

Faktoriál a kombinační čísla

13. listopadu 2011

Faktoriál přirozeného čísla n je definován jako součin všech přirozených čísel menších nebo rovných n . Faktoriál nuly je roven jedné. Jeho definice lze formálně zapsat takto:

$$n! = \prod_{i=1}^n i = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1. \quad (1)$$

Úkol: Vytvořte program, který uživatele vyzve k zadání celého čísla. Poté pro dané číslo spočítá jeho faktoriál a výsledek vypíše na obrazovku. Ošetřete případy, kdy uživatel zadá nulu nebo záporné číslo. V případě zadání záporného čísla by měl program odpovědět, že pro záporná čísla není faktoriál definován.

Hodnota faktoriálu roste velmi rychle s hodnotou čísla, pro které se má vyhodnotit. Pokud budeme hodnotu faktoriálu ukládat do proměnné typu `int`, je možné stanovit, pro jak velké číslo bude program schopen faktoriál vyhodnotit.

Doplňkový úkol 1: Zjistěte, kolik bajtů n_B zabírá proměnná typu `int` v paměti Vašeho počítače pomocí funkce `sizeof()`. Poté si můžete spočítat, jak velké číslo N do ní můžete uložit podle vzorce:

$$N = 2^{8 \cdot n_B - 1} - 1. \quad (2)$$

Vyzkoušejte si, co se stane, pokud se do proměnné pokusíte uložit číslo větší. Stanovte, pro které číslo jste pomocí proměnné typu `int` schopni spočítat faktoriál.

Pomocí faktoriálu je také možné vyjádřit kombinační číslo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (3)$$

Pokud bychom při výpočtu chtěli nejprve vyčíslit jednotlivé faktoriály, které ve výrazu (3) vystupují, budeme opět velmi omezeni v hodnotách k a n , pro které bychom dokázali faktoriály spočítat. Proto je lepší výraz nejprve pokrátit:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdots 1}{k \cdot (k-1) \cdots 1 \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (k+1)}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 1} \quad (4)$$

Ve zkráceném výrazu v rovnici (4) je ve jmenovateli i v čitateli stejný počet činitelů. Abychom minimalizovali riziko, že se v průběhu vyhodnocení kombinačního čísla dostaneme do velkých hodnot, bude strategicky výhodné jednotlivé členy střídavě nejprve dělit a pak teprve násobit v tomto pořadí:

$$\binom{n}{k} = (k+1) \div 1 \cdot (k+2) \div 2 \cdot (k+3) \div 3 \cdots n \div (n-k) \quad (5)$$

Doplňkový úkol 2: Napište program, který uživatele vyzve k zadání velikosti množiny a počtu prvků v kombinacích. Poté výše popsaným způsobem vypočítá kombinační číslo a výsledek vypíše na obrazovku.