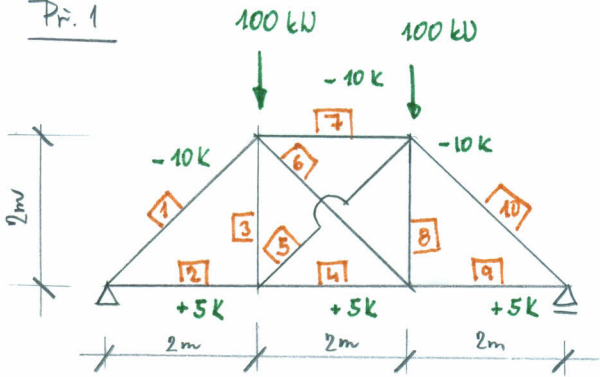


Př. 1



Určete reakce a průběh vnitřních sil na zadané konstrukci od silového zatížení a změny teploty.

$E = 210 \text{ GPa}$

$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

průřez: $20 \cdot 108 \times 3,6$

$A = 0,001181 \text{ m}^2$

$EA = 248,010 \cdot 10^6 \text{ N}$ ← tuhost průřezu v tahu/tlaču

1. určit stupeň statické neurčitosti

$s = 2n - p - r = 2 \cdot 6 - 10 - (2+1) = -1 \Rightarrow 1x \text{ staticky neurčitá konstrukce}$

↑ počet upevnění
↑ počet prutů (vnitřní vazby)
↑ počet členů

⇓
stačí odebrat pouze 1 vazbu

2. převést SNK na SUK odháněním vazeb a zavedením staticky neurčitých veličin X_i

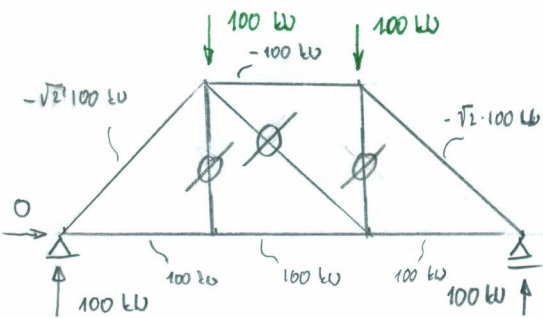
a určit průběh vnitřních sil: a) na SUK od silového zatížení

b) na SUK od $X_i = 1$

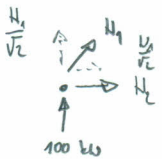
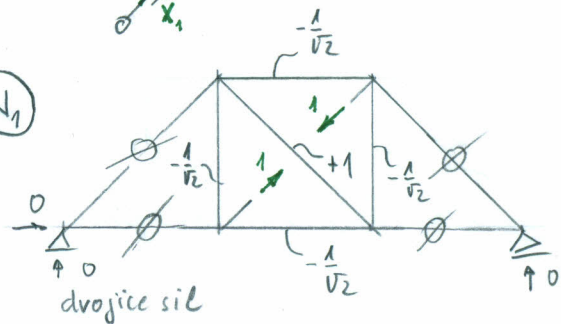
⇒ převedeme vnitřní prut č. 5, 6:



(N_0)

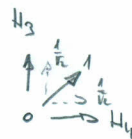


(N_1)



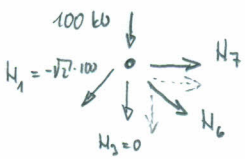
$\uparrow: 100 + \frac{H_1}{\sqrt{2}} = 0$
 $H_1 = -\sqrt{2} \cdot 100 \text{ kN}$
 $\rightarrow: H_2 + \frac{H_3}{\sqrt{2}} = 0$
 $H_2 = -\frac{H_3}{\sqrt{2}} = 100 \text{ kN}$

⇒ nezmenkají vnější reakce



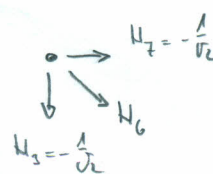
$\downarrow: -H_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow H_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\rightarrow: H_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow H_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(N_9, N_{10} podobně)



$\uparrow: -\frac{H_7}{\sqrt{2}} - H_8 - 100 - \frac{H_9}{\sqrt{2}} = 0$
 $H_8 = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2} \cdot 100}{\sqrt{2}} - 100 + 0 \right) = 0 \text{ kN}$

(podobně N_7, N_8)



$\rightarrow: H_7 + \frac{H_8}{\sqrt{2}} = 0$

$H_6 = -\sqrt{2} H_7 = -\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = -1$

(N_8, N_4 podobně)

$\rightarrow: -\frac{H_7}{\sqrt{2}} + H_7 + \frac{H_8}{\sqrt{2}} = 0$
 $H_7 = \frac{H_8}{\sqrt{2}} = -100 \text{ kN}$

3. sestavit 1st rovnice pro 1st neznámých stabiliz neuvěřitelných veličin

⇒ založeno na přetvárných podmínkách, tj. v místě odebrání reakce vynutíme nulový posun

$$0 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11}$$

δ_{ij} ... člen matice poddajnosti

~ přetvoření v místě i od jednotkového zatížení v místě j

(δ_{i0} ... přetvoření od zatížení - silového i nesilového)

přihádová ke zatížení pouze ve střednicích

⇒ vznikají pouze N

⇒ sjednotněnými výrazy pro δ_{i0} a δ_{ij} na:

$$\delta_{ij} = \int_L N_i \frac{N_j}{EA} dx$$

N po prvků konstantní

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^P N_i^{(k)} \frac{N_j^{(k)}}{EA} l_k$$

↑
půl půl

$$\delta_{i0} = \underbrace{\int_L N_i \frac{N_0}{EA} dx}_{\delta_{if}} + \underbrace{\int_L N_i \Delta T dx}_{\delta_{iT}} + \underbrace{\left(-\sum R_{xi} u_i - \sum R_{xi} w_i - \sum h_{xi} v_i \right)}_{\delta_{ir}}$$

↑
dílna k. prutu

⇒ rozhodem bu sestavit tabulku a mat α mi přivlastní hodnoty

i	N_0 [N]	N_1 [N]	ΔT [K]	l_i [m]	δ_{11}	δ_{1T}	δ_{1f}
1	$-\sqrt{2} \cdot 100 \cdot 10^3$	0	-10	$\sqrt{2} \cdot 2$	0	0	0
2	$100 \cdot 10^3$	0	+5	2	0	0	0
3	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	2	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{EA}$	0	0
4	$100 \cdot 10^3$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	+5	2	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{EA}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-5) \cdot 2 \cdot 2$	$100 \cdot 10^3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{EA}$
5	-	1	0	$\sqrt{2} \cdot 2$	$1^2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{EA}$	0	0
6	0	1	0	$\sqrt{2} \cdot 2$	$1^2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{EA}$	0	0
7	$-100 \cdot 10^3$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-10	2	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{EA}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-10) \cdot 2 \cdot 2$	$-100 \cdot 10^3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{EA}$
8	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	2	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{EA}$	0	0
9	$100 \cdot 10^3$	0	+5	2	0	0	0
10	$-\sqrt{2} \cdot 100 \cdot 10^3$	0	-10	$\sqrt{2} \cdot 2$	0	0	0

$$\sum \left[4 \cdot \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{EA} \right) + 2 \cdot \left(1^2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{EA} \right) \right] = +5\sqrt{2} \cdot 10^6 = \delta_{11}$$

$$= 3,893735897 \cdot 10^{-8} \text{ mN}^{-1}$$

$$\delta_{11} = 3,893735897 \cdot 10^{-8} \text{ mN}^{-1}$$

$$\delta_{1T} = 8,485281374 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\delta_{1f} = 0 \text{ m}$$

$$\delta_{10} = \delta_{1T} + \delta_{1f} = 8,485281374 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

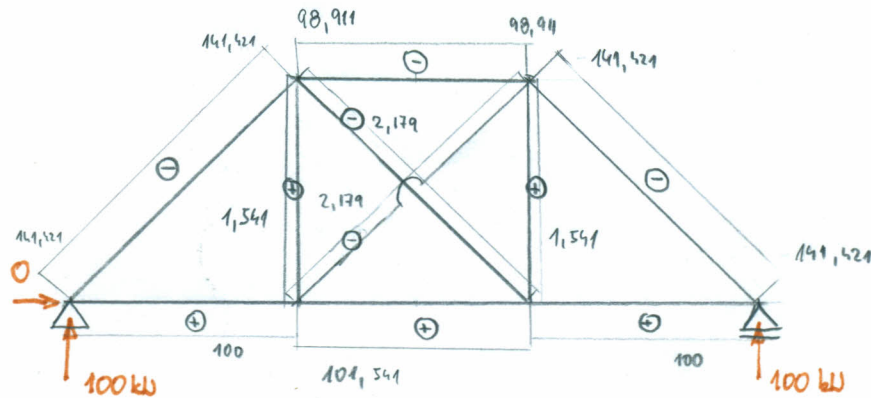
4. vyřešit rovnici / soustavu rovnic, určit reakce a průběh vnitřních sil

$$0 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} \Rightarrow X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{8,485\ 281\ 374 \cdot 10^{-5}}{3,893\ 735\ 837 \cdot 10^{-8}} = \underline{\underline{-2\ 179\ \text{N}}}$$

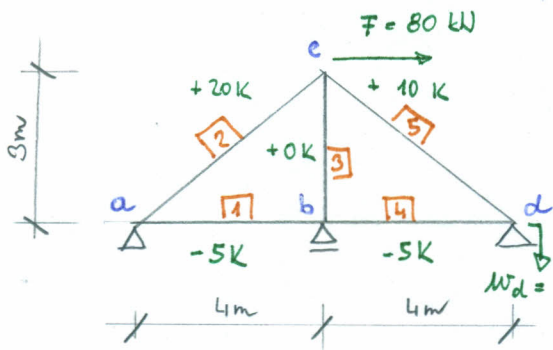
(poznámka: jelikož $\delta_{1f} = 0$, od samotného silového zatížení nevznikají v odehnané vazbě žádné síly)

\Rightarrow pro vyhledání vnitřních sil stačí použít již známé průběhy z kroku 2 a na základě již známých hodnot X_i vytvořit lineární kombinaci (tj. $N = N_0 + X_1 N_1$)

(N)
[kN]



Př. 2 Určit průběh normálových sil na SHK a reakce od: a) zatížení silou



b) zatížení teplotou
c) zatížení poklesem podpory

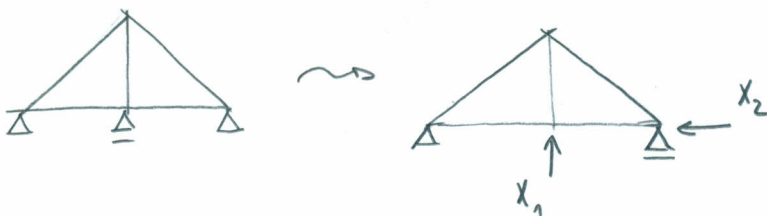
$$E = 210\ \text{GPa}$$

$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$$

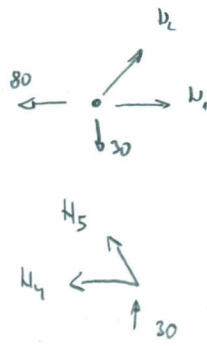
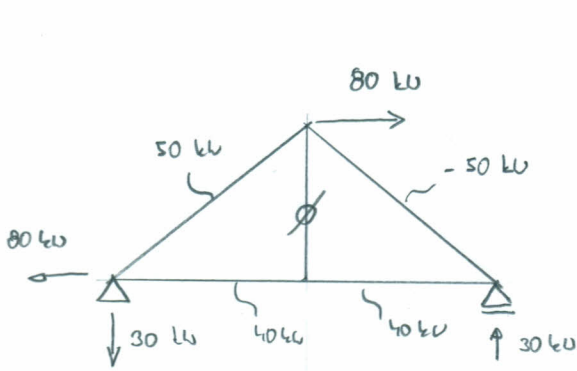
$$A = 0,001\ 181\ \text{m}^2$$

$$EA = 248,010 \cdot 10^6\ \text{N}$$

$$S = 4 \cdot 2 - 5 - 5 = -2 \Rightarrow 2 \times \text{SHK} \Rightarrow \text{nutno odehnat 2 vazby (tenzohnit vnější)}$$



(H₀)



$$\uparrow: \frac{3}{5} U_2 - 30 = 0 \Rightarrow U_2 = 50 \text{ kN}$$

$$\rightarrow -80 + \frac{4}{5} U_2 + U_1 = 0$$

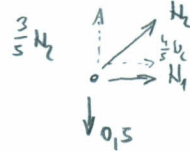
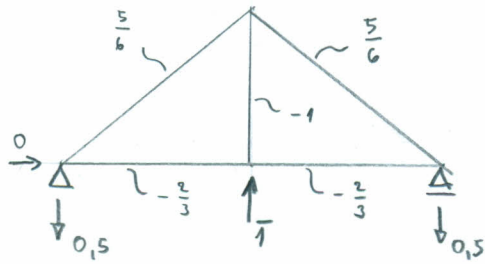
$$H_1 = 80 - \frac{4}{5} \cdot 50 = 40 \text{ kN}$$

$$\uparrow: \frac{3}{5} U_5 + 30 = 0 \Rightarrow H_5 = -50 \text{ kN}$$

$$\rightarrow -U_4 - \frac{4}{5} H_5 = 0$$

$$H_4 = -\frac{4}{5} U_5 = 40 \text{ kN}$$

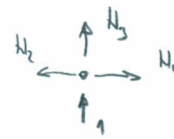
(H₁)



$$\uparrow: \frac{3}{5} H_2 - 0.5 = 0 \Rightarrow H_2 = \frac{5}{6}$$

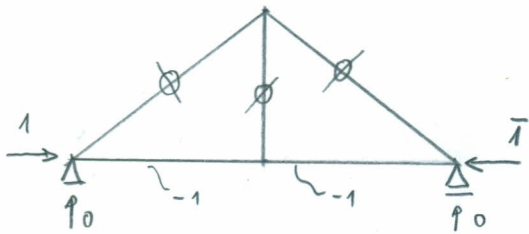
$$\rightarrow H_1 + \frac{4}{5} H_2 = 0 \Rightarrow H_1 = -\frac{4}{5} H_2 = -\frac{2}{3}$$

(obolobnē N₁, U₅)



$$\uparrow: 1 + U_3 = 0 \Rightarrow U_3 = -1$$

(H₂)



i	H ₀	H ₁	H ₂	l _i	ΔT	δ _{1f}	δ _{1T}	δ ₁₁	δ ₁₂	δ _{2f}
1	40 · 10 ³	-2/3	-1	4	-5	40 · 10 ³ · (-2/3) · 4 · 1/EA	-2/3 · (-5) · 4	(-2/3) ² · 4 · 1/EA	(-2/3) · (-1) · 4 · 1/EA	40 · 10 ³ · (-1) · 4 · 1/EA
2	50 · 10 ³	5/6	0	5	+20	50 · 10 ³ · (5/6) · 5 · 1/EA	5/6 · 20 · 5	(5/6) ² · 5 · 1/EA	0	0
3	0	-1	0	3	0	0	0	(-1) ² · 3 · 1/EA	0	0
4	40 · 10 ³	-2/3	-1	4	-5	40 · 10 ³ · (-2/3) · 4 · 1/EA	-2/3 · (-5) · 4	(-2/3) ² · 4 · 1/EA	(-2/3) · (-1) · 4 · 1/EA	40 · 10 ³ · (-1) · 4 · 1/EA
5	-50 · 10 ³	5/6	0	5	+10	-50 · 10 ³ · (5/6) · 5 · 1/EA	5/6 · 10 · 5	(5/6) ² · 5 · 1/EA	0	0
						-640 · 10 ³ / 3EA	455 / 3 α	27 / 2 · 1/EA	16 / 3 · 1/EA	-320 · 10 ³ / EA

alternatīvu bū tabulā:

$$\delta_{2T} = (-1)(-5) \cdot 4 + (-1)(-5) \cdot 4 = 40 \alpha = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ mK}^{-1}$$

$$\delta_{2r} = 0 \cdot W_{\alpha} = 0$$

$$\delta_{22} = (-1)^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{EA} + (-1)^2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{EA} = \frac{8}{EA} = 3,225 \cdot 676 \cdot 384 \cdot 10^{-8} \text{ mU}^{-1}$$

$$\delta_{1r} = -0,5 \cdot W = -0,5 \cdot 0,005 = -2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mK}^{-1}$$

$$\delta_{1f} = 8,601 \cdot 803 \cdot 691 \cdot 10^{-4} \text{ mU}^{-1}$$

$$\delta_{1T} = 1,82 \cdot 10^{-3} \text{ mU}^{-1}$$

$$\delta_{2f} = -1,290 \cdot 270 \cdot 554 \cdot 10^{-3} \text{ mU}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 5,443\ 328\ 898 \cdot 10^{-8} \text{ mU}^{-1} \\
 a_2 &= 2,150\ 450\ 923 \cdot 10^{-8} \text{ mU}^{-1} \\
 a_3 &= 3,225\ 676\ 384 \cdot 10^{-8} \text{ mU}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} \\
 0 &= \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}
 \end{aligned}$$

poznámka: pokud chceme mít reakce od jednotlivých sloupů ratierní, budeme mít:

- a) $\delta_{10} = \delta_{1f}$; $\delta_{20} = \delta_{2f}$
- b) $\delta_{10} = \delta_{1T}$; $\delta_{20} = \delta_{2T}$
- c) $\delta_{10} = \delta_{1W}$; $\delta_{20} = \delta_{2W}$

$$\begin{aligned}
 5,443\ 328\ 898 \cdot 10^{-8} X_1^f + 2,150\ 450\ 923 \cdot 10^{-8} X_2^f + 8,601\ 803\ 691 \cdot 10^{-4} &= 0 \\
 2,150\ 450\ 923 \cdot 10^{-8} X_1^f + 3,225\ 676\ 384 \cdot 10^{-8} X_2^f - 1,290\ 270\ 559 \cdot 10^{-8} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1^f &= 0 \text{ U} \\
 X_2^f &= 40\ 000 \text{ U}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5,443\ 328\ 898 \cdot 10^{-8} X_1^T + 2,150\ 450\ 923 \cdot 10^{-8} X_2^T + 1,82 \cdot 10^{-3} &= 0 \\
 2,150\ 450\ 923 \cdot 10^{-8} X_1^T + 3,225\ 676\ 384 \cdot 10^{-8} X_2^T + 4,8 \cdot 10^{-4} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1^T &= -37\ 409 \text{ U} \\
 X_2^T &= 10\ 059 \text{ U}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5,443\ 328\ 898 \cdot 10^{-8} X_1^W + 2,150\ 450\ 923 \cdot 10^{-8} X_2^W - 2,5 \cdot 10^{-3} &= 0 \\
 2,150\ 450\ 923 \cdot 10^{-8} X_1^W + 3,225\ 676\ 384 \cdot 10^{-8} X_2^W + 0 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1^W &= 62\ 349 \text{ U} \\
 X_2^W &= -41\ 566 \text{ U}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow dohromady: $X_1 = X_1^f + X_1^T + X_1^W = 24\ 940 \text{ U}$
 $X_2 = X_2^f + X_2^T + X_2^W = 8\ 493 \text{ U}$

