_3}}{3l_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_D \\ \varphi_D \\ u_A \\ w_A \\ \varphi_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(D_1 D_{\sigma_1} + S_1 S_{\sigma_1} + L_1 L_{\sigma_1}) l_3 l_{\sigma}}{2} \\ \frac{D_2 D_{\sigma_2} + S_2 S_{\sigma_2} + L_2 L_{\sigma_2}}{2} \\ -\frac{(D_2 D_{\sigma_2} + S_2 S_{\sigma_2} + L_2 L_{\sigma_2}) l_2 l_{\sigma}}{8} + \frac{(D_1 D_{\sigma_1} + S_1 S_{\sigma_1} + L_1 L_{\sigma_1}) (l_3 l_{\sigma})^3}{12} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

### 3 Polynomiální chaos

Pro urychlení procesu vzorkování při analýze nejistot může být vyhodnocování numerického modelu zahrnující řešení rovnice (3) nahrazeno vyhodnocováním tzv. náhradního modelu (z angl. *surrogate model*). V této práci se konkrétně jedná o hledání aproximace odezvy modelu  $r$  pomocí rozvoje polynomiálního chaosu (PCE) (Matthies, 2007; Stefanou, 2009).

PCE může být použit pro aproximaci odezvy s ohledem na pravděpodobnostní rozdělení náhodných proměnných, kdy je aproximace odezvy vážená vzhledem k rozdělení pravděpodobnosti proměnných. Pro lepší představu to například znamená, že aproximace je přesnější v oblastech s vyšší pravděpodobností výskytu proměnné. Konvergence chyby aproximace s rostoucím počtem členů polynomu je optimální v případě užití takového typu ortogonálních polynomů, který odpovídá danému pravděpodobnostnímu rozdělení uvažovaných proměnných (Xiu a Karniadakis, 2002). Kupříkladu Hermiteovy polynomy jsou určeny pro normální (Gaussovo) rozdělení, Legendreovy polynomy pro rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti atd.

Seznam všech náhodných proměnných, které se vyskytují v příkladu řešeném v této práci a představeném v předchozí kapitole, je uveden v Tabulkách 1 a 2. Pro zjednodušení budou jednotlivé proměnné v následujícím textu označovány jako  $m_i$  a dohromady tvoří vektor

$$\mathbf{m} = (\dots, m_i, \dots)^T = (I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, I_{\sigma_3}, l_{\sigma}, D_{\sigma_1}, S_{\sigma_1}, L_{\sigma_1}, D_{\sigma_2}, S_{\sigma_2}, L_{\sigma_2})^T. \quad (5)$$

Vzhledem k tomu, že žádná z těchto proměnných nemá spojitou funkci hustoty pravděpodobnosti (PDF - z angl. *probability density function*), ale jejich rozdělení je popsáno pomocí diskrétních histogramů, je nutné zavést nové standardní náhodné proměnné  $\xi = (\dots, \xi_i, \dots)^T$  se spojitou PDF. Původní proměnné  $m_i$  lze vyjádřit pomocí transformačních funkcí  $t_{jk}$  nových proměnných  $\xi_i$  vycházejících z daného histogramu  $j$  a typu  $k$  rozdělení proměnné  $\xi_i$ , tzn.

$$m_i = t_{jk}(\xi_i). \quad (6)$$

Transformační funkce nejsou v případě diskrétních histogramů hladké. Konkrétní příklady transformačních funkcí budou rozebrány v kapitole 4.

Ve chvíli, kdy jsou původní proměnné  $\mathbf{m}$  vyjádřeny funkcemi standardních proměnných  $\xi$ , stává se i odezva modelu funkcí těchto nových proměnných. Proto může být tato funkce aproximována pomocí konkrétního typu PCE odpovídajícího danému pravděpodobnostnímu rozdělení  $\xi$ , tzn.

$$\tilde{r}(\xi) = \sum_{\alpha} \beta_{\alpha} \psi_{\alpha}(\xi), \quad (7)$$

kde  $\beta_{\alpha}$  je vektor polynomiálních koeficientů  $\beta_{\alpha,i}$  odpovídajících jednotlivým složkám odezvy  $r_i$ .  $\psi_{\alpha}(\xi)$  jsou polynomy více proměnných. Polynomiální rozvoj (7) je obvykle ukončen na limitním počtu členů  $n_{\beta}$ , který je velmi často spjat s počtem náhodných proměnných  $n_{\xi}$  a nejvyšším stupněm polynomů  $n_p$  podle vztahu

$$n_{\beta} = \frac{(n_p + n_{\xi})!}{n_p! n_{\xi}!}. \quad (8)$$

### 3.1 Lineární regrese

Základní metodou pro výpočet koeficientů PCE podle rovnice (7) je velmi známá lineární regrese (Blatman a Sudret, 2010). Základním předpokladem lineární regrese je, že náhradní  $\tilde{r}$  je lineární kombinací parametrů  $\beta$ , ale nemusí být lineární vůči nezávislým proměnným  $\xi$ . Použití metody je založeno na třech následujících krocích:

- i příprava dat  $\Xi \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_d}$ , které se získají jako  $n_d$  vzorků vektoru parametrů  $\xi_i$ ,
- ii vyhodnocení modelu pro vzorky  $\xi_i$  a uspořádání získaných odezev  $r_i$  do matice  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_d}$ , kde  $n_r$  je počet složek odezvy,
- iii výpočet polynomiálních koeficientů  $\beta_\alpha$  uspořádaných v matici  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_\beta}$  použitím např. obyčejné metody nejmenších čtverců.

Časově nejnáročnější část této metody spočívá ve vyhodnocení modelu pro vzorky náhodných proměnných. Proto představuje volba těchto vzorků velmi důležitý krok, který zásadně ovlivňuje výpočetní náročnost celé metody. Nejjednodušší způsob jak vybrat hledané vzorky je metoda Monte Carlo, kdy se vzorky náhodně vybírají z předepsaného pravděpodobnostního rozdělení. Ovšem přesnost výsledného náhradního modelu závisí na pokrytí definičního oboru proměnných, proto musí být pro dosažení dostatečné přesnosti touto metodou zvoleno mnohem větší množství vzorků než v případě sofistikovanějších metod. Výběr vzorků se poté nazývá návrh experimentů (DOE - z angl. *design of experiments*). Velmi rozšířený postup pro tvorbu DOE je metoda Latin hypercube sampling (LHS), která umožňuje dodržovat předepsaná pravděpodobnostní rozdělení. Existuje také mnoho různých metod, jak lze optimalizovat LHS a tím ještě zvyšovat jeho kvalitu (viz např. (Janouchová a Kučerová, 2013)), ale to není předmětem současného zkoumání, a proto byla pro tuto práci zvolena základní forma LHS bez jakékoliv optimalizace.

Po zvolení sady vzorků je dalším krokem výpočet příslušných odezev  $r_i$ , který zahrnuje nejprve vyhodnocení transformací (6) a následně vyhodnocení samotného modelu (3).

Výpočet koeficientů PCE  $\mathbf{B}$  začíná vyhodnocením všech členů polynomu  $\psi_\alpha$  pro všechny vzorky  $\xi_i$  a jejich uložení do matice  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_\beta}$ . Obyčejná metoda nejmenších čtverců poté vede na

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{B}^T = \mathbf{Z}^T \mathbf{R}^T, \quad (9)$$

což je soustava  $n_\beta$  lineárních rovnic.

### 3.2 Stochastická kolokace

Stochastická kolokační metoda je založena na explicitním vyjádření koeficientů PCE:

$$\beta_{\alpha,i} = \int r_i(\xi) \psi_\alpha(\xi) d\mathbb{P}(\xi), \quad (10)$$

kteřé může být řešeno numericky použitím příslušného integračního pravidla (kvadratury) na  $\mathbb{R}^{n_\xi}$ . Rovnice (11) má pak tvar

$$\beta_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^{n_d} r_i(\xi_j) \psi_\alpha(\xi_j) w_j, \quad (11)$$

kde  $\xi_j$  představuje integrační bod a  $w_j$  je odpovídající váha. V této práci bylo použito několik forem Smolyakových kvadraturních vzorců, konkrétně kvadratury s Gaussovými kvadraturními formullemi jako základ pro rovnoměrné (GQU) a normální (GQN) rozdělení a kvadratury s vnořenými Kronrod-Pattersonovými kvadraturními formullemi pro rovnoměrné (KPU) a normální (KPN) rozdělení (Heiss a Winschel (2008)).

Stochastická kolokační metoda je očividně podobná lineární regresi, protože obě tyto metody vyžadují časově náročné vyhodnocení sady simulací modelu pro vybrané vzorky. Základní rozdíl je při volbě sady vzorků, kdy se v případě stochastické kolokace používají předem optimalizované řídké mřížky (z angl. *sparse grids*), zatímco lineární regrese je založena na stochastickém LHS.

### 3.3 Stochastická Galerkinova metoda

Stochastická Galerkinova metoda se principiálně liší od předchozích metod, které jsou založeny na sadě nezávislých simulací modelu. Stochastická Galerkinova metoda je intruzivní metoda, tzn. vyžaduje přeformulování základních rovnic modelu (3). Za tímto účelem se převede rovnice (7) do následujícího tvaru v maticovém zápisu

$$\tilde{\mathbf{r}}(\xi) = (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\psi}(\xi))\boldsymbol{\beta}, \quad (12)$$

kde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  je jednotková matice,  $\otimes$  je Kroneckerův součin,  $\boldsymbol{\psi}(\xi)$  je  $n_\beta$ -dimensionální vektor polynomů a  $\boldsymbol{\beta}$  je  $(n_\beta \cdot n_r)$ -dimensionální vektor koeficientů PCE uspořádaných jako  $\boldsymbol{\beta} = (\dots, \beta_i, \dots)^T$ , kde  $\beta_i$  se skládá z koeficientů PCE odpovídajících  $i$ -té složce odezvy.

Náhradou odezvy modelu  $\mathbf{r}$  v rovnici (3) její polynomiální aproximací  $\tilde{\mathbf{r}}$  uvedenou v rovnici (12) a aplikováním Galerkinových podmínek se získá

$$\int \boldsymbol{\psi}(\xi) \otimes \mathbf{K}(\xi) \otimes \boldsymbol{\psi}^T(\xi) d\mathbb{P}(\xi) \cdot \boldsymbol{\beta} = \int \boldsymbol{\psi}(\xi) \otimes \mathbf{f}(\xi) d\mathbb{P}(\xi), \quad (13)$$

což je soustava  $(n_\beta \cdot n_r)$  lineárních rovnic. Integrace může být provedena numericky nebo analyticky. Analytické řešení je možné za určitých podmínek jako například, pokud jsou všechny členy v matici tuhosti a vektoru zatížení polynomy vzhledem ke  $\xi$ . V tomto případě se metoda nazývá plně intruzivní. V řešeném příkladu lze základní rovnici (4) vynásobit  $l_\sigma^3$ , a tak získat polynomy parametrů modelu  $\mathbf{m}$ . Nejedná se ale o polynomy vzhledem k parametrům  $\xi$  kvůli transformacím (6) způsobeným diskrétní povahou histogramů předepsaných parametrům modelu  $\mathbf{m}$ . Z tohoto důvodu je v takovém případě nutné přistoupit k numerické integraci, metoda se poté nazývá semi-intruzivní.



## 4 Výsledky

Výstupem této práce je porovnání popsaných metod pro aproximaci odezvy modelu a urychlení metody Monte Carlo (MC) použité pro vyhodnocení rozdělení pravděpodobnosti posunů  $u_A$ ,  $w_A$  a pootočení  $\varphi_A$ .

### 4.1 Hermiteovy polynomy

Nejprve jsou  $\xi$  uvažovány jako standardní normální proměnné, a proto se použijí pro tvorbu náhradního modelu Hermiteovy polynomy. Výsledky náhradních modelů jsou porovnány s referenčním odhadem průměru  $\mu$  a směrodatné odchylky  $\sigma$  jednotlivých složek odezvy obdržným pomocí metody MC s  $10^7$  simulacemi modelu. Tabulka 3 obsahuje potřebný výpočetní čas a relativní chyby v odhadech stanovených lineární regresí a stochastickou kolokační metodou pro čtyři stupně polynomu  $p$ . Relativní chyby v odhadech průměru jsou stanoveny jako

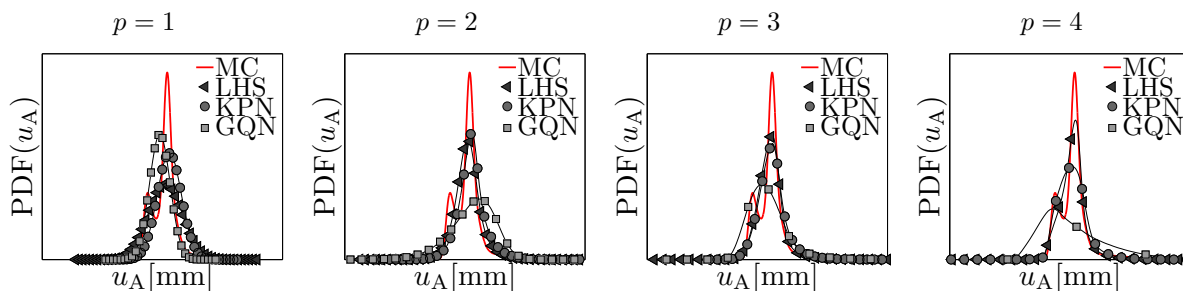
$$\varepsilon_\mu = \frac{|\mu_{\text{PCE}} - \mu_{\text{MC}}|}{\mu_{\text{MC}}}, \quad (14)$$

kde  $\mu_{\text{MC}}$  je průměr odhadnutý pomocí metody MC a  $\mu_{\text{PCE}}$  je průměr získaný na základě vybraného náhradního modelu. Relativní chyby v odhadech směrodatné odchylky se stanoví stejným způsobem.

| Metoda     | $n_d$  | $p$ | Čas [s] | $u_A$ [mm]            |                          | $w_A$ [mm]            |                          | $\varphi_A$ [mrad]    |                          |
|------------|--------|-----|---------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|
|            |        |     |         | $\mu$                 | $\sigma$                 | $\mu$                 | $\sigma$                 | $\mu$                 | $\sigma$                 |
| <b>MC</b>  | $10^7$ | –   | 22191   | 0.21                  | 0.03                     | 0.01                  | 0.00                     | 4.09                  | 0.79                     |
|            |        |     |         | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] |
| <b>LHS</b> | 21     | 1   | 133     | 0.09                  | 28.32                    | 0.62                  | 44.07                    | 0.02                  | 27.59                    |
|            | 201    | 2   | 622     | 0.02                  | 0.36                     | 0.40                  | 1.02                     | 0.06                  | 0.05                     |
|            | 1201   | 3   | 2687    | 0.01                  | 0.13                     | 0.09                  | 1.77                     | 0.03                  | 0.12                     |
|            | 5301   | 4   | 8696    | 0.04                  | 0.21                     | 0.01                  | 0.78                     | 0.04                  | 0.23                     |
| <b>KPN</b> | 21     | 1   | 166     | 4.81                  | 9.34                     | 4.25                  | 8.42                     | 4.89                  | 9.37                     |
|            | 201    | 2   | 811     | 4.81                  | 5.50                     | 4.25                  | 4.30                     | 4.89                  | 5.48                     |
|            | 1201   | 3   | 2648    | 2.25                  | 7.32                     | 1.97                  | 3.69                     | 2.30                  | 5.14                     |
|            | 5301   | 4   | 8721    | 0.31                  | 11.32                    | 0.29                  | 6.15                     | 0.31                  | 7.91                     |
| <b>GQN</b> | 21     | 1   | 132     | 6.68                  | 22.99                    | 6.07                  | 15.51                    | 6.78                  | 23.01                    |
|            | 221    | 2   | 623     | 4.81                  | 73.94                    | 4.25                  | 50.99                    | 4.90                  | 58.18                    |
|            | 1581   | 3   | 2706    | 3.12                  | 59.65                    | 2.81                  | 37.00                    | 3.17                  | 46.84                    |
|            | 8761   | 4   | 8698    | 1.13                  | 187.85                   | 1.10                  | 129.41                   | 1.14                  | 147.77                   |

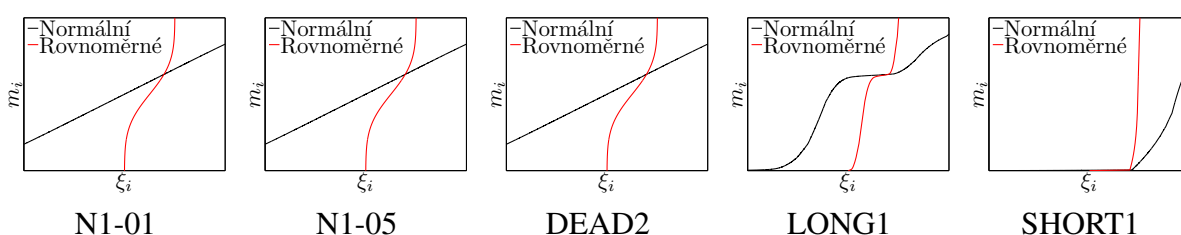
Tabulka 3: Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky odezvy pro případ **předepsaných histogramů** pro parametry modelu  $m$ .

Výsledky ukazují velmi dobré odhady získané lineární regresí, zatímco stochastická kolokace založená na pravidlech KPN vede ke značným chybám v odhadu směrodatných odchylek a GQN se zdá, že dokonce diverguje. Z Obrázku 3, kde jsou zobrazeny obdržené funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$ , je patrné, že i výsledky lineární regrese nejsou uspokojivé.



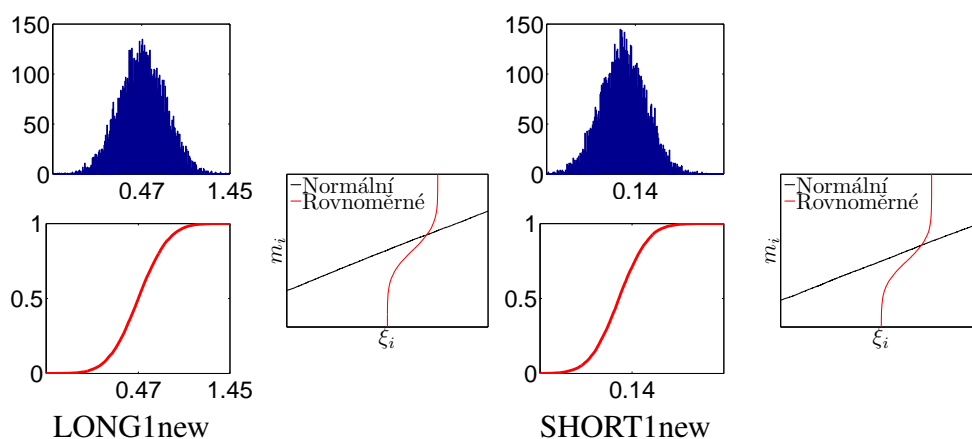
Obrázek 3: Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$  pro případ **předepsaných histogramů** pro parametry modelu  $m$ .

Důvodem takto neuspokojivých výsledků je pravděpodobně vysoká nelinearita transformace (6) parametrů s předepsanými histogramy LONG1 a SHORT1, jak je vidět z Obrázku 4.



Obrázek 4: Transformační vztahy pro předepsané histogramy.

Za účelem prozkoumání těchto předpokladů se nahradily tyto dva předepsané histogramy dvěma novými histogramy, které se více blíží normálnímu rozdělení pravděpodobnosti, viz Obrázek 5. Pro tuto variantu získané nové chyby v odhadech průměrů a směrodatných odchylek jsou uvedeny v Tabulce 4.



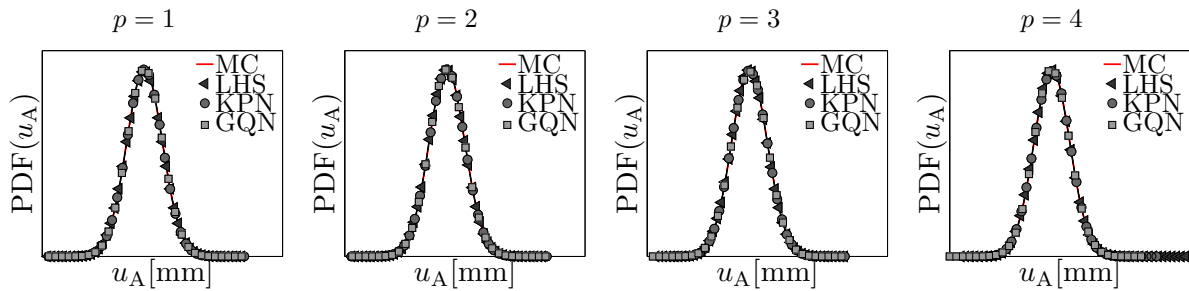
Obrázek 5: Nové histogramy parametrů modelu s odpovídajícími funkcemi hustoty pravděpodobnosti a transformačními vztahy.

Je zřetelné, že nahrazení těchto dvou histogramů vede ke značnému zlepšení výsledků obdržených všemi metodami. Dále si lze všimnout, že výsledky kolokace založené na podmínkách GQN jsou celkově nejhorší a také nadále přetrvávají problémy s konvergencí u této metody. Na druhou stranu nejhorší odhady při použití polynomů prvního stupně předvádí lineární regrese, ale chyba této metody rychle konverguje s rostoucím stupněm polynomů.

| Metoda | $n_d$  | p | Čas [s] | $u_A$ [mm]            |                          | $w_A$ [mm]            |                          | $\varphi_A$ [mrad]    |                          |
|--------|--------|---|---------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|
|        |        |   |         | $\mu$                 | $\sigma$                 | $\mu$                 | $\sigma$                 | $\mu$                 | $\sigma$                 |
| MC     | $10^7$ | — | 21874   | 0.21                  | 0.03                     | 0.01                  | 0.00                     | 4.06                  | 0.79                     |
|        |        |   |         | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] |
| LHS    | 21     | 1 | 158     | 0.03                  | 0.85                     | 0.02                  | 0.54                     | 0.04                  | 1.17                     |
|        | 201    | 2 | 673     | 0.00                  | 0.06                     | 0.03                  | 0.22                     | 0.01                  | 0.08                     |
|        | 1201   | 3 | 2736    | 0.01                  | 0.03                     | 0.01                  | 0.06                     | 0.01                  | 0.02                     |
|        | 5301   | 4 | 8770    | 0.00                  | 0.04                     | 0.00                  | 0.01                     | 0.01                  | 0.03                     |
| KPN    | 21     | 1 | 132     | 0.06                  | 0.12                     | 0.05                  | 0.06                     | 0.06                  | 0.11                     |
|        | 201    | 2 | 654     | 0.06                  | 0.08                     | 0.05                  | 0.01                     | 0.06                  | 0.08                     |
|        | 1201   | 3 | 2768    | 0.02                  | 0.26                     | 0.01                  | 0.19                     | 0.02                  | 0.26                     |
|        | 5301   | 4 | 8978    | 0.00                  | 0.13                     | 0.01                  | 0.13                     | 0.00                  | 0.14                     |
| GQN    | 21     | 1 | 132     | 0.07                  | 0.21                     | 0.06                  | 0.20                     | 0.07                  | 0.19                     |
|        | 221    | 2 | 668     | 0.06                  | 0.06                     | 0.05                  | 0.00                     | 0.06                  | 0.07                     |
|        | 1581   | 3 | 2770    | 0.03                  | 0.48                     | 0.03                  | 0.29                     | 0.03                  | 0.48                     |
|        | 8761   | 4 | 8988    | 0.00                  | 0.21                     | 0.00                  | 0.20                     | 0.00                  | 0.20                     |

Tabulka 4: Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky odezvy pro případ **nových histogramů** pro parametry modelu  $m$ .

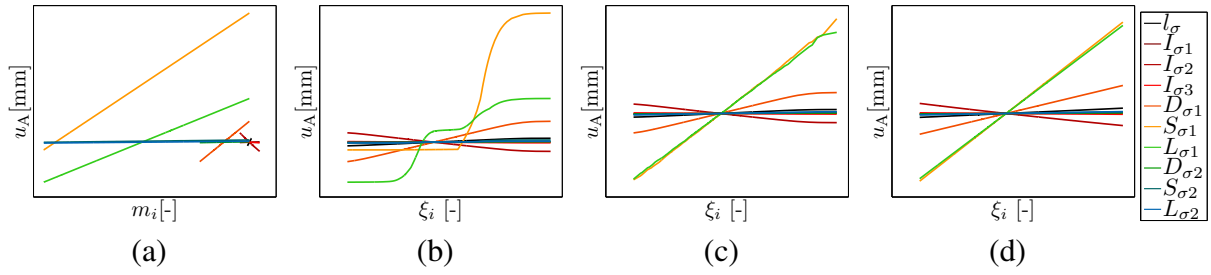
Stejně zlepšení lze pozorovat také v odhadech celé funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$  zachycené na Obrázku 6.



Obrázek 6: Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$  pro případ **nových histogramů** pro parametry modelu  $m$ .

Aby se také prozkoumalo chování plně intruzivní Galerkinovy metody, bylo nutné znovu změnit předepsaná rozdělení parametrů modelu. Tentokrát jsou všechny proměnné považovány za normálně rozdělené s původními hodnotami průměru a směrodatné odchylky vycházejícími z předepsaných histogramů. V tomto případě se transformace (6) stává polynomem prvního stupně, což umožňuje použití analytické integrace.

Obrázek 7 ukazuje funkční závislost posunu  $u_A$  pro popsané typy pravděpodobnostního rozdělení předepsaného parametrů modelu. Na Obrázku 7a je vidět, že vztah mezi  $u_A$  a parametry modelu  $m$  je lineární, zatímco v případě předepsaných histogramů je vztah ke standardním proměnným  $\xi$  vysoce nelineární, viz Obrázek 7b. Náhrada dvou histogramů LONG1 a SHORT1 novými, více podobnými normálnímu rozdělení vede k téměř lineárnímu  $u_A - \xi$  vztahu, a to zvláště v oblasti vysoké pravděpodobnosti výskytu proměnných, jak je patrné z Obrázku 7c. Poslední Obrázek 7d zobrazuje případ, kde je parametrům modelu předepsáno normální rozdělení a vztah  $u_A - \xi$  je lineární.

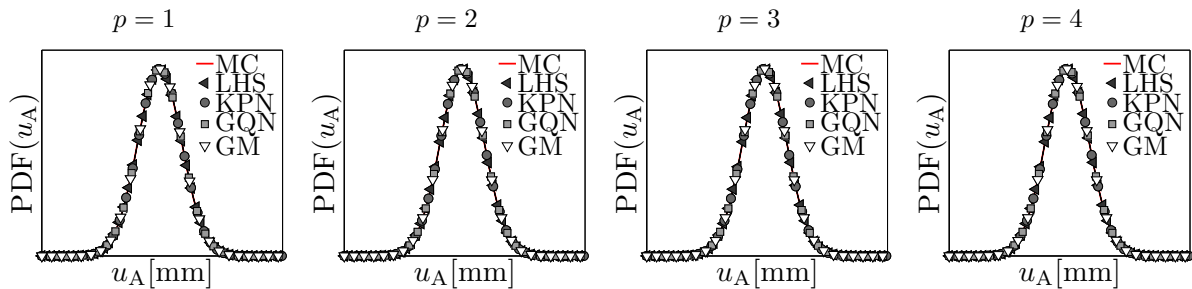


Obrázek 7: Funkční závislost  $u_A$  na parametrech modelu  $m$  (a), na standardních proměnných  $\xi$  v případě předepsaných histogramů (b), nových histogramů (c) a normálního rozdělení (d).

Chyby v odhadu průměru, směrodatné odchylky a celé PDF jsou ukázány v Tabulce 5 a na Obrázku 8 zahrnující výsledky obdržené plně intruzivní stochastickou Galerkinovou metodou.

| Metoda | $n_d$  | p | Čas [s] | $u_A$ [mm]            |                          | $w_A$ [mm]            |                          | $\varphi_A$ [mrad]    |                          |
|--------|--------|---|---------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|
|        |        |   |         | $\mu$                 | $\sigma$                 | $\mu$                 | $\sigma$                 | $\mu$                 | $\sigma$                 |
| MC     | $10^7$ | — | 3692    | 0.207                 | 0.033                    | 0.009                 | 0.002                    | 4.090                 | 0.795                    |
|        |        |   |         | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] |
| LHS    | 21     | 1 | 132     | $4 \cdot 10^{-2}$     | $3 \cdot 10^{-1}$        | $5 \cdot 10^{-2}$     | $5 \cdot 10^{-1}$        | $6 \cdot 10^{-2}$     | $6 \cdot 10^{-1}$        |
|        | 201    | 2 | 618     | $4 \cdot 10^{-5}$     | $7 \cdot 10^{-3}$        | $1 \cdot 10^{-3}$     | $1 \cdot 10^{-3}$        | $3 \cdot 10^{-4}$     | $3 \cdot 10^{-3}$        |
|        | 1201   | 3 | 2702    | $4 \cdot 10^{-6}$     | $4 \cdot 10^{-5}$        | $5 \cdot 10^{-6}$     | $2 \cdot 10^{-5}$        | $5 \cdot 10^{-7}$     | $4 \cdot 10^{-6}$        |
|        | 5301   | 4 | 8680    | $2 \cdot 10^{-7}$     | $1 \cdot 10^{-6}$        | $2 \cdot 10^{-7}$     | $4 \cdot 10^{-7}$        | $4 \cdot 10^{-8}$     | $2 \cdot 10^{-8}$        |
| KPN    | 21     | 1 | 135     | $2 \cdot 10^{-5}$     | $4 \cdot 10^{-2}$        | $2 \cdot 10^{-4}$     | $6 \cdot 10^{-2}$        | $6 \cdot 10^{-5}$     | $2 \cdot 10^{-2}$        |
|        | 201    | 2 | 618     | $4 \cdot 10^{-6}$     | $1 \cdot 10^{-5}$        | $2 \cdot 10^{-6}$     | $3 \cdot 10^{-5}$        | $3 \cdot 10^{-6}$     | $2 \cdot 10^{-5}$        |
|        | 1201   | 3 | 2725    | $3 \cdot 10^{-8}$     | $5 \cdot 10^{-7}$        | $2 \cdot 10^{-7}$     | $2 \cdot 10^{-7}$        | $2 \cdot 10^{-8}$     | $2 \cdot 10^{-7}$        |
|        | 5301   | 4 | 8662    | $2 \cdot 10^{-11}$    | $2 \cdot 10^{-8}$        | $4 \cdot 10^{-9}$     | $2 \cdot 10^{-9}$        | $4 \cdot 10^{-10}$    | $1 \cdot 10^{-9}$        |
| GQN    | 21     | 1 | 132     | $3 \cdot 10^{-5}$     | $4 \cdot 10^{-2}$        | $2 \cdot 10^{-4}$     | $6 \cdot 10^{-2}$        | $6 \cdot 10^{-5}$     | $2 \cdot 10^{-2}$        |
|        | 221    | 2 | 620     | $4 \cdot 10^{-6}$     | $4 \cdot 10^{-5}$        | $2 \cdot 10^{-6}$     | $7 \cdot 10^{-5}$        | $3 \cdot 10^{-6}$     | $3 \cdot 10^{-5}$        |
|        | 1581   | 3 | 2757    | $3 \cdot 10^{-8}$     | $5 \cdot 10^{-7}$        | $1 \cdot 10^{-7}$     | $3 \cdot 10^{-7}$        | $2 \cdot 10^{-8}$     | $2 \cdot 10^{-7}$        |
|        | 8761   | 4 | 8701    | $9 \cdot 10^{-11}$    | $2 \cdot 10^{-8}$        | $4 \cdot 10^{-9}$     | $3 \cdot 10^{-9}$        | $4 \cdot 10^{-10}$    | $1 \cdot 10^{-9}$        |
| GM     | —      | 1 | 133     | $3 \cdot 10^{-5}$     | $4 \cdot 10^{-2}$        | $4 \cdot 10^{-3}$     | $6 \cdot 10^{-2}$        | $6 \cdot 10^{-5}$     | $1 \cdot 10^{-2}$        |
|        | —      | 2 | 620     | $4 \cdot 10^{-6}$     | $4 \cdot 10^{-5}$        | $4 \cdot 10^{-3}$     | $1 \cdot 10^{-1}$        | $3 \cdot 10^{-6}$     | $4 \cdot 10^{-6}$        |
|        | —      | 3 | 2673    | $5 \cdot 10^{-8}$     | $3 \cdot 10^{-6}$        | $4 \cdot 10^{-3}$     | $1 \cdot 10^{-1}$        | $5 \cdot 10^{-7}$     | $2 \cdot 10^{-5}$        |
|        | —      | 4 | 8704    | $8 \cdot 10^{-8}$     | $2 \cdot 10^{-6}$        | $4 \cdot 10^{-3}$     | $1 \cdot 10^{-1}$        | $4 \cdot 10^{-7}$     | $2 \cdot 10^{-5}$        |

Tabulka 5: Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky odezvy pro případ **normálního rozdělení** parametrů modelu  $m$ .



Obrázek 8: Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$  pro případ **normálního rozdělení** parametrů modelu  $m$ .

Výsledky potvrzují, že vztah  $u_A - \xi$  je v tomto případě lineární, a proto jsou polynomy prvního stupně dostatečné pro vynikající náhradní modely. Rozdíly mezi jednotlivými metodami jsou nyní zanedbatelné z hlediska přesnosti i časové náročnosti.

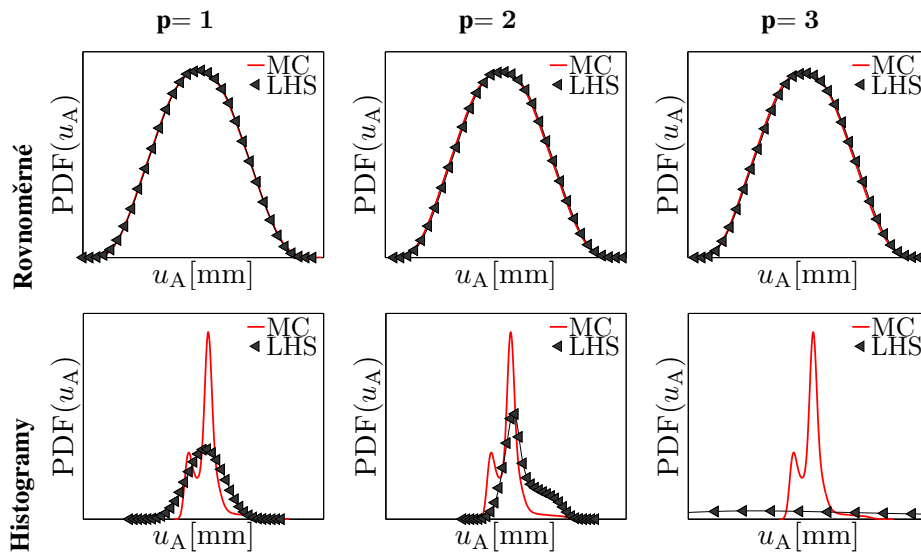
## 4.2 Legendreovy polynomy

Se záměrem doplnit porovnání různých metod pro proměnné s normálním rozdělením byla dále zařazena varianta s použitím rovnoměrně rozdělených standardních proměnných  $\xi$ . Proměnné s tímto rozdělením se pojí s náhradními modely založenými na Legendreových polynomech.

Jsou opět vyzkoušeny dvě situace, první s předepsanými histogramy a druhá s předepsaným rovnoměrným rozdělením. Výsledky jsou uvedeny v Tabulce 6 a na Obrázku 9 a ukazují celkově horší chování náhradních modelů sestavených na Legendreových polynomech.

|            | Metoda | $n_d$  | p | Čas [s] | $u_A$ [mm]            |                          | $w_A$ [mm]            |                          | $\varphi_A$ [mrad]    |                          |
|------------|--------|--------|---|---------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|
|            |        |        |   |         | $\mu$                 | $\sigma$                 | $\mu$                 | $\sigma$                 | $\mu$                 | $\sigma$                 |
| Rovnoměrné | MC     | $10^7$ | – | 3754    | 0.27                  | 0.05                     | 0.01                  | 0.00                     | 5.46                  | 1.20                     |
|            |        |        |   |         | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] |
|            | LHS    | 23     | 1 | 132     | 0.02                  | 0.57                     | 0.26                  | 1.19                     | 36.33                 | 71.13                    |
|            |        | 243    | 2 | 619     | 0.70                  | 0.12                     | 0.49                  | 0.08                     | 36.15                 | 71.75                    |
|            |        | 1607   | 3 | 2703    | 0.67                  | 0.60                     | 0.57                  | 0.63                     | 36.17                 | 71.98                    |
| Histogramy | MC     | $10^7$ | – | 21207   | 0.21                  | 0.03                     | 0.01                  | 0.00                     | 4.09                  | 0.79                     |
|            |        |        |   |         | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] | $\varepsilon_\mu$ [%] | $\varepsilon_\sigma$ [%] |
|            | LHS    | 23     | 1 | 132     | 0.89                  | 33.76                    | 0.85                  | 11.24                    | 29.40                 | 138.19                   |
|            |        | 243    | 2 | 623     | 15.71                 | 33.35                    | 18.95                 | 28.56                    | 33.00                 | 297.79                   |
|            |        | 1607   | 3 | 2692    | 79.24                 | 1194.17                  | 50.22                 | 979.51                   | 532.55                | 2042.39                  |

Tabulka 6: Časová náročnost a chyby v odhadech průměru a směrodatné odchylky odezvy pro náhradní modely založené na Legendreových polynomech.



Obrázek 9: Funkce pravděpodobnostního rozdělení posunu  $u_A$  obdržené použitím náhradních modelů založených na Legendreových polynomech.

## 5 Závěr

Tato práce představuje přehled a porovnání třech metod pro konstrukci náhradního modelu založeného na polynomiálním chaosu a nahrazujícího numerický model s náhodnými parametry. Konkrétně zkoumané metody jsou stochastická Galerkinova metoda, stochastická kolokační metoda a polynomiální regrese zakládající se na metodě Latin hypercube sampling. V práci jsou probrány specifické rysy těchto metod.

Pro získání kvalitního náhradního modelu je nutné použít pro jeho tvorbu ortogonální polynomy typu odpovídajícího předepsanému rozdělení pravděpodobnosti parametrů. V této práci byly použity Hermiteovy polynomy pro normální rozdělení a Legendreovy polynomy pro rovnoměrné rozdělení parametrů.

Kvalita obdržných náhradních modelů je demonstrována z hlediska přesnosti i časové náročnosti na jednoduchém ilustrativním příkladu rámové konstrukce v porovnání s tradiční metodou Monte Carlo.

U aproximace pomocí Hermiteových polynomů se s dobrými výsledky osvědčila lineární regrese, zatímco stochastická kolokační metoda měla problémy s konvergencí. Stochastická Galerkinova metoda byla aplikována ve své plně intruzivní formě pro variantu normálně rozdělených parametrů modelu. Její výsledky byly dobré, ale je nutno zmínit, že tato metoda je z hlediska aplikace náročnější, protože vyžaduje přeformulování samotného modelu.

Pro rovnoměrně rozdělené parametry byly náhradní modely vytvořeny pouze pomocí lineární regrese a ty nebyly příliš úspěšné v odhadech rozdělení pravděpodobnosti odezvy.

Z hlediska časové náročnosti jsou jednotlivé metody srovnatelné a ve srovnání s metodou Monte Carlo jsou méně časově náročné.

## 6 Poděkování

Tato práce vznikla za finanční podpory Grantové agentury České republiky v rámci projektu číslo 105/11/0411 a 105/12/1146 a Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS OHK1-042/13.

## 7 Reference

- Babuska, I. & Tempone, R. & Zouraris, G. E. 2004: Galerkin Finite Element Approximations of Stochastic Elliptic Partial Differential Equations. SIAM Journal on Numerical Analysis 42(2), 800–825.
- Babuska, I. & Nobile F. & Tempone, R. 2007: A Stochastic Collocation Method for Elliptic Partial Differential Equations with Random Input Data. SIAM Journal on Numerical Analysis 45(3), 1005–1034.
- Blatman, G. & Sudret, B. 2010: An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis Probabilistic Engineering Mechanics 25(2), 183–197.
- Ditlevsen, O. & Madsen, H. O. 1996: Structural Reliability Methods, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England.
- Ghanem, R. G. & Spanos, P. D. 1991 Stochastic finite elements: A spectral approach, Springer-Verlag New York, Inc.
- Heiss, F. & Winschel, V. 2008: Likelihood approximation by numerical integration on sparse grids. Journal of Econometrics 144(1), 62–80.
- Janouchová, E. & Kučerová, A. 2013: Competitive Comparison of Optimal Designs of Experiments for Sampling-based Sensitivity Analysis. Accepted for publication in Computers & Structures, eprint: arXiv:1201.0942.
- Marek, P. & Brozzetti, J. & Guštar, M. & Tikalsky, P. editors. 2003 : Probabilistic assessment of structures using Monte Carlo simulation, Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, second edition.
- Matthies, H. G. & Keese, A. 2005: Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194(12–16), 1295–1331.
- Matthies, H. G. 2007: Uncertainty quantification with stochastic finite elements. In Erwin Stein, René de Borst, and Thomas J. R. Hughes, editors, Encyclopaedia of Computational Mechanics. John Wiley & Sons, Chichester.
- Stefanou, G. 2009: The stochastic finite element method: Past, present and future. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 198(9–12), 1031–1051.
- Xiu, D. & Karniadakis, G. E. 2002: The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations. SIAM Journal on Scientific Computing 24(2), 619–644.
- Xiu, D. 2009: Fast Numerical Methods for Stochastic Computations: A Review. Communications in Computational Physics 5(2–4), 242–272.