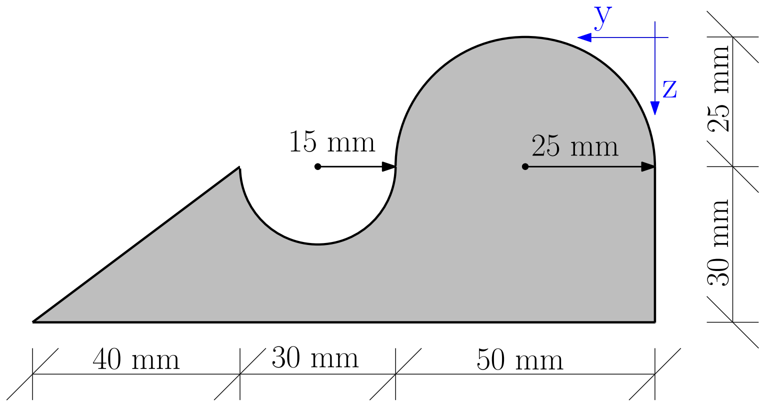
Průřezové charakteristiky

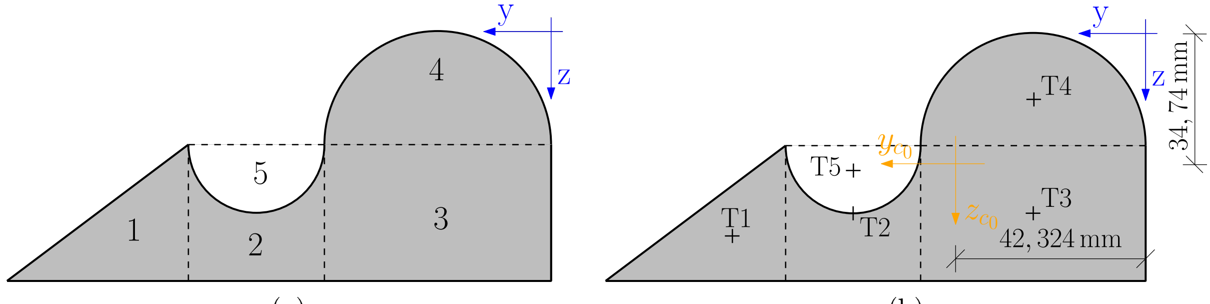
14. července 2010



Obrázek 1: Schéma průřezu.

Úkol: Určete hlavní centrální momenty setrvačnosti a vykreslete v měřítku odpovídající elipsu setrvačnosti.

Řešení:



Obrázek 2: (a) Rozdělení průřezu (b) Těžiště.

	y_i [mm]	z_i [mm]	A_i [mm^2]
1	93,3	45,0	600,0
2	65,0	40,0	900,0
3	25,0	40,0	1500,0
4	25,0	14,38	981,25
5	65,0	31,37	-353,25
$\sum_i$			3628

Tabulka 1: Souřadnice lokálních těžišť a velikost jednotlivých ploch.

- Souřadnice těžiště složeného průřezu:

$$y_{c_0} = \frac{\sum_{i=1}^{5} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i} = 42,324\,\mathrm{mm} \qquad \text{a} \qquad z_{c_0} = \frac{\sum_{i=1}^{5} A_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i} = 34,738\,\mathrm{mm}\,. \tag{1}$$

Výsledné těžišťové osy jsou žlutě zakresleny v obrázku 2b.

- Výpočty momentů setrvačnosti jednotlivých ploch k centrálním osám (y_{c_0}, z_{c_0}):

$$I^1_{y_{c_0}} = \frac{1}{36} b_1 h_1^3 + A_1 (z_1 - z_{c_0})^2 = \frac{1}{36} \cdot 40 \cdot 30^3 + 600 \cdot (45 - 34,738)^2 = 93,185 \cdot 10^3 \mathrm{mm}^4 \tag{2}$$

$$I^1_{z_{c_0}} = \frac{1}{36} b_1^3 h_1 + A_1 (y_1 - y_{c_0})^2 = \frac{1}{36} \cdot 40^3 \cdot 30 + 600 \cdot (93,3 - 42,324)^2 = 1612,465 \cdot 10^3 \mathrm{mm}^4 \tag{3}$$

$$I^2_{y_{c_0}} = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 (z_2 - z_{c_0})^2 = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 30^3 + 900 \cdot (40 - 34,738)^2 = 92,420 \cdot 10^3 \mathrm{mm}^4 \tag{4}$$

$$I^2_{z_{c_0}} = \frac{1}{12} b_2^3 h_2 + A_2 (y_2 - y_{c_0})^2 = \frac{1}{12} \cdot 30^3 \cdot 30 + 900 \cdot (65 - 42,324)^2 = 530,281 \cdot 10^3 \mathrm{mm}^4 \tag{5}$$

$$I^3_{y_{c_0}} = \frac{1}{12} b_3 h_3^3 + A_3 (z_3 - z_{c_0})^2 = \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 30^3 + 1500 \cdot (40 - 34,738)^2 = 154,033 \cdot 10^3 \mathrm{mm}^4 \tag{6}$$

$$I^3_{z_{c_0}} = \frac{1}{12} b_3^3 h_3 + A_3 (y_3 - y_{c_0})^2 = \frac{1}{12} \cdot 50^3 \cdot 30 + 1500 \cdot (25 - 42,324)^2 = 762,682 \cdot 10^3 \mathrm{mm}^4 \tag{7}$$

$$I^4_{y_{c_0}} = 0,1098 \cdot r^4 + A_4 (z_4 - z_{c_0})^2 = 0,1098 \cdot 25^4 + 981,25 \cdot (14,38 - 34,738)^2 = 449,568 \cdot 10^3 \mathrm{mm}^4 \tag{8}$$

$$I^4_{z_{c_0}} = \frac{1}{128} \pi d^4 + A_4 (y_4 - y_{c_0})^2 = \frac{1}{128} \cdot 3,14 \cdot 50^4 + 981,25 \cdot (25 - 42,324)^2 = 447,814 \cdot 10^3 \mathrm{mm}^4 \tag{9}$$

$$I^5_{y_{c_0}} = -0,1098 \cdot r^4 + A_5 (z_5 - z_{c_0})^2 = -0,1098 \cdot 15^4 - 353,25 \cdot (31,37 - 34,738)^2 = -9,566 \cdot 10^3 \mathrm{mm}^4 \tag{10}$$

$$I^5_{z_{c_0}} = -\frac{1}{128} \pi d^4 + A_5 (y_5 - y_{c_0})^2 = -\frac{1}{128} \cdot 3,14 \cdot 30^4 - 353,25 \cdot (65 - 42,324)^2 = -201,512 \cdot 10^3 \mathrm{mm}^4 \tag{11}$$

(12)

- Výsledné momenty setrvačnosti celého průřezu

$$I_{y_{c_0}} = \sum_{i=1}^{5} I^i_{y_c} = 0,779 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^4 \qquad\qquad I_{z_{c_0}} = \sum_{i=1}^{5} I^i_{z_c} = 3,152 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^4. \tag{13}$$

- Výpočty deviačních momentů jednotlivých ploch k centrálním osám (y_c, z_c):

	$D_{z_i y_i}$ [mm^4]	$A_i \cdot (y_i - y_{c_0}) \cdot (z_i - z_{c_0})$ [mm^4]	
1	$20 \cdot 10^3$	$600 \cdot (93,3 - 42,324) \cdot (45 - 34,738) =$	$313,869 \cdot 10^3$
2	0	$900 \cdot (65 - 42,324) \cdot (40 - 34,738) =$	$107,389 \cdot 10^3$
3	0	$1500 \cdot (25 - 42,324) \cdot (40 - 34,738) =$	$-136,738 \cdot 10^3$
4	0	$981,25 \cdot (25 - 42,324) \cdot (14,38 - 34,738) =$	$346,069 \cdot 10^3$
5	0	$-353,25 \cdot (65 - 42,324) \cdot (31,37 - 34,738) =$	$26,978 \cdot 10^3$
$\sum_i$	$20 \cdot 10^3$		$657,567 \cdot 10^3$

- Výsledný deviační moment celého průřezu

$$D_{y_{c_0} z_{c_0}} = \sum_{i=1}^{5} D^i_{yz} = 0,677 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^4 \tag{14}$$

- Výpočet úhlu α_0, který se nachází mezi vodorovnou těžišťovou osou y_{c_0} a bližší z os $I_{\max}, I_{\min}$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2D_{y_{c_0}\, z_{c_0}}}{I_{z_{c_0}} - I_{y_{c_0}}} \tag{15}$$

$$\alpha_0 = 14,854^\circ \tag{16}$$

- Výpočet maximálního a minimálního momentu setrvačnosti $I_{\max}, I_{\min}$

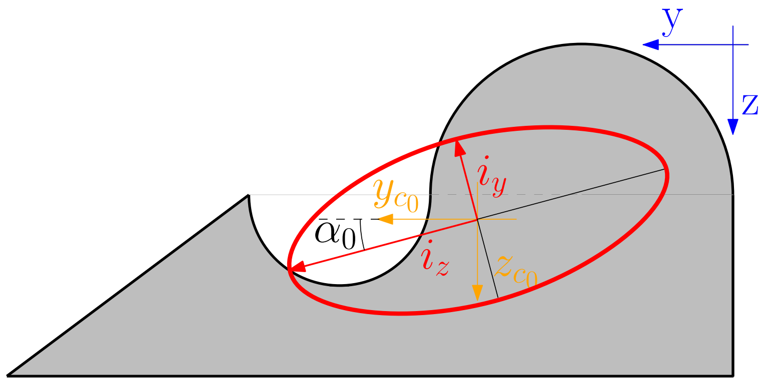
$$I_{y_0} = I_{y_{c_0}} \cdot \cos^2 \alpha_0 + I_{z_{c_0}} \cdot \sin^2 \alpha_0 - D_{y_{c_0}\, z_{c_0}} \cdot \sin 2\alpha_0 = 0,599 \cdot 10^6\, \mathrm{mm}^4 = I_{\min} \tag{17}$$

$$I_{z_0} = I_{y_{c_0}} \cdot \sin^2 \alpha_0 + I_{z_{c_0}} \cdot \cos^2 \alpha_0 + D_{y_{c_0}\, z_{c_0} v} \cdot \sin 2\alpha_0 = 3,332 \cdot 10^6\, \mathrm{mm}^4 = I_{\max} \tag{18}$$

- Výpočet maximálního a minimálního poloměru setrvačnosti $i_{\max}, i_{\min}$

$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{I_{y_0}}{A_i}} = 12,85\, \mathrm{mm} = i_{\min} \tag{19}$$

$$i_{z_0} = \sqrt{\frac{I_{z_0}}{A_i}} = 30,31\, \mathrm{mm} = i_{\max} \tag{20}$$



Obrázek 3: Vykreslení elipsy setrvačnosti.