
**Výpočet
tenkostěnných nosníků
– ruční výpočet a výpočet metodou
konečných prvků**

Výpočet tenkostěnných nosníků

- I. Zadání příkladu
 - II. Postup ručního výpočtu
 - III. Postup výpočtu MKP
 - IV. Porovnání výpočtů
 - V. Přehled použité literatury
-

I. Zadání příkladu

- Materiálové charakteristiky

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

- Průřezové veličiny

$$A = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

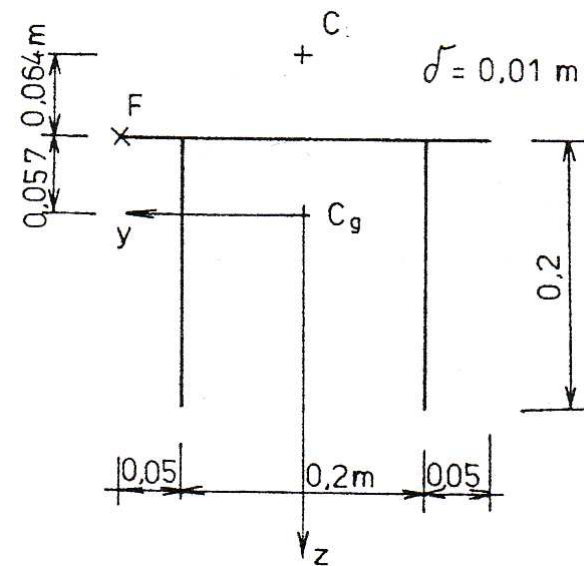
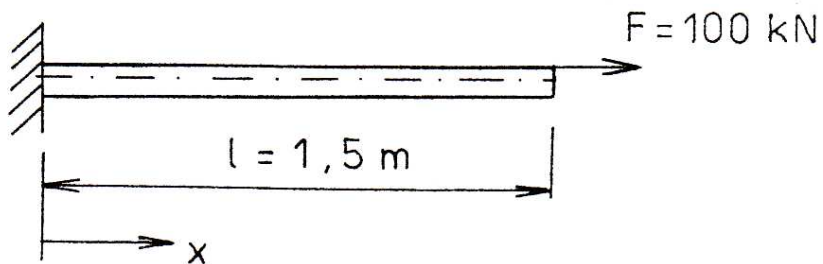
$$I_y = 3,048 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_z = 6,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_\omega = 2,773 \cdot 10^{-7} \text{ m}^6$$

$$I_k = 2,333 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

- Geometrie průřezu



II. Postup ručního výpočtu

- II.a - Výpočet průřezových charakteristik (výsečové souřadnice, statický výsečový moment)
 - II.b - Výpočet vnitřních sil (normálová síla, moment, bimoment)
 - II.c – Výpočet napětí (normálová, smyková)
 - II.d – Výpočet posunů
-

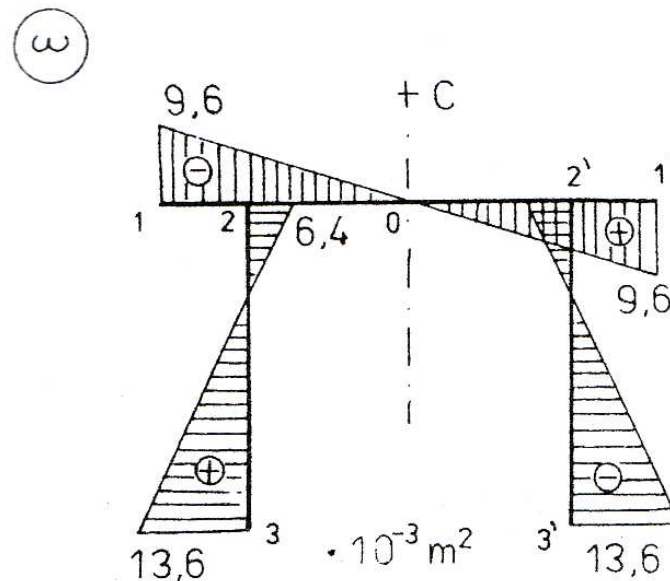
II.a - Výpočet průřezových charakteristik

Výsečové souřadnice

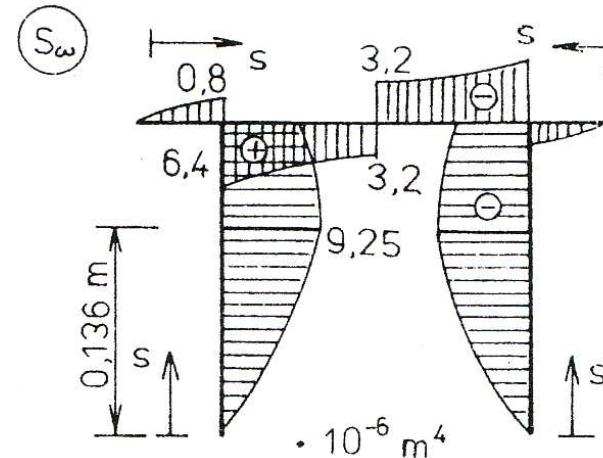
$$\omega_1 = -0,064 \cdot 0,15 = -9,6 \cdot 10^{-3}$$

$$\omega_2 = -0,064 \cdot 0,1 = -6,4 \cdot 10^{-3}$$

$$\omega_3 = -0,064 \cdot 0,024 + 0,2 \cdot (0,1 - 0,024) = 13,7 \cdot 10^{-3}$$



II.a - Výpočet průřezových charakteristik



Statický výsečový moment

$$S_{\omega 1-2} = 0$$

$$S_{\omega 2-1} = (0,01 \cdot 0,05 \cdot (6,4 \cdot 10^{-3} - 9,6 \cdot 10^{-3})) / 2 = -0,8 \cdot 10^{-6}$$

$$S_{\omega 2-0} = (0,01 \cdot 0,1 \cdot (6,4 \cdot 10^{-3} - 9,6 \cdot 10^{-3})) / 2 = 6,4 \cdot 10^{-6}$$

$$S_{\omega 0-2} = (0,01 \cdot 0,1 \cdot (6,4 \cdot 10^{-3} - 0)) / 2 = 3,2 \cdot 10^{-6}$$

$$S_{\omega 2-3} = (0,01 \cdot 0,2 \cdot (6,4 \cdot 10^{-3} - 13,6 \cdot 10^{-3})) / 2 = -7,2 \cdot 10^{-6}$$

$$S_{\omega 3-2} = 0$$

$$S_{\omega, \max-3} = (0,01 \cdot 0,136 \cdot (0 - 13,6 \cdot 10^{-3})) / 2 = 9,248 \cdot 10^{-6}$$

II.b - Výpočet vnitřních sil

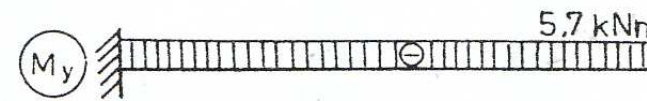
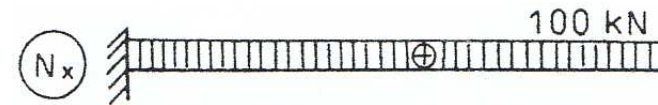
$$N = 100 \text{ kN}$$

$$M_x = 0$$

$$M_y = -100 \cdot 0,15 = -5,7 \text{ kNm}$$

$$M_z = -100 \cdot 0,15 = 15 \text{ kNm}$$

Ohybové kroucení



$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \lambda^2\theta = \lambda^2 \frac{M_\omega}{EI_k} \Rightarrow M(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - \lambda^2\theta = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{GI_k}{EI_\omega} = \frac{80 \times 10^9 \times 2,333 \times 10^{-7}}{210 \times 10^9 \times 2,773 \times 10^{-7}} = 0,321$$

$$\lambda = 0,566 \text{ m}^{-1}$$

II.b - Výpočet vnitřních sil

$M_x = 0$... řešením je pouze homogenní část

$$\theta(x) = C_1 \sinh \lambda x + C_2 \cosh \lambda x$$

$$\theta'(x) = \lambda C_1 \cosh \lambda x + \lambda C_2 \sinh \lambda x$$

$$\theta''(x) = \lambda^2 C_1 \sinh \lambda x + \lambda^2 C_2 \cosh \lambda x$$

Okrajové podmínky

-vetknutí $x = 0$, $\theta(x) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

-volný konec $x = l$, $\sigma_x \neq 0 \Rightarrow B(l) = -EI_\omega \theta' \Rightarrow \theta' = B(l) / -EI_\omega$

$$\Rightarrow \frac{B(l)}{EI_\omega} = \lambda C_1 \cosh \lambda l \Rightarrow -\frac{-0,96}{210 * 10^3 * 2,773 * 10^{-7}} = 0,566 C_1 \cosh(0,566 * 1,5)$$

$$C_1 = 0,02107$$

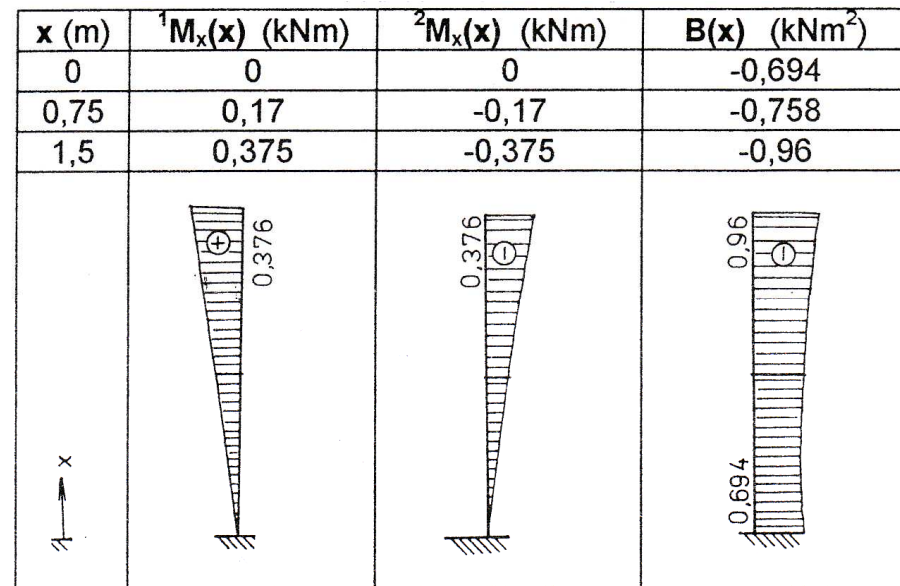
II.b - Výpočet vnitřních sil

Průběhy vnitřních sil

$${}^1M_x(x) = GI_k \theta(x) = GI_k 0,021 \sinh \lambda x$$

$${}^2M_x(x) = -EI_\omega \frac{d^2\theta}{dx^2} = -EI_\omega \lambda^2 0,021 \sinh \lambda x$$

$$B(x) = -EI_\omega \frac{d\theta}{dx} = -EI_\omega \lambda 0,021 \cosh \lambda x$$



II.c - Výpočet napětí

- Normálové napětí

- Od ohybu $\sigma_x = \frac{N}{A}; \sigma_y = \frac{M_y z}{I_y}; \sigma_z = -\frac{M_z y}{I_z}$

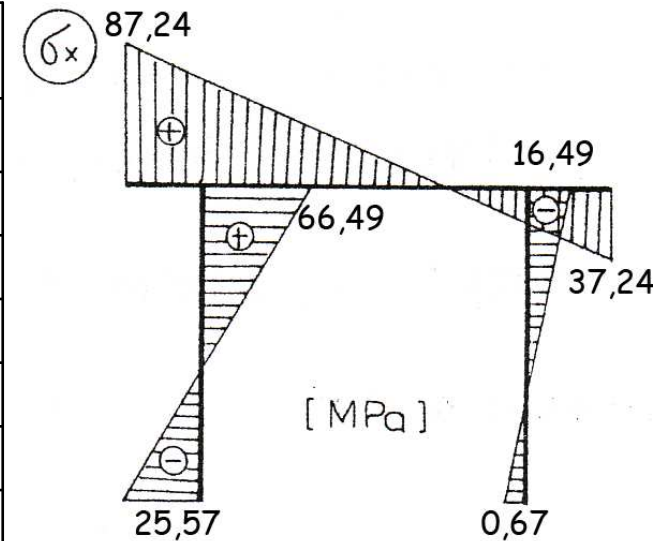
- Od kroucení $\sigma = \frac{B\omega}{I_\omega}$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{B\omega}{I_\omega} = 14,29 - 187z + 240y - 2733,5\omega$$

II.c - Výpočet napětí

- Normálové napětí

	y	z	ω	$\sigma_{\text{ohybové}}$	$\sigma_{\text{krouticí}}$	σ_{celkem}
1	0,15	-0,057	-0,0096	61	26,24	87,24
2	0,1	-0,057	-0,0064	49	17,49	66,49
3	0,1	0,143	0,0136	11,6	-37,17	-25,57
0	0	-0,057	0	25	0	25
1'	-0,15	-0,057	0,0096	-11	-26,24	-37,24
2'	-0,1	-0,057	0,0064	1	-17,49	-16,49
3'	-0,1	0,143	-0,0136	-36,5	37,17	0,67



II.c - Výpočet napětí

Smyková napětí

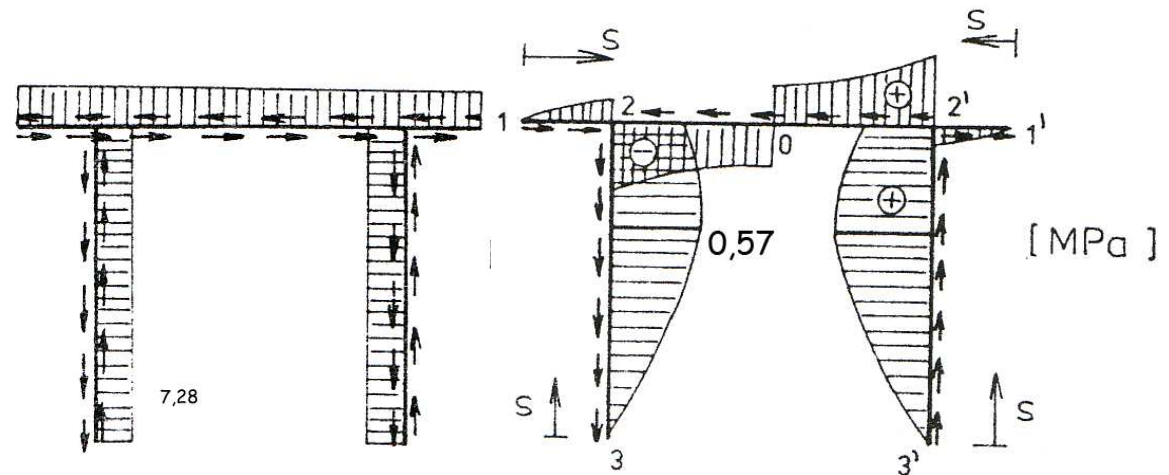
- Od volného kroucení

$${}^1\tau_{xs} = \frac{{}^1M_x \delta}{I_k}$$

- Od ohybového kroucení

$${}^2\tau_{xs} = -\frac{{}^2M_x S_\omega(s)}{I_\omega \delta}$$

	S_ω	${}^1\tau_{xs}$	${}^2\tau_{xs}$
1	0	$\pm 7,28$	0
2 (1)	-0,8	$\pm 7,28$	0,049
2 (3)	7,2	$\pm 7,28$	-0,44
2 (0)	6,4	$\pm 7,28$	-0,39
max	9,25	$\pm 7,28$	-0,57
0	3,2	$\pm 7,28$	-0,2
3	0	$\pm 7,28$	0



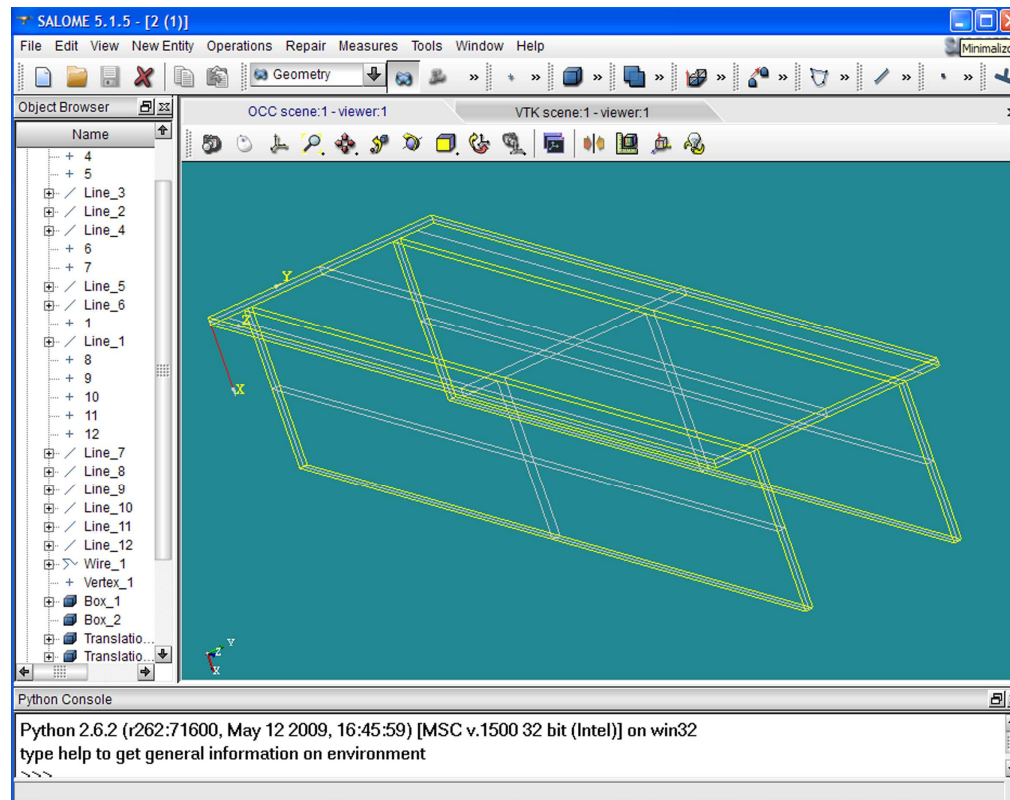
II.d - Výpočet posunů

	x [m]	y [m]	z [m]	σ_{celkem} [MPa]	ω [m ²]	$N \cdot x / E \cdot A$	$M_y \cdot z / E \cdot I_y$	$M_z \cdot y / E \cdot I_z$	$-\theta(x) \cdot \omega(s)$	posuny [mm]
1	0,75	0,15	-0,057	87,24	-0,0096	5,1E-05	5,0759E-05	-0,0001714	8,8453E-05	0,362
2	0,75	0,1	-0,057	66,49	-0,0064	5,1E-05	5,0759E-05	-0,0001143	5,8969E-05	0,275
3	0,75	0,1	0,143	-25,57	0,0136	5,1E-05	-0,00012734	-0,0001143	-0,0001253	-0,087
0	0,75	0	-0,057	25	0	5,1E-05	5,0759E-05	0,0000000	0	0,102
1'	0,75	-0,15	-0,057	-37,24	0,0096	5,1E-05	5,0759E-05	0,0001714	-8,845E-05	-0,158
2'	0,75	-0,1	-0,057	-16,49	0,0064	5,1E-05	5,0759E-05	0,0001143	-5,897E-05	-0,071
3'	0,75	-0,1	0,143	0,67	-0,0136	5,1E-05	-0,00012734	0,0001143	0,00012531	-0,065

III. Postup výpočtu MKP

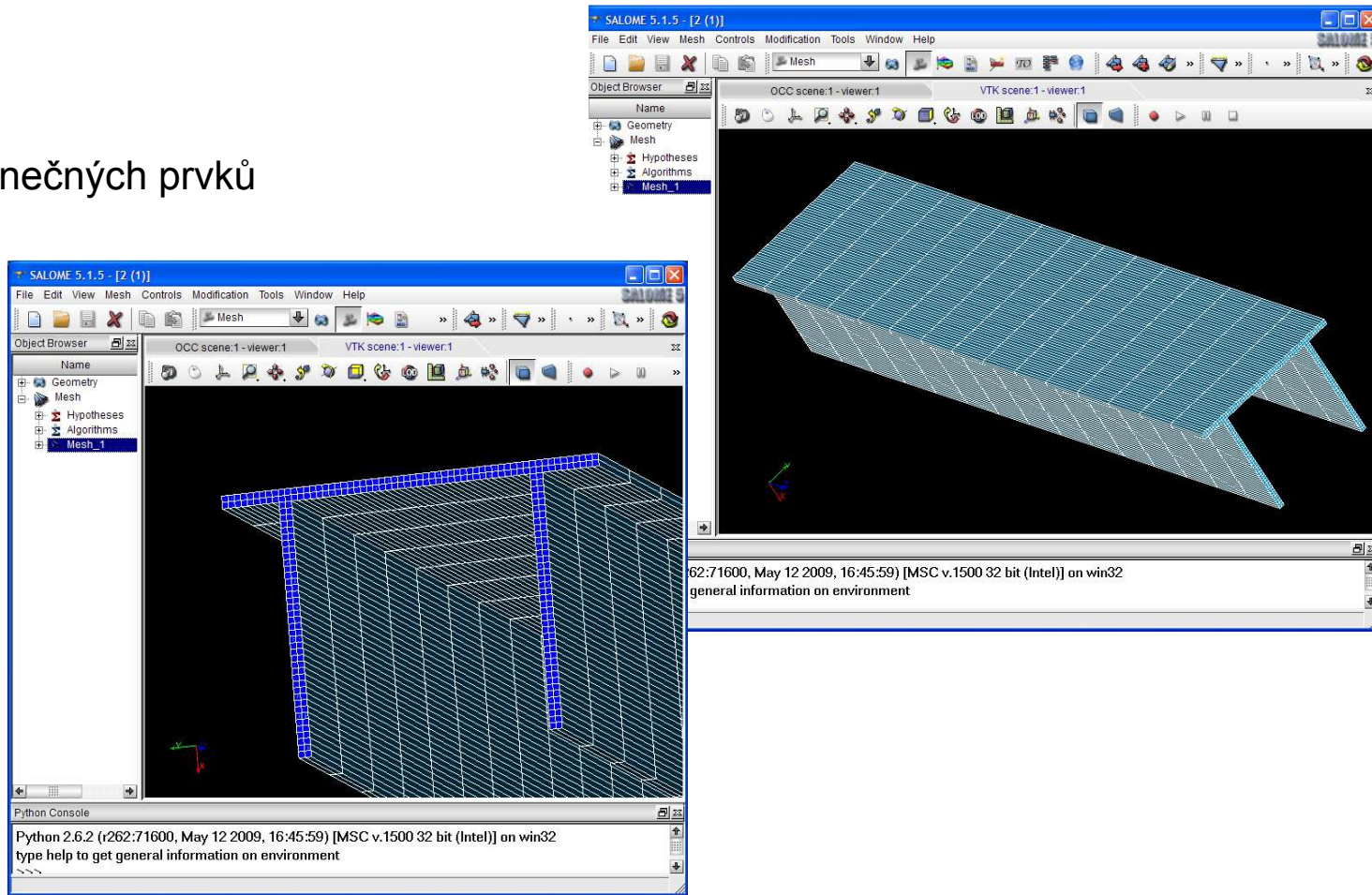
Použité programy

- Salome 5
- Modelování konstrukce



III. Postup výpočtu MKP

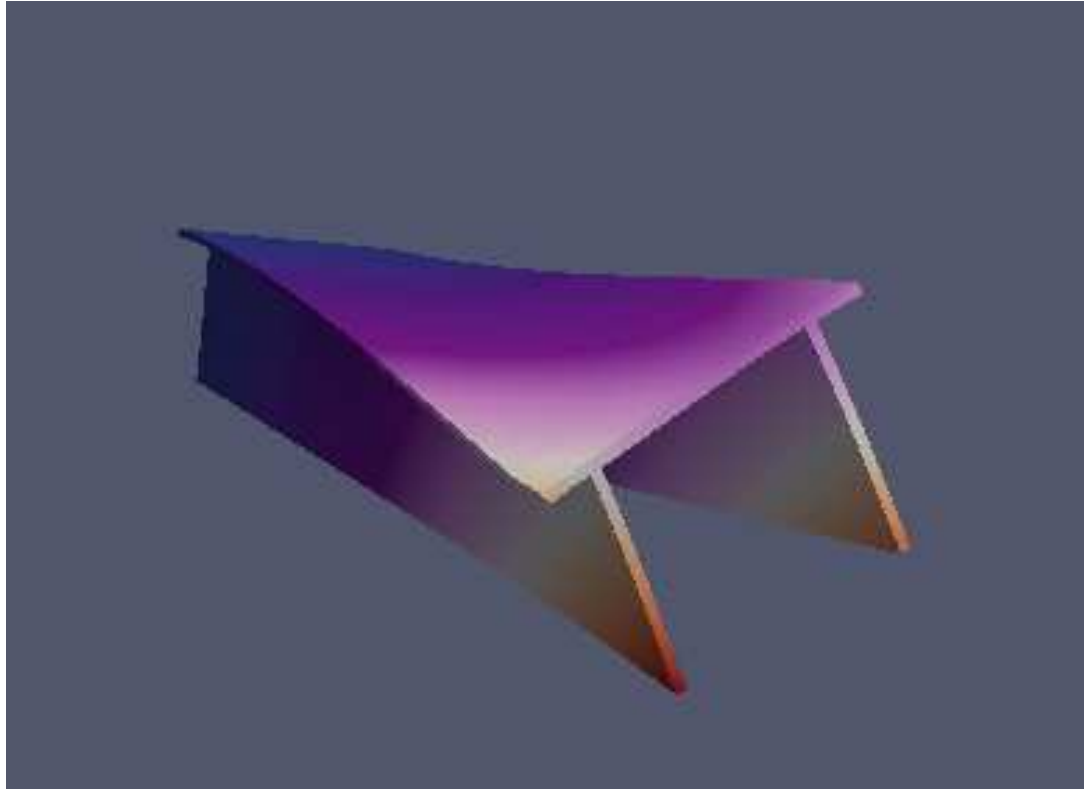
- Síť konečných prvků



■ OOFEM 2.1

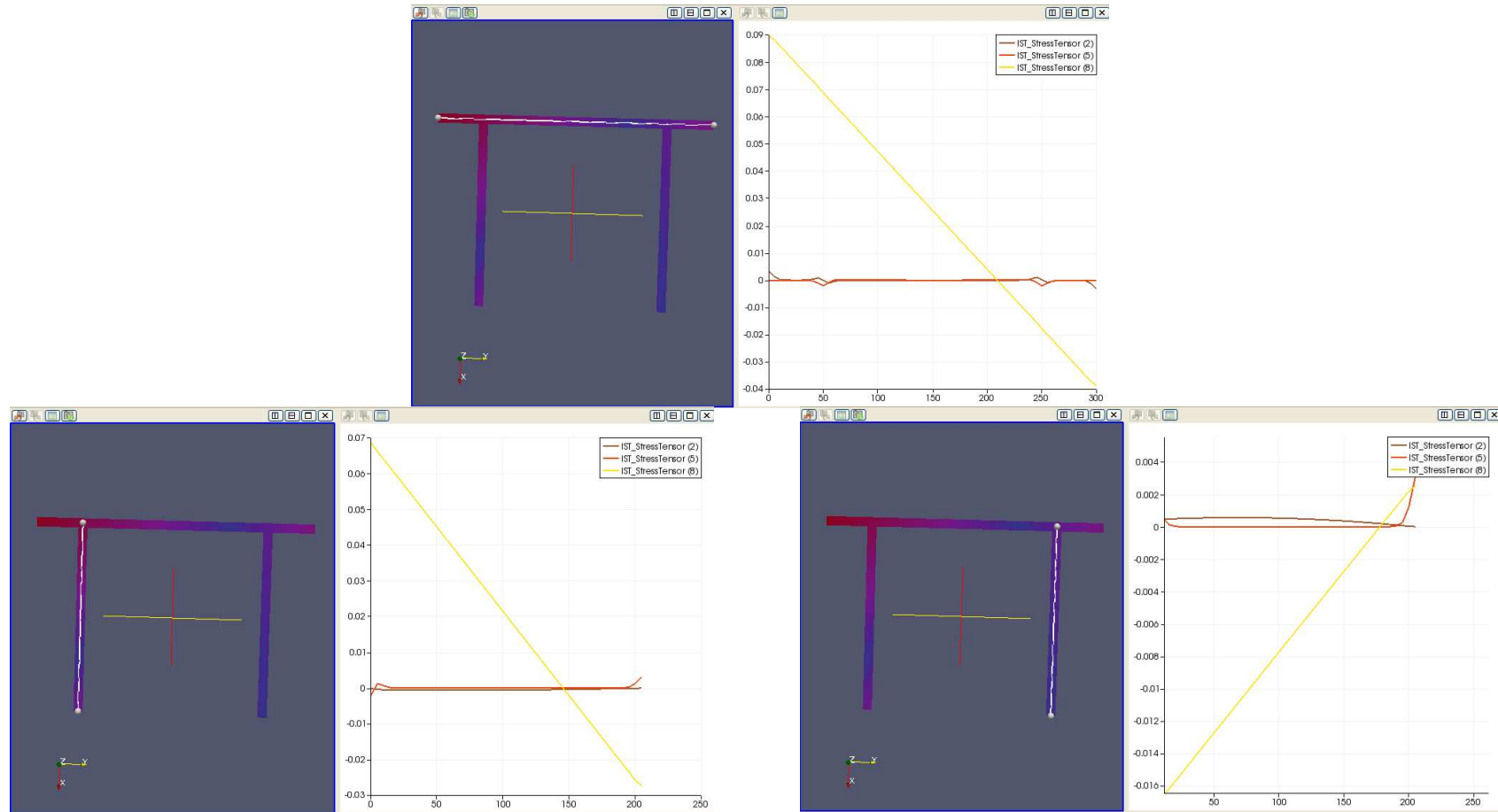
III. Postup výpočtu MKP

- ParaView 3.10.1



III. Postup výpočtu MKP

- Vykreslení průběhů napětí



III. Postup výpočtu MKP

- Tabulka výsledků

Showing PlotOverLine2 Attribute: Point Data Precision: 6

	DisplacementVector			IST_StressTensor									IPoi	Jen	Points	int	
0	0.773083	0.608229	0.326566	2.09722e-07	-8.56813e-06	0.003123	-8.56813e-06	-1.57486e-09	-6.19058e-06	0.003123	-6.19058e-06	0.0895291	1	0	5	0...	0
1	0.755374	0.607565	0.31879	-2.64971e-07	-1.6191e-05	0.00124383	-1.6191e-05	1.25338e-08	-2.90751e-05	0.00124383	-2.90751e-05	0.0880898	1	5	5	5...	1
2	0.737643	0.606918	0.311014	-2.51762e-07	-2.03736e-05	0.000259267	-2.03736e-05	3.11012e-07	-5.67637e-05	0.000259267	-5.67637e-05	0.0859308	1	10	5	10...	2
3	0.719895	0.606287	0.303235	-3.66377e-08	-2.12687e-05	5.39375e-05	-2.12687e-05	8.13605e-07	-8.45114e-05	5.39375e-05	-8.45114e-05	0.0837715	1	15	5	15...	3
4	0.70213	0.605672	0.295455	6.3551e-08	-2.14594e-05	1.19553e-05	-2.14594e-05	1.53356e-06	-0.000111214	1.19553e-05	-0.000111214	0.0816118	1	20	5	20...	4
5	0.684353	0.605072	0.287674	5.19363e-08	-2.15293e-05	5.71347e-06	-2.15293e-05	2.48986e-06	-0.000136557	5.71347e-06	-0.000136557	0.0794516	1	25	5	25...	5
6	0.666565	0.604489	0.279891	-1.60394e-06	-2.16205e-05	1.48808e-05	-2.16205e-05	3.55725e-06	-0.000162258	1.48808e-05	-0.000162258	0.0772907	1	30	5	30...	6
7	0.648769	0.603923	0.272108	-6.92446e-06	-2.07371e-05	7.54732e-05	-2.07371e-05	1.02496e-05	-0.000188241	7.54732e-05	-0.000188241	0.0751301	1	35	5	35...	7
8	0.630969	0.603372	0.264317	3.94768e-05	-2.55663e-05	0.00032554	-2.55663e-05	3.21408e-05	-0.000264843	0.00032554	-0.000264843	0.0729897	1	40	5	40...	8
9	0.613163	0.602836	0.256511	0.000417422	-0.000285045	0.000844821	-0.000285045	1.01752e-05	-0.00108664	0.000844821	-0.00108664	0.0709328	1	45	5	45...	9
10	0.595334	0.602313	0.248633	0.000150826	-0.000837687	-0.000154825	-0.000837687	0.00019291	-0.00205397	-0.000154825	-0.00205397	0.068718	1	50	5	50...	10
11	0.577522	0.60182	0.240766	-0.000541158	-0.000397946	-0.00106223	-0.000397946	0.000280795	-0.000794593	-0.00106223	-0.000794593	0.0663436	1	55	5	55...	11
12	0.559813	0.601341	0.232983	-0.000181286	0.000100531	-0.00038697	0.000100531	2.12125e-05	0.00010491	-0.00038697	0.00010491	0.0642134	1	60	5	60...	12
13	0.542194	0.600873	0.225214	-2.45042e-06	0.000136662	-8.73601e-05	0.000136662	-1.00551e-05	0.000148392	-8.73601e-05	0.000148392	0.0621047	1	65	5	65...	13
14	0.524655	0.600418	0.217451	4.10515e-06	0.000131805	-1.50723e-05	0.000131805	-3.86149e-07	0.00013472	-1.50723e-05	0.00013472	0.0599548	1	70	5	70...	14
15	0.507189	0.59998	0.209687	-9.03846e-08	0.000131802	-1.93822e-06	0.000131802	-3.27328e-07	0.000119061	-1.93822e-06	0.000119061	0.0577984	1	75	5	75...	15

III. Postup výpočtu MKP

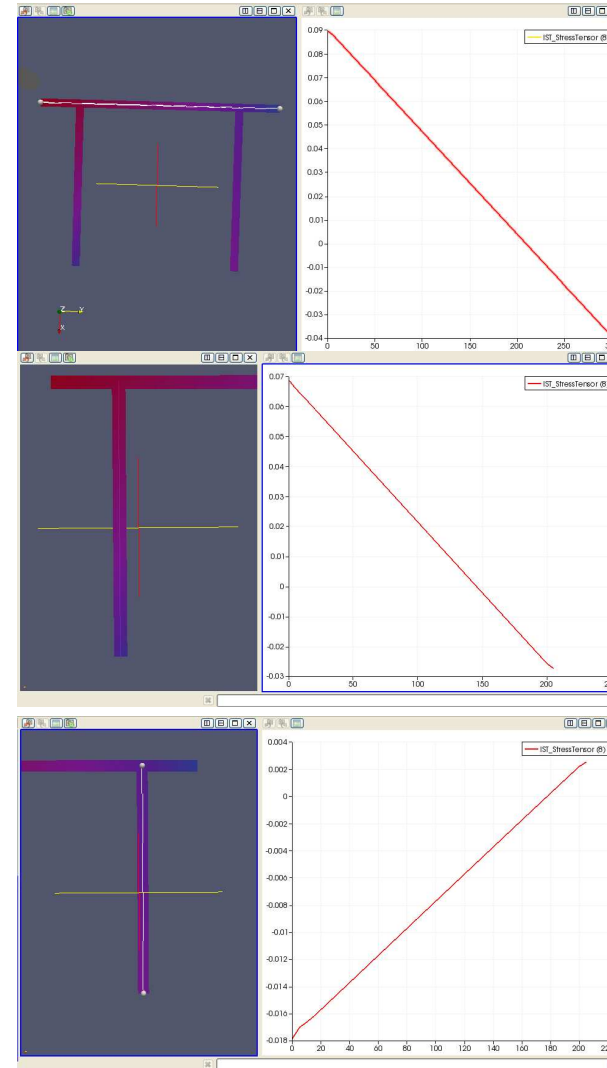
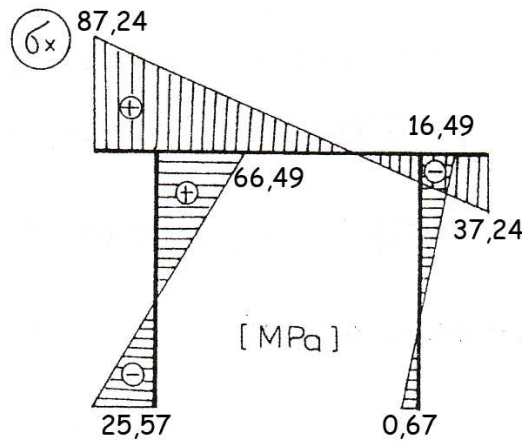
Zhodnocení využití MKP

- Je možno vypočítat skutečné průběhy na konstrukci
 - Problém s omezeností funkcí programů v důsledku používání otevřených verzí
 - Podmínkou je správné zadání vstupních hodnot a následné zpracování výsledků
-

IV. Porovnání výpočtů

Normálové napětí

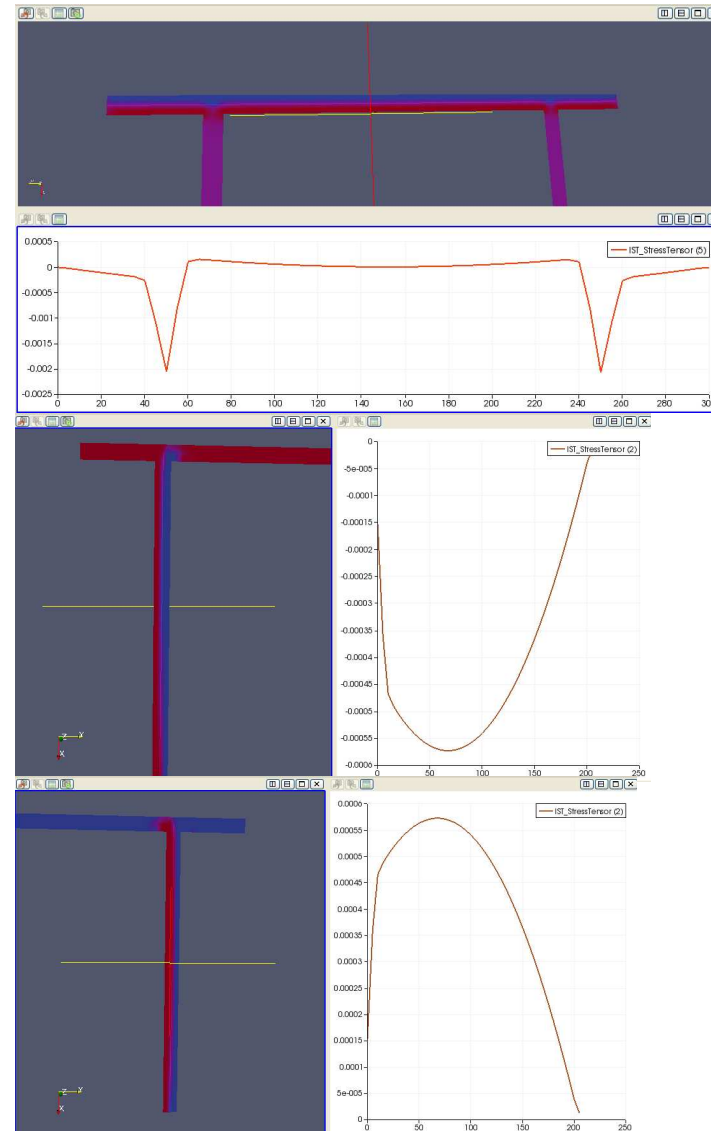
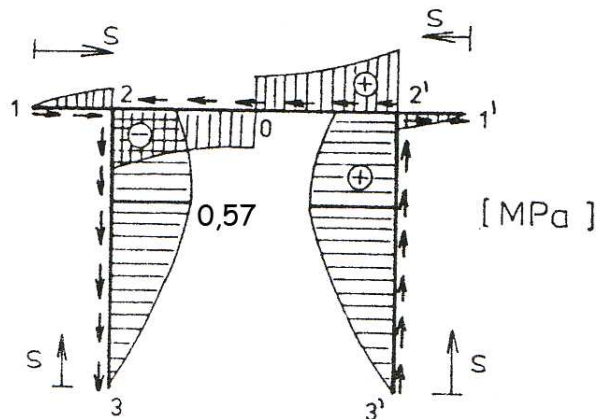
Ruční výpočet σ_{celkem}	MKP σ_{celkem}
87,24	89,52
66,49	68,7
-25,57	-27,28
25	23,29
-37,24	-38,6
-16,49	-17,83
0,67	2,53



IV. Porovnání výpočtů

Ohybové kroucení

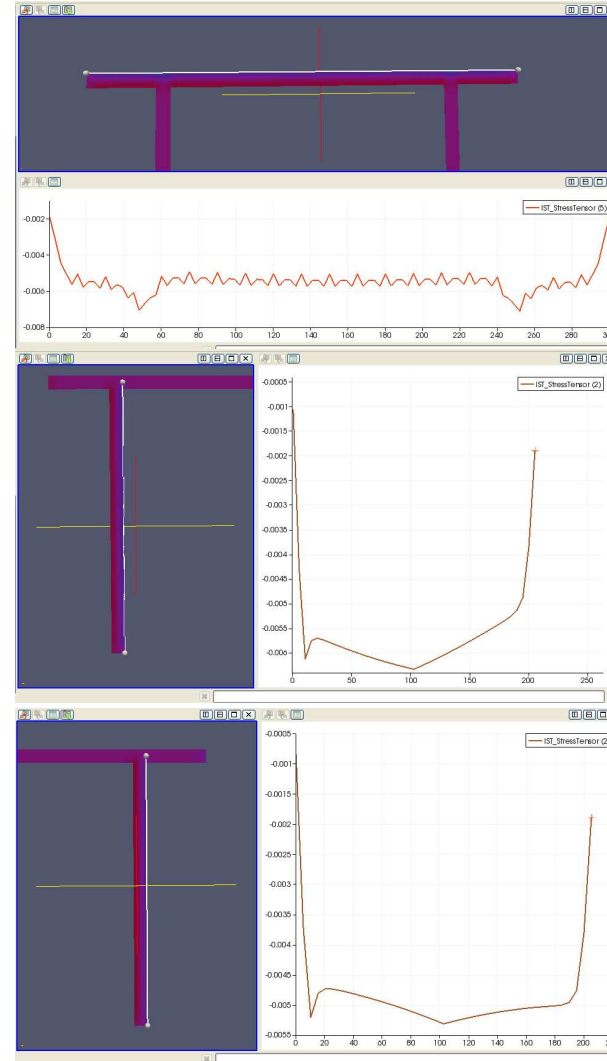
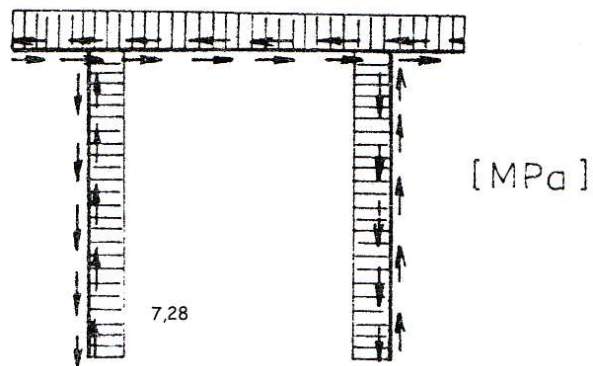
	${}^2T_{xs}$	τ_{xz}	τ_{yz}
1	0	-	-0,00619
2 (1)	0,049	-	-1,0866
2 (3)	-0,44	-0,365	-
2 (0)	-0,39	-	-0,794
max(13)	-0,57	-0,574	-
0	-0,2	-	0,000994
3	0	-0,0126	-



IV. Porovnání výpočtů

Kroucení volné a vázané

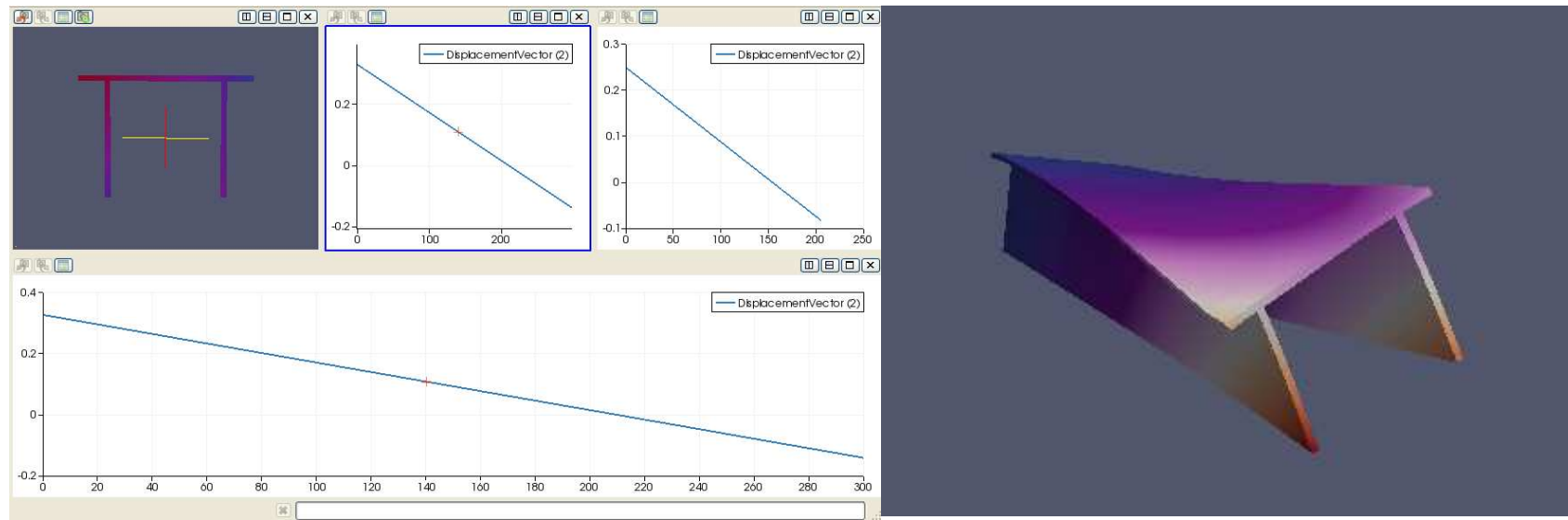
	τ_{xz}	τ_{yz}
1	-	-1,91
2 (1)	-	-6,071
2 (3)	-4,32	-
2 (0)	-	-5,85
max(20)	-6,33	-
0	-	-5,047
3	-1,89	-



IV. Porovnání výpočtů

Posuny

posuny[mm]	Posuny MKP [mm]
0,362	0,326
0,275	0,248
-0,087	-0,073
0,102	0,093
-0,158	-0,132
-0,071	-0,062
-0,065	-0,032



V. Přehled použité literatury

- Šejnoha J., Bittnarová J.: Pružnost, pevnost, plasticita I., ČVUT Praha 1991
 - Bittnarová J., Fajman P., Kalousová M., Šejnoha J.: Pružnost a pevnost 10 – Příklady, ČVUT Praha 1997
 - Vlasov V. Z., Tenkostěnné pružné pruty: Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1962
-

Děkuji za pozornost
