Newtonova metoda

9. února 2012

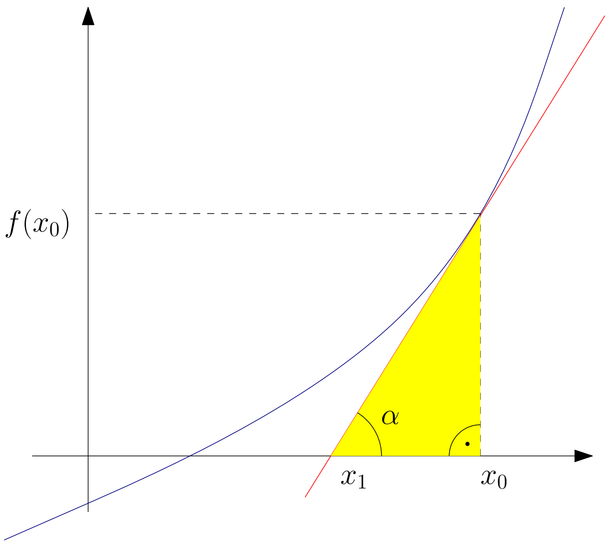
Newtonova metoda je iterační metoda, která se používá k numerickému řešení soustav nelineárních rovnic. V češtině se pro ni používají také názvy Newton-Raphsonova metoda nebo metoda tečen. Pro názornost si vysvětlíme princip této metody při řešení jedné nelineární rovnice o jedné proměnné $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je nelineární funkce x.

Jak napovídá poslední uvedený název, princip této metody spočívá v hledání průsečíku funkce $f(x)$ ve směru tečny této funkce. Použití této metody je možné pouze za určitých předpokladů:

- funkce $f(x)$ je spojitá a hladká a jsme schopni vyjádřit její derivaci $f'(x)$ na celém intervalu, na kterém hledáme její průsečík s osou x,
- funkce $f(x)$ je na tomto intervalu monotónní.

Na začátku je tedy nutné určit interval, na kterém chceme průsečík hledat, ověřit platnost výše uvedených předpokladů, zvolit počáteční řešení x_0 - hrubý odhad, kde bude řešení ležet a zvolit přesnost, se kterou chceme řešení najít.

Princip této metody vychází z následující myšlenky: jelikož nejsme schopni vyjádřit explicitně polohu průsečíku funkce $f(x)$ s osou x, předpokládáme, že se k němu přiblížíme, pokud najdeme průsečík tečny této funkce sestrojené ve zvoleném počátečním bodě, viz Obrázek 1.



Obrázek 1: Schéma Newtonovy metody

Nyní tedy hledáme explicitní vzorec pro výpočet hodnoty x_1, který odpovídá průsečíku tečny sestrojené v bodě x_0. Tečna je přímka, jejíž sklon se rovná hodnotě derivace $f'(x_0)$. Zároveň můžeme její sklon vyjádřit jako tangens úhlu α. Podíváme-li se nyní na žlutý pravoúhlý trojúhelník na Obrázku 1, zjistíme tedy, že

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)\,. \tag{1}$$

Jelikož známe (nebo jsme schopni spočítat) hodnoty x_0, $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, můžeme si z rovnice (1) vyjádřit neznámou hodnotu x_1, která představuje náš nový odhad polohy průsečíku funkce $f(x_0)$ s osou x:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \,. \tag{2}$$

Popsaný postup můžeme nyní opakovat a hledat ještě přesnější řešení. V kroku $k+1$ získáme v souladu s rovnicí (3) polohu bodu x_{k+1} z hodnot získaných v kroku předešlém:

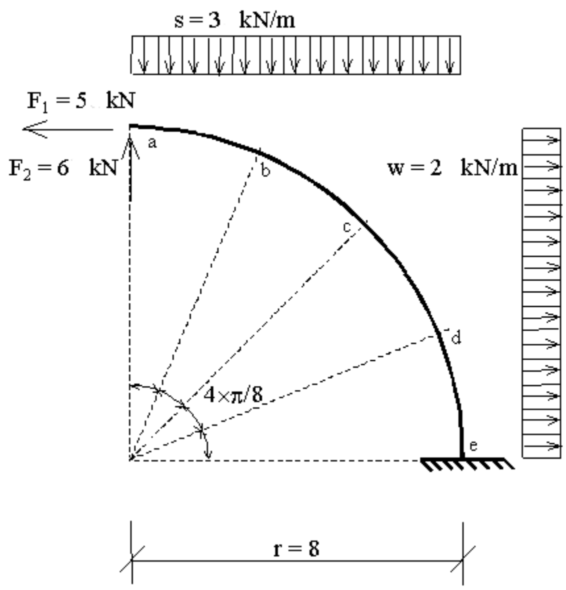
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \,. \tag{3}$$

Tento postup opakujeme, dokud je absolutní hodnota $f(x_{k+1})$ větší než požadovaná přesnost p, tedy dokud $|f(x)| > p$.

Úkol: Vytvořte program, který použijete při řešení jedné z následujících úloh Newtonovou metodou. Studenti prvního ročníku mohou zkusit vyřešit libovolnou úlohu, studenti vyšších ročníků si mohou vybrat buď druhou nebo třetí úlohu. V programu definujte pro výpočet konkrétních funkcí $f(x)$ a $f'(x)$ funkce s návratovou hodnotou. Samotný cyklus Newtonovy metody napište ve funkci `main`. Program by měl v každé iteraci vypsat číslo iterace, aktuální hodnotu řešení a odpovídající hodnotu funkce $f(x)$.

1. Najděte řešení rovnice $\mathrm{tg}(x-3)+x = 0$ na intervalu $\left(3 - \frac{\pi}{2}; 3 + \frac{\pi}{2}\right)$ s přesností $p = 10^{-6}$. Nápověda: derivace funkce $f(x) = \mathrm{tg}(x-3) + x$ je $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x-3)} + 1$.

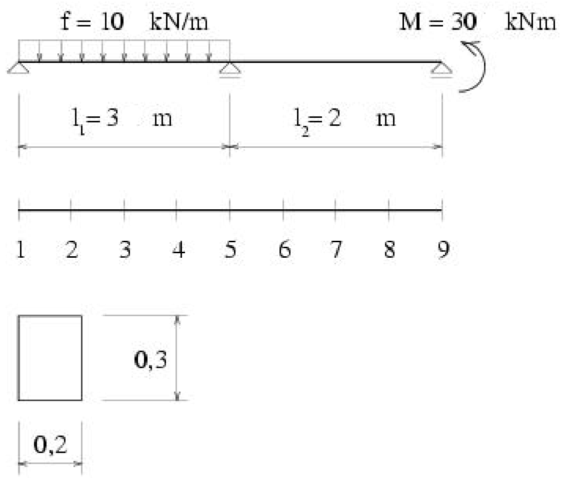
2. Najděte extrémy ohybového momentu na konstrukci znázorněné na Obrázku 2: jejich polohy a hodnoty. Pro řešení budete potřebovat analytické vyjádření ohybového momentu, posouvající síly a její derivace. Správnost těchto vztahů si můžete zkontrolovat jejich vyčíslením v bodě b: $M_b = 1.6359$ kNm a $V_b = -4.3893$ kN. Ohybový moment na této konstrukci nabývá dvou extrémů. Pro nalezení každého z nich je třeba spustit Newtonovu metodu z jiných počátečních bodů. V jednom případě můžete s hledáním začít např. v bodě a a v druhém v bodě e.



Obrázek 2: Schéma obloukové konzoly

3. Určete polohu a hodnotu maximálního průhybu konstrukce znázorněné na Obrázku 3 v intervalu $1-5$. Průhyb na intervalu $5-9$ je snadné určit analyticky, neboť funkce pootočení je pouze druhého stupně. Na intervalu $1-5$ je však funkce pooteční třetího stupně, což výpočet nulové hodnoty už

poněkud znesnadňuje a je praktické zde použít numerické řešení Newtonovou metodou. Youngův modul pružnosti použitého materiálu uvažujte $E = 30$ GPa. Pro kontrolu analytického vyjádření průhybu můžete použít hodnoty průhybu v bodě 3 : $w_3 = 2,5 \cdot 10^{-4}$ m a v bodě 7 : $w_7 = 3,194 \cdot 10^{-4}$ m.



Obrázek 3: Schéma konstrukce pro výpočet průhybu