Numerická integrace lichoběžníkovou metodou

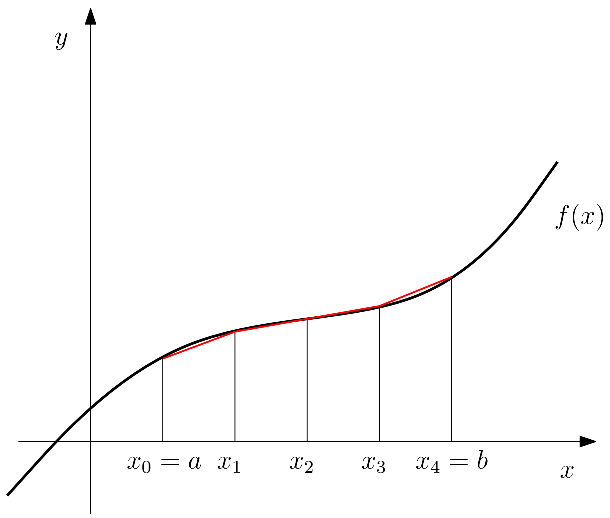
4. února 2012

Potřebujeme-li vypočítat určitý integrál, ale:

- funkci máme zadanou tabulkou a neznáme její předpis,
- máme analyticky zadanou funkci, avšak neumíme ji symbolicky zintegrovat (například Gaussův integrál),
- máme analyticky zadanou funkci, existuje symbolický integrál, avšak jeho nalezení je obtížné a zdlouhavé, pak nezbývá, než hodnotu určitého integrálu odhadnout.

Metod pro numerickou integraci existuje více: obdélníkové pravidlo, lichobežníkové pravidlo nebo Simpsonova metoda. My se zde zaměříme konkrétně na situaci, kdy známe analytický předpis zadané funkce $f(x)$ a výpočet jejího určitého integrálu na intervalu $< a; b >$ provedeme lichoběžníkovou metodou.

Výpočet touto metodou spočívá v rozdělení zadaného intervalu na $n \in \mathbb{N}$ stejně velkých intervalů. V hraničních bodech x_i jednotlivých intervalů vyhodnotíme hodnotu funkce $f(x)$. Dále na jednotlivých intervalech aproximujeme funkci $f(x)$ lineární funkcí, která se rovná funkci $f(x)$ v hraničních bodech (tyto lineární funkce jsou vyznačeny červeně na Obrázku 1). Poté spočítáme určité integrály těchto lineárních



Obrázek 1: Schéma lichoběžníkové metody

funkcí na jednotlivých intervalech, přičemž využíváme toho, že se jedná o jednoduchý výpočet plochy lichoběžníku. Odhad určitého integrálu funkce $f(x)$ na intervalu $< a; b >$ pak spočítáme jako:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2}\right). \tag{1}$$

Hlavním úskalím této metody je volba počtu intervalů n. Proto je dobré začít u malého počtu a postupně počet intervalů zdvojnásobovat rozdělením každého intervalu na polovinu. Výpočtem rozdílu mezi dvěma následujícími odhady můžeme sledovat chybu v odhadu integrálu.

Úkol: Vytvořte program, jehož pomocí odhadnete hodnotu následujícího určitého integrálu:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+\sin(x)}\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Při výpočtu začněte s jedním intervalem a postupně interval dělte a odhad zpřesňujte, dokud se poslední dva odhady nebudou lišit o více než $\epsilon = 10^{-3}$.