

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta stavební

Diplomová práce

Lokalizační analýza modelů poškození a plasticity

Martin Horák

Vedoucí práce: Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc.

Studijní program: Stavební inženýrství

Obor: Konstrukce a dopravní stavby

červen 2009

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 22.5. 2009

.....

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval Prof. Milanovi Jiráskovi za jeho podporu, trpělivost, rady a inspirace nejen při vypracování této diplomové práce. Rovněž bych chtěl poděkovat rodině a přátelům, kteří mě v mém úsilí po celou dobu podporovali.

Abstrakt

Mechanika poškození je vhodným nástrojem pro modelování materiálů oslabených rozvíjejícími se defekty, např. trhlinami. Lokální modely poškození však neposkytují objektivní popis chování materiálů po ztrátě eliptičnosti, která může být detekována klasickými metodami lokalizační analýzy založenými na singularitě akustického tenzoru. Tato práce se zaměřuje na analýzu lokalizačních vlastností několika modelů izotropního poškození a modelu pro spongiózní kost, který kombinuje izotropní poškození s teorií plasticity. Jsou odvozeny nutné podmínky pro vznik slabých nespojitostí (skoků v poli deformace) a je diskutována orientace potenciální plochy nespojitosti. Výsledky lokalizační analýzy jsou ověřeny numerickými výpočty.

Abstract

Continuum damage mechanics provides an appropriate modeling framework for materials weakened by evolving defects. However, local damage models fail to provide an objective description of the material behavior after the loss of ellipticity, which can be detected by classical methods of localization analysis based on the acoustic tensor. This paper presents analysis of localization properties of several isotropic damage models and of elastic plastic damage model for trabecular bone. Necessary conditions for the formation of a weak discontinuity (jump in strain) are derived and the dependence of the orientation of potential discontinuity surface and of the critical tangent modulus on the stress state is discussed. The results are confirmed by finite element simulations.

Obsah

Seznam obrázků	vii
1 Úvod	1
2 Tenzory a tenzorové operace	2
3 Mechanika poškození	6
3.1 Jednoosý model poškození	6
3.2 Víceosý model poškození s jedním skalárním parametrem	8
3.2.1 Zákon poškození	8
3.2.2 Ekvivalentní deformace	10
3.3 Model Comi–Perego	11
3.4 Mazarsův model poškození	13
4 Plasticita	16
4.1 Jednoosý model plasticity	16
4.2 Jednoosý model plasticity s izotropním zpevněním	17
4.3 Víceosý model plasticity	18
4.3.1 Podmínka plasticity	20
4.3.2 Podmínka plastického přetváření	21
4.3.3 Zpevnění	21
5 Model spongiózní kosti	23
5.1 Tenzor tuhosti	23
5.2 Podmínka plasticity	24
5.3 Zákon zpevnění	26
5.4 Zákon poškození	27
6 Tenzor tečné tuhosti	28
6.1 Modely řízené ekvivalentní deformací	28

6.2	Model Comi–Perego	29
6.3	Mazarsův model	30
6.4	Von Misesova podmínka plasticity	32
6.5	Model spongiózní kosti	33
7	Lokalizace nepružných deformací	34
8	Lokalizační analýza	36
8.1	Lokalizační analýza izotropních modelů poškození	37
8.2	Lokalizační analýza modelů poškození za rovinné napjatosti	39
8.3	Lokalizační analýza von Misesova modelu plasticity	40
9	Výsledky lokalizační analýzy	42
9.1	Modely poškození	42
9.2	Výsledky lokalizační analýzy pro von Misesovu podmínku plasticity . . .	46
9.3	Výsledky lokalizační analýzy pro model spongiózní kosti	48
10	Simulace lokalizace metodou konečných prvků	50
11	Závěr	52

Seznam obrázků

1	Model poškození jako svazek pružných vláken	6
2	Pracovní diagramy pro různé modely poškození	9
3	Obálky pevnosti pro různé definice ekvivalentní deformace v prostoru hlavních napětí	10
4	Typický pracovní diagram pro model Comi–Perego (a) jednoosý tah, (b) jednoosý tlak	13
5	Pracovní diagramy pro Mazarsův model poškození (a) jednoosý tah (b) jednoosý tlak	15
6	Příklady lokalizované nepružné deformace v zemině a betonu	34
7	Módy lokalizace: (a) tahový mód (b) smykový mód	37
8	Výsledky lokalizační analýzy pro Mazarsovu definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání	42
9	Typ módu nespojitosti v závislosti na typu namáhání: (a) Mazarsova definice ekvivalentní deformace, (b) Rankinova definice ekvivalentní deformace	43
10	Výsledky lokalizační analýzy pro Rankinovu definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání	43
11	Výsledky lokalizační analýzy pro upravenou von Misesovu definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání	44
12	Typ módu nespojitosti v závislosti na typu namáhání: upravená von Misesova definice ekvivalentní deformace	44
13	Výsledky lokalizační analýzy pro model Comi–Perego: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost módu lokalizace na typu namáhání	45

14	Výsledky lokalizační analýzy pro Mazarsův model: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) typ módu nespojitosti v závislosti na typu namáhání	46
15	Závislost kritického tečného modulu na typu namáhání: Mazarsův model	46
16	Hodnoty determinantu lokalizačního tenzoru v závislosti na lokalizačním úhlu: von Misesova podmínka plasticity	48
17	Výsledky lokalizační analýzy pro model spongiózní kosti: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) typ módu nespojitosti v závislosti na typu namáhání	49
18	Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků na dvou různých sítích pro (a) Mazarsovu, (b) Rankinovu definici ekvivalentní deformace	50
19	Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků pro upravenou von Misesovu definici ekvivalentní deformace s poměrem pevností (a) $k = 1$, (b) $k = 10$	50
20	Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků pro Mazarsovu definici ekvivalentní deformace s Poissonovým součinitelem (a) $\nu = 0$, (b) $\nu = 0.5$	51
21	Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků : mód nespojitosti při Poissonově součiniteli (a) $\nu = 0$, (b) $\nu = 0.5$	51

1 Úvod

Pro popis porušování kvazikřehkých materiálů, jako je například beton, je potřeba konstitutivní zákon se změkčením. Jak je známo, změkčení může vést k lokalizaci nepružné deformace. Pro tradiční modely mechaniky kontinua může docházet k nerealistickým jevům, jako je lokalizace do libovolně malých zón, při kterých se disipovaná energie blíží k nule. Tyto výsledky nejsou fyzikálně přijatelné. Další obtíže nastávají při numerickém řešení metodou konečných prvků, neboť výsledky velmi silně závisejí na počtu prvků, hovoříme o tzv. "patologické závislosti" řešení na počtu konečných prvků. Z matematického hlediska máme úlohu s eliptickým operátorem, ale změkčování vede ke ztrátě eliptičnosti. Ztráta eliptičnosti má za následek nejednoznačnost řešení, ze kterého vyplývají již zmíněné nesrovnalosti. Je tedy velice důležité vědět, v jakých případech jsou modely mechaniky poškození schopné objektivně popsat reálné chování materiálu. Z tohoto důvodu je vhodné se zabývat podmínkami, za kterých dochází k lokalizaci nepružné deformace.

Hlavním cílem této práce je zjistit nutné podmínky pro vznik slabých nespojitostí

1. pro modely izotropního poškození

- s jedním skalárním parametrem poškození a s různými definicemi ekvivalentní deformace (Mazarsova definice, Rankinova definice, upravená von Misesova definice),
- se dvěma skalárními parametry, který pro beton navrhli Comi a Perego.
- se dvěma skalárními parametry, který pro beton navrhl Mazars.

2. pro model spongiózní kosti, který kombinuje teorii plasticity a mechaniku poškození.

2 Tenzory a tenzorové operace

Mnoho veličin v inženýrské mechanice má charakter tenzorů, proto na úvod této práce definujeme základní vztahy a operace s tenzory. Dále se budeme setkávat s tenzory nultého řádu (skaláry), tenzory prvního řádu (vektory), tenzory 2. řádu a tenzory 4. řádu. Pokud není řečeno jinak, skalární veličiny jsou značeny malými písmeny, stejně jako vektory, ty však budou odlišeny tučným písmem. Tenzory 2. řádu budou značeny tučným řeckým písmem a tenzory 4. řádu velkým tučným písmem. Řád tenzoru udává, kolik má tenzor komponent. Například a je tenzor 0. řádu, má tedy pouze jednu složku, \mathbf{u} je vektor posunutí se složkami u_i , $i = 1, 2, 3$; $\boldsymbol{\varepsilon}$ značí tenzor deformace se složkami ε_{ij} , $i = 1, 2, 3$ a $j = 1, 2, 3$; symbolem \mathbf{D}_e označíme tenzor pružné tuhosti, což je tenzor 4. řádu se složkami D_{ijkl}^e , kde všechny indexy i, j, k, l jdou od 1 do 3. Transpozici tenzoru 2. řádu obdržíme, pokud prohodíme složku i za složku j . Tedy $(\boldsymbol{\varepsilon}^T)_{ij} = \varepsilon_{ji}$, pokud $(\boldsymbol{\varepsilon}^T)_{ij} = \varepsilon_{ij}$, označíme tenzor $\boldsymbol{\varepsilon}$ za symetrický. Tenzor 4. řádu může vykazovat dva druhy symetrie, tzv. malou symetrii a velkou symetrii. Pokud tenzor 4. řádu vykazuje malou symetrii, můžeme mezi sebou zaměňovat první dva indexy, aniž by se tenzor změnil, obdobně pro druhé dva indexy: $D_{ijkl}^e = D_{jikl}^e = D_{ijlk}^e = D_{jilk}^e$. Tenzor vykazuje velkou symetrii, pokud $D_{ijkl}^e = D_{klij}^e$. V celém textu je využíváno Einsteinova sumačního pravidla, to znamená, že sčítáme přes indexy, které se opakují. Dále budeme potřebovat tyto základní tenzorové operace:

- Skalární součin dvou tenzorů prvního řádu, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i$. Výsledkem je skalár, neboť podle Einsteinova sumačního pravidla $u_i v_i = \sum_i u_i v_i$.
- Dvojitá kontrakce dvou tenzorů druhého řádu, $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$, výsledný tenzor je nultého řádu, neboť sčítáme přes oba indexy i, j .
- Jednoduchá kontrakce dvou tenzorů druhého řádu, $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})_{ik} = \sigma_{ij} \varepsilon_{jk}$, výsledkem je tenzor 2. řádu.
- Jednoduchá kontrakce tenzoru druhého řádu s tenzorem prvního řádu $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_i = \sigma_{ij} n_j$, vznikne tenzor 1. řádu.

- Dvojitá kontrakce tenzoru druhého řádu s tenzorem čtvrtého řádu, $(\mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon})_{ij} = D_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}$, výsledný tenzor je 2. řádu.
- Tenzorový (vnější) součin dvou tenzorů druhého řádu, $(\boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\sigma})_{ijkl} = \eta_{ij} \sigma_{kl}$, touto operací dostaneme tenzor čtvrtého řádu.

Velice důležitým a používaným tenzorem druhého řádu je Kroneckerovo delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

Zavedeme jednotkový tenzor 4. řádu \mathbf{I} se složkami $\delta_{ij}\delta_{kl}$, tento tenzor vykazuje velkou symetrii a má důležitou vlastnost $\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon}$. Někdy je lepší pracovat se symetrisovaným jednotkovým tenzorem 4. řádu $\mathbf{I}_s = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, který vykazuje velkou i malou symetrii.

Pro další použití uvedeme strukturu tenzoru pružné tuhosti, což je tenzor 4. řádu

$$\mathbf{D}_e = \Lambda \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{I}_s \quad (2)$$

kde Λ a μ jsou materiálové charakteristiky zvané Lamého konstanty. Tenzor pružné tuhosti můžeme vyjádřit také pomocí jiných materiálových konstant, jako je Youngův modul E , Poissonovo číslo ν , nebo objemový modul K a smykový modul G :

$$\Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = K - \frac{2}{3}G \quad (3)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

Nyní můžeme zapsat Hookeův zákon

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon} = \Lambda(\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta}) : \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \mathbf{I}_s : \boldsymbol{\varepsilon} = 3\Lambda \boldsymbol{\delta} \varepsilon_V + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napětí a $\varepsilon_V = \frac{1}{3}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\delta}$ představuje objemovou část tenzoru deformace. Tenzor deformace můžeme rozložit na objemovou a deviatorickou část. Objemová část je svázána se změnou objemu, zatímco deviatorická část je spojena se změnou tvaru. Deviatorickou část označíme \mathbf{e}

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_V \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\mathbf{I}_s - \frac{1}{3}\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \right) : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}_D : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

Zde jsme zavedli tenzor deviatorické projekce

$$\mathbf{I}_D = \mathbf{I}_s - \frac{1}{3}\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \quad (7)$$

Obdobně definujeme tenzor volumetrické projekce

$$\mathbf{I}_V = \frac{1}{3}\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \quad (8)$$

Rozložení tenzoru deformace můžeme nyní provést pomocí tenzorů deviatorické a volumetrické projekce:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}_s : \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I}_V + \mathbf{I}_D) : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}_V : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{I}_D : \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_V \boldsymbol{\delta} + \mathbf{e} \quad (9)$$

Obdobně lze rozložit tenzor napětí

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{I}_s : \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{I}_V + \mathbf{I}_D) : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{I}_V : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{I}_D : \boldsymbol{\sigma} = \sigma_V \boldsymbol{\delta} + \mathbf{s} \quad (10)$$

kde $\sigma_V = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\delta}$ je střední napětí a $\mathbf{s} = \mathbf{I}_D : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_V \boldsymbol{\delta}$ je deviatorické napětí. Veličiny jako je funkce plasticity či funkce poškození musejí být nezávislé na lokálním souřadnicovém systému, ve kterém je vyhodnocujeme, musejí tedy záviset na tzv. invariantech, což jsou veličiny nezávislé na souřadnicovém systému. Pro tento účel zavedeme první invariant a druhý deviatorický invariant napětí a deformace. První invariant je definován jako stopa tenzoru

$$I_1 = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\delta} = \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\sigma_V \quad (11)$$

obdobně pro tenzor deformace

$$I_{1,\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\delta} = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3\varepsilon_V \quad (12)$$

a druhý deviatorický invariant

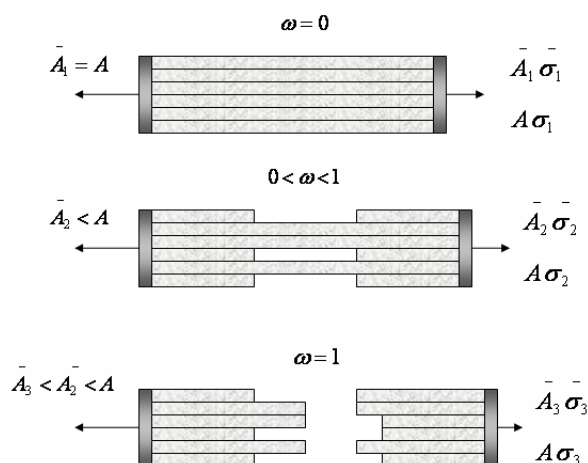
$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \end{aligned} \quad (13)$$

analogicky pro tenzor deformace

$$\begin{aligned} J_{2,\varepsilon} &= \frac{1}{2} \mathbf{e} : \mathbf{e} = \frac{1}{6} [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2] + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2] \end{aligned} \quad (14)$$

3 Mechanika poškození

3.1 Jednoosý model poškození



Obrázek 1: Model poškození jako svazek pružných vláken

Pro lepší pochopení si můžeme materiál představit jako svazek vláken, která se chovají pružně až po dosažení jisté meze, poté křehce praskají. Jelikož tato mez je pro různá vlákna různá, zavedeme efektivní plochu \bar{A} , která vyjadřuje plochu vláken, která nepraskla. Musíme tedy rozlišovat jak mezi nominální plochou A a efektivní plochou \bar{A} , tak mezi nominálním napětím σ , definovaným jako síla vztažená na nominální plochu A , a efektivním napětím $\bar{\sigma}$, definovaným jako síla vztažená na efektivní plochu \bar{A} . Efektivní napětí vypočítáme z Hookeova zákona

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon. \quad (15)$$

Zcela zřejmá je rovnost

$$\bar{\sigma}\bar{A} = \sigma A. \quad (16)$$

Parametr poškození zavedeme jako

$$\omega = \frac{A - \bar{A}}{A} \quad (17)$$

Spojením rovnic (15), (16) a (17) dostáváme

$$\sigma = (1 - \omega)E\varepsilon \quad (18)$$

I když poškození definujeme parametrem, ve skutečnosti se nejedná o neměnnou veličinu, ale o veličinu, která se vyvíjí a nabývá hodnot od 0, což značí nepoškozený materiál, až do 1, tedy materiál úplně poškozený. Vývoj poškození lze charakterizovat tzv. zákonem poškození, který udává, jak se poškození mění v závislosti na deformaci. Parametr poškození nezávisí přímo na okamžité hodnotě deformace, ale na maximální hodnotě, které bylo dosaženo během zatěžování. Je výhodné zavést vnitřní proměnnou $\kappa = \max_{\tilde{t} \leq t} \varepsilon(\tilde{t})$, kde t značí čas, ve kterém ω zjišťujeme, a \tilde{t} probíhá všechny předchozí časy. Tato vnitřní veličina nám zajišťuje, že se parametr poškození nemůže zmenšovat, přestože dochází k odtěžování. Nyní můžeme zapsat funkci poškození

$$f(\varepsilon, \kappa) = \varepsilon - \kappa \quad (19)$$

a zatěžovací-odtěžovací podmínky jednoosého modelu poškození

$$f(\varepsilon, \kappa) \leq 0 \quad \dot{\kappa} \geq 0 \quad \dot{\kappa} f(\varepsilon, \kappa) = 0 \quad (20)$$

První podmínka značí přípustné stavy deformace, druhá určuje, že poškození může pouze růst. Podle třetí podmínky může poškození růst jen pokud je $\kappa = \varepsilon$, nazveme ji podmínkou komplementarity.

3.2 Víceosý model poškození s jedním skalárním parametrem

Tato skupina modelů je popsána konstitutivním vztahem

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega)\mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (21)$$

který je zobecněním rovnice (18), přitom $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napětí, $\boldsymbol{\varepsilon}$ je tenzor deformace, \mathbf{D}_e je tenzor pružné tuhosti a ω je vnitřní proměnná popisující poškození. Rozvoj poškození je řízen zákonem poškození

$$\omega = g(\kappa) \quad (22)$$

a zatěžovacími–odtěžovacími podmínkami

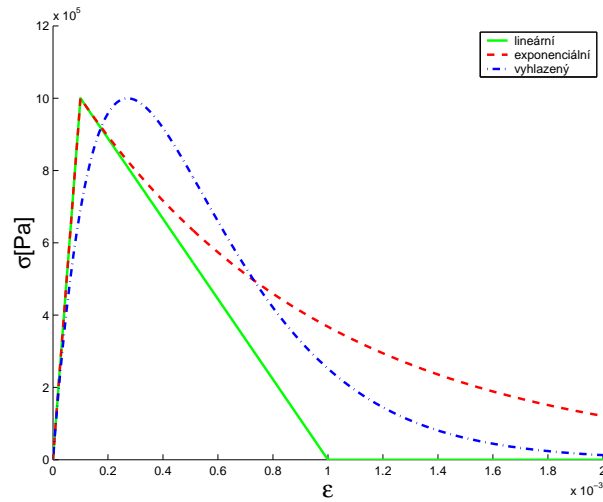
$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) \equiv \varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \kappa \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa)\dot{\kappa} = 0 \quad (23)$$

kde f je zatěžovací funkce, g je funkce poškození související s tvarem pracovního diagramu pro jednoosou napjatost, ε_{eq} je ekvivalentní deformace (tj. skalární míra hladiny dosažené deformace) a vnitřní proměnná κ představuje maximální hodnotu ekvivalentní deformace dosaženou v dosavadním průběhu deformačního procesu. Konkrétní volba výrazu pro ekvivalentní deformaci silně ovlivňuje tvar obálky pevnosti a také lokalizační vlastnosti modelu, jak bude předvedeno později.

3.2.1 Zákon poškození

Pokud chceme, aby zákon poškození odpovídal skutečnému chování materiálů, můžeme vyjít z pracovního diagramu jednoosé tahové zkoušky. Zde zmíníme tři typy zákona poškození.

Při použití lineárního zákona poškození dostáváme jak vzestupnou, tak sestupnou část pracovního diagramu lineární. Vztah pro poškození zapíšeme



Obrázek 2: Pracovní diagramy pro různé modely poškození

$$g(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq \kappa \leq \varepsilon_0, \\ \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f - \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\kappa}\right) & \text{pro } \varepsilon_0 \leq \kappa \leq \varepsilon_f, \\ 1 & \text{pro } \varepsilon_f \leq \kappa. \end{cases} \quad (24)$$

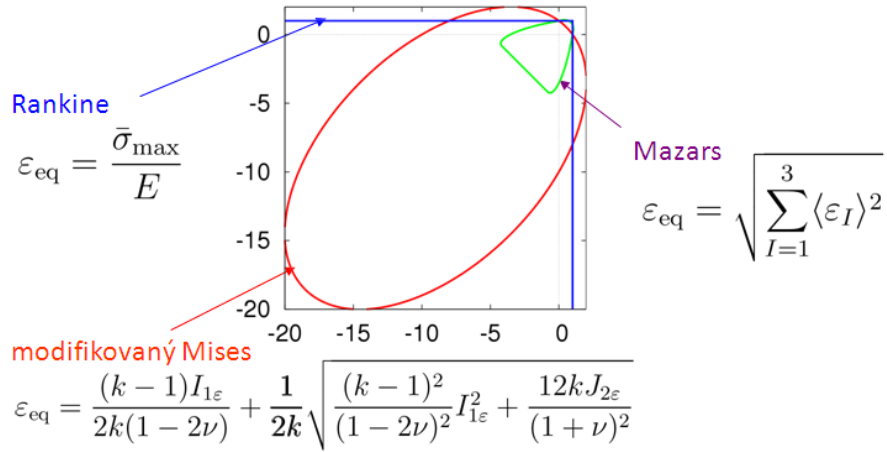
Zde je ε_0 deformace při dosažení meze pevnosti a ε_f značí deformaci při úplném poškození.

U exponenciálního zákona poškození se materiál chová pružně až po dosažení meze pevnosti, poté napětí klesá exponenciálně při zvyšující se deformaci:

$$g(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq \kappa \leq \varepsilon_0, \\ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\kappa} e^{-\frac{\kappa - \varepsilon_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0}} & \text{pro } \varepsilon_0 < \kappa. \end{cases} \quad (25)$$

Pokud dochází k rozvoji defektů již krátce po začátku zatěžování, zvolíme vyhlazený zákon poškození,

$$g(\kappa) = 1 - e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon_0}} \quad (26)$$



Obrázek 3: Obálky pevnosti pro různé definice ekvivalentní deformace v prostoru hlavních napětí

3.2.2 Ekvivalentní deformace

Uvedeme zde tři definice ekvivalentní deformace, u kterých budeme dále zkoumat lokalizační vlastnosti. Pro další výpočty využijeme i derivaci ekvivalentní deformace podle tenzoru deformace, kterou označíme jako $\boldsymbol{\eta}$.

- Mazarsova ekvivalentní deformace

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \varepsilon_I \rangle^2} \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{\varepsilon_{eq}} \quad (28)$$

ε_I je I-tá hlavní deformace a $\langle x \rangle$ značí kladnou hodnotu x .

- Rankinova ekvivalentní deformace

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\bar{\sigma}_1}{E} \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{E} \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{E} (\mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1) : \mathbf{D}_e = \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \boldsymbol{\delta} + \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 \right) \quad (30)$$

$\bar{\sigma}_1$ je největší hlavní napětí a \mathbf{p}_1 příslušný hlavní směr. E a ν jsou pružnostní konstanty.

- upravená von Misesova ekvivalentní deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eq} = \frac{(k-1)I_{1\varepsilon}}{2k(1-2\nu)} + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{1\varepsilon}^2 + \frac{12kJ_{2\varepsilon}}{(1+\nu)^2}} \quad (31)$$

Přitom $I_{1\varepsilon} = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ a $J_{2\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{e} : \mathbf{e}$, kde \mathbf{e} značí deviatorickou část deformace. Při derivaci von Misesovy ekvivalentní deformace využijeme vztahů

$$\frac{\partial I_{1\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\delta}, \quad \frac{\partial J_{2\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{e}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} \boldsymbol{\delta} + \frac{\frac{2(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{1\varepsilon} \boldsymbol{\delta} + \frac{12k}{(1+\nu)^2} \mathbf{e}}{4k \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{1\varepsilon}^2 + \frac{12kJ_{2\varepsilon}}{(1+\nu)^2}}} \quad (32)$$

3.3 Model Comi–Perego

Tento izotropní model se dvěma parametry poškození je vhodný pro popis betonu. Podle něj je objemový modul pružnosti K redukován faktorem $(1 - \omega_t)(1 - \omega_c)$, pokud je objemová část deformace $I_{1\varepsilon} = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ kladná, respektive $(1 - \omega_c)$, pokud je záporná. Smykový modul G je vždy redukován faktorem $(1 - \omega_t)(1 - \omega_c)$. Vztah mezi napětím a deformací je vhodné rozdělit na objemové a tvarové změny:

$$\sigma_V = (1 - \omega_c)K [(1 - \omega_t)\langle I_{1\varepsilon} \rangle - \langle -I_{1\varepsilon} \rangle] \quad (33)$$

$$\mathbf{s} = (1 - \omega_t)(1 - \omega_c)2G\mathbf{e} \quad (34)$$

Přitom $\sigma_V = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$ je střední (hydrostatické) napětí, \mathbf{s} je deviatorická část tenzoru napětí a \mathbf{e} je deviatorická část tenzoru deformace. Výraz $\langle I_{1\varepsilon} \rangle$ značí kladnou část objemové deformace a $\langle -I_{1\varepsilon} \rangle$ její zápornou část. Pro $I_{1\varepsilon} > 0$ můžeme rovnice (33) a (34)

přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega_t) \mathbf{D}_e^c : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (35)$$

kde

$$\mathbf{D}_e^c = \left(K - \frac{2}{3}G^c\right) \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} + 2G^c \mathbf{I}_s \quad (36)$$

je tenzor sečné tuhosti, $G^c = (1 - \omega_c)G$ je smykový modul redukovaný tlakovým poškozením, \mathbf{I}_s je symetrický jednotkový tenzor 4. řádu.

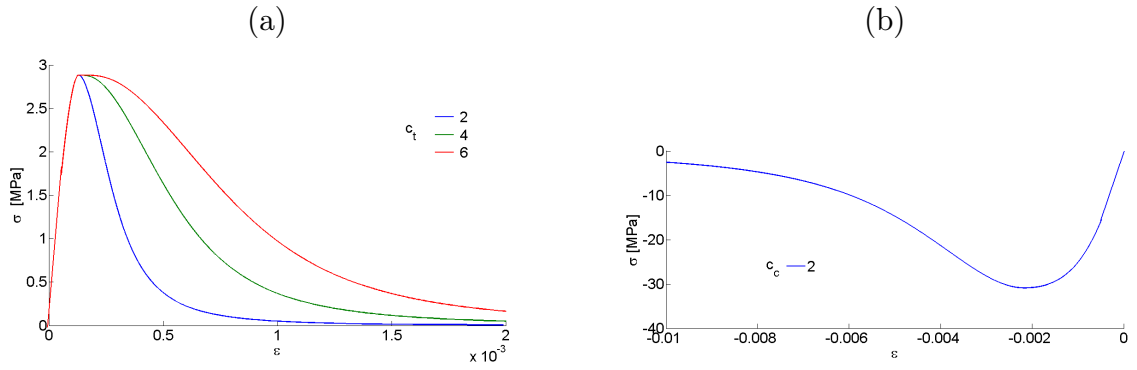
Na rozdíl od předešlých modelů nejsou parametry poškození přímo závislé na ekvivalentní deformaci, ale jejich vývoj je určen složitější zatěžovací funkcí. Každý parametr poškození je sdružený s jinou zatěžovací funkcí, takže vývoj tahového a tlakového poškození je nezávislý. Zatěžovací funkce byly původně definovány v prostoru napětí, ale po dosazení z rovnic (33)–(34) je lze přepsat v závislosti na deformaci a poškození:

$$\begin{aligned} f_t(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) = & 4(1 - \omega_t)^2(1 - \omega_c)^2 G^2 J_{2\varepsilon} - 9K^2 a_t [(1 - \omega_t)^2 \langle I_{1\varepsilon} \rangle^2 + (1 - \omega_c)^2 \langle -I_{1\varepsilon} \rangle^2] \\ & + 3K b_t r_t(\omega_t) [(1 - \omega_t) \langle I_{1\varepsilon} \rangle - (1 - \omega_c) \langle -I_{1\varepsilon} \rangle] - (1 - \alpha \omega_c) k_t r_t^2(\omega_t) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} f_c(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) = & 4(1 - \omega_t)^2(1 - \omega_c)^2 G^2 J_{2\varepsilon} + 9K^2 a_c [(1 - \omega_t)^2 \langle I_{1\varepsilon} \rangle^2 + (1 - \omega_c)^2 \langle -I_{1\varepsilon} \rangle^2] \\ & + 3K b_c r_c(\omega_c) [(1 - \omega_t) \langle I_{1\varepsilon} \rangle - (1 - \omega_c) \langle -I_{1\varepsilon} \rangle] - k_c r_c^2(\omega_c) \end{aligned} \quad (38)$$

kde $\alpha, a_t, a_c, b_t, b_c, k_t$ a k_c jsou nezáporné parametry a r_t a r_c jsou bezrozměrné funkce, které souvisejí s tvarem pracovního diagramu v jednoosém tahu a jednoosém tlaku. Případy, kdy obě funkce poškození nabývají záporných hodnot, odpovídají pružnému stavu a poškození zůstává konstantní. Jakmile je dosaženo hodnoty $f_t = 0$, materiál se začne poškozovat v tahu a ω_t začne růst. Obdobně ω_c roste, pokud je $f_c = 0$. Kladné hodnoty zatěžovacích funkcí jsou nepřijatelné. To vše lze popsat podmínkami

$$f_t(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \leq 0, \quad \dot{\omega}_t \geq 0, \quad f_t(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \dot{\omega}_t = 0 \quad (39)$$



Obrázek 4: Typický pracovní diagram pro model Comi–Perego (a) jednoosý tah, (b) jednoosý tlak

$$f_c(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \leq 0, \quad \dot{\omega}_c \geq 0, \quad f_c(\boldsymbol{\varepsilon}, \omega_t, \omega_c) \dot{\omega}_c = 0 \quad (40)$$

Jak již bylo zmíněno, tvar pracovního diagramu závisí na bezrozměrných funkcích r_t a r_c . Jejich konkrétní podoba, kterou navrhli Comi a Perego, je

$$r_i(\omega_i) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{\sigma_{ei}}{\sigma_{0i}}\right) \left(1 - \frac{\omega_i}{\omega_{0i}}\right)^2 & \text{pro } \omega_i < \omega_{0i} \\ \left[1 - \left(\frac{\omega_i - \omega_{0i}}{1 - \omega_{0i}}\right)^{c_i}\right]^{0.75} & \text{pro } \omega_i \geq \omega_{0i} \end{cases} \quad i = t, c \quad (41)$$

Přitom index i nabývá hodnot t nebo c , σ_{ei} představuje mezní pružné napětí (mez úměrnosti), σ_{0i} je maximální napětí na vrcholu pracovního diagramu (pevnost), ω_{0i} je odpovídající poškození a c_i je bezrozměrný parametr.

3.4 Mazarsův model poškození

Dalším příkladem modelu poškození se dvěma skalárními parametry ω_t a ω_c , který byl navržen pro beton, je Mazarsův model. Oba parametry poškození jsou počítány ze stejné ekvivalentní deformace (27), ale z jiných funkcí poškození g_t a g_c . Funkci g_t je možné identifikovat z jednoosé tahové zkoušky, zatímco g_c se stanoví ze zkoušky tlakové. Pro obecné zatížení je celkové poškození dáno lineární kombinací poškození tlakového a tahového

$$\omega = \alpha_t \omega_t + \alpha_c \omega_c \quad (42)$$

kde koeficienty α_t a α_c vyjadřují vliv konkrétního stavu napjatosti. Tyto parametry jsou dány vztahy

$$\alpha_t = \left(\sum \frac{\varepsilon_{tI} \langle \varepsilon_I \rangle}{\tilde{\varepsilon}} \right)^\beta \quad \alpha_c = \left(1 - \sum \frac{\varepsilon_{tI} \langle \varepsilon_I \rangle}{\tilde{\varepsilon}} \right)^\beta \quad (43)$$

přičemž výraz ε_{tI} má význam I-té hlavní deformace vypočítané z kladné části příslušného hlavního napětí. Je to tedy vlastní hodnota deformace

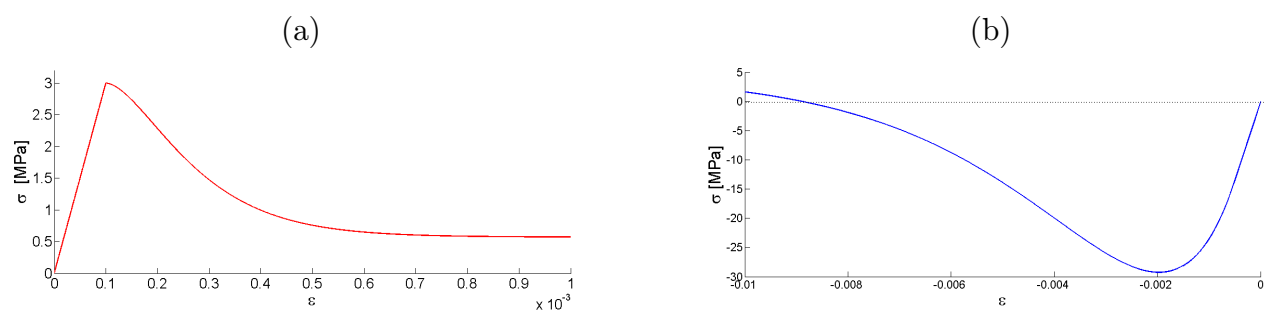
$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{C}_e : \langle \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (44)$$

kde \mathbf{C}_e je tenzor pružné poddajnosti. V původním Mazarsově modelu byl použit exponent $\beta = 1$, v současné době se používá $\beta = 1.06$ z důvodu snížení poškození při smyku. Pokud jsou tedy všechna hlavní napětí nezáporná, platí $\alpha_t = 1$, $\alpha_c = 0$, dostáváme čistě tahový stav zatížení a $\omega = \omega_t$. Naopak při čistě tlakovém stavu, kdy jsou všechny hlavní hodnoty tenzoru napětí záporné a $\alpha_t = 0$, $\alpha_c = 1$, se poškození vypočítá jako $\omega = \omega_c$. Pro obecný případ zatížení je poškození ω mezi ω_t a ω_c , v závislosti na poměru kladných a záporných hlavních hodnot tenzoru napětí. Ještě je třeba uvést funkce poškození. Původní funkce, které popisují vývoj poškození, jsou

$$g_t(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \kappa \leq \varepsilon_0, \\ 1 - (1 - A_t) \frac{\varepsilon_0}{\kappa} - A_t e^{-B_t(\kappa - \varepsilon_0)} & \text{pro } \kappa \geq \varepsilon_0 \end{cases} \quad (45)$$

$$g_c(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \kappa \leq \varepsilon_0, \\ 1 - (1 - A_c) \frac{\varepsilon_0}{\kappa} - A_c e^{-B_c(\kappa - \varepsilon_0)} & \text{pro } \kappa \geq \varepsilon_0 \end{cases} \quad (46)$$

kde ε_0 má význam ekvivalentní deformace při dosažení meze úměrnosti a A_t , B_t , A_c , B_c jsou parametry, které charakterizují tvar pracovního diagramu při jednoosém namáhání. Typické hodnoty parametrů jsou $\varepsilon_0 = 10^{-4}$, $A_t = 0.81$, $B_t = 10450$, $A_c = 1.34$ a $B_c = 2537$. Funkce g_t a g_c dávají dobrou aproximaci pracovního diagramu pouze před vrcholem a krátce za vrcholem pracovního diagramu.



Obrázek 5: Pracovní diagramy pro Mazarsův model poškození (a) jednoosý tah (b) jednoosý tlak

4 Plasticita

Teorie plasticity se zabývá přetvárnými procesy materiálů, při kterých dochází k trvalým deformacím.

4.1 Jednoosý model plasticity

Obdobně jako v mechanice poškození začneme nejdříve s jednoosým modelem plasticity, který později zobecníme. Základem takového modelu je ideálně plastický článek postihující nevratnou část deformace, která je způsobená plastickým pokluzem. Jedinou materiálovou vlastností plastického článku je mez kluzu, jež má význam napětí, při němž dochází k neomezenému plastickému přetváření za konstantního napětí. Pokud této meze není dosaženo, k deformaci nedochází. Jelikož ve skutečných materiálech dochází také k elastické deformaci, plastický článek nám k popisu skutečného chování nestačí. Musíme tedy připojit článek, který odpovídá pružnému přetváření. Takovému článku odpovídá pružina s modulem pružnosti E . Pokud se omezíme na teorii malých deformací, můžeme celkovou deformaci rozložit na pružnou a plastickou část. Dostáváme tzv. aditivní rozklad deformace

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (47)$$

Tím se dostáváme k ideálně pružnoplastickému modelu, který získáme sériovým zapojením pružiny a plastického článku. Při tomto zapojení je napětí v obou člancích stejné a odpovídá celkovému napětí σ . Konstitutivní vztah má tvar

$$\sigma = E\varepsilon_e \quad (48)$$

Zavedeme funkci plasticity

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_0 \quad (49)$$

V tomto výrazu má σ_0 význam meze kluzu. Pokud

$$f(\sigma) < 0 \quad (50)$$

k plastickému přetváření nedochází a materiál se chová jako pružný. K plastickému přetváření může docházet pouze pokud

$$f(\sigma) = 0 \quad (51)$$

Hodnoty, pro které je funkce plasticity kladná, jsou nepřipustné, neboť by to znamenalo, že materiál může přenášet větší napětí, než je mez kluzu. Definujeme ještě zákon plastického přetváření. Tento zákon určuje, ve kterém směru narůstá plastická deformace

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \operatorname{sgn} \sigma \quad (52)$$

V případě, že je rychlost deformace nenulová, musí mít stejné znaménko jako napětí. Poslední tři rovnice můžeme přepsat do tvaru

$$f(\sigma) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\lambda} f(\sigma) = 0 \quad (53)$$

První podmínka určuje přípustné stavy funkce plasticity, druhá říká, že plastická deformace může během zatěžování pouze růst a třetí je podmínkou komplementarity, což znamená, že případy $\dot{\lambda} > 0$ a $f(\sigma) < 0$ se vylučují, neboť $\dot{\lambda} > 0$ znamená plastické přetváření a $f(\sigma) < 0$ pružné chování.

4.2 Jednoosý model plasticity s izotropním zpevněním

V případě jednoosé napjatosti rozumíme zpevněním postupnou změnu okamžité meze kluzu v průběhu plastického přetváření. Základními dvěma typy zpevnění jsou zpevnění kinematické a izotropní. Pro jednoosý model je plasticky přípustnou oblastí interval, který se při kinematickém zpevnění posouvá, ale jeho velikost zůstává zachována, zatímco při izotropním zpevnění se zvětšuje, ale střed zůstává v počátku. Zaměříme se především na izotropní zpevnění. Pro tento typ zpevnění je podstatné, že na zpevnění má vliv velikost přírůstků plastické deformace, nikoli jejich znaménko. Okamžitou mez kluzu

nelze vztáhnout k okamžité hodnotě plastické deformace. Abychom popsali tento proces, zavedeme vnitřní proměnnou, tzv. kumulovanou plastickou deformaci κ , která vznikne sečtením všech přírůstků plastické deformace. Vztah mezi rychlostí přírůstku kumulované plastické deformace a rychlostí plastické části deformace je

$$\dot{\kappa} = |\dot{\varepsilon}| \quad (54)$$

Vývoj kumulované plastické deformace v čase t získáme integrací

$$\kappa(t) = \int_0^t |\dot{\varepsilon}(\tau)| d\tau \quad (55)$$

Okamžitá hodnota meze kluzu poté závisí na okamžité hodnotě kumulované plastické deformace. Například volbou

$$\sigma_Y = \sigma_0 + \kappa H \quad (56)$$

dostáváme model s lineárním kinematickým zpevněním. Funkci plasticity přepíšeme

$$f(\sigma, \kappa) = |\sigma| - \sigma_Y(\kappa) \quad (57)$$

4.3 Víceosý model plasticity

Přechod od jednoosého modelu k víceosému je velice přímočarý. Základní rovnice mají v tomto případě tvar

- Aditivní rozklad tenzoru deformace na pružnou a plastickou část (pokud se omezíme na teorii malých deformací)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (58)$$

- Vztah mezi napětím a pružnou částí deformace

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (59)$$

- Funkce plasticity

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y(\kappa) \quad (60)$$

- Podmínka plastické přípustnosti

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \leq 0 \quad (61)$$

- Zákon plastického přetváření

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \quad (62)$$

- Zákon izotropního zpevnění (změkčení)

$$\sigma_Y(\kappa) = \sigma_0 + h(\kappa) \quad (63)$$

Ve víceosém případě funkce plasticity definuje plochu plasticity, ta se může v průběhu zatěžování posouvat, zvětšovat, zmenšovat, či obecně měnit svůj tvar, to vše v závislosti na vývoji parametru zpevnění. K plastickému přetváření může docházet, jen když je materiál v plastickém stavu, což vyjádříme podmínkou

$$\dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (64)$$

Pokud je tedy materiál v pružném stavu, t.j. $f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) < 0$, musí přírůstek plastického násobitele zůstat nulový, $\dot{\lambda} = 0$, a z toho vyplývá, že i přírůstek plastické části deformace a parametru zpevnění jsou nulové. Nastane-li plastický stav, $f = 0$, který na parametr $\dot{\lambda}$ neklade žádná omezení, plastická část deformace se však během zatěžování nemůže zmenšovat, z čehož dostáváme podmínku $\dot{\lambda} \geq 0$. Shrňme-li tyto podmínky, dostáváme tzv. zatěžovací–odtěžovací podmínky, obdobné jako pro jednoosý případ:

$$f \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (65)$$

Pokud je materiál v plastickém stavu, může docházet ke dvěma případům. Materiál se může pružně odtěžovat, nebo plasticly přetvářet. Jak již bylo několikrát zmíněno, pokud je materiál v plastickém stavu, musí platit $f = 0$. Aby však docházelo k plastickému přetváření, musí být i přírůstek funkce plasticity nulový a zároveň rychlost plastického násobitele musí být kladná.

$$\dot{\lambda}f = 0 \quad (66)$$

4.3.1 Podmínka plasticity

Podmínkami plasticity se zde nebudeme příliš zabývat. Zmíníme pouze von Misesovu podmínku plasticity, která patří k nejčastěji používaným a je vhodná především pro materiály, ve kterých dochází k plastickému přetváření pokluzem podél krystalografických rovin. Takovými materiály jsou především kovy. Fyzikálně lze tuto podmínku plasticity interpretovat tak, že k plastickému přetváření dochází v případě, kdy energie uložená v materiálu dostoupila kritické hodnoty. Jelikož je plastický pokluz v ideálním krystalu mechanismem, který vede pouze ke změně tvaru, ale nikoli ke změně objemu, nekoná hydrostatická část napětí při takovém stavu práci. Z tohoto důvodu nemůže podmínka plasticity na hydrostatickém napětí záviset. Rozhodující je tedy ta část energie pružné deformace, při které dochází ke změně tvaru. Tato práce odpovídá druhému deviatorickému invariantu napětí

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \quad (67)$$

Podmínka plasticity má tvar

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2} - \tau_0 = 0 \quad (68)$$

kde τ_0 je materiálový parametr. Tento materiálový parametr identifikujeme ze smykového zatížení materiálu. Při smykovém stavu napjatosti platí $\sigma_{12} = \sigma_{21} \neq 0$, zatímco ostatní složky napětí jsou nulové. Vypočítáme druhý deviatorický invariant napětí $J_2 = \sigma_{12}^2$, tím se podmínka plasticity redukuje na tvar $|\sigma_{12}| = \tau_0$. Materiálový parametr τ_0 tedy odpovídá mezi kluzu ve smyku. Provedeme-li stejný postup, tentokrát za jednoosého

tahu, $\sigma_{11} \neq 0$, zatímco ostatní složky tenzoru napětí jsou nulové, dostaneme $J_2 = \frac{\sigma_{11}^2}{3}$. K plastickému přetváření podle von Misesovy podmínky dojde, pokud je $\sqrt{J_2} = \tau_0$, tedy za napětí $\sigma_{11} = \sqrt{3}\tau_0$. Tato hodnota normálového napětí odpovídá mezi kluzu v tahu σ_0 , takže poměr mezi kluzu v tahu a ve smyku je $\frac{\sigma_0}{\tau_0} = \sqrt{3}$.

4.3.2 Podmínka plastického přetváření

Zákonem plastického přetváření rozumíme rovnici ve tvaru

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} \mathbf{g}(\sigma, \kappa) \quad (69)$$

s doplňující podmínkou $\dot{\lambda} \geq 0$. Dále se budeme zabývat pouze sdruženým zákonem plastického přetváření, který má tvar

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (70)$$

Význam slova sdružený znamená, že podmínka plastického přetváření je sdružená s funkcí plasticity. Ze sdruženého zákona plastického přetváření vyplývá, že směr přírůstku plastické části deformace je orientován vnější normálou k ploše plasticity. Jelikož plocha von Misesovy podmínky plasticity je konvexní, sdružený zákon plastického přetváření splňuje princip maxima plastické disipace.

4.3.3 Zpevnění

Představu zpevnění lze z jednoosého případu snadno zobecnit pro plasticky přípustnou oblast ve vícerozměrném prostoru napětí, odpovídající víceosé napjatosti. Při kinematickém zpevnění se celá přípustná oblast posouvá jako tuhé těleso, přičemž její tvar a rozměry zůstávají beze změny. Při izotropním zpevnění se plastická oblast rozpíná, přičemž její tvar se nemění, ale všechny rozměry se proporcionálně zvětšují. Naše další pozornost bude směřovat k izotropnímu zpevnění. Funkci plasticity v tomto případě zapíšeme

$$f(\sigma, \kappa) = \tilde{\sigma}(\sigma) - \sigma_Y(\kappa) \quad (71)$$

kde $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\sigma})$ je ekvivalentní napětí (skalární míra napětí) a $\sigma_Y(\kappa)$ je funkce popisující závislost okamžité meze kluzu na kumulované plastické deformaci κ .

5 Model spongiózní kosti

V této kapitole stručně představíme model popisující chování spongiózní kosti popsaný např. v [5]. V tomto modelu je kombinována teorie plasticity s mechanikou poškození. Nejdříve uvedeme strukturu tenzoru tuhosti, poté se zaměříme na základní rovnice potřebné pro popis chování spongiózní kosti.

5.1 Tenzor tuhosti

Ve struktuře tenzoru tuhosti je brána v úvahu porozita kosti popsaná parametrem $\rho \in (0; 1)$, který udává poměr zastoupení kostní tkáně v jednotce objemu. Anisotropie (v tomto případě zjednodušená na ortotropii) kosti je popsána symetrickým, pozitivně definitním tenzorem druhého řádu.

$$\mathbf{M} = \sum_i^3 m_i \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i \quad (72)$$

m_i jsou vlastní čísla tohoto tenzoru a \mathbf{m}_i jsou příslušné hlavní směry, které určují osy ortotropie. Vlastní čísla jsou normalizována podmínkou $Tr(\mathbf{M}) = 3$.

Pro přehlednost zapíšeme tenzor tuhosti do maticového tvaru pomocí Voightovy (inženýrské) notace.

$$\mathbf{D}_e = \rho^k \begin{pmatrix} (\Lambda_0 + 2\mu_0)m_1^{2l} & \Lambda_0 m_1^l m_2^l & \Lambda_0 m_1^l m_3^l & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_0 m_2^l m_1^l & (\Lambda_0 + 2\mu_0)m_2^{2l} & \Lambda_0 m_2^l m_3^l & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_0 m_3^l m_1^l & \Lambda_0 m_3^l m_2^l & (\Lambda_0 + 2\mu_0)m_3^{2l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0 m_2^l m_3^l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_0 m_1^l m_3^l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_0 m_1^l m_2^l \end{pmatrix} \quad (73)$$

Konstanty Λ_0 a μ_0 jsou Lamého konstanty pro fiktivní materiál s nulovou porozitou, t.j. $\rho = 1$, k a l jsou bezrozměrné parametry určené experimentálně.

5.2 Podmínka plasticity

Musíme zmínit, že se opět omezíme na teorii malých deformací, čili platí aditivní rozklad deformace na elastickou a plastickou část. Zapišeme rovnici popisující vztah mezi efektivním napětím a deformací

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{D}_e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (74)$$

Nominální napětí se vypočítá jako

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega) \mathbf{D}_e (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (75)$$

V tomto případě budeme uvažovat obecnější tvar funkce plasticity než (68), a sice

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \kappa) = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{F} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \sigma^P(\kappa) \quad (76)$$

Tato funkce plasticity závisí jak na deviatorické, tak na volumetrické části tenzoru napětí. V podmínce (76) se dále vyskytuje tenzor \mathbf{F} , což je pozitivně semidefinitní tenzor 4. řádu, který bude detailněji specifikován později. Je třeba upozornit, že tenzor \mathbf{F} má jednotky [Pa^{-2}], čili výraz $\sigma^P(\kappa)$ v podmínce plasticity je bezrozměrná veličina. Zatěžovací–odtěžovací podmínky mají tvar

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \kappa) \leq 0 \quad \dot{\kappa} \geq 0 \quad \dot{\kappa} f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \kappa) = 0 \quad (77)$$

V těchto podmínkách je místo rychlosti plastického násobitele $\dot{\lambda}$ použita rychlost kumulované plastické deformace $\dot{\kappa}$, což ihned objasníme. Vyjdeme z podmínky plastického přetváření

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\lambda} \frac{\mathbf{F} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{F} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad (78)$$

Rychlost kumulované plastické deformace je definována jako

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \quad (79)$$

Dosazením (78) do (79) dostáváme vztah mezi časovou derivací kumulované plastické deformace a plastického násobitele

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \frac{\|\mathbf{F} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}\|}{\sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{F} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad (80)$$

Z této rovnice je patrné, že rozdíl mezi časovou derivací kumulované plastické deformace a plastickým násobitelem je pouze ve skalárním násobku, který je vždy nezáporný, to nám tedy umožňuje zapsat podmínky (77) pomocí kumulované plastické deformace. Podmínku plastického přetváření také můžeme vyjádřit pomocí kumulované plastické deformace

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\kappa} \frac{\mathbf{F} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\|\mathbf{F} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}\|} = \dot{\kappa} \mathbf{N}^p \quad (81)$$

kde vektor $\mathbf{N}^p = \frac{\mathbf{F} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\|\mathbf{F} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}\|}$ je jednotkový vektor, který udává směr plastického přetváření a $\dot{\kappa}$ jeho velikost. Než uvedeme přesnou strukturu tenzoru \mathbf{F} zavedeme tenzor

$$\tilde{\mathbf{N}} = \frac{\sum_i^3 m_i^{-2q} \mathbf{M}_i}{\sqrt{\sum_i^3 m_i^{-4q}}} \quad (82)$$

který rozděluje podmínku plasticity na tahovou a tlakovou část. Je-li

$$\tilde{\mathbf{N}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \geq 0 \quad (83)$$

nacházíme se v tahové části podmínky plasticity a v podmínce plasticity nahradíme tenzor \mathbf{F} tenzorem \mathbf{F}^+ . V případě

$$\tilde{\mathbf{N}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \leq 0 \quad (84)$$

použijeme tenzor \mathbf{F}^- . Struktura tenzorů \mathbf{F}^- a \mathbf{F}^+ je totožná a shoduje se i se strukturou tenzoru pružné poddajnosti:

$$\mathbf{F}^\pm = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^\pm} & -\frac{\chi_{12}^\pm}{(\sigma_1^\pm)^2} & -\frac{\chi_{13}^\pm}{(\sigma_1^\pm)^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\chi_{21}^\pm}{(\sigma_2^\pm)^2} & \frac{1}{(\sigma_2^\pm)^2} & -\frac{\chi_{23}^\pm}{(\sigma_2^\pm)^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\chi_{31}^\pm}{(\sigma_3^\pm)^2} & -\frac{\chi_{32}^\pm}{(\sigma_3^\pm)^2} & \frac{1}{(\sigma_3^\pm)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{23}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{31}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{12}^2} \end{pmatrix} \quad (85)$$

K přepisu tohoto tenzoru jsme opět použili Voightovu notaci, $\sigma_i^\pm = \sigma_0^\pm \rho^p m_i^{2p}$ má význam meze v kluzu v tahu (tlaku) ve směru jednotlivých os ortotropie, $\tau_{ij} = \tau_0 \rho^p m_i^q m_j^q$ je mez kluzu ve smyku v rovinách ortotropie a $\chi_{ij}^\pm = \chi_0 \frac{m_i^{2q}}{m_j^{2q}}$ jsou koeficienty interakce. Exponenty p a q použity v těchto rovnicích vystihují vliv struktury kosti. Obecně nabývají různých hodnot než koeficienty k a l , které byly použity pro tenzor pružné tuhosti. Materiálové konstanty σ_0^\pm , τ_0 a χ_0^\pm odpovídají vlastnostem materiálu s nulovou porozitou. Aby byly rovnice kompletní, zbývá uvést zákon poškození a zpevnění.

5.3 Zákon zpevnění

Budeme uvažovat izotropní zpevnění. Funkce zpevnění je v exponenciálním tvaru

$$\sigma^p = 1 + \sigma_H (1 - \exp^{-s\kappa}) \quad (86)$$

Připomeňme, že se jedná o bezrozměrnou veličinu, která je závislá na kumulované plastické deformaci κ , σ_H a s jsou nezáporné parametry, které je třeba identifikovat pomocí experimentu. Jelikož uvažujeme model se zpevněním, mohlo by se zdát, že nedostáváme změkčující větev pracovního diagramu. Změkčení je však způsobeno poškozením.

5.4 Zákon poškození

Zákon poškození

$$\omega = g(\kappa) = \omega_c(1 - \exp^{-a\kappa}) \quad (87)$$

má obdobnou formu jako zákon zpevnění, ale fyzikální význam veličin je samozřejmě odlišný. Jak již bylo zníněno, změkčení materiálu je dáno poškozením, bezrozměrný parametr $a \geq 0$ a kritické poškození $\omega_c \leq 1$ určují sestupnou část pracovního diagramu.

6 Tenzor tečné tuhosti

6.1 Modely řízené ekvivalentní deformací

Při analýze modelu poškození mohou nastat dva stavy.

1. Materiál je v pružném stavu a poškození se nemění. Vztah mezi napětím a deformací můžeme diferencovat podle času a hodnotu poškození považovat za konstantu. Tím dospějeme k přírůstkovému tvaru

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - \omega) \mathbf{D}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (88)$$

2. Pokud okamžitý stav splňuje podmínku $\varepsilon_{eq} = \kappa$, může docházet k pružnému od-tížení za konstantního poškození nebo k růstu poškození. Poškození tedy není konstantní a musíme ho také diferencovat podle času:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - \omega) \mathbf{D}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{D}_e : \boldsymbol{\varepsilon} \dot{\omega} \quad (89)$$

Parametr poškození ω je funkcí vnitřní proměnné κ , vyjádříme ho tedy jako $\omega = g(\kappa)$ a pomocí pravidla pro derivaci složené funkce

$$\dot{\omega} = \dot{g}(\kappa) = \frac{dg(\kappa)}{d\kappa} \frac{d\kappa(t)}{dt} = g' \dot{\kappa} \quad (90)$$

V případě růstu poškození je funkce poškození nulová a platí rovnost $\dot{\kappa} = \dot{\varepsilon}_{eq}$. Při derivaci ekvivalentní deformace podle času opět použijeme pravidlo o derivaci složené funkce, neboť ekvivalentní deformace je funkcí deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \frac{d\varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))}{dt} = \frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (91)$$

kde

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (92)$$

Je třeba dodat, že k rozvoji poškození materiálu dochází, pokud je

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0 \quad (93)$$

a rychlost poškození je dána vztahem

$$\dot{\omega} = g' \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (94)$$

Po dosazení do (89) získáme hledaný vztah mezi přírůstkem napětí a přírůstkem deformace

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = [(1 - \omega) \mathbf{D}_e - g' \bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{\eta}] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (95)$$

Výraz

$$\mathbf{D}_{ed} = [(1 - \omega) \mathbf{D}_e - g' \bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \boldsymbol{\eta}] \quad (96)$$

je tenzor tečné tuhosti poškozujícího se materiálu. Konkrétní hodnota tenzoru tečné tuhosti závisí na okamžitém stavu, ve kterém se materiál nachází, ale také na volbě ekvivalentní deformace.

6.2 Model Comi–Perego

Při výpočtu rychlosti poškození pro model Comi–Perego vyjdeme z podmínky konzistence

$$\frac{\partial f_t}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial f_t}{\partial \omega_t} \dot{\omega}_t = 0 \quad (97)$$

Z této rovnice dostáváme

$$\dot{\omega}_t = - \frac{\frac{\partial f_t}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\frac{\partial f_t}{\partial \omega_t}} \quad (98)$$

Po dosazení do (89) dostaneme tenzor tuhosti. Výsledná struktura tenzoru tuhosti se nemění, pouze tenzor $\boldsymbol{\eta}$ a g' mají jiný význam. Tenzor $\boldsymbol{\eta}$, který měl pro izotropní modely

založené na ekvivalentní deformaci význam derivace ekvivalentní deformace podle tenzoru deformace, má v tomto případě význam derivace funkce poškození podle tenzoru deformace:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial f_t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (99)$$

Skalární veličina g' se vypočítá jako

$$g' = \frac{1}{\frac{\partial f_t}{\partial \omega_t}} \quad (100)$$

6.3 Mazarsův model

Vyjdeme z rovnice (89). Potřebujeme vypočítat rychlost poškození, diferenciací rovnice (42) podle času dostáváme

$$\dot{\omega} = \dot{\alpha}_t \omega_t + \alpha_t \dot{\omega}_t + \dot{\alpha}_c \omega_c + \alpha_c \dot{\omega}_c = \dot{\alpha}_t \omega_t + \alpha_t g'_t \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\alpha}_c \omega_c + \alpha_c g'_c \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (101)$$

kde

$$\dot{\alpha}_t = \beta \left(\sum \frac{\varepsilon_{tI} \langle \varepsilon_I \rangle}{\tilde{\varepsilon}^2} \right)^{\beta-1} \dot{\alpha} = k_t \dot{\alpha} \quad (102)$$

$$\dot{\alpha}_c = -\beta \left(1 - \sum \frac{\varepsilon_{tI} \langle \varepsilon_I \rangle}{\tilde{\varepsilon}^2} \right)^{\beta-1} \dot{\alpha} = k_c \dot{\alpha} \quad (103)$$

V těchto rovnicích jsme označili $k_t = \beta \left(\sum \frac{\varepsilon_{tI} \langle \varepsilon_I \rangle}{\tilde{\varepsilon}^2} \right)^{\beta-1}$ a $k_c = -\beta \left(1 - \sum \frac{\varepsilon_{tI} \langle \varepsilon_I \rangle}{\tilde{\varepsilon}^2} \right)^{\beta-1}$

$$\dot{\alpha} = \sum_I \frac{\dot{\varepsilon}_{tI} \langle \varepsilon_i \rangle + \varepsilon_{tI} \langle \dot{\varepsilon} \rangle}{\tilde{\varepsilon}^2} - \frac{2\varepsilon_{tI} \langle \varepsilon_t \rangle \boldsymbol{\eta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\varepsilon}^3} \quad (104)$$

Časová derivace výrazu ε_{tI} se vypočítá jako

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{tI} = & \frac{\nu}{1-2\nu} \left[H(\sigma_I) - \frac{\nu}{1+\nu} \sum_K H(\sigma_K) \right] \boldsymbol{\delta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + H(\sigma_I) \mathbf{p}_I \otimes \mathbf{p}_I : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ & - \frac{\nu}{1+\nu} \sum_I H(\sigma_I) \mathbf{p}_I \otimes \mathbf{p}_I : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (105)$$

Rychlost kladné části deformace

$$\langle \dot{\varepsilon}_I \rangle = H(\varepsilon_I) \mathbf{p}_I \otimes \mathbf{p}_I : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (106)$$

$H(x)$ má význam Heavisidovy funkce. Dosadíme výrazy (105) a (106) do rovnice (104) a vyjádříme $\dot{\alpha}$ pomocí rychlosti tenzoru deformace a tenzoru $\boldsymbol{\xi}$

$$\dot{\alpha} = \boldsymbol{\xi} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (107)$$

Přesnou strukturu tenzoru $\boldsymbol{\xi}$ zde neuvádíme.

Výraz pro $\dot{\omega}$ dosadíme do rovnice (89)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = & [(1-\omega)\mathbf{D}_e - [(\alpha_t g'_t + \alpha_c g'_c)\boldsymbol{\eta} + (g_t k_t + g_c k_c)\boldsymbol{\xi}] \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ = & [(1-\omega)\mathbf{D}_e - (g'\boldsymbol{\eta} + g\boldsymbol{\xi}) \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (108)$$

Pro přehlednost jsme označili $g' = \alpha_t g'_t + \alpha_c g'_c$ a $g = g_t k_t + g_c k_c$.

Dostáváme tedy tenzor tečné tuhosti ve tvaru

$$\mathbf{D}_{ed} = (1-\omega)\mathbf{D}_e - (g'\boldsymbol{\eta} + g\boldsymbol{\xi}) \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (109)$$

V tomto případě má tenzor tuhosti jinou strukturu než v předchozích případech. V rovnici (109) se opět vyskytuje sečná tuhost, není-li $\boldsymbol{\eta}$ skalárním násobkem $\boldsymbol{\xi}$, dostáváme opravu hodnoty 2.

6.4 Von Misesova podmínka plasticity

- Model bez zpevnění

Vyjdeme ze vztahu mezi napětím a pružnou částí tenzoru deformace (59), do této rovnice dosadíme (58). Vzniklou rovnici diferencujeme podle času

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \quad (110)$$

Dále dosadíme zákon plastického přetváření (70)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda}\mathbf{g}) \quad (111)$$

a použijeme vztah pro rychlost plastického násobitele odvozený z podmínky konzistence (66). Dostáváme výsledný vztah mezi rychlostí napětí a deformace

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e : \mathbf{g} \otimes \mathbf{g} : \mathbf{D}_e}{\mathbf{g} : \mathbf{D}_e : \mathbf{g}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (112)$$

Výraz

$$\mathbf{D}_{ed} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e : \mathbf{g} \otimes \mathbf{g} : \mathbf{D}_e}{\mathbf{g} : \mathbf{D}_e : \mathbf{g}} \quad (113)$$

nazveme pružnoplastickým tečným tenzorem.

- Model s kinematickým zpevněním

Postup je obdobný jako pro plastický materiál bez zpevnění, výsledek je

$$\mathbf{D}_{ed} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e : \mathbf{g} \otimes \mathbf{g} : \mathbf{D}_e}{\mathbf{g} : \mathbf{D}_e : \mathbf{g} + kH} \quad (114)$$

6.5 Model spongiózní kosti

Vyjdeme z rovnice (75), tuto rovnici diferencujeme podle času.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - \omega) \mathbf{D}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) - \omega_{,\kappa} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\kappa} \quad (115)$$

Přítom $\omega_{,\kappa} = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa}$. Dále použijeme zákon plastického přetváření (70) a podmínku konzistence (66), nakonec dostáváme tenzor tečné tuhosti

$$\mathbf{D}_{pd} = (1 - \omega) \mathbf{D}_e - \frac{((1 - \omega) \mathbf{D}_e : \mathbf{N}^p + \omega_{,\kappa} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \otimes \mathbf{D}_e : \mathbf{N}^p}{\mathbf{N}^p : \mathbf{D}_e : \mathbf{N}^p + \sigma^p \sigma_{,\kappa}^p / \|\mathbf{F} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}\|} \quad (116)$$

Zde je $\sigma_{,\kappa}^p = \frac{\partial \sigma^p}{\partial \kappa}$. Poznamenejme jen, že v případě $\omega = 0$ a $\omega_{,\kappa} = 0$ dostáváme tenzor tečné tuhosti ve tvaru (114).

7 Lokalizace nepružných deformací



Colliat-Dangus, 1988



Johansson, 2002

Obrázek 6: Příklady lokalizované nepružné deformace v zemině a betonu

Problém lokalizace poškození objasníme na jednoduchém příkladu taženého prutu. Uvažujme prut o konstantním průřezu A , délky L , který je natahován silou F . Prut se chová lineárně pružně až po dosažení deformace ε_0 , které odpovídá napětí, jež označíme jako mez pevnosti v tahu f_t . Poté uvažujme ten nejjednodušší (lineární) zákon poškození. V každé části prutu klesá napětí, buď při klesající deformaci (prut se pružně odtěžuje) nebo při rostoucí deformaci (prut změkčuje). Ze statických rovnic plyne, že napětí musí zůstat stejné po celé délce prutu. Pro jakékoliv efektivní napětí $\bar{\sigma}$ mezi 0 a f_t existují dvě hodnoty deformace, které vyhovují materiálovým rovnicím. Problém nastává v tom, že žádná rovnice nám neurčuje, jaká část prutu se pružně odtěžuje a která část prutu změkčuje. Řešení tedy není jednoznačné. Pokud má malá část prutu menší průřez, například v důsledku nějaké imperfekce, pak je v tomto průřezu dosaženo pevnosti f_t dříve než v ostatních částech prutu. V této části prutu začne docházet ke změkčování, zatímco zbylá délka prutu se pružně odtěžuje, neboť pevnosti f_t ještě nebylo dosaženo. Z toho vyplývá, že velikost oblasti, která změkčuje, je dána velikostí oblasti s nejmenší pevností. Při výpočtech metodou konečných prvků můžeme síť zjemňovat a měli bychom dostávat stále přesnější řešení. Avšak v tomto případě se poškození může lokalizovat stále do menšího segmentu prutu. Velikost tohoto segmentu je dána rozměrem prvku. Lokalizaci poškození při výpočtech metodou konečných prvků ovlivňuje nejenom velikost prvků,

ale také jejich orientace, pravidelnost sítě a další faktory. Otázkou tedy zůstává, jak se bude chovat skutečná konstrukce, neboť poškození, které vzniká rozvojem trhlin a jiných defektů, se nemůže lokalizovat do libovolně malého segmentu prutu, ale lokalizuje se do zóny o velikosti, která odpovídá vnitřní charakteristické délce materiálu. Izotropní model poškození však o této vnitřní charakteristické délce materiálu nic neudává. Z matematického hlediska je důsledkem nejednoznačnosti řešení při změkčování materiálu ztráta eliptičnosti diferenciální rovnice, kterou je problém popsán. Při popisu materiálu izotropním modelem poškození dochází k těmto nesrovnalostem:

1. Deformace a poškození se lokalizují do zóny, která může být libovolně malá.
2. Práce vykonaná vnějšími silami (práce vykonaná při porušení konstrukce) je libovolně malá.
3. Při řešení metodou konečných prvků je výsledek patologicky závislý na počtu konečných prvků.

8 Lokalizační analýza

Uvažujme těleso rozdělené plochou nespojitosti na dvě části. Označíme je V^- a V^+ . Vektor \mathbf{n} je normálový vektor na tuto plochu a je orientován z V^- do V^+ . Rychlosti napětí jsou vázané podmínkou

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (117)$$

a rychlosti deformací v jedné a druhé části tělesa podmínkou

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^+ = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^- + \mathbf{c} \otimes \mathbf{n} \quad (118)$$

Pro lepší představu můžeme \mathbf{c} rozložit jako součin $\mathbf{c} = \dot{\epsilon} \mathbf{m}$, $\dot{\epsilon}$ značí velikost skoku a $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}$ je normovaný tenzor prvního řádu zvaný polarizační vektor. Úhel mezi vektory \mathbf{n} a \mathbf{m} udává, o který mód porušení se jedná. Pokud $\mathbf{n} = \mathbf{m}$, jedná se o tzv. tahový mód. Je-li \mathbf{m} kolmé na \mathbf{n} , jedná se o mód smykový. V teorii malých deformací je deformace definovaná jako symetrická část gradientu posunů. Rovnici (118) vyjádříme ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- + \frac{1}{2}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m})\dot{\epsilon} \quad (119)$$

Vztah mezi napětím a deformací v oblasti V^+ a V^-

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{D}^+ : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- = \mathbf{D}^- : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- \quad (120)$$

kde \mathbf{D}^- a \mathbf{D}^+ je tenzor tuhosti na jedné a druhé části tělesa. Po dosazení rovnice (119) do rovnice (120), využití malé symetrie tenzoru tuhosti a několika úpravách dostáváme rovnici

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^+ \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \dot{\epsilon} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^- - \mathbf{D}^+) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- \quad (121)$$

Pokud uvažujeme tenzor tuhosti na obou stranách tělesa stejný, rovnice se nám zjednoduší. Vyloučíme $\dot{\epsilon} = 0$, neboť tato situace neodpovídá skutečné bifurkaci. Po těchto

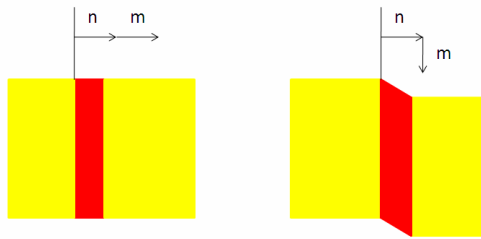
úpravách dostáváme

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (122)$$

Výraz $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ označíme jako \mathbf{Q} a nazveme lokalizační tenzor. Z rovnice (122) je zřejmé, že lokalizační podmínka je ekvivalentní singularitě lokalizačního tenzoru. Vektor \mathbf{m} odpovídá vlastnímu vektoru pro nulové vlastní číslo lokalizačního tenzoru. Dostáváme tedy klasickou lokalizační podmínku

$$\det \mathbf{Q} = 0 \quad (123)$$

Singularita lokalizačního tenzoru je ekvivalentní již zmíněné ztrátě eliptičnosti.



Obrázek 7: Módy lokalizace: (a) tahový mód (b) smykový mód

Při lokalizační analýze musíme najít vektor \mathbf{n} tak, aby byla splněna rovnice (122). Když takový vektor neexistuje, pole napětí musí zůstat spojitě.

8.1 Lokalizační analýza izotropních modelů poškození

Při lokalizační analýze musíme rozlišovat tři stavy:

1. Pružné odtěžování na obou stranách. V tomto případě můžeme položit

$$\mathbf{D}^- = \mathbf{D}^+ = \mathbf{D}_u = (1 - \omega)\mathbf{D}_e \quad (124)$$

Lokalizační tenzor poté vypadá následovně:

$$\mathbf{Q}_u = (1 - \omega)\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{n} = (1 - \omega)\mathbf{Q}_e \quad (125)$$

Není těžké ukázat, že \mathbf{Q}_u je pozitivně definitní, lokalizační podmínka tedy nemůže být splněna.

2. K růstu poškození dochází na obou stranách. Tentokrát je opět tenzor tuhosti na obou stranách stejný, ale má význam tečné tuhosti materiálu.

$$\mathbf{D}^- = \mathbf{D}^+ = \mathbf{D}_{ed} \quad (126)$$

$$\mathbf{Q}_{ed} = (1 - \omega)\mathbf{Q}_e - g'(\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \otimes (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{Q}_u - g'\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n \otimes \boldsymbol{\eta}_n \quad (127)$$

Je-li \mathbf{Q}_{ed} singulární, musí existovat nenulový vektor \mathbf{m} tak, že $\mathbf{Q}_{ed} \cdot \mathbf{m} = 0$. Po dosazení dostáváme

$$\mathbf{Q}_u \cdot \mathbf{m} = g'\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n(\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{m}) \quad (128)$$

Jelikož je \mathbf{Q}_u vždy pozitivně definitní, je invertibilní. Pravá strana rovnice je pouze skalárním násobkem $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$, \mathbf{m} můžeme vyjádřit jako $a\mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$, kde a je zatím neznámé číslo. Po dosazení do rovnice (128)

$$(1 - g'\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n) a\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = 0 \quad (129)$$

Pokud je a nebo $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$ rovno nule, dostáváme triviální řešení, které neodpovídá skutečné bifurkaci. Pokud chceme, aby rovnice (129) byla splněna, musí být nulový výraz v závorce. Odtud plyne podmínka

$$g'\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = 1 \quad (130)$$

Výsledek součinu $\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n$ závisí na elastických konstantách, na okamžitém

stavu materiálu a na směru plochy nespojitosti. Pro daný materiál a daný stav materiálu je výsledek funkcí jednotkového vektoru \mathbf{n} . Minimální hodnota g' potřebná k bifurkaci je

$$g'_{crit} = \frac{1}{\max_{\|\mathbf{n}\|=1} (\boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n)} \quad (131)$$

3. V tomto případě je tenzor tuhosti na každé straně tělesa jiný a musíme vycházet z rovnice (121). Řešení je v tomto případě komplikovanější a zde ho zmiňovat nebudeme. Dá se ukázat, že podmínka singularity lokalizačního tenzoru je postačující. Řešení je k nalezení v [2].

8.2 Lokalizační analýza modelů poškození za rovinné napjatosti

V této části se budeme zabývat analýzou ve dvou rozměrech za předpokladu rovinné napjatosti. Tenzor pružné tuhosti za rovinné napjatosti má tvar

$$\mathbf{D}_e = 2G \left(\mathbf{I} + \frac{\nu}{1-\nu} \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \right) \quad (132)$$

kde ν je Poissonův součinitel. Příslušný elastický akustický tenzor je

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{n} = G \left(\boldsymbol{\delta} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) \quad (133)$$

Pro dosazení do (131) potřebujeme vypočítat inverzi tenzoru $\mathbf{Q}_u = (1-\omega)\mathbf{Q}_e$,

$$\mathbf{Q}_u^{-1} = \frac{1}{1-\omega} \mathbf{Q}_e^{-1} = \frac{1}{(1-\omega)G} \left(\boldsymbol{\delta} - \frac{1+\nu}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) \quad (134)$$

Pro přehlednost zavedeme funkci

$$f(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\eta}_n \cdot \mathbf{Q}_u^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n = \frac{1}{(1-\omega)G} \left[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} - \frac{1+\nu}{2} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \right] \quad (135)$$

Pokud tuto funkci přepíšeme ve složkovém zápisu vzhledem k hlavním směrům tenzorů $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{\eta}$ (oba mají stejné hlavní směry), dostaneme polynom 4. stupně

$$f(n_1, n_2) = \frac{1}{(1-\omega)G} \left[\eta_1 \bar{\sigma}_1 n_1^2 + \eta_2 \bar{\sigma}_2 n_2^2 - \frac{1+\nu}{2} (\eta_1 n_1^2 + \eta_2 n_2^2) (\bar{\sigma}_1 n_1^2 + \bar{\sigma}_2 n_2^2) \right] \quad (136)$$

Tento polynom musíme maximalizovat s omezením $n_1^2 + n_2^2 = 1$, neboť \mathbf{n} je jednotkový vektor. Označíme-li $n_1^2 = N_1$ a položíme $N_2 = 1 - N_1$, přejde funkce f na kvadratickou funkci jedné proměnné N_1 . Musíme ale zabezpečit splnění omezující podmínky $0 \leq N_1 \leq 1$.

Za předpokladu $\bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2$ a $\eta_1 \geq \eta_2$ je maximalizovaná funkce konkávní a globálního maxima nabývá pro

$$N_{1,crit} = \frac{\eta_1 \bar{\sigma}_1 + \nu \eta_2 \bar{\sigma}_1 - (1+\nu)(\eta_1 \bar{\sigma}_2 + \eta_2 \bar{\sigma}_1)/2}{(1+\nu)(\eta_1 - \eta_2)(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)} \quad (137)$$

Pokud je tato hodnota záporná, je hledaným řešením $N_{1,crit} = 0$ a plocha nespojitosti je kolmá na směr největšího hlavního napětí. Pokud je větší než 1, je řešením $N_{1,crit} = 1$ a plocha nespojitosti je kolmá na směr nejmenšího hlavního napětí. Kritická hodnota g' se vypočte jako $g'_{crit} = 1/f(n_{1,crit}, n_{2,crit})$, kde $n_{1,crit} = \sqrt{N_{1,crit}}$ a $n_{2,crit} = \sqrt{1 - N_{1,crit}}$. Lepší představu o chování modelu než g'_{crit} nám dá kritická hodnota tečného modulu

$$E_{ed,crit} = (1 - \omega - g'_{crit} \varepsilon_{eq}) E = \left(1 - \omega - \frac{\varepsilon_{eq}}{f(n_{1,crit}, n_{2,crit})} \right) E \quad (138)$$

8.3 Lokalizační analýza von Misesova modelu plasticity

Opět vyjdeme z rovnice (122), tentokrát však za tenzor tečné tuhosti dosadíme z rovnice (113). Dostáváme elastoplastický lokalizační tenzor

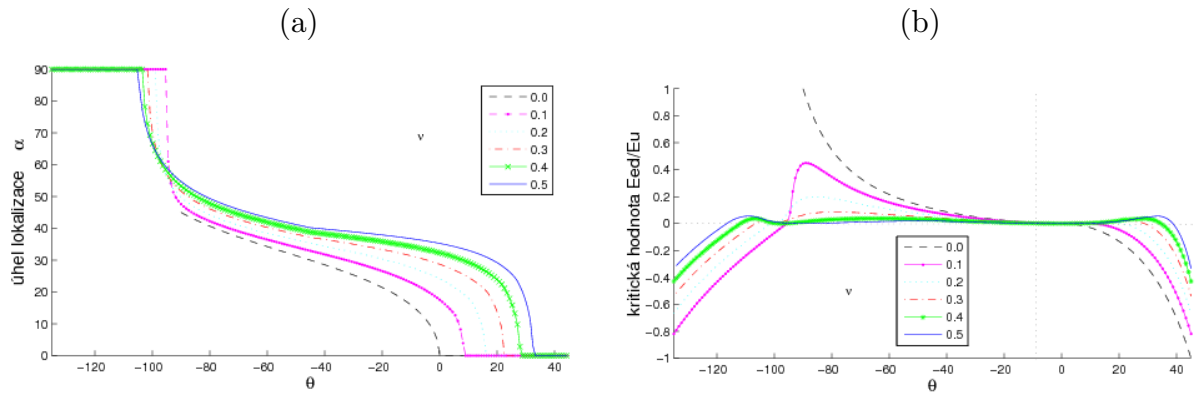
$$\mathbf{Q}_{ep} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{ed} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{h} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_e : \mathbf{g} \otimes \mathbf{g} : \mathbf{D}_e) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{Q}_e - \frac{1}{h} \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \quad (139)$$

V této rovnici jsme pro přehlednost označili

$$h = \mathbf{g} : \mathbf{D}_e : \mathbf{g} + kH \quad \mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_e : \mathbf{g} \quad \mathbf{b} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_e : \mathbf{g} \quad (140)$$

Provedeme-li stejný postup jako pro modely poškození, vychází kritický modul změkčení, při kterém vzniká nespojitost

$$kH_{crit} = \max_{\|\mathbf{n}\|=1} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}_e^{-1} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{g} : \mathbf{D}_e : \mathbf{g} \quad (141)$$



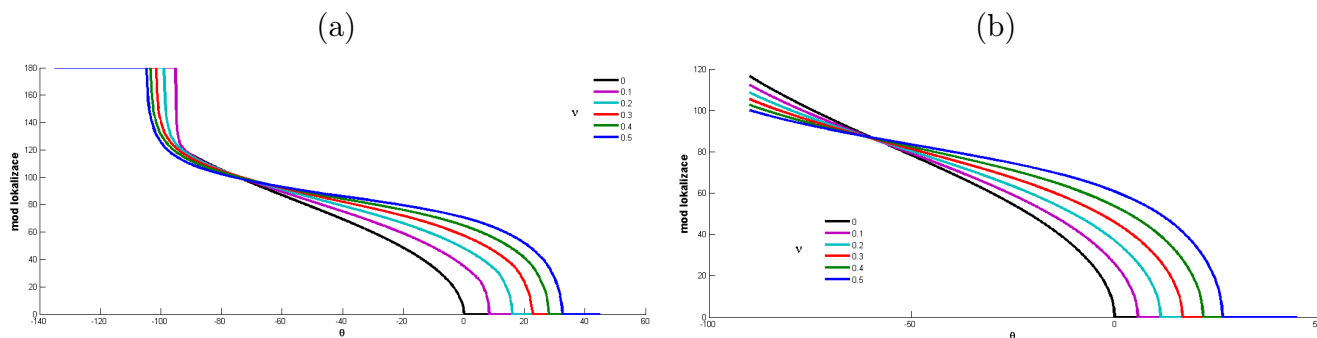
Obrázek 8: Výsledky lokalizační analýzy pro Mazarsovou definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání

9 Výsledky lokalizační analýzy

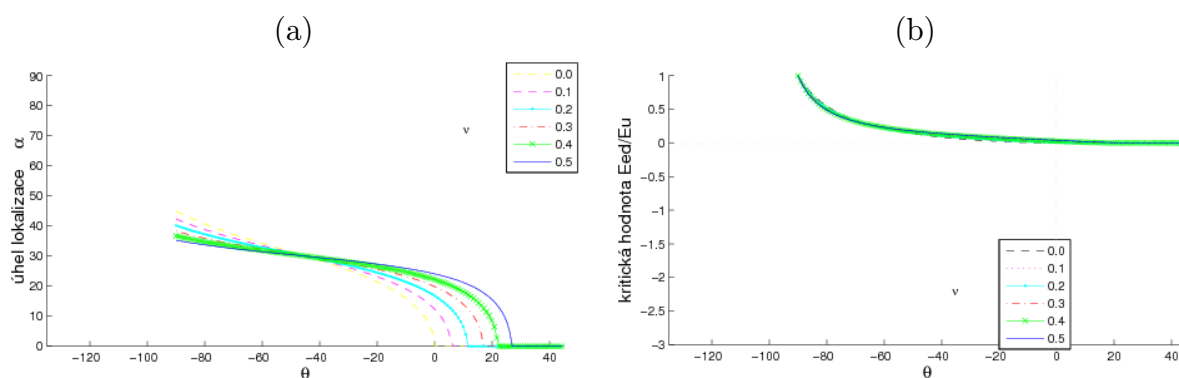
9.1 Modely poškození

Výsledky lokalizační analýzy pro tři definice ekvivalentní deformace za rovinné napjatosti jsou znázorněny na obrázcích 8-12. Směr potenciální plochy nespojitosti je popsán lokalizačním úhlem α , což je úhel mezi normálou na plochu nespojitosti a hlavní osou, odpovídající největšímu hlavnímu napětí. Tento úhel se vypočítá jako $\alpha = \arccos n_{1,crit} = \arccos \sqrt{N_{1,crit}}$. Místo hodnoty g'_{crit} je vykreslen kritický poměr tečného a sečného modulu $E_{ed,crit}/E_u$. Mód lokalizace je znázorněn úhlem mezi vektory \mathbf{m} a \mathbf{n} . Lokalizační úhel, hodnota kritického modulu i mód lokalizace závisejí na zvoleném typu ekvivalentní deformace, Poissonově součiniteli a napjatosti. Napjatost je charakterizována poměrem $\bar{\sigma}_2/\bar{\sigma}_1$. Pro její názorný popis zavedeme v rovině hlavních napětí polární úhel θ , pro který platí $\bar{\sigma}_1 = c \cos \theta$ a $\bar{\sigma}_2 = c \sin \theta$, kde $c = \sqrt{\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2}$ je nezáporné číslo. Pro $\bar{\sigma}_1 \geq \bar{\sigma}_2$ je $\theta \in [-135^\circ; 45^\circ]$. Hodnoty $\theta = -135^\circ, -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ odpovídají dvojosému tlaku, jednoosému tlaku, smyku, jednoosému tahu a dvojosému tahu.

Výsledky lokalizační analýzy jsou poněkud překvapivé. Pro **Mazarsovou** definici ekvivalentní deformace (obrázek 8) je za jednoosého tahu lokalizační úhel nulový a lokalizační mód tahový pouze v případě nulového Poissonova součinitele. Pro typickou hodnotu $\nu = 0.2$ je plocha nespojitosti odkloněná a neprochází tedy kolmo k hlavnímu napětí,



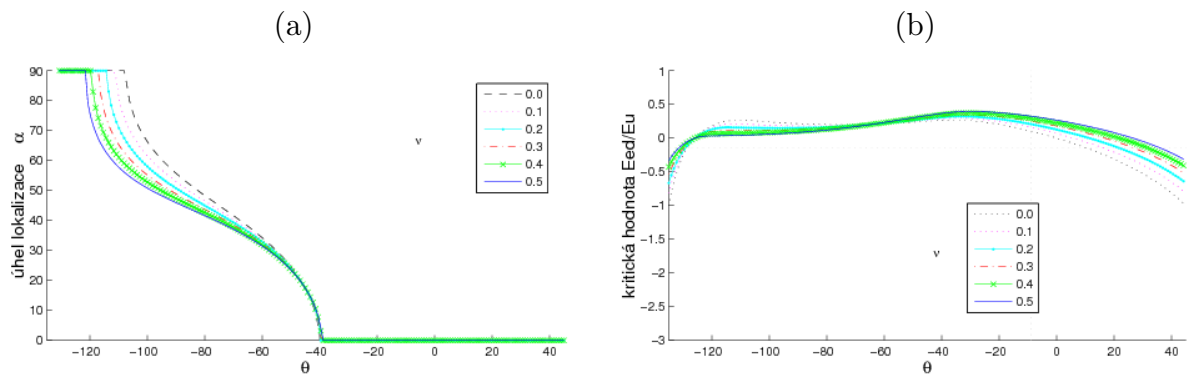
Obrázek 9: Typ módu nespojitosti v závislosti na typu namáhání: (a) Mazarsova definice ekvivalentní deformace, (b) Rankinova definice ekvivalentní deformace



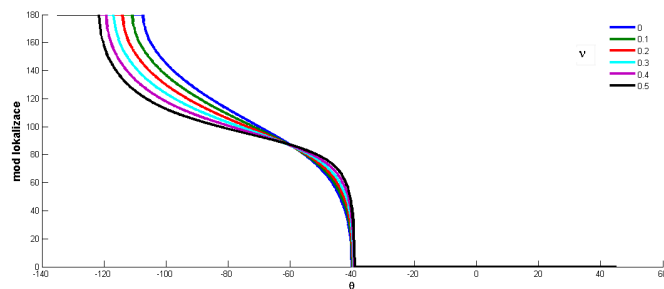
Obrázek 10: Výsledky lokalizační analýzy pro Rankinovu definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání

navíc nenastává tahový mód. Ještě více překvapující je kritická hodnota tečného modulu. V některých případech může k lokalizaci docházet dokonce ještě před dosažením vrcholu pracovního diagramu. Neplatí tedy příliš zjednodušená představa, že lokalizace nastává pouze při změkčování.

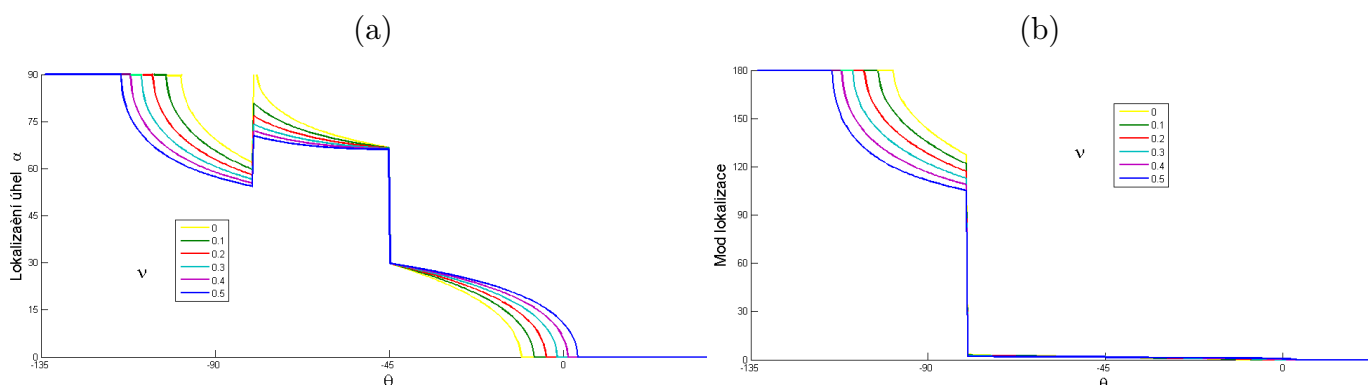
Na obrázku 10 jsou zobrazeny lokalizační vlastnosti modelu s **Rankinovou** definicí ekvivalentní deformace. Pokud jsou obě hlavní napětí záporná, k lokalizaci nemůže docházet. To je logické, protože v tomto případě není ekvivalentní deformace podle Rankinovy definice kladná a nedochází vůbec k rozvoji poškození. Pro jednoosý tah je lokalizační úhel opět nulový pouze při nulovém Poissonově součiniteli. Tahový mód lokalizace za jednoosého tahu nastává také pouze při hodnotě $\nu = 0$. Ve většině případů je kritická hodnota tečného modulu kladná a k lokalizaci opět může docházet ve zpevňující části pracovního diagramu.



Obrázek 11: Výsledky lokalizační analýzy pro upravenou von Misesovu definici ekvivalentní deformace: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost kritického tečného modulu na typu namáhání



Obrázek 12: Typ módu nespojitosti v závislosti na typu namáhání: upravená von Misesova definice ekvivalentní deformace



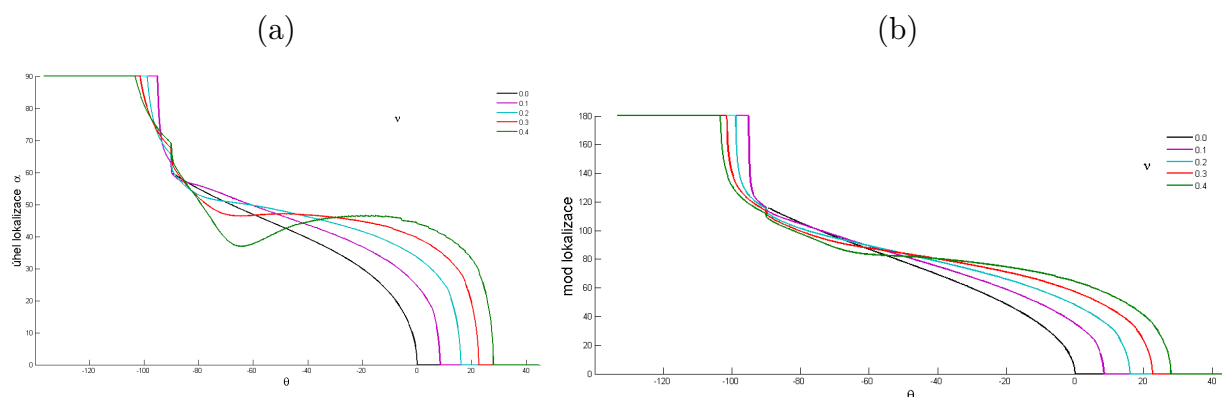
Obrázek 13: Výsledky lokalizační analýzy pro model Comi–Perego: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) závislost módu lokalizace na typu namáhání

Nakonec uvažujme upravenou **von Misesovu** definici ekvivalentní deformace (obrázek 11). Na první pohled se zdají být tyto výsledky v dobrém souladu s naším očekáváním, například za jednoosého tahu je lokalizační úhel nulový a plocha nespojitosti je tedy kolmá ke směru zatížení, úhel mezi vektory \mathbf{m} a \mathbf{n} je taktéž nulový. Avšak tečný modul dosahuje v tomto případě výrazně kladné hodnoty a lokalizace může nastat velmi brzy před dosažením vrcholu pracovního diagramu.

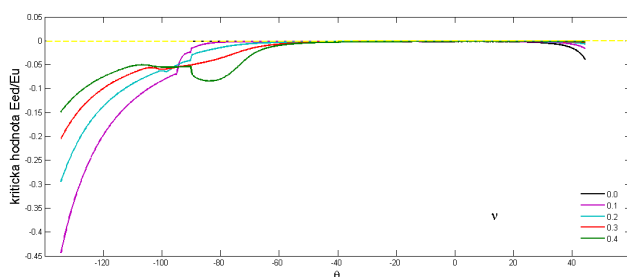
Vlastnosti modelu **Comi–Perego** závisejí na celé řadě parametrů. Lokalizační analýza byla provedena pro následující hodnoty (převzaté od autorů modelu): $E = 31.84$ GPa, $a_t = 0.25$, $b_t = 3.16$ MPa, $k_t = 9.8$ MPa², $\sigma_{0t} = 2.882$ MPa, $\sigma_{et} = 1.729$ MPa, $\omega_{0t} = 0.3$, $c_t = 2$, $a_c = 0.003$, $b_c = 2.804$ MPa, $k_c = 233.4$ MPa², $\sigma_{0c} = 30.84$ MPa, $\sigma_{ec} = 15.42$ MPa, $\omega_{0c} = 0.555$, $c_c = 2$. Výsledky lokalizační analýzy modelu navrženého Comi a Peregem jsou patrné z obrázku 13. Pro tento model je za jednoosého tahu lokalizační úhel nulový nejen pro hodnotu $\nu = 0$, ale i pro standardní hodnoty Poissonova součinitele $\nu = 0.2$, $\nu = 0.3$. Pro $\nu = 0.4$ a větší k lokalizaci již nedochází kolmo na zatížení. Při smyku je lokalizační úhel roven 45°. Za jednoosého tlaku je hodnota závislá na Poissonově součiniteli a pohybuje se v rozmezí 60 až 70 stupňů.

Dochází-li k lokalizaci tlakového poškození, úhel mezi vektory \mathbf{n} a \mathbf{m} leží v intervalu (110°, 145°). Pro θ rovno přibližně 83° začíná docházet k lokalizaci tahového poškození a mód lokalizace je pro všechny hodnoty ν velice blízko módu tahovému.

Výsledky lokalizační analýzy **Mazarsova modelu** jsou na obrázcích 14 a 15. Lokalizační



Obrázek 14: Výsledky lokalizační analýzy pro Mazarsův model: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) typ módu nespojitosti v závislosti na typu namáhání



Obrázek 15: Závislost kritického tečného modulu na typu namáhání: Mazarsův model

úhel ani mód lokalizace se příliš neliší od modelu s Mazarsovou ekvivalentní deformací. Lokalizační úhel je pro tahové zatížení nulový pouze pro $\nu = 0$, pro tuto hodnotu Poissonova součinitele dochází k tahovému módu. Pro ostatní hodnoty Poissonova součinitele je plocha nespojitosti odkloněna a nedochází ani k tahovému módu. Obrázek 15 zobrazuje kritický tečný modul, který není v žádném případě kladný, k lokalizaci nikdy nedochází před vrcholem pracovního diagramu. Pro čistě tahové stavy ve většině případů dochází k lokalizaci na vrcholu pracovního diagramu, tomuto stavu odpovídá hodnota $E_{cd}/E_u = 0$.

9.2 Výsledky lokalizační analýzy pro von Misesovu podmínku plasticity

Pro von Misesovu podmínku plasticity provedeme lokalizační analýzu pouze v jednoosém tahu a ve smyku.

Za jednoosého tahu má tenzor napětí strukturu

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 \quad (142)$$

a deviatorická část

$$\mathbf{s} = \sigma_1 \left(\frac{2}{3} \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 - \frac{1}{3} \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_2 - \frac{1}{3} \mathbf{p}_3 \otimes \mathbf{p}_3 \right) \quad (143)$$

Tenzor \mathbf{s} promítneme do směru vektoru \mathbf{n}

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma_1}{3} (2n_1 \mathbf{p}_1 - n_2 \mathbf{p}_2 - n_3 \mathbf{p}_3) \quad (144)$$

Ještě zbývá vypočítat

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma_1}{3} (2n_1^2 - n_2^2 - n_3^2) \quad (145)$$

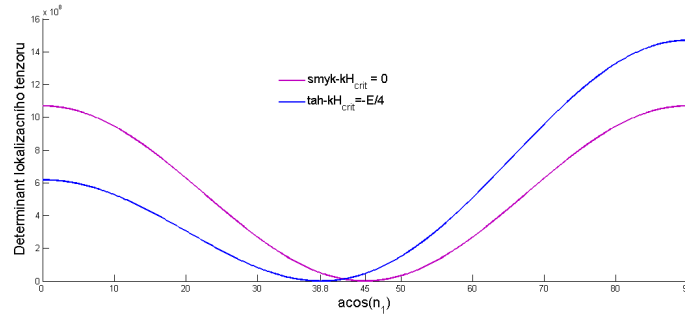
Dosazením do rovnice (141) dostáváme

$$\frac{\sigma_1^2}{9} \max_{\|\alpha\|} \left[1 + 2 \cos^2 \alpha - \frac{1}{2(1-\nu)} (-1 + 3 \cos^2 \alpha)^2 \right] \quad (146)$$

kde α značí lokalizační úhel. Výraz v závorce je maximální pro $\cos^2 \alpha = \frac{2-\nu}{3}$. Dosadíme do rovnice (141) a vypočítáme kritický plastický modul při kterém nastává lokalizace

$$kH_{crit} = \frac{9G}{\sigma_0^2} \frac{\sigma_1^2}{9} \frac{5-\nu}{2} - 3G = \left(\frac{5-\nu}{2} - 3 \right) G = -\frac{1+\nu}{2} G = -\frac{E}{4} \quad (147)$$

Obdobný proces provedeme pro smykové zatížení $\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{p}_1 \otimes \mathbf{p}_1 - \sigma \mathbf{p}_2 \otimes \mathbf{p}_2$. Tento tenzor napětí má nulovou volumetrickou část, čili ho můžeme považovat zároveň za deviatorickou část \mathbf{s} . Postup je jinak totožný jako v předchozím případě, vypočítáme součiny $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$ a $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$, dosadíme do rovnice (141) a provedeme maximalizaci. Pro smykové namáhání vychází lokalizační úhel $\alpha = 45^\circ$ a kritická hodnota změkčení $kH_{crit} = 0$.



Obrázek 16: Hodnoty determinantu lokalizačního tenzoru v závislosti na lokalizačním úhlu: von Misesova podmínka plasticity

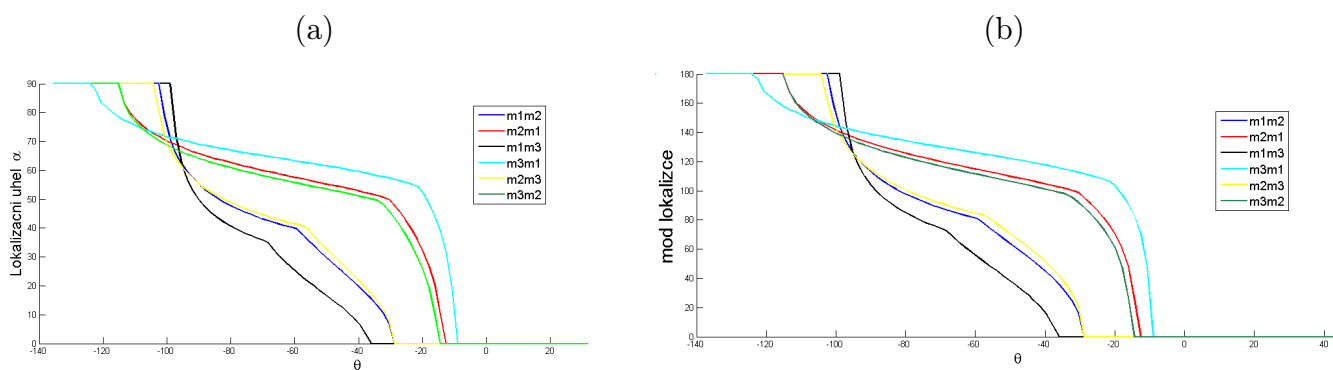
9.3 Výsledky lokalizační analýzy pro model spongiózní kosti

Struktura tenzoru tuhosti je v tomto případě poněkud složitější, než u modelů poškození, z tohoto důvodu má složitější tvar i lokalizační tenzor.

$$\mathbf{Q}_{pd} = (1 - \omega)\mathbf{Q}_e - \frac{((1 - \omega)\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_e : \mathbf{N}^p + \omega_{,\kappa}\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \otimes \mathbf{D}_e : \mathbf{N}^p \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{N}^p : \mathbf{D}_e : \mathbf{N}^p + \sigma^p \sigma_{,\kappa}^p / \|\mathbf{F} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}\|} \quad (148)$$

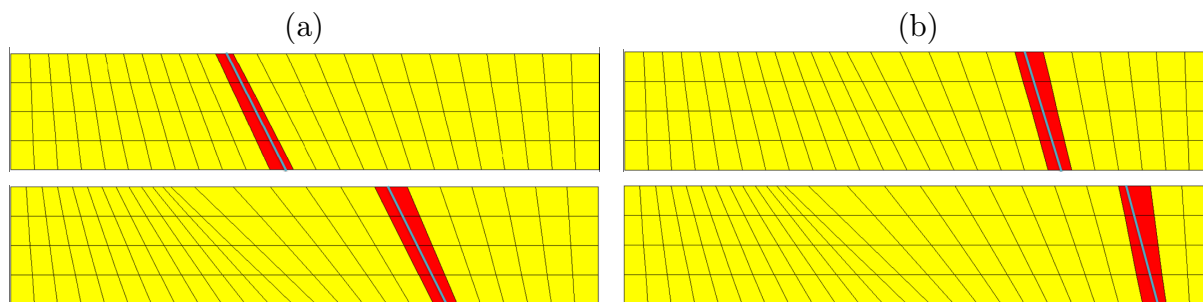
Naším cílem je najít nejmenší hodnotu kumulované plastické deformace κ , pro kterou existuje vektor \mathbf{n} takový, že lokalizační tenzor \mathbf{Q}_{pd} je singulární. Speciální volbou tenzoru \mathbf{F} dostáváme von Misesovu podmínku plasticity, pro kterou byla provedena lokalizační analýza v jednoosém tahu a ve smyku. Stačí volit parametry $\rho = m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $\chi_0 = 1/2$ a $\tau_0^2 = \sigma_0^2/3$. Na obrázku 16 jsou zobrazeny výsledky lokalizační analýzy provedené s parametry, které odpovídají von Misesově podmínce plasticity, s $\nu = 0.18$. Z teoretické analýzy pro von Misesovu podmínku vychází lokalizační úhel při smyku $\alpha = 45^\circ$. Při tahovém namáhání je tento úhel závislý na Poissonově součiniteli a pro konkrétní hodnotu $\nu = 0.18$ vychází $\alpha = 38.8^\circ$. Výsledky jsou tedy v souladu s výsledky provedenými pro model kosti se speciální volbou tenzoru \mathbf{F} odpovídající von Misesově plasticitě.

Na obrázku 17 jsou již výsledky lokalizační analýzy modelu spongiózní kosti. Lokalizační analýza byla provedena pro materiálové parametry : $\Lambda_0 = 495.8\text{MPa}$, $\nu_0 = 0.18$, $k = 1.45$, $l = 1.3$, $\sigma_0^+ = 4.89\text{MPa}$, $\sigma_0^- = 8.15\text{MPa}$, $\chi_0^+ = -0.522$, $\chi_0^- = 0.327$, $p = 1.45$, $q = 1.16$, $\sigma^H = 1.7$, $s = 1100$, $\omega_c = 0.925$, $a = 200$, $m_1 = 0.8$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1.2$

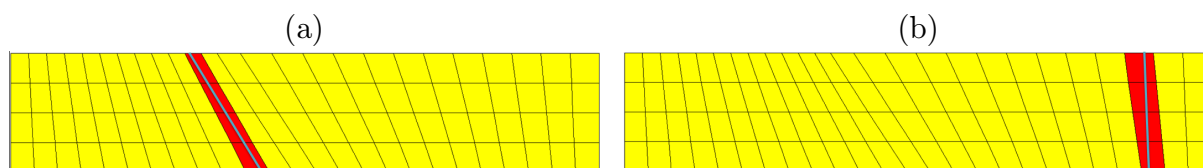


Obrázek 17: Výsledky lokalizační analýzy pro model spongiózní kosti: (a) závislost směru plochy nespojitosti na typu namáhání, (b) typ módu nespojitosti v závislosti na typu namáhání

a $\rho = 0.34$. Tyto parametry byly převzaty z [5]. Lokalizační analýza byla provedena za rovinné napjatosti ve třech rovinách ortotropie materiálu. Je však třeba postihnout všechny případy napjatosti, což je v tomto případě o trochu složitější oproti izotropnímu materiálu, neboť tam stačilo vyšetřovat ty stavy, pro které bylo $\sigma_1 \geq \sigma_2$. V tomto případě musíme postihnout i ty stavy, kdy je $\sigma_2 \geq \sigma_1$. Tato skutečnost je v grafu 17 vyřešena následovně: nejprve je v hlavní rovině 1,2 provedena lokalizační analýza pro ty stavy napjatosti, kdy $\sigma_1 \geq \sigma_2$, to vystihuje křivka 'm1m2', a poté je lokalizační analýza provedena pro stavy napjatosti $\sigma_2 \geq \sigma_1$, což znázorňuje křivka 'm2m1'. Obdobně pro ostatní roviny. Jelikož typickým namáháním kosti je tlakové namáhání, zaměříme se spíše na tuto oblast. Lokalizační úhel je v případě jednoosého tlaku v rozmezí 49° až 68° . Obdobně jako v předchozích případech není nespojitost kolmá na hlavní napětí a nenastává tlakový mód. V tomto případě je však vzhledem ke struktuře kosti obtížnější předpovědět její skutečné chování. Jak ukazují experimentální výsledky, lokalizovaná zóna v některých případech skutečně není kolmá na tlakové zatížení.



Obrázek 18: Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků na dvou různých sítích pro (a) Mazarsovu, (b) Rankinovu definici ekvivalentní deformace



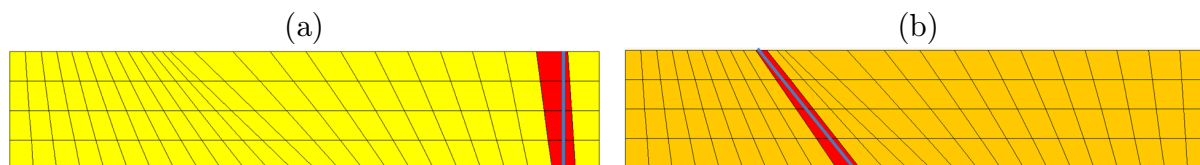
Obrázek 19: Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků pro upravenou von Misesovu definici ekvivalentní deformace s poměrem pevností (a) $k = 1$, (b) $k = 10$

10 Simulace lokalizace metodou konečných prvků

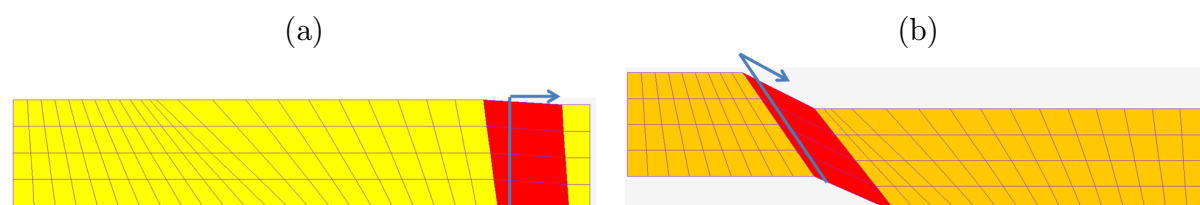
Některé výsledky získané teoretickou analýzou byly ověřeny numericky metodou konečných prvků. Simulovaný vzorek obdélníkového tvaru byl zatížen jednoosým tahem. Výpočty metodou konečných prvků byly provedeny za předpokladu rovinné napjatosti, prvky byly čtyřúhelníkové izoparametrické s bilineární aproximací a čtyřbodovou integrací. Bylo sestrojeno několik šikmých sítí, obsahujících natočené pásy prvků. Ukázalo se, že numerické řešení spontánně lokalizuje do vrstvy prvků, která je natočena o úhel velmi blízký úhlu předpovězenému teoretickou analýzou.

Obrázky 18–19 dokumentují vliv sítě konečných prvků na lokalizační vlastnosti, Poissonův součinitel byl pevně zvolen jako $\nu = 0.2$. Na obrázku 18a jsou předvedeny výsledky pro dvě různé sítě s izotropním modelem poškození a Mazarsovou definicí ekvivalentní deformace. Lokalizované poškození je znázorněno červeně, modrá čára značí úhel určený teoretickou analýzou. Obdobně jsou prezentovány výsledky na obrázku 18b pro model s Rankinovou ekvivalentní deformací.

Obrázek 19 ukazuje lokalizaci pro upravenou von Misesovu definici ekvivalentní deformace na stejné síti, pro různé hodnoty parametru k , který udává poměr pevností v



Obrázek 20: Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků pro Mazarovovu definici ekvivalentní deformace s Poissonovým součinitelem (a) $\nu = 0$, (b) $\nu = 0.5$



Obrázek 21: Výsledky simulace jednoosého tahu metodou konečných prvků : mód nespojitosti při Poissonově součiniteli (a) $\nu = 0$, (b) $\nu = 0.5$

jednoosém tlaku a tahu. Dále byl simulován vliv Poissonova čísla na úhel lokalizace. Na obrázku 20 jsou zobrazeny dvě sítě s Mazarovou definicí ekvivalentní deformace a s různým Poissonovým číslem. Na posledním obrázku 21 je mód nespojitosti, šipkou je naznačen teoretický směr, ve kterém by se měla nespojitost šířit. Je patrné, že výsledky simulace jsou v dobré shodě s teoretickou analýzou.

11 Závěr

V této diplomové práci je provedena lokalizační analýza modelů izotropního poškození a teorie plasticity. Nejprve je ukázáno překvapivé chování jednoduchých modelů izotropního poškození v závislosti na volbě ekvivalentní deformace. Překvapivé chování spočívá ve vzniku lokalizované zóny, která není kolmá na největší hlavní napětí. U některých modelů navíc dochází k lokalizaci ještě před vrcholem pracovního diagramu. Dále jsou zkoumány dva sofistikovanější modely, které byly navrženy pro beton. Ani u těchto modelů nezískáváme uspokojivé chování. Následně je provedena lokalizační analýza složitějšího modelu, který kombinuje mechaniku poškození a teorii plasticity. Tento model byl navržen pro popis chování spongiózní kosti. V závěrečné kapitole je částečně ověřeno chování modelů založených na ekvivalentní deformaci pomocí numerických simulací.

Cílem další práce by mělo být ověření chování sofistikovanějších modelů numerickými simulacemi, případně ověření chování při obecnějších stavech napjatosti. Budoucí výzkum bude zaměřen především na model spongiózní kosti, kde zůstává mnoho otevřených otázek. Např. vliv porozity, Poissonova čísla a dalších materiálových parametrů na výsledky lokalizační analýzy.

Reference

- [1] Comi, C. & Perego, U. 2001: Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, 6427-6454.
- [2] Jirásek, M. 2007: Mathematical analysis of strain localization. *Revue Européenne de Génie Civil*, special issue on Damage and Fracture in Geomaterials, vol. 11, 977-911.
- [3] Bittnar, Z. & Šejnoha, J. 1992: Numerické metody mechaniky, *Nakladatelství ČVUT*.
- [4] Jirásek, M. & Zeman, J. 2006: Přetváření a porušování materiálů, *Nakladatelství ČVUT*.
- [5] Charlebois, M.; Jirásek, M. & Zysset P.K. 2009: A nonlocal constitutive model for trabecular bone softening in compression, *V přípravě*