## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, pouze za odborného vedení vedoucího diplomové práce Ing. Jana Zemana,  $\rm Ph.D.^1$ 

Dále prohlašuji, že veškeré podklady, ze kterých jsem čerpal jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

V Praze dne 20.12.2007

Pavel Gruber

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Ing. Jan Zeman, Ph.D., České vysoké učení technické, Fakulta stavební, Katedra mechaniky, Praha

"Vývoj lidské společnosti procházel několika civilizačními epochami. Každou z nich lze charakterizovat dominantními výrobními nástroji a dominantním materiálem. Dobu kamennou vystřídala doba bronzová a po ní následovala doba železná. V současné době žijeme v době "mnohomateriálové" s dominantním betonem a ocelí a stojíme na prahu epochy materiálů kompozitních."

Z úvodu práce [16] profesora Miroslava Petrtýla<sup>2</sup>

## Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval především vedoucímu diplomové práce Ing. Janu Zemanovi, Ph.D. a to nejen za trpělivost a ochotu, kterou prokázal při vedení mé diplomové práce, ale především za jeho individuální přístup od chvíle, kdy si všiml mého zájmu o mechaniku a matematiku. Děkuji mu za to, s jakou přirozeností mě od prvního setkání vede cestou, jejímž prvním, ale doufám že ne posledním výsledkem, je tato práce.

Dále bych rád poděkoval členům katedry mechaniky a matematiky za způsob vedení jejich výuky, který měl nemalý vliv na volbu mého zaměření a tedy i na vznik této práce.

V neposlední řadě patří můj dík mé rodině, která mě během celého studia podporovala, což, jak si uvědomuji, není zcela samozřejmé.

Tato práce vznikla za podpory projektů GAČR 106/08/1379 a GAČR 106/07/1244.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Prof. Miroslav Petrtýl, České vysoké učení technické, Fakulta stavební, Katedra mechaniky, Praha

## ABSTRAKT

Podstatou této práce je homogenizace kompozitních materiálů s periodickou mikrostrukturou, zaměřená především na matematické modelování nedokonalé spojení lineárně pružných izotropních složek. Je v ní představen základ homogenizační teorie, jež vede na klasický problém mechaniky poddajných těles se specifickým zatížením a uložením zkoumaného tělesa, které nazýváme jednotkovou buňkou a jehož periodické opakování generuje zmíněnou mikrostrukturu.

Je uvedeno numerického řešení matematicko-fyzikálního problému homogenizace metodou konečných prvků a to pouze pro případ dokonalého spojení, resp. rozpojení složek. Dále je představena metoda FETI, o které se dá mluvit jako o přirozené modifikaci klasické metody konečných prvků, pomocí níž lze efektivně řešit homogenizační problém a to navíc s rozhraním složek, jež vykazuje určitou poddajnost včetně její mezní nulové a nekonečné hodnoty. Práce dále naznačuje jakým způsobem lze metodou FETI předepsat konstitutivní zákon na rozhraní složek a zmiňuje se o modifikované metodě sdružených gradientů, pomocí níž je efektivně řešen duální problém, na který tato metoda vede. Větší podrobnosti jsou uvedeny pro dvojrozměrný problém ve stavu rovinného napětí, resp. deformace s využitím CST konečných prvků.

V práci je také představen generátor sítě založený na fyzikální analogii příhradové konstrukce, o které se také mluví jako o analogii pružin (což je doslovný překlad anglického "spring analogy") a to včetně modifikací jež souvisejí s homogenizačním principem.

Na řadě numerických experimentů je nejen ověřena správnost implementace teoretické části předkládané práce do programu MATLAB, ale také ukázána odezva homogenizovaného materiálu, jež je matematicky modelován pomocí předložené teorie.

#### Jméno a příjmení autora: Pavel Gruber

Název práce: Homogenizace kompozitů s možností nedokonalého spojení složek

Typ práce: Diplomová práce

**Pracoviště:** České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, Katedra mechaniky, Thákurova 7, 166 29 Praha 6

Vedoucí práce: Ing. Jan Zeman, Ph.D.

#### Rok obhajoby práce: 2008

Klíčová slova: analogie pružin, FETI, generátor sítě, homogenizace, jednotková buňka, kompozity, kontaktní úloha, metoda sdružených gradientů, nedokonalé spojení složek, rozpojení složek

Počet stran: 133

Jazyk: Čeština

## ABSTRACT

The submitted thesis deals with homogenization of composite materials with periodic microstructure, with emphasis put on mathematical modeling of imperfect bonding between linearly isotropic phases. The work introduces elements of homogenization theory, which leads to a classical problem of mechanics of deformable bodies with a specific form of boundary data posed on a Periodic Unit Cell, which fully specifies heterogeneity of the analyzed body.

Numerical solution of mathematical and physical problem of homogenization is performed using the Finite Element Method for both cases of perfect bonding and debonding of individual phases, respectively. Next, application of the Finite Element Tearing and Interconnecting (FETI) method, which can be interpreted as a natural extension of the classical Finite Element paradigm, to the homogenization problem is introduced. It is shown that FETI allows very efficient treatment of standard homogenization problem as well as the case of composites with imperfect interfaces, including the limit zero and infinite values of interfacial compliance. The thesis further covers the algorithmic treatment of specific constitutive laws of the interfaces and presents in detail the modified Conjugate Gradient method used to find the solution of the dual problem appearing in FETI formulation. Additional details are presented for elastic composites in the states of plane stress or strain using the Constant Strain Triangle (CST) elements.

Verification of the method is performed using data available in open literature. Finally, using a number of numerical examples, a systematic study of homogenized response is performed in the framework of the developed theory.

#### Author's first name and surname: Pavel Gruber

Title: Homogenization of Composite Materials with Imperfect Bonding of Constituents

- Type of thesis: Diploma thesis
- **Department:** Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Thákurova 7, 16629 Prague 6
- Supervisor: Ing. Jan Zeman, Ph.D.
- The year of presentation: 2008
- **Keywords:** contact problem, composites, debonding, FETI, homogenization, imperfect bonding of constituents, mesh generator, modified conjugate gradient method, spring analogy, unit cell

#### Number of pages: 133

Language: Czech

# OBSAH

Seznam tabulek			ix	
Se	Seznam obrázků			x
Ι	Te	oretic	ký základ	1
K	apito	la 1:	Homogenizace	<b>2</b>
	1.1	Úvod .		2
	1.2	Jednot	ková buňka	2
	1.3	Dva po	hledy na kompozit	3
		1.3.1	Makroměřítko	3
		1.3.2	Mikroměřítko	4
	1.4	Konstit	tutivní vztah	4
		1.4.1	Silový přístup k homogenizaci	5
		1.4.2	Deformační přístup k homogenizaci	5
		1.4.3	Princip homogenizace	5
	1.5	Podmín	nky konzistence	6
		1.5.1	Konzistence pole deformace	6
	1.0	1.5.2	Konzistence pole napětí	7
	1.0	Energe	ticka podminka	7
	1.1	Kinema	aticke okrajove podminky	8
	1.8		$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	9 10
		1.8.1	Prumerna nodnota fluktuujici složky neterogennino pole deformace	10
		1.0.2	Frumerna nodnota neterogennino pole deformace	11
K	apito	la 2:	FEM	12
	2.1	Úvod .		12
	2.2	Funkcie	onál energie	12
		2.2.1	Funkcionál energie pro obecný konstitutivní vztah	13
		2.2.2	Definiční obor funkcionálu energie	14
		2.2.3	Funkcionál energie pro lineárně pružné složky	14
	2.3	Minima	alizační problém	15
	2.4	Diskret		15
		2.4.1	Spojitě aproximované veličiny	16
		2.4.2	Aproximace pomocného funkcionálu	16
	2.5	Minima	alizace aproximovaného funkcionálu	16
	2.6	Kinema	atické okrajové podmínky	17
		2.6.1	Periodické okrajové podmínky	17
		2.6.2	Dodatečná kinematická podmínka	19
	2.7	Rízené	dokonalé rozpojení složek	20

Kapitola 3:		FETI	<b>22</b>
3.1	Úvod		22
3.2	Funkci	ionál energie	22
	3.2.1	Shodné posuvy na rozhraní složek	24
	3.2.2	Předepsané rozpojení na rozhraní složek	25
	3.2.3	Funkcionál energie pro obecný konstitutivní vztah	26
	3.2.4	Definiční obor funkcionálu energie	26
	3.2.5	Funkcionál energie pro lineárně pružné složky	27
3.3	Minim	alizační problém	28
3.4	Diskre	tizace	28
	3.4.1	Spojitě aproximované veličiny	28
	3.4.2	Diskrétně aproximované veličiny	29
	3.4.3	Aproximace pomocného funkcionálu	29
3.5	Minim	alizace aproximovaného funkcionálu	29
	3.5.1	Podmínka řešitelnosti	31
	3.5.2	Vyjádření fluktuující složky posuvů pro regulární matice tuhosti $% \mathcal{N}$ .	32
	3.5.3	Vyjádření fluktuující složky posuvů pro singulární matice tuhosti $% \mathcal{T}_{\mathrm{s}}$ .	32
	3.5.4	Vyloučení fluktuující složky posuvů	34
3.6	Konsti	itutivní zákon na rozhraní složek	34
	3.6.1	Transformace do lokálního souřadného systému	35
	3.6.2	Dokonalé rozpojení na rozhraní složek	36
	3.6.3	Obecnější konstitutivní vztah na rozhraní složek	38
3.7	Příkla	dy konstitutivních vztahů	39
	3.7.1	Dokonalé rozhraní	39
	3.7.2	Konstantní poddajnost rozhraní	39
	3.7.3	Konstantní poddajnost rozhraní s počáteční pevností	40
	3.7.4	Poddajné rozhraní s počáteční pevností a omezenou duktilitou	42
	3.7.5	Další možnosti	42
3.8	Modifi	kované sdružené gradienty	43
	3.8.1	Modifikace klasické metody sdružených gradientů	43
	3.8.2	Algoritmus modifikované metody sdružených gradientů	46
0.0	3.8.3	Efektivnější vztahy	48
3.9	Kinem	aticke okrajove podminky	50
	3.9.1	Periodicke okrajove podminky	50
9.10	3.9.2	Dodatecna kinematicka podminka	51
3.10	Static	ce okrajove podminky	51
Kapitola 4:		Matice tuhosti	<b>52</b>
4.1	Úvod		52
4.2	Trojúł	nelníkové souřadnice	52
4.3	Lineár	ní bázové funkce	54
4.4	Konsti	itutivní vztahy	55
	4.4.1	Konstitutivní zákon v rovině	56
4.5	Závěr		58

Kapitola 5:		Efektivní vlastnosti	60
5.1	Úvod		60
5.2	Zobec	něný Hookeův zákon	60
	5.2.1	Ortotropní chování homogenizovaného materiálu	60
	5.2.2	Transverzálně izotropní chování homogenizovaného materiálu	61
	5.2.3	Pseudoizotropní chování homogenizovaného materiálu	61
	5.2.4	Monoklinické a anizotropní chování homogenizovaného materiálu . $% \mathcal{A}$	62
5.3	Efekti	vní matice tuhosti $\ldots \ldots \ldots$	62
	5.3.1	Dokonalé spojení složek	62
	5.3.2	Trhlina na části původního rozhraní složek	63
Kapito	ola 6:	Generátor sítě	64
6.1	Úvod		64
6.2	Původ	lní algoritmus	64
	6.2.1	Funkce vzdálenosti a popis geometrie oblasti	64
	6.2.2	Fyzikální analogie	67
	6.2.3	Funkce relativní velikosti – geometrická adaptivita	68
	6.2.4	Konstitutivní zákon	68
	6.2.5	Řešení rovnováhy – Eulerova metoda	69
	6.2.6	Okrajová podmínka	69
6.3	Gener	átor sítě	71
	6.3.1	Efektivní definice geometrie jednotkové buňky	71
	6.3.2	Vytvoření primární sítě na oblastech $\Omega_q^{\mathcal{I}}$	72
	6.3.3	Vytvoření primární sítě na oblasti $\Omega^{\mathcal{M}}$	73
	6.3.4	Periodicita	73
	6.3.5	Finální síť	73
	6.3.6	Pravotočivost	73
6.4	Kvalit	a sítě	74
II N	Jumer	rické experimenty	75
Kapito	ola 7:	Experimenty	76
7.1	Úvod	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	76
7.2	Dokor	nalé spojení složek	76

1.1	0 vou		10
7.2	Dokor	nalé spojení složek	76
	7.2.1	Konvergence FEM	78
	7.2.2	FETI v závislosti na ukončovacím kritériu MCG	80
7.3	Dokonalé rozpojení složek		83
	7.3.1	Informace o aproximované oblasti $\tilde{\Omega}^{\mathcal{UC}}$	84
	7.3.2	Efektivní matice tuhosti	85
	7.3.3	Efektivní materiálové konstanty	85
	7.3.4	Aplikace kontaktní úlohy	87
7.4	Neříze	ené rozpojení složek	92
	7.4.1	Normálová a tangenciální počáteční pevnost a následné dokonalé	
		rozpojení	93
	7.4.2	Normálová a tangenciální tuhost rozhraní	96
	7.4.3	Normálová a tangenciální tuhost rozhraní bez skoku v napětí	96

7.5 Další p	říklady	101
Kapitola 8:	Shrnutí	108
Dodatek A: A.1 Voigtov A.2 Mandel	Voigtova notace         va notace       .         lova notace       .	<b>109</b> 109 111
Dodatek B:	Výpočet pseudoinverze	112
Dodatek C:	Objemový modul tuhosti	113
Literatura		116

## SEZNAM TABULEK

7.1	Porovnání numerických výsledků získaných metodou FEM, se zaručenými	
	hodnotami.	79
7.2	Informace o aproximované oblasti $\tilde{\Omega}^{\mathcal{UC}}$	84
7.3	Závislost jednotlivých prvků matice tuhosti $C_{ii}^{\text{ef}}$ na úhlu rozpojení $\alpha$	86
7.4	Závislost homogenizovaných materiálových konstant na úhlu rozpojení $\alpha.$ .	89

# SEZNAM OBRÁZKŮ

$1.1 \\ 1.2 \\ 1.3$	Jednotková buňka – $\mathcal{UC}$ a kompozitní vzorek	3 4 10
$2.1 \\ 2.2$	Příklad jednotkové buňky, jež je reprezentována oblastí $\Omega^{\mathcal{UC}}$ Periodické okrajové podmínky	13 18
$3.1 \\ 3.2$	Oblasti $\Omega_g^{\mathcal{I}}$ reprezentující inkluze v $\mathcal{UC}$	23 24
3.3	Dekompozice hranice $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ na část $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ a část $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ .	26
3.4	Transformace uzlových neznámých v uzlech na hranici $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$	37
3.5	Konstitutivní zákon na rozhraní v případě dokonalého spojení složek	40
3.6	Konstantní poddajnost rozhraní, bez možnosti průniku složek	40
$3.7 \\ 3.8$	Rozhraní, které se po překonání počáteční pevnosti chová pružně Konstitutivní zákon rozhraní s dokonalou tuhostí až do překročení počá-	41
	teční pevnosti	42
3.9	Oblast pružného chování rozhraní	42
4.1	Plošné trojúhelníkové souřadnice.	53
$     \begin{array}{r}       6.1 \\       6.2 \\       6.3 \\       6.4 \\       6.5 \\     \end{array} $	Příklad obecné funkce vzdálenosti $d^{\Omega}(y_i)$ Příklad oblasti $\Omega$ tvaru obdélníku v prostoru $\mathbb{E}^2$ Příklad funkce vzdálenosti $d^{\Omega}(y_i)$ , která vznikla průnikem oblastí $\Omega^1$ a $\Omega^2$ . Příklad funkce vzdálenosti $d^{\Omega}(y_i)$ , která vznikla rozdílem oblastí $\Omega^1$ a $\Omega^2$ . Newtonova metoda pro obecnou konvexní funkci $f(y_i)$ dvou proměnných.	65 66 67 67 70
6.6	Newtonova metoda pro funkci vzdálenosti $d^{\Omega}(y_i)$ dvou proměnných	71
$7.1 \\ 7.2$	Geometrie $\mathcal{UC}$ , tedy oblasti $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , s dokonalým spojením složek Relativní odchylka metodou FEM aproximovaných materiálových konstant	77
72	A od hodnot A uvedených v clanku [ $i$ ]	18
1.5	mormace o kvante siti, ktere aproximuji oblast szar v nekterych experi-	80
74	Závislost počtu iterací na přesnosti se kterou isou vypočteny multiplikátory	81
7.5	Počet iterací připadající na jednu neznámou.	81
7.6	Počet iterací v závislosti na počtu neznámých.	82
7.7	Závislost relativní odchylky $\Delta C_{11}$ na přesnosti, se kterou jsou vypočteny	
	multiplikátory	82
7.8	Geometrie $\mathcal{UC},$ tedy oblasti $\Omega^{\mathcal{UC}},$ s předepsaným dokonalým rozpojením	
	složek.	83
7.9	Zavislost jednotlivých prvků matice tuhosti $C_{ij}^{\text{ei}}$ na úhlu rozpojení $\alpha$	85
1.10	Zavisiost nomogenizovanych materialovych konstant na uhlu rozpojeni $\alpha$ .	81

7.11	Módy zatížení, pomocí nichž byly zjišťovány efektivní vlastnosti v tahu bez uvážení kontaktní úlohy.	88
7.12	Rozdíl v makroskopickém napětí, které odpovídá 20% smykové makrosko-	
	pické deformaci s a bez uvážení kontaktní úlohy	89
7.13	Fluktuující složka deformace $\mathcal{UC}$ odpovídající 20% smykové makroskopické	
	deformaci	90
7.14	Celková deformace $\mathcal{UC}$ odpovídající 20% smykové makroskopické deformaci.	91
7.15	Pracovní diagram homogenizovaných materiálů s rozdílnou normálovou a	
	shodnou tangenciální počáteční pevností na rozhraní.	93
7.16	Pracovní diagram homogenizovaných materiálů s rozdílnou normálovou a	
	nekonečnou tangenciální počáteční pevností na rozhraní.	94
7.17	Pracovní diagram homogenizovaných materiálů s rozdílnou tangenciální a	
	shodnou normálovou počáteční pevností na rozhraní.	95
7.18	Odtržení inkluze od matrice ve směru kolmém na zatížení	96
7.19	Rozdíl v rychlosti rozvoje trhliny, způsobený různým poměrem počátečních	~ -
	pevností	97
7.20	Pracovní diagram homogenizovaných materiálů s rozdílnou poddajností na	0.0
7.01	rozhrani - 1.	98
7.21	Pracovní diagram homogenizovaných materialu s rozdilnou schopnosti duk-	00
7 00	tility na rozhrani.	99
1.22	Pracovní diagram nomogenizovaných materialu s rozdilnou poddajnosti na	100
7 99	roznrani - 2.	100
1.23	tlaku a tahu	109
7 94	Bozdíl v colková doformaci <i>UC</i> jož je zatížena makroskonickou doformací	102
1.24	$\lambda$ ktorá je kombinací tlaku a tahu	103
7 25	Ntera je komolnaci naku a tanu. $\dots$	100
1.20	binací tlaku a tahu	104
7.26	Postupné přitěžování UC makroskopickou deformací která je kombinací	101
1.20	tlaku tahu i smyku	105
7.27	Rozdíl v celkové deformaci $\mathcal{UC}$ , jež je zatížena makroskopickou deformací.	100
	která je kombinací tlaku, tahu i smyku	106
7.28	Detail rozhraní $\mathcal{UC}$ , jež je zatížena makroskopickou deformací, která je kom-	
	binací tlaku, tahu i smyku.	107
	· •	

## ÚVOD

#### Kompozitní materiály

Obor kompozitních materiálů, neboli materiálů složených alespoň ze dvou složek odlišných mechanických vlastností, je velice široký. Mezi tradiční, ve stavební praxi běžně používané kompozitní materiály patří železobeton (ale také prostý beton, laminát a když budeme ve zkoumání materiálů důslední, pak také dřevo a jiné materiály, které působí na první pohled homogenně). Konstrukce ze železobetonu využívají dobrých mechanických vlastností složek, jakými jsou v případě betonu jeho pevnost v tlaku, odolnost vůči agresivnímu prostředí, možnost přizpůsobit tvar téměř libovolné formě a v případě oceli vysoká pevnost v tlaku i tahu. Naopak eliminují nepříznivé vlastnosti betonu, jakými jsou jeho křehkost a nízká pevnost v tahu, i špatná odolnost oceli vůči agresivnímu prostředí a vysokým teplotám.

I když uvedený výčet není kompletní, mělo by z něho být patrné, že výsledný kompozitní materiál – železobeton, je vytvořen s myšlenkou využít dobrých mechanických a fyzikálních vlastností složek, s potlačením jejich nepříznivých vlastností, tedy s myšlenkou, která je společná všem kompozitním materiálům, používaným v technické praxi.

#### Motivace a cíl práce

Výsledky této práce lze zobecnit na veškeré kompozity, práce je však motivována kompozity například z uhlíkových, hořčíkových nebo skleněných vláken, ze kterých se vyrábějí extrémně pevné a lehké kompozity. Uvedená vlákna mají z mechanického hlediska (pevnost, tuhost) řádově vyšší parametry než třeba ocel, většinou je pro ně ale charakteristická křehkost. Matrice kompozitu, která slouží převážně jako pojivo inkluzí, jak někdy nazýváme zmíněná vlákna, má řádově horší mechanické vlastnosti než inkluze. Navíc informace o geometrii na mikroúrovni těchto materiálu a informace o materiálových charakteristikách jeho složek jsou většinou velmi přesné (ani náhodná geometrie na mikroúrovni není překážkou). S výše uvedenými charakteristikami souvisí také vysoká cena kompozitů. Dá se říci, že tyto kompozitní materiály jsou oproti běžně používaným konstrukčním materiálům, jak z technického, tak ekonomického hlediska, novým vývojovým stupněm v materiálovém inženýrství.

Uvedené vlastnosti podněcují opodstatněnost důkladného matematického modelování těchto materiálů, jelikož vstupní hodnoty používané ve výpočtu jsou většinou zaručeny s vysokou přesností a ekonomičnost numerických experimentů je oproti skutečným, většinou destruktivním zkouškám zřejmá. Vyplatí se tudíž zdokonalovat matematické modely, pomocí nichž lze předpovědět chování materiálu s co nejvyšší mírou přesnosti (u běžných materiálů může přesné matematické modelování s ohledem na nejisté vstupní parametry ztrácet význam).

Cílem této práce je předvést jakým způsobem lze kompozitní materiály matematicky modelovat, přesněji řečeno homogenizovat, neboli nahradit jejich heterogenní mikrostrukturu homogenním materiálem. Její pozornost je zaměřena především na modelování rozhraní jednotlivých složek, na možnost počátečního nedokonalého spojení složek, jejich rozpojení způsobené zatížením a zamezení možnému průniku, dále předepsání poddajnosti s možností omezení duktility rozhraní. Obecněji řečeno na předpis fyzikálního vztahu na rozhraní složek. Cílem této práce však není zkoumat jaký vliv má konstitutivní vztah na chování kompozitu jako celku, i když některé uvedené experimentální výsledky tyto myšlenky podněcují.

#### Členění práce

Práce je členěna do dvou hlavních tematických celků a to na část teoretickou, ve které je představen teoretický základ, který je ve druhé části ověřen numerickými experimenty. K práci jsou dále připojeny tři dodatky, které úzce souvisí s tématem, jsou však odděleny od hlavních částí z důvodu vyšší přehlednosti a plynulosti předkládané práce.

Část, která se zabývá teoretickým základem, je dále rozdělena do šesti kapitol. První kapitola nazvaná "Homogenizace" je zaměřena na kompozity s periodickou mikrostrukturou. Tento omezující předpoklad o mikroskopické geometrii vzorku je zaveden pouze z důvodu jednoduché homogenizační teorie, jež má usnadnit cestu k cíli, kterým je předpis obecnějšího fyzikálního vztahu na rozhraní složek. Pro jednoduchost jsou navíc v celé práci jednotlivé složky uvažovány lineárně pružné a je použita teorie malých deformací.

Druhá a třetí kapitola, tedy kapitola "FEM" a "FETI" spolu úzce souvisejí, jelikož mají obdobný cíl, kterým je numerické řešení Lagrangeova principu, ve kterém je funkcionál energie modifikován s ohledem na homogenizační teorii uvedenou v první kapitole. Metoda FEM je využita pouze k řešení kompozitů s dokonalým spojením či rozpojením složek a slouží především jako úvod k metodě FETI a k ověření numerických experimentů získaných právě metodou FETI. Metoda FETI je v této práci používána poněkud netradičním způsobem, ve kterém je využita znalost silových podmínek na hranici jednotlivých oblastí, které vznikly dekompozicí oblasti původní. I když se nejedná o úplnou novinku v naznačeném využití této metody, které bylo již použito například v článcích [5] a [12] nebo v diplomové práci [20], jde o diametrálně odlišné použití metody FETI, než k účelu snížení velikosti problémů, kterému je běžně používána (viz [11]).

Kapitola nazvaná "Matice tuhosti a vektor pravých stran na jednotlivých elementech", která je v pořadí čtvrtá, uvádí podrobnosti k implementaci metody FEM a FETI s využitím CST prvků při rovinné deformaci a rovinném napětí lineárně elastických izotropních složek.

Pátá kapitola nazvaná "Efektivní vlastnosti" ukazuje, jakým způsobem lze získat efektivní materiálové charakteristiky homogenizovaného materiálu, nebo přímo jeho matici materiálové tuhosti. A zaobírá se způsobem odezvy homogenizovaného materiálu na působící zatížení,

Šestá a zároveň poslední teoretická kapitola "Generátor sítě" představuje základní myšlenky na kterých je založen implementovaný generátor sítě, jež funguje na fyzikální analogii se soustavou pružin, o které se v anglicky psaných publikacích mluví jako o "spring analogy".

# Část I Teoretický základ

## Kapitola 1

## HOMOGENIZACE

#### 1.1 Úvod

Mluvíme-li o homogenizaci určitého kompozitního vzorku, tedy vzorku z heterogenního materiálu, pak je naším cílem nahrazení jeho heterogenní struktury homogenním materiálem. Od nového homogenního materiálu požadujeme, aby co nejlépe nahradil původní heterogenní materiál z hlediska mechanického chování vzorku jako celku.

Existuje řada přibližných metod, jež z vlastností jednotlivých složek a jejich rozložení v kompozitu určují jejich efektivní vlastnosti (vlastnosti homogenizovaného vzorku). Pro lineární materiálové chování jednotlivých složek jsou známé například vztahy, které odvodili Hashin a Shtrikman [8] či Hill [9], [17, str. 9–20].

Jak již bylo zmíněno v úvodní kapitole, bude naším cílem homogenizovat také heterogenní materiály, u nichž může dojít k rozpojení jednotlivých složek ať už vlivem zatížení, nebo jejich nedokonalého počátečního spojení.

Celá tato práce je zaměřena na kompozity s periodickou mikrostrukturou [14], o kterých mluvíme jako o periodických kompozitech. Odvozené vztahy lze použít pro obecnější materiálové systémy, teoretický základ homogenizace periodických kompozitů je totiž shodný s teoretickým základem kompozitů s náhodným rozmístěním složek.

#### 1.2 Jednotková buňka

U kompozitů s periodickou mikrostrukturou používáme pojem jednotková buňka, dále jen  $\mathcal{UC}$  (Unit Cell), ve stejném významu jako u kompozitů s náhodnou mikrostrukturou pojmu reprezentativní objemový prvek, dále jen  $\mathcal{RVE}$  (Representative Volume Element).  $\mathcal{UC}$  musí být vybrána tak, aby její periodické opakování generovalo mikrostrukturu daného kompozitního vzorku. Periodický kompozit je poté jednoznačně definován touto  $\mathcal{UC}$  a n směry invariance v Euklidovském prostoru  $\mathbb{E}^n$ .

V teorii homogenizace se předpokládá, že materiálové charakteristiky jednotlivých složek kompozitu jsou známé. U kompozitu s periodickou mikrostrukturou je (navíc oproti kompozitům s náhodnou mikrostrukturou) jednoznačně dána poloha a geometrie jednotlivých složek. Ve výše uvedeném spočívá základní rozdíl mezi  $\mathcal{RVE}$  náhodného kompozitu a  $\mathcal{UC}$  kompozitu periodického. Zatímco v případě  $\mathcal{RVE}$  jsou informace o geometrii známy jen ze statistických informací, v případě  $\mathcal{UC}$  jsou dány jednoznačně.

Je zřejmé, že shodnou periodickou mikrostrukturu kompozitního materiálu lze získat periodickým opakováním různých  $\mathcal{UC}$ , z čehož vyplývá, že  $\mathcal{UC}$  není dána jednoznačně. Avšak efektivní vlastnosti kompozitu získané z různých  $\mathcal{UC}$ , jež generují shodnou mikrostrukturu, jsou shodné. Volba  $\mathcal{UC}$  je mnohdy motivována numerickým řešením lokálního problému, kdy lze například využít její geometrické a materiálové symetrie. Také obtížnost aplikace periodických okrajových podmínek závisí na volbě  $\mathcal{UC}$ . Z pohledu numerického řešení lokálního pohledu bývá výhodné, pokud má  $\mathcal{UC}$  v prostoru  $\mathbb{E}^3$  tvar kvádru a v



Obrázek 1.1: Jednotková buňka –  $\mathcal{UC}$ a kompozitní vzorek.

prostoru  $\mathbb{E}^2$ obdélníkový tvar. V další části textu se budeme zabývat jen $\mathcal{UC},$  jež mají tento tvar.

Oblast, jež v matematickém modelu reprezentuje kompozitní vzorek, resp. jednotkovou buňku označíme  $\Omega^{\mathcal{C}}$ , resp.  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  a symbolem  $\Gamma^{\mathcal{C}}$ , resp.  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  označíme hranici této oblasti. Zavedené značení pro konkrétně zvolenou  $\mathcal{UC}$ , jež generuje mikrostrukturu kompozitního vzorku v Euklidovském prostoru  $\mathbb{E}^2$ , je dokumentováno na obrázku 1.1.

## 1.3 Dva pohledy na kompozit

Než přistoupíme k samotnému principu homogenizace, je třeba zavést dva pojmy, kterými jsou mikroměřítko a makroměřítko. V podstatě se jedná o dva abstraktní pohledy na jeden a tentýž vzorek kompozitu.

## 1.3.1 Makroměřítko

Představme si vzorek kompozitu s periodickou mikrostrukturou. Sledujeme-li toto těleso z dostatečné vzdálenosti tak, aby jsme již nerozeznali jednotlivé složky, můžeme o tomto vzorku uvažovat jako o tělese z homogenního materiálu. Materiál a tudíž i těleso je tzv. homogenizováno a jeho chování je sledováno v tzv. makroměřítku, resp. na makroúrovni. Polohu bodu v homogenizovaném tělese, tady v makroměřítku, budeme určovat vektorem  $x_i$ .

Je-li homogenizované těleso na jeho hranici zatíženo tak, že je uvnitř něho vynucena deformace, budeme o této deformaci mluvit jako o homogenní či makroskopické deformaci a budeme ji značit  $E_{ij}(x_k)$ . Homogenní deformace  $E_{ij}$  je v tělese doprovázena odpovídajícím polem napětí, o kterém budeme mluvit jako o homogenním či makroskopickém napětí a budeme jej značit  $\Sigma_{ij}(x_k)$ .



Obrázek 1.2: Princip homogenizace. Obrázek znázorňuje příklad kompozitu v prostoru  $\mathbb{E}^2$ , kde přechodem barev v oblasti  $\Omega^{\mathcal{C}}$ , jež reprezentuje vzorek kompozitu, je naznačeno, že používáme makroskopický pohled na vzorek, při kterém dochází ke splynutí jednotlivých složek.

Konstitutivní vztah mezi homogenní deformací  $E_{ij}$  a homogenním napětím  $\Sigma_{ij}$  nazýváme homogenizovaný či efektivní konstitutivní vztah.

## 1.3.2 Mikroměřítko

Nyní se na vzorek kompozitu podívejme důkladněji, tedy tak, abychom již rozeznali jednotlivé složky. V takovém případě materiál zkoumáme v tzv. mikroměřítku, resp. mikroúrovni, ve kterém budeme polohu bodu určovat vektorem  $y_i$ . Na této úrovni již nelze o tělese uvažovat jako o homogenním.

Budeme-li dále předpokládat, že je vzorek vlivem zatížení vystaven deformaci, budeme o této deformaci mluvit jako o heterogenní či mikroskopické deformaci a značit  $\varepsilon_{ij}(y_k)$ . Pole napětí jež odpovídá mikroskopické deformaci  $\varepsilon_{ij}$ , zřejmě heterogenní či mikroskopické napětí, označíme  $\sigma_{ij}(y_k)$ .

O dvou možných pohledech na kompozit, včetně zavedeného značení, si lze udělat názornou představu pomocí obrázku 1.2.

## 1.4 Homogenizovaný konstitutivní vztah

Cílem homogenizace je určit konstitutivní vztah pro homogenizované těleso, nazývaný efektivní či homogenizovaný konstitutivní vztah. Tento vztah získáme ze znalosti geometrie a konstitutivních vztahů jednotlivých složek na mikroměřítku. Konstitutivní vztah pro homogenizované těleso, tedy vztah mezi homogenní deformací  $E_{ij}$  a homogenním napětím  $\Sigma_{ij}$  získáme procedurou, které budeme říkat homogenizace. V zásadě jsou možné

dva přístupy k homogenizaci.

#### 1.4.1 Silový přístup k homogenizaci

V prvním případě je naším cílem určit neznámé pole homogenní deformace  $E_{ij}$  ze známého pole homogenního napětí  $\Sigma_{ij}$ , což lze formálně vyjádřit pomocí hustoty komplementární energie  $W^*(\Sigma_{ij})$  takto

$$E_{ij} = W^*_{,ij} \left( \Sigma_{kl} \right). \tag{1.1}$$

S využitím Voigtovy notace (část A) můžeme předchozí vztahy uvést v přehlednějším tvaru

$$E_i = W_i^* \left( \Sigma_j \right). \tag{1.2}$$

Tento přístup je analogický silové metodě.

#### 1.4.2 Deformační přístup k homogenizaci

Ve druhém případě je naším cílem určit neznámé pole homogenního napětí  $\Sigma_{ij}$  ze známého pole homogenní deformace  $E_{ij}$ , což lze formálně vyjádřit pomocí hustoty deformační energie  $W(E_{ij})$ , tedy (pro větší názornost je rovnou zavedena Voigtova notace)

$$\Sigma_i = W_{,i} \left( E_j \right). \tag{1.3}$$

Tento přístup je analogický deformační metodě.

Dále se budeme věnovat pouze deformačnímu přístupu k homogenizaci, který je založen na následujících úvahách. Nechť je vzorek kompozitu na makroúrovni vystaven homogennímu poli deformace  $E_{ij}$ , poté můžeme toto těleso zkoumat podrobněji a zjistit, že tento stav zatížení vyvolal na mikroměřítku určitý stav heterogenního napětí  $\sigma_{ij}$ . Nyní se na průběh tohoto napětí podívejme na makroměřítku, tedy tak, abychom mohli zanedbat fluktuující složku tohoto pole, poté můžeme toto napětí považovat za homogenní napětí  $\Sigma_{ij}$ .

Tato úvaha nám dává návod, jak z homogenního pole deformace  $E_{ij}$  určit homogenní pole napětí  $\Sigma_{ij}$ . Měli bychom v celém vzorku zatížit jednotlivé oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  odpovídajícími homogenními deformacemi  $E_{ij}$ , ze znalosti geometrie  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  a konstitutivních vztahů pro jednotlivé složky určit průběh heterogenního napětí  $\sigma_{ij}$  na všech  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  a poté na jednotlivých oblastech  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  vypočítat průměrnou hodnotu heterogenního napětí  $\sigma_{ij}$ . Tyto průměrné hodnoty heterogenního napětí  $\sigma_{ij}$  považovat za hodnoty homogenního napětí  $\Sigma_{ij}$  v bodech  $x_i$ , jež odpovídají jednotlivým oblastem  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ .

Je zřejmé, že touto procedurou bychom sice určili ze známé homogenní deformace  $E_{ij}$  hledané homogenní napětí  $\Sigma_{ij}$ , úlohu bychom ale museli řešit na celém heterogenním tělese. Tento způsob zjištění homogenního napětí  $\Sigma_{ij}$  z homogenní deformace  $E_{ij}$  by byl výpočetně stejně náročný, jako kdybychom řešili úlohu mechaniky přímo na tělese heterogenním.

#### 1.4.3 Princip homogenizace

Princip homogenizace, který je názorně naznačen na obrázku 1.2, využívá předešlých úvah, ale neřeší naznačenou úlohu na celém kompozitním tělese, ale vždy jen pro jednu  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ . Za tímto účelem je nutné nahradit okolí  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  vhodnými okrajovými podmínkami na hranici

 $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ . Použité okrajové podmínky, jak se ukáže dále, není možné volit zcela libovolně, ale musejí vyhovovat určitým energetickým a konzistentním podmínkám. Řešení této okrajové úlohy budeme dále nazývat lokálním problémem.

#### 1.5 Podmínky konzistence

I když používáme dva pohledy na kompozit, musíme si uvědomit, že se stále jedná o jeden a tentýž materiál, tudíž musí být mezi těmito pohledy zachována konzistence. Uvažujme, že bod  $x_i$  je reprezentován na mikroúrovni oblastí  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , jak je zřejmé z obrázku 1.2. Chceme-li zaručit konzistenci na obou úrovních, musíme zajistit, aby hodnota homogenní deformace  $E_{ij}(x_k)$ , resp. homogenního napětí  $\Sigma_{ij}(x_k)$  v bodě  $x_i$  odpovídala hodnotě heterogenní deformace  $\varepsilon_{ij}(y_k)$ , resp. heterogenního napětí  $\sigma_{ij}(y_k)$  na oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ . Jelikož je ale na mikroúrovni bod  $x_i$  reprezentován oblastí  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , můžeme zajistit konzistenci na mikroměřítku, tedy na oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , pouze v průměru.

Symbolem  $\langle f \rangle$  označíme průměrnou hodnotu funkce  $f(y_i)$  na obecné oblasti  $\Omega$  z prostoru  $\mathbb{E}^n$  danou vztahem

$$\langle f \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\Omega,$$
 (1.4)

kde  $|\Omega|$  značí v  $\mathbb{E}^1$  délku oblasti  $\Omega$ , v  $\mathbb{E}^2$  plochu oblasti  $\Omega$  a v  $\mathbb{E}^3$  objem oblasti  $\Omega$ . Ve vztahu (1.4) nezáleží na tom, zda je funkce f funkcí skalární, vektorovou nebo tenzorovou.

Podmínku konzistence pro pole deformace, resp. pole napětí poté zapíšeme ve tvaru

$$\langle \varepsilon_{ij}(y_k) \rangle = E_{ij}(x_k), \quad \forall y_k \in \Omega^{\mathcal{UC}}, \quad \forall x_k \in \Omega,$$
 (1.5)

resp.

$$\langle \sigma_{ij}(y_k) \rangle = \Sigma_{ij}(x_k), \quad \forall y_k \in \Omega^{\mathcal{UC}}, \quad \forall x_k \in \Omega.$$
 (1.6)

#### 1.5.1 Konzistence pole deformace

V deformačním přístupu považujeme homogenní deformaci  $E_{ij}$  na makroměřítku za známou a její hodnota vstupuje na mikroměřítko jako zobecněné zatížení. Jelikož musíme zaručit konzistenci pole deformace mezi oběma úrovněmi, je zřejmé, že na průběh mikroskopické deformace  $\varepsilon_{ij}$  musíme klást určité požadavky. Pro tyto účely uvažujme průběh mikroskopické deformace  $\varepsilon_{ij}(y_k)$  na  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , jež odpovídá bodu  $x_i$ , ve tvaru

$$\varepsilon_{ij}(y_k) = E_{ij}(x_k) + \varepsilon_{ij}^*(y_k), \quad \forall y_k \in \Omega^{\mathcal{UC}},$$
(1.7)

kde tenzor  $\varepsilon_{ij}^*(y_k)$  je tzv. fluktuující složka mikroskopické deformace  $\varepsilon_{ij}(y_k)$ , která je způsobena právě heterogenitou kompozitního vzorku na mikroúrovni. Poté k zajištění podmínky (1.5), o které můžeme mluvit jako o zobecněné geometrické okrajové podmínce, je nutné, aby

$$\langle \varepsilon_{ij}^* \left( y_k \right) \rangle = 0_{ij}, \tag{1.8}$$

což je zřejmé ze vztahu (1.7) pro dekompozici mikroskopické deformace  $\varepsilon_{ij}$ .

Přistoupíme-li k průměrování fluktuující složky deformace  $\varepsilon_{ij}^*$  na oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  s využitím geometrických rovnic pro malé deformace (viz [24, str. 9–11] nebo [3, str. 149–162])

$$\langle \varepsilon_{ij}^* \rangle = \frac{1}{|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \varepsilon_{ij}^* \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} = \frac{1}{2|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \left( u_{i,j}^* + u_{j,i}^* \right) \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}},\tag{1.9}$$

a použijeme-li následovně Gaussovu větu (více o Gaussově větě například v [3, str. 53–57])

$$\int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} u_{i,j}^* \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} = \oint_{\Gamma^{\mathcal{UC}}} u_i^* n_j^{\Omega^{\mathcal{UC}}} \,\mathrm{d}\Gamma^{\mathcal{UC}},\tag{1.10}$$

kde symbolem  $n_i^{\Omega^{UC}}$  značíme vnější normálu k hranici  $\Gamma^{UC}$ , jež přísluší oblasti  $\Omega^{UC}$ , potom získáme podmínku

$$\langle \varepsilon_{ij}^* \rangle = \frac{1}{2|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \oint_{\Gamma^{\mathcal{UC}}} \left( u_i^* n_j^{\Omega^{\mathcal{UC}}} + u_j^* n_i^{\Omega^{\mathcal{UC}}} \right) \, \mathrm{d}\Gamma^{\mathcal{UC}} = 0_{ij}, \tag{1.11}$$

kterou musí funkce  $u_i^*(y_j)$  splňovat na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ , aby bylo pole deformace konzistentní. Ze vztahu (1.11) plyne, že splnění podmínky (1.5) je závislé pouze na hodnotě fluktuující složky pole posuvů  $u_i^*$  na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ .

#### 1.5.2 Konzistence pole napětí

Konzistenci pole napětí již zaručíme snadněji, než v případě pole deformace. Jelikož zaručujeme konzistenci až ve chvíli, kdy známe průběh heterogenního pole napětí  $\sigma_{ij}$ , splníme podmínku (1.6) přímo jeho průměrováním na oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , tedy

$$\langle \sigma_{ij}(y_k) \rangle = \Sigma_{ij}(x_k), \quad \forall y_k \in \Omega^{\mathcal{UC}}, \quad \forall x_k \in \Omega.$$
 (1.12)

Výpočet průměrného heterogenního napětí  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  lze provést přímo dle definice (1.4), tedy

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \sigma_{ij} \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}},$$
 (1.13)

ale v praktických příkladech je výhodnější níže uvedený vztah, který přímo plyne z Gaussovy věty [3, str. 53–57]

$$\int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \sigma_{ij} \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} = \oint_{\Gamma^{\mathcal{UC}}} \sigma_{ip} n_p^{\Omega^{\mathcal{UC}}} y_j \,\mathrm{d}\Gamma^{\mathcal{UC}},\tag{1.14}$$

jelikož nemusíme integrovat přes celou oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , ale jen přes hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ . Pomocí tohoto výrazu lze dokonce vypočítat průměrné heterogenní napětí  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  na oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , která obsahuje dokonale tuhé inkluze, na kterých není heterogenní napětí  $\sigma_{ij}$  definováno.

#### 1.6 Energetická podmínka

Poslední požadavek, který budeme klást na pole deformace a pole napětí pro zajištění shody na obou úrovních, bude požadavek energetický. Požadujeme, aby energie vnitřních sil  $\sum_{ij} (x_k) E_{ij} (x_k)$  v bodě  $x_i$ , tedy na makroměřítku, byla totožná s průměrnou energií vnitřních sil  $\langle \sigma_{ij} (y_k) \varepsilon_{ij} (y_k) \rangle$  na oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , jež odpovídá bodu  $x_i$ , tedy na odpovídajícím místě na mikroměřítku. Člen odpovídající mikroměřítku, v podmínce

$$\Sigma_{ij} E_{ij} = \langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle, \qquad (1.15)$$

která je matematickým vyjádřením předchozí věty a bývá také nazývána Hillovo lemma dále upravíme s využitím dekompozice heterogenního pole deformace  $\varepsilon_{ij}$  dle výrazu (1.7) následovně

$$\langle \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\rangle = \langle \sigma_{ij}\left(E_{ij} + \varepsilon_{ij}^*\right)\rangle = \langle \sigma_{ij}E_{ij}\rangle + \langle \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^*\rangle = \Sigma_{ij}E_{ij} + \langle \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^*\rangle, \qquad (1.16)$$

z čehož vyplývá, že ke splnění energetické podmínky (1.15) musí být splněna identita

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \rangle = 0. \tag{1.17}$$

Pro $\langle\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^*\rangle,$ s využitím geometrických rovnic pro malé deformace, platí

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \rangle = \frac{1}{\Omega^{\mathcal{UC}}} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} = \frac{1}{2|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \sigma_{ij} \left( u_{i,j}^* + u_{j,i}^* \right) \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}}.$$
 (1.18)

Použitím Gaussovy věty [3, str. 53–57], věty o derivování součinu a předpokladu, že heterogenní pole napětí  $\sigma_{ij}$  je samorovnovážné ( $\sigma_{ij,j}=0_i$ ), tedy

$$\int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \sigma_{ij} u_{i,j}^* \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} = \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \left( \sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ij,j} u_i^* \right) \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} = \oint_{\Gamma^{\mathcal{UC}}} \sigma_{ij} u_i^* n_j^{\Omega^{\mathcal{UC}}} \,\mathrm{d}\Gamma^{\mathcal{UC}}, \tag{1.19}$$

dostaneme nový vztah pro  $\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \rangle$ , jež je dán následujícím předpisem

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \rangle = \frac{1}{2|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \oint_{\Gamma^{\mathcal{UC}}} \left( \sigma_{ij} u_i^* n_j^{\Omega^{\mathcal{UC}}} + \sigma_{ij} u_j^* n_i^{\Omega^{\mathcal{UC}}} \right) \, \mathrm{d}\Gamma^{\mathcal{UC}},\tag{1.20}$$

ve kterém využijeme rovnosti

$$\sigma_{ij}u_i^* n_j^{\Omega^{\mathcal{UC}}} = \sigma_{ij}u_j^* n_i^{\Omega^{\mathcal{UC}}}$$
(1.21)

a získáme tak podmínku

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \rangle = \frac{1}{|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \oint_{\Gamma^{\mathcal{UC}}} \sigma_{ij} n_i^{\Omega^{\mathcal{UC}}} u_j^* \,\mathrm{d}\Gamma^{\mathcal{UC}} = 0, \qquad (1.22)$$

kladenou na heterogenní pole napětí  $\sigma_{ij}$  a fluktuující složku pole posuvů  $u_i^*$  na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ , jejíž splnění je ekvivalentní splnění energetické podmínky (1.15).

#### 1.7 Kinematické okrajové podmínky

Kinematické okrajové podmínky zvolíme tak, aby průběh heterogenního pole deformace  $\varepsilon_{ij}$  na oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  odpovídal podmínkám konzistence (1.5)

$$\oint_{\Gamma^{\mathcal{UC}}} \left( u_i^* n_j^{\Omega^{\mathcal{UC}}} + u_j^* n_i^{\Omega^{\mathcal{UC}}} \right) \, \mathrm{d}\Gamma^{\mathcal{UC}} = 0_{ij} \tag{1.23}$$

a aby splňovaly Hillovo lemma (1.15)

$$\oint_{\Gamma^{\mathcal{UC}}} \sigma_{ij} n_i^{\Omega^{\mathcal{UC}}} u_j^* \,\mathrm{d}\Gamma^{\mathcal{UC}} = 0.$$
(1.24)

Jelikož volbou funkce fluktuujících posuvů  $u_i^*$  na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ , tedy volbou kinematických okrajových podmínek na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ , ovlivňujeme působení okolního materiálu na vyjmutou oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , použijeme přirozenou volbu funkce  $u_i^*$ , jež je podmíněna geometrií kompozitu. Budeme předpokládat, že pole heterogenní deformace  $\varepsilon_{ij}$  a tudíž i pole heterogenního napětí  $\sigma_{ij}$ , se v dostatečné vzdálenosti od hranice vzorku přizpůsobí periodickému

rozmístění složek. Ve shodě s touto myšlenkou zvolíme fluktuující složku pole posuvů  $u_i^*$ na  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  periodickou, pak tedy

$$u_{i}^{*}\left(y_{j}^{\#1}\right) = u_{i}^{*}\left(y_{j}^{\#2}\right) \quad \wedge \quad n_{i}^{\Omega^{\mathcal{UC}}}\left(y_{j}^{\#1}\right) = -n_{i}^{\Omega^{\mathcal{UC}}}\left(y_{j}^{\#2}\right), \tag{1.25}$$

$$y_i^{\#1} \in \Gamma_{\#1}^{\mathcal{UC}}, \quad y_i^{\#2} \in \Gamma_{\#2}^{\mathcal{UC}},$$
 (1.26)

kde hranice  $\Gamma_{\#1}^{\mathcal{UC}}$  je paralelní k hranici  $\Gamma_{\#2}^{\mathcal{UC}}$  a obě jsou paralelní a zároveň kolmé ke směrům invariance. Vektor  $y_i^{\#1}$  z hranice  $\Gamma_{\#1}^{\mathcal{UC}}$  odpovídá vektoru  $y_i^{\#2}$  z hranice  $\Gamma_{\#2}^{\mathcal{UC}}$ . Budeme-li dále mluvit o vektorech, či bodech, které si z hlediska periodických okrajových podmínek odpovídají, budeme mít na mysli právě vektory  $y_i^{\#1}$  a  $y_i^{\#2}$ . Touto volbou fluktuující složky pole posuvů  $u_i^*$  na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  přímo splníme podmínku konzistence pole deformace (1.23). Skutečnost, že fluktuující složka pole posuvů  $u_i^*$  je periodická označíme  $u_i^* \#$ .

Vliv okolního tělesa lze samozřejmě zavést také pomocí statických okrajových podmínek. Pokud požadujeme, aby bylo pole heterogenního napětí periodické, tudíž aby mělo na paralelních hranicích  $\Gamma_{\#1}^{\mathcal{UC}}$  a  $\Gamma_{\#2}^{\mathcal{UC}}$  v odpovídajících si bodech shodné hodnoty, pak je zřejmé, že zatížení hranice  $\sigma_{ij} n_j^{\Omega^{\mathcal{UC}}}$  musí být antiperiodické, jelikož normála v těchto bodech má opačnou orientaci

$$\sigma_i^*\left(y_j^{\#1}\right)n_i^{\Omega^{\mathcal{UC}}}\left(y_j^{\#1}\right) = -\sigma_i^*\left(y_j^{\#2}\right)n_i^{\Omega^{\mathcal{UC}}}\left(y_j^{\#2}\right),\tag{1.27}$$

Skutečnost, že vektorové pole zatížení  $\sigma_{ij}n_j^{\Omega^{\mathcal{UC}}}$  je antiperiodické označíme  $\sigma_{ij}n_j^{\Omega^{\mathcal{UC}}} - #$ . Ze vztahu (1.25), tedy vlastnosti periodicity pole fluktuujících posuvů  $u_i^* \#$  a vlastnosti antiperiodicity vektorového pole zatížení  $\sigma_{ij}n_j^{\Omega^{\mathcal{UC}}} - \#$  dle vztahu (1.27) je zřejmé, že použitím periodických kinematických okrajových podmínek  $u_i^* \#$  je splněna podmínka (1.24) a tedy i Hillovo lemma (1.15).

#### Pole deformace při nedokonalém kontaktu složek 1.8

Jelikož se v následujících kapitolách budeme zabývat i možností nedokonalého spojení složek, podívejme se na situaci, při které na kontaktu složek vznikne trhlina (nespojitost v poli posuvů). Uvedené úvahy jsou zobecněné i pro případ, že trhlina má určité počáteční rozevření, nebo se jedná o pór. Takové oblasti, které neobsahují žádný materiál označme  $\Omega^{C}$  a hranici těchto oblastí označme  $\Gamma^{C}$ . Zbytek oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , tedy oblast jež obsahuje materiál, označme  $\Omega^{M,1}$  Hranici  $\Gamma^{C}$  můžeme dále disjunktně rozdělit na část  $\Gamma^{C \cap \mathcal{UC}}$ , která je společná s hranicí  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  a část  $\Gamma^{C\cap M}$  jež je společná s hranicí  $\Gamma^M$ , tedy

$$\Gamma^{C \cap \mathcal{UC}} = \Gamma^{C} \cap \Gamma^{\mathcal{UC}}, \quad \Gamma^{C \cap M} = \Gamma^{C} \cap \Gamma^{M}, \tag{1.28}$$

$$\Gamma^{C} = \Gamma^{C \cap \mathcal{UC}} \cup \Gamma^{C \cap \mathcal{M}} \quad \land \quad \Gamma^{C \cap \mathcal{UC}} \cap \Gamma^{C \cap \mathcal{M}} = \emptyset.$$
(1.29)

Příklad oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$ , která obsahuje trhliny na rozhraní jednotlivých složek, které jsou reprezentovány hranicemi  $\Gamma_1^C$ ,  $\Gamma_2^C$ ,  $\Gamma_3^C$ ,  $\Gamma_4^C$ ,  $\Gamma_5^C$  a  $\Gamma_8^C$ , a póry, reprezentované hranicemi $\Omega_6^C$  a  $\Gamma_7^C$  je uveden na obrázku 1.3

 $<sup>^{1}</sup>$ z důvodu možné záměny symbolů je vhodné upozornit na fakt, že u posledního zavedeného symbolu se

v horním indexu nevyskytuje kaligrafické písmo, narozdíl od symbolu oblasti matrice  $\Omega^{\mathcal{M}}$ , která bude zavedena v následující kapitole



Obrázek 1.3: Příklad jednotkové buňky  $\mathcal{UC}$ , tedy oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , v prostoru  $\mathbb{E}^2$ , jež obsahuje trhliny a póry.

#### 1.8.1 Průměrná hodnota fluktuující složky heterogenního pole deformace

Chceme-li provést kontrolu, zda průměrná hodnota fluktuující složky heterogenního pole deformace  $\langle \varepsilon_{ij}^* \rangle$  opravdu vymizí a obsahuje-li oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  póry nebo trhliny o celkovém počtu r, pak průměrnou hodnotu  $\langle \varepsilon_{ij}^* \rangle$  vypočítáme následovně

$$\langle \varepsilon_{ij}^* \rangle = \frac{1}{|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \left( \int_{\Omega^M} \varepsilon_{ij}^* \, \mathrm{d}\Omega^M + \sum_{q=1}^r \int_{\Omega_q^C} \varepsilon_{ij}^* \, \mathrm{d}\Omega_q^C \right).$$
(1.30)

Integraci přes oblasti bez materiálu, tedy oblasti  $\Omega_q^C,$  převedeme stejně jako ve výrazu (1.11) na integraci přes hranice  $\Gamma_q^C$ těchto oblastí

$$\int_{\Omega_q^C} \varepsilon_{ij}^* \, \mathrm{d}\Omega_q^C = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q^C \cap \mathcal{U}C} \left( u_i^* n_j^{\Omega_q^C} + u_j^* n_i^{\Omega_q^C} \right) \, \mathrm{d}\Gamma_q^{C \cap \mathcal{U}C} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q^C \cap \mathcal{M}} \left( u_i^* n_j^{\Omega_q^C} + u_j^* n_i^{\Omega_q^C} \right) \, \mathrm{d}\Gamma_q^{C \cap \mathcal{M}}$$
(1.31)

a využijeme periodicity fluktuující složky posuvů  $u_i^*$ , tedy vztahů (1.25), pak

$$\sum_{q=1}^{r} \int_{\Gamma_{q}^{C} \cap \mathcal{UC}} \left( u_{i}^{*} n_{j}^{\Omega_{q}^{C}} + u_{j}^{*} n_{i}^{\Omega_{q}^{C}} \right) \, \mathrm{d}\Gamma_{q}^{C} \cap \mathcal{UC} = 0_{ij}.$$
(1.32)

Nakonec získáme vztah pro výpočet průměrné hodnoty fluktuující složky heterogenního pole deformace  $\langle \varepsilon_{ij}^* \rangle$  ve tvaru

$$\langle \varepsilon_{ij}^* \rangle = \frac{1}{|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \left( \int_{\Omega^M} \varepsilon_{ij}^* \,\mathrm{d}\Omega^M + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^r \int_{\Gamma_q^{C\cap M}} \left( u_i^* n_j^{\Omega_q^C} + u_j^* n_i^{\Omega_q^C} \right) \,\mathrm{d}\Gamma_q^{C\cap M} \right). \tag{1.33}$$

#### 1.8.2 Průměrná hodnota heterogenního pole deformace

Chceme-li provést kontrolu, zda se zatížená oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  nachází v požadovaném stavu zatížení, pak je potřeba vypočítat průměrnou hodnotu heterogenního pole deformace  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ . Obsahuje-li oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  póry nebo trhliny, pak průměrnou hodnotu  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  vypočítáme následovně

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \left( \int_{\Omega^M} \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}\Omega^M + \sum_{q=1}^r \int_{\Omega^C_q} \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}\Omega^C_q \right).$$
(1.34)

Stejně jako ve vztahu (1.31) použijeme při integraci přes oblasti  $\Omega_q^C$  Gaussovu větu [3, str. 53–57] a geometrické rovnice pro malé deformace. Navíc na hranici  $\Gamma^{C \cap \mathcal{UC}}$  rozložíme heterogenní pole posuvů  $u_i$  na homogenní složku  $E_{ij}y_j$  a složku fluktuující  $u_i^*$ , pak

$$\int_{\Omega_q^C} \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}\Omega_q^C = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q^C \cap \mathcal{U}} \left( u_i n_j^{\Omega_q^C} + u_j n_i^{\Omega_q^C} \right) \, \mathrm{d}\Gamma_q^{C \cap \mathcal{M}} \\
+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q^C \cap \mathcal{U}} \left( u_i^* n_j^{\Omega_q^C} + u_j^* n_i^{\Omega_q^C} \right) \, \mathrm{d}\Gamma_q^{C \cap \mathcal{U}} \\
+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q^C \cap \mathcal{U}} \left( E_{ij} y_j n_j^{\Omega_q^C} + E_{ij} y_i n_i^{\Omega_q^C} \right) \, \mathrm{d}\Gamma_q^{C \cap \mathcal{U}}.$$
(1.35)

Dále uvážíme, že fluktuující složka pole posuvů $u_i^\ast$  je periodická a tudíž je splněn vztah (1.32), pak získáme vztah

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \int_{\Omega^{M}} \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}\Omega^{M} + \frac{1}{2|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \sum_{q=1}^{r} \int_{\Gamma_{q}^{C} \cap \mathcal{M}} \left( u_{i} n_{j}^{\Omega_{q}^{C}} + u_{j} n_{i}^{\Omega_{q}^{C}} \right) \, \mathrm{d}\Gamma_{q}^{C \cap \mathcal{M}} + \frac{1}{2|\Omega^{\mathcal{UC}}|} \sum_{q=1}^{r} \int_{\Gamma_{q}^{C} \cap \mathcal{UC}} \left( E_{ij} y_{j} n_{j}^{\Omega_{q}^{C}} + E_{ij} y_{i} n_{i}^{\Omega_{q}^{C}} \right) \, \mathrm{d}\Gamma_{q}^{C \cap \mathcal{UC}},$$
 (1.36)

pomocí kterého vypočítáme průměrnou hodnotu  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ , pro případ, že oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  obsahuje póry nebo trhliny.

## Kapitola 2

## FEM

#### 2.1 Úvod

V této kapitole přistoupíme k řešení lokálního problému pomocí metody konečných prvků [2], dále jen FEM<sup>1</sup> (Finite Element Method). Budeme vycházet z principu minima potenciální energie, zvaného také Lagrangeův princip [25, str. 51–74]. Proto nejprve zavedeme funkcionál potenciální energie pro obecně zatíženou  $\mathcal{UC}$ , upravíme do podoby, která odpovídá stavu zatížení při řešení lokálního problému a nakonec se budeme věnovat pouze jeho podobě pro lineárně elastické složky.

Dále se budeme zabývat úvahami o minimalizaci posledně jmenovaného funkcionálu. Z tohoto důvodu zavedeme pomocný funkcionál a ukážeme, že funkce, která minimalizuje tento pomocný funkcionál, minimalizuje také funkcionál energie. Minimalizační úlohu budeme řešit až na aproximovaném funkcionálu, což je ekvivalentní úloze minimalizace kvadratické funkce více proměnných.

Poté zavedeme okrajové podmínky a to podmínky periodické, které zamezí rotaci  $\mathcal{UC}$  jako tuhého tělesa a dodatečné kinematické podmínky, které odeberou stupně volnosti, jež přísluší posuvům  $\mathcal{UC}$  jako tuhého tělesa.

Nakonec se budeme věnovat nutné modifikaci pro případ dokonalého rozpojení složek, která bude vycházet z úpravy sítě konečných prvků na rozhraní složek, konkrétněji z duplikace kódových čísel, jež přísluší uzlům, v nichž má dojít k dokonalému rozpojení složek.

#### 2.2 Funkcionál energie

Uvažujme o  $\mathcal{UC}$  jako o heterogenním poddajném tělese v euklidovském prostoru  $\mathbb{E}^n$ , jehož geometrie je dána oblastí  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ . Matrice nechť je reprezentována oblastí  $\Omega^{\mathcal{M}}$  a r inkluzí oblastmi  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$ , kde q = 1, 2, ..., r. Oblasti  $\Omega^{\mathcal{M}}$  a  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$ , jejichž sjednocením vznikne oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , tedy

$$\Omega^{\mathcal{UC}} = \bigcup_{q=1}^{r} \Omega_{q}^{\mathcal{I}} \cup \Omega^{\mathcal{M}}, \qquad (2.1)$$

jsou disjunktní, tedy

$$\Omega_q^{\mathcal{I}} \cap \Omega_s^{\mathcal{I}} = \emptyset, \quad \text{pro } q \neq s \quad \land \quad \Omega^{\mathcal{I}} \cap \Omega^{\mathcal{M}} = \emptyset, \quad \Omega^{\mathcal{I}} = \bigcup_{q=1}^{\prime} \Omega_q^{\mathcal{I}} \tag{2.2}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> V českém jazyce je pro metodu konečných prvků používána již zažitá zkratka MKP, jejíž použití by bylo v česky psaném textu jistě přirozenější. Další kapitola však pojednává o metodě FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting), jejíž název se běžně do češtiny nepřekládá a proto nebývá pro tuto metodu používána ani česká zkratka. Z konzistentních důvodů jsou v této práci pro obě metody používány anglické zkratky, tedy FEM a FETI



Obrázek 2.1: Příklad jednotkové buňky, jež je reprezentována oblastí  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ .

a mají společnou hranici

$$\overline{\Omega}^{\mathcal{I}} \cap \overline{\Omega}^{\mathcal{M}} = \Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}, \quad \Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}} = \bigcup_{q=1}^{r} \Gamma_{q}^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}, \quad \Gamma_{q}^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}} = \overline{\Omega}_{q}^{\mathcal{I}} \cap \overline{\Omega}^{\mathcal{M}}, \tag{2.3}$$

kde symbolem  $\overline{\Omega}$ značíme uzávěr oblasti $\Omega,$ tedy

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma. \tag{2.4}$$

Hranice  $\Gamma_q^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  reprezentuje kontakt mezi q-tou inkluzí a matricí a hranice  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ , která nemusí být souvislá, všechny kontakty mezi inkluzemi a matricí. Podobně oblast  $\Omega^{\mathcal{I}}$  představuje všechny inkluze.

Toto těleso je zatíženo pouze makroskopickou deformací  $E_{ij}(x_k)$ , tedy konstantní deformací, jež je na  $\mathcal{UC}$  zavedena z principu homogenizace, který je schématicky naznačen na obrázku 1.2 a popsán v části 1.4.3.

Jako příklad je na obrázku 2.1 zobrazena  $\mathcal{UC}$  vzorového kompozitu, tedy oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$ , jež se skládá z šesti disjunktních oblastí, které reprezentují matrici a pět inkluzí.

## 2.2.1 Funkcionál energie pro obecný konstitutivní vztah

Funkcionál energie obecně zatížené  $\mathcal{UC}$ 

$$\Pi(u_i) = \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} W d\Omega^{\mathcal{UC}} - \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} b_i u_i d\Omega^{\mathcal{UC}} - \oint_{\Gamma^{\mathcal{UC}}} t_i u_i d\Gamma^{\mathcal{UC}}, \quad \forall u_i \in \mathcal{D}^1_{\Pi}, \qquad (2.5)$$

se v případě výše uvedených předpokladů na zatížení  $\mathcal{UC}$ redukuje na

$$\Pi(u_i) = \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} W \mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}}, \quad \forall u_i \in \mathcal{D}^1_{\Pi},$$
(2.6)

kde  $b_i(y_j)$  značí vektorovou funkci objemových sil,  $t_i(y_j)$  vektorovou funkci sil povrchových a  $\mathcal{D}_{\Pi}^{1-2}$  definiční obor tohoto funkcionálu. Redukovaný tvar (2.6) funkcionálu  $\Pi(u_i)$ je použitelný, jelikož  $\mathcal{UC}$  není zatížena objemovými silami  $b_i$  ani silami povrchovými  $t_i$ , tedy

$$b_i = t_i = 0_i. \tag{2.7}$$

 $\mathcal{UC}$  by mohla být také zatížena povrchovými silami  $t_i$  na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ , které by plnily funkci statických okrajových podmínek, pomocí nichž bychom zaručili periodické okrajové podmínky. Jelikož jsme se rozhodli na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  použít kinematické okrajové podmínky, tak tyto povrchové síly  $t_i$  na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  neuvažujeme, čímž považujeme statické okrajové podmínky za splněné.

#### 2.2.2 Definiční obor funkcionálu energie

V definičním oboru funkcionálu  $\mathcal{D}^1_{\Pi}$  leží funkce dané předpisem

$$u_i(y_j) = E_{ij}y_j + u_i^*(y_j), \qquad (2.8)$$

na jejichž fluktuující složku  $u_i^*(y_j)$  jsou kladeny požadavky, které zamezí pohybům  $\mathcal{UC}$  jako tuhého tělesa. Fluktuující složka  $u_i^*(y_j)$  má být na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  periodická, tedy  $u_i^* \#$ , čímž se zamezí rotaci  $\mathcal{UC}$ . A dodatečná kinematická okrajová podmínka

$$u_i^*\left(y_j\right) = u_i^{*D}\left(y_j\right), \quad \forall y_j \in \Gamma_D^{\mathcal{UC}},\tag{2.9}$$

zamezí jejím posuvům  $\mathcal{UC}$  jako tuhého tělesa.  $\Gamma_D^{\mathcal{UC}}$  značí tu část hranice  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ , na které jsou předepsány posuvy  $u_i^{*D}(y_j)$ . Výše zavedené požadavky na funkce  $u_i(y_j)$  z definičního oboru  $\mathcal{D}_{\Pi}^1$  zapíšeme následovně<sup>3</sup>

$$\mathcal{D}_{\Pi}^{1} = \left\{ u_{i}\left(y_{j}\right) = E_{ij}y_{j} + u_{i}^{*}\left(y_{j}\right), \quad \forall y_{j} \in \Omega^{\mathcal{UC}} \right\}$$
  

$$\cap \left\{ u_{i}^{*}\left(y_{j}\right) = u_{i}^{*D}\left(y_{j}\right), \quad \forall y_{j} \in \Gamma_{D}^{\mathcal{UC}} \right\}$$
  

$$\cap \left\{ u_{i}^{*}\left(y_{j}\right) \#, \quad \forall y_{j} \in \Gamma^{\mathcal{UC}} \right\}.$$

$$(2.10)$$

#### 2.2.3 Funkcionál energie pro lineárně pružné složky

Budeme-li dále v  $\mathcal{UC}$  uvažovat pouze lineárně elastické složky, kde

$$\int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} W \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}},\tag{2.11}$$

 $<sup>^2</sup>$ Číslice v horním indexu definičního oboru bude vždy značit počet nezávislých polí obsažených v příslušném funkcionálu. Symbol v jeho dolním indexu odpovídá symbolu příslušného funkcionálu.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Poznámka autora: Z matematického hlediska by bylo korektní, uvést také požadavky týkající se spojitosti funkcí z definičního oboru  $\mathcal{D}_{\Pi}^1$ , popřípadě jejich derivací či samotné existence těchto derivací. Tato práce je pojata spíše "inženýrsky", čímž mám na mysli, že je cílem nalézt řešení a to dále zkoumat, než předkládat důkazy týkající se jeho existence, které lze nalézt například v publikaci [18], jež se zabývá variačními metodami mechaniky. Kdybych chtěl uvést všechny rigorózní požadavky (myšleno v rozsahu celé práce, ne pouze na tomto místě, jež se zabývá definičním oborem  $\mathcal{D}_{\Pi}^1$ ) a na nich ve stejném duchu stavět, pak by se nejen několikrát znásobil rozsah této práce, ale hlavně bych nedokázal se současnými znalostmi zaručit správnost mnou předkládaných tvrzení.

pro něž platí zobecněný Hookeův zákon [3, str. 179–189], tedy

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl},\tag{2.12}$$

kde  $C_{ijkl}(y_n)$  značí tenzor materiálové tuhosti a rozdělíme-li navíc heterogenní pole deformace  $\varepsilon_{ij}(y_k)$  na složku homogenní  $E_{ij}$  a složku fluktuující  $\varepsilon_{ij}^*(y_k)$ , potom převedeme redukovaný funkcionál energie (2.6) na tvar

$$\Pi(u_i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} C_{ijkl} \left( E_{ij} + \varepsilon_{ij}^* \right) \left( E_{kl} + \varepsilon_{kl}^* \right) d\Omega^{\mathcal{UC}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \left( C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + 2C_{ijkl} E_{ij} \varepsilon_{kl}^* + C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kl}^* \right) d\Omega^{\mathcal{UC}}, \quad \forall u_i \in \mathcal{D}_{\Pi}^1, (2.14)$$

který je vhodný pro další úvahy týkající se jeho minimalizace.

#### 2.3 Minimalizační problém

Makroskopická deformace  $E_{ij}$  vystupující ve výrazu (2.14) je chápána jako zobecněné zatížení a je tedy pro daný stav zatížení, pro něž se hledá minimum funkcionálu  $\Pi(u_i)$ , fixována. Stejně tak ani tenzor materiálové tuhosti  $C_{ijkl}$  není závislý na poli posuvů  $u_i$ .

Zavedeme-li tedy pomocný funkcionál

$$\Theta(u_i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \left( 2C_{ijkl} E_{ij} \varepsilon_{kl}^* + C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kl}^* \right) \, \mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}}, \quad \forall u_i \in \mathcal{D}_{\Pi}^1, \tag{2.15}$$

pak je zřejmé, že pole posuvů  $u_i$ , jež minimalizuje funkcionál  $\Theta(u_i)$ , minimalizuje i funkcionál  $\Pi(u_i)$ . Rozdíl bude pouze v hodnotě tohoto minima, která není předmětem našeho zkoumání (definiční obor pomocného funkcionálu  $\Theta(u_i)$  je shodný s definičním oborem funkcionálu  $\Pi(u_i)$ ).

Z toho, že je zatížení  $E_{ij}$  předem známé a dokonce konstantní dále vyplývá, že homogenní část pole posuvů  $E_{ij}y_j$  je jednoznačně dána (tedy až na posuvy tělesa jako tuhého celku) a toto pole posuvů lze určit dodatečně. Funkcionál  $\Theta(u_i)$  tedy postačí minimalizovat pouze vzhledem k fluktuující části pole posuvů  $u_i^*(y_j)$ , která bude naší primární neznámou. Budeme tedy řešit tento minimalizační problém

$$\min_{u_i^*} \Theta(u_i^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \left( 2C_{ijkl} E_{ij} \varepsilon_{kl}^* + C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kl}^* \right) \, \mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}}, \quad \forall u_i^* \in \mathcal{D}_{\Theta}^1.$$
(2.16)

V definičním oboru funkcionálu  $\mathcal{D}^1_{\Theta}$  leží funkce, které splňují kinematickou okrajovou podmínku pomocí níž se zamezí posuvům  $\mathcal{UC}$  jako tuhého tělesa a jež jsou periodické, tedy

$$\mathcal{D}_{\Theta}^{1} = \left\{ u_{i}^{*}\left(y_{j}\right) = u_{i}^{*D}\left(y_{j}\right), \quad \forall y_{j} \in \Gamma_{D}^{\mathcal{UC}} \right\} \cap \left\{ u_{i}^{*}\left(y_{j}\right) \#, \quad \forall y_{j} \in \Gamma^{\mathcal{UC}} \right\}.$$
(2.17)

#### 2.4 Diskretizace

V další části této kapitoly využijeme Voigtovu notaci (viz dodatek A) a tenzorové veličiny přepíšeme do maticového zápisu, i přes fakt, že vlastní tenzorový charakter těchto veličin bude potlačen. Minimalizační problém (2.16) bude mít poté následující podobu

$$\min_{u_i^*} \Theta(u_i^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \left( 2C_{ij} E_i \varepsilon_j^* + C_{ij} \varepsilon_i^* \varepsilon_j^* \right) \, \mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}}, \quad \forall u_i^* \in \mathcal{D}_{\Theta}^1.$$
(2.18)

#### 2.4.1 Spojitě aproximované veličiny

Fluktuující složku pole posuvů  $u_i^*(y_j)$  aproximujeme lineární kombinací bázových funkcí příslušně uspořádaných do matice, kterou budeme dále značit  $N_{ij}(y_k)$ , tedy

$$u_i^*(y_k) \approx \tilde{u}_i^*(y_k) = N_{ij}(y_k) \underline{u}_j^*, \quad \forall y_k \in \Omega^{\mathcal{UC}},$$
(2.19)

kde  $\underline{u}_j$  jsou koeficienty lineární kombinace. Poté vektor fluktuující složky heterogenní deformace  $\varepsilon_i^*(u_j^*(y_k))$  aproximujeme příslušnými derivacemi bázových funkcí, jež znovu uspořádáme do matice, kterou označíme  $B_{ij}(y_k)$ , tedy

$$\varepsilon_i^*(y_k) \approx \tilde{\varepsilon}_i^*(y_k) = B_{ij}(y_k) \underline{u}_j^*, \quad \forall y_k \in \Omega^{\mathcal{UC}}.$$
(2.20)

#### 2.4.2 Aproximace pomocného funkcionálu

Aproximaci pomocného funkcionálu

$$\overset{\sim}{\Theta} (\tilde{u}_i^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} \left( 2C_{ij} E_i B_{jk} \underline{u}_k^* + C_{ij} B_{ik} \underline{u}_k^* B_{jl} \underline{u}_l^* \right) \, \mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}}, \tag{2.21}$$

můžeme chápat jako kvadratickou funkci proměnných  $\underline{u}_i^*$ , tedy

$$\widetilde{\Theta}\left(\underline{u}_{i}^{*}\right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} C_{ij} B_{ik} B_{jl} \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} \underline{u}_{k}^{*} \underline{u}_{l}^{*} + \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} C_{ij} E_{i} B_{jk} \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} \underline{u}_{k}^{*}.$$
(2.22)

V souladu s poznámkou 3 pouze uvedeme, že rozdíl v definičním oboru aproximovaného funkcionálu  $\mathcal{D}^1_{\Theta}$  oproti původnímu  $\mathcal{D}^1_{\Theta}$ , je ve spojitosti derivací funkcí v něm obsaženém. V případě, že o aproximovaném funkcionálu uvažujeme jako o kvadratické funkci proměnných  $\underline{u}^*_i$ , jež je dána předpisem (2.22), leží v jejím definičním oboru  $\mathcal{D}^n_{\Theta}$  prvky z prostoru  $\mathbb{R}^n$ , které jsou omezeny funkčními hodnotami těch funkcí, které vzniknou jejich lineární kombinací.

#### 2.5 Minimalizace aproximovaného funkcionálu

Jelikož je matice  $C_{ij}B_{ik}B_{jl}$  pozitivně definitní, tak pro nalezení minima funkce  $\Theta$   $(\underline{u}_i^*)$ , postačuje nalézt její stacionární bod. Podmínku, jež musí stacionární bod splňovat, zapíšeme ve tvaru

$$\widetilde{\Theta}_{,k} = \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} C_{ij} B_{ik} B_{jl} \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} \underline{u}_l^* + \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} C_{ij} E_i B_{jk} \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} = 0_k \tag{2.23}$$

a získáme tak soustavu lineárních rovnic

$$\int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} C_{ij} B_{ik} B_{jl} \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}} \underline{u}_l^* = -\int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} C_{ij} E_i B_{jk} \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}}.$$
(2.24)

Zavedeme-li dále matici tuhosti

$$K_{kl} = \int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} C_{ij} B_{ik} B_{jl} \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}}$$
(2.25)

a vektor zatížení, neboli vektor pravých stran

$$f_k = -\int_{\Omega^{\mathcal{UC}}} C_{ij} E_i B_{jk} \,\mathrm{d}\Omega^{\mathcal{UC}},\tag{2.26}$$

pak lze soustavu (2.24) vyjádřit v přehledném tvaru

$$K_{ij}\underline{u}_j^* = f_i. \tag{2.27}$$

O neznámých koeficientech lineární kombinace  $\underline{u}_i^*$  budeme také mluvit jako o uzlových neznámých.

#### 2.6 Kinematické okrajové podmínky

#### 2.6.1 Periodické okrajové podmínky

Periodické okrajové podmínky aplikované na pole posuvů lze chápat jako zobecněné kinematické okrajové podmínky, jelikož také předepisují hodnotu uzlovým neznámým na hranici, ale tato hodnota není oproti klasickým kinematickým podmínkám striktně předepsána. Pro snadnou aplikaci periodických okrajových podmínek na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  je žádoucí, aby síť, jež rozděluje oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  na konečné prvky, měla na paralelních stranách odpovídající si uzly. V takovém případě pro splnění periodických okrajových podmínek postačí, pokud uzlové neznámé, které si z hlediska těchto podmínek odpovídají a mají tedy stejnou hodnotu označíme shodně. V metodě FEM jim tedy přidělíme stejné kódové číslo.

Uzlové neznámé, které si z hlediska periodických okrajových podmínek na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  odpovídají uspořádáme do bloků, které označíme  $\underline{u}_i^{*\#1}$  a  $\underline{u}_i^{*\#2}$ . Uzlové neznámé  $\underline{u}_i^{*\#1}$ , resp.  $\underline{u}_i^{*\#2}$  odpovídají uzlům, jejichž poloha je dána vektorem  $y_i^{\#1}$ , resp.  $y_i^{\#2}$  a jež leží na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}_{\#1}$ , resp.  $\Gamma^{\mathcal{UC}}_{\#2}$ . Uzlové neznámé ve vrcholech  $\mathcal{UC}$ , které mají specifické postavení, jelikož mají mít všechny vlivem periodických okrajových podmínek stejnou hodnotu, označme  $\underline{u}_i^{*D}$ . Pro větší názornost zavedeného značení je na obrázku 2.2 zobrazen příklad oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$ , která je rozdělena na konečné prvky. Na paralelních stranách této oblasti jsou předepsány periodické okrajové podmínky. Oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  je zobrazena jako homogenní, což není v případě periodických okrajových podmínek podstatné.

#### Redukce systému rovnic vlivem periodických okrajových podmínek

Vhodně seřaď<br/>me neznámé koeficienty lineární kombinace  $\underline{u}_i^*$ a následně proveď<br/>me dekompozici takto upraveného vektoru do bloků

$$\underline{u}_{i}^{*} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{k}^{*\Omega^{\mathcal{UC}}} \\ \underline{u}_{l}^{*\#1} \\ \underline{u}_{m}^{*\#2} \end{bmatrix}.$$
(2.28)

V bloku  $\underline{u}_i^{*\Omega^{\mathcal{UC}}}$  jsou seřazeny uzlové neznámé, jež odpovídají uzlům ležícím uvnitř oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  a navíc těm, jež leží ve vrcholech této oblasti, tedy ty uzlové neznámé, které jsme označili  $\underline{u}_i^{*D}$ . V blocích  $\underline{u}_i^{*\#1}$  a  $\underline{u}_i^{*\#2}$  jsou ve stejném pořadí seřazeny odpovídající si uzlové neznámé uzlů z hranice  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ . Pro příklad oblasti z obrázku 2.2 by poslední dva



Obrázek 2.2: Periodické okrajové podmínky. Ve skutečnosti jednotlivým uzlům v prostoru  $\mathbb{E}^2$  odpovídají dvě uzlové neznámé fluktuujícího pole posuvů, ale pro přehlednost je v obrázku uzlům přiřazena jen jedna neznámá.

zmíněné bloky měly následující podobu (v případě jedné uzlové neznámé v každém uzlu, viz komentář tohoto obrázku)

$$\underline{u}_{i}^{*\#1} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{1}^{*\#1} \\ \underline{u}_{2}^{*\#1} \\ \vdots \\ \underline{u}_{7}^{*\#1} \\ \underline{u}_{8}^{*\#1} \end{bmatrix} \qquad \underline{u}_{i}^{*\#2} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{1}^{*\#2} \\ \underline{u}_{2}^{*\#2} \\ \vdots \\ \underline{u}_{7}^{*\#2} \\ \underline{u}_{8}^{*\#2} \end{bmatrix}.$$
(2.29)

Ve shodě s dekompozicí uzlových neznámých  $\underline{u}_k^*$  dle vztahu (2.28), rozdělme do bloků také matici tuhosti

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} K_{nk}^{11} & K_{nl}^{12} & K_{nm}^{13} \\ K_{ok}^{21} & K_{ol}^{22} & K_{om}^{23} \\ K_{pk}^{31} & K_{pl}^{32} & K_{pm}^{33} \end{bmatrix}$$
(2.30)

a vektor zatížení

$$f_i = \begin{bmatrix} f_n^{\Omega^{\mathcal{UC}}} \\ f_p^{\#1} \\ f_p^{\#2} \end{bmatrix}.$$
 (2.31)

Dle periodických okrajových podmínek

$$\underline{u}_i^{*\#2} = \underline{u}_i^{*\#1},\tag{2.32}$$

můžeme přepsat vektor uzlových neznámých  $\underline{u}_i^*$  následovně

$$\underline{u}_{j}^{*} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{k}^{*\Omega^{\mathcal{UC}}} \\ \underline{u}_{l}^{*\#1} \\ \underline{u}_{m}^{*\#1} \end{bmatrix}.$$
(2.33)

Systému rovnic (2.27) se s využitím předchozího vztahu redukuje na systém

$$\begin{bmatrix} K_{nk}^{11} & K_{nl}^{12} + K_{nl}^{13} \\ K_{ok}^{21} & K_{ol}^{22} + K_{ol}^{23} \\ K_{pk}^{31} & K_{pl}^{32} + K_{pl}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{k}^{*\Omega^{\mathcal{UC}}} \\ \underline{u}_{l}^{*\#1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n}^{\Omega^{\mathcal{UC}}} \\ f_{p}^{\#1} \\ f_{p}^{\#2} \end{bmatrix},$$
(2.34)

ve kterém sečteme poslední dva bloky, tedy

$$\begin{bmatrix} K_{nk}^{11} & K_{nl}^{12} + K_{nl}^{13} \\ K_{ok}^{21} + K_{ok}^{31} & K_{ol}^{22} + K_{ol}^{23} + K_{ol}^{32} + K_{ol}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{k}^{*\Omega^{\mathcal{UC}}} \\ \underline{u}_{l}^{*\#1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n}^{\Omega^{\mathcal{UC}}} \\ f_{o}^{1\Gamma^{\mathcal{UC}}} + f_{o}^{2\Gamma^{\mathcal{UC}}} \end{bmatrix}$$
(2.35)

a získáme redukovaný systém rovnic, jež po aplikaci periodických okrajových podmínek odpovídá systému (2.27) a který pro přehlednost zapíšeme ve tvaru

$$\overline{K}_{ij}\overline{\underline{u}}_{j}^{*} = \overline{f}_{i}, \qquad (2.36)$$

kde  $\overline{K}_{ij}$ ,  $\overline{u}_i^*$ , resp.  $\overline{f}_i$  značí v uvedeném pořadí redukovanou matici tuhosti, redukovaný vektor neznámých, resp. redukovaný vektor zatížení vlivem periodických okrajových podmínek.

#### 2.6.2 Dodatečná kinematická podmínka

Periodické okrajové podmínky na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ , aplikované na fluktuující složku pole posuvů  $u_i^*$ , zamezí rotaci  $\mathcal{UC}$  jako tuhého celku, ale stupně volnosti, jež odpovídají posuvům  $\mathcal{UC}$  jako tuhého celku, těmito okrajovými podmínkami odebrány nejsou. Z tohoto důvodu je potřeba pro fluktuující složku pole posuvů  $u_i^*$  na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  předepsat dodatečnou kinematickou podmínku. Tuto kinematickou okrajovou podmínku předepíšeme právě uzlovým neznámým ve vrcholech  $\mathcal{UC}$ , tedy těm, které jsme označili  $\underline{u}_i^{*D}$ . Seřaďme nyní již redukované uzlové neznámé  $\overline{\underline{u}}_i^*$  a proveďme jejich dekompozici do bloků

$$\underline{\overline{u}}_{i}^{*} = \begin{bmatrix} \underline{\overline{u}}_{k}^{*\Omega^{\mathcal{UC}}} \\ \underline{\overline{u}}_{k}^{*\#1} \\ \underline{\overline{u}}_{m}^{*D} \end{bmatrix}, \qquad (2.37)$$

kde v bloku  $\underline{\overline{u}}_{i}^{*\Omega^{\mathcal{UC}}}$  jsou narozdíl od bloku  $\underline{u}_{i}^{*\Omega^{\mathcal{UC}}}$  seřazeny pouze ty uzlové neznámé, které odpovídají uzlům uvnitř  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , jelikož uzlové neznámé  $\underline{\overline{u}}_{m}^{*D}$ , které odpovídají uzlům ve vrcholech této oblasti byly seřazeny do samostatného bloku.

Ve shodě s (2.37) rozdělme do bloků také redukovanou matici tuhosti

$$\overline{K}_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{nk}^{11} & \overline{K}_{nl}^{12} & \overline{K}_{nm}^{13} \\ \overline{K}_{ok}^{21} & \overline{K}_{ol}^{22} & \overline{K}_{om}^{23} \\ \overline{K}_{pk}^{31} & \overline{K}_{pl}^{32} & \overline{K}_{pm}^{33} \end{bmatrix}$$
(2.38)

a redukovaný vektor zatížení

$$\overline{f}_i = \begin{bmatrix} \overline{f}_n^{\Omega^{\mathcal{UC}}} \\ \overline{f}_p^{\#1} \\ \overline{f}_p^D \end{bmatrix}.$$
(2.39)

Uvážíme-li dále dodatečnou kinematickou okrajovou podmínku ve tvaru

$$\overline{\underline{u}}_i^{*D} = 0_i, \tag{2.40}$$

předepíšeme-li tedy nulový posuv vrcholům  $\mathcal{UC}$ , což je ve shodě s periodickými okrajovými podmínkami, jelikož je všem těmto uzlovým neznámým předepsána stejná hodnota, potom se systém rovnic (2.36) redukovaný periodickými okrajovými podmínkami redukuje navíc dodatečnými kinematických podmínkami, které zamezují posuvům  $\mathcal{UC}$  jako tuhého celku, na finální tvar

$$\begin{bmatrix} \overline{K}_{mk}^{11} & \overline{K}_{ml}^{12} \\ \overline{K}_{nk}^{21} & \overline{K}_{nl}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\overline{u}}_k^{*\Omega\mathcal{UC}} \\ \underline{\overline{u}}_l^{*\#1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{f}_m^{\Omega\mathcal{UC}} \\ \overline{f}_m^{\#1} \\ \overline{f}_n^{\#1} \end{bmatrix}, \qquad (2.41)$$

ze kterého je vidět, že neznámými jsou pouze uzlové neznámé, jež odpovídají vnitřním uzlům, tedy  $\overline{\underline{u}}_i^{*\Omega^{\mathcal{UC}}}$  a ty, které odpovídají uzlům, jež leží na hranici  $\Gamma_{\#1}^{\mathcal{UC}}$ , kromě uzlů ve vrcholech této hranice, tedy  $\overline{\underline{u}}_i^{*\#1}$ .

#### 2.7 Řízené dokonalé rozpojení složek

Pomocí FEM lze jednoduchým způsobem modelovat předepsané dokonalé rozpojení složek. Jak bylo řečeno výše, všechna rozhraní složek reprezentuje hranice  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ . Rozdělme disjunktně tuto hranici na dvě části, jež označíme  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  a  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ , tedy

$$\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} = \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} \cup \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} \quad \land \quad \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} = \emptyset.$$
(2.42)

Hranice  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$ , resp.  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$  bude reprezentovat tu část rozhraní složek, na které požadujeme shodné posuvy sousedících složek, tedy jejich dokonalé spojení, resp. různé posuvy sousedících složek, tedy jejich rozpojení (a to rozpojení dokonalé, tedy bez jakékoli poddajnosti).

Jednotlivé uzly sítě, jež leží v uzávěru oblasti  $\overline{\Omega}^{\mathcal{UC}}$ , tedy její všechny uzly, označme  $n_i$ , kde  $i = 1, 2, \ldots, m$  a množinu všech uzlů označme  $\mathcal{N}$ , tedy

$$\mathcal{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}.$$
 (2.43)

Množinu uzlů, které leží na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ , resp.  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ , označme  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}}$ , resp.  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}}$ . Pak zřejmě

$$\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}} \subset \mathcal{N}, \tag{2.44}$$

resp.

$$\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \mathcal{M}} \subset \mathcal{N}. \tag{2.45}$$

Jak již bylo naznačeno v úvodu, rozpojení složek na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  zajistíme tím, že v uzlech  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}}$  budeme duplikovat všechny uzlové neznámé  $\underline{u}_i^*$ , v této souvislosti budeme

mluvit o původních a duplikovaných uzlových neznámých. Původní uzlové neznámé budou příslušet prvkům patřícím inkluzi, tedy oblasti  $\Omega^{\mathcal{I}}$  a duplikované uzlové neznámé budou odpovídat prvkům ležícím v matrici, tedy oblasti  $\Omega^{\mathcal{M}}$ .

## Kapitola 3

## FETI

#### **3.1** Úvod

V této kapitole představíme teoretický základ, jež se bude týkat řešení lokálního problému homogenizace metodou FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting), o které je možné získat víc informací například v knize [11, str. 103–130], nebo článku [5]. Jak se ukáže v této kapitole, lze pomocí této metody zavést poměrně obecný konstitutivní zákon na rozhraní složek, což je primární důvod, proč se této metodě budeme věnovat.

Jednotlivé kroky, ve kterých bude metoda představena, jsou řazeny ve shodě s předchozí kapitolou, která se věnovala řešení lokálního problému metodou FEM. Mnohdy se jedná pouze o zobecnění nebo rozšíření, v předchozí kapitole již zavedeného, což je ve shodě s tím, že metoda FETI je jakousi modifikací metody FEM.

Opět tedy vybudujeme teorii založenou na minimalizaci potenciální energie, tedy Lagrangeově principu [25, str. 51–74]. Nejprve zavedeme odpovídající funkcionál potenciální energie, který bude mít oproti předchozí kapitole obecnější tvar, dále ho upravíme do přijatelné podoby z hlediska jeho minimalizace, aproximujeme a nakonec se budeme zabývat minimalizací právě jeho aproximované formy.

Dále ukážeme, jakým způsobem lze zavést konstitutivní vztah na rozhraní složek a budeme se věnovat aspektům, jež jsou spojeny s touto problematikou. Půjde zejména o zavedení matice, kterou budeme nazývat maticí poddajnosti rozhraní, transformaci souřadného systému a kondenzaci řešeného problému.

Budeme pokračovat řešením vzniklého problému, který je vhodné řešit modifikovanou formou metody sdružených gradientů MCG (Modified Conjugate Gradient method), která je včetně předpodmínění popsána v knize [11, str. 110–115] a klasická metoda CG (Conjugate Gradient) například v [19, str. 572–578], nebo [2, str. 181–199].

Nakonec se budeme věnovat okrajovým podmínkám lokálního problému, kde se zaměříme především na rozdíl jejich aplikace oproti metodě FEM. V zásadě půjde o zajištění periodických okrajových podmínek pomocí okrajových podmínek statických v místech, kde není možné jejich aplikace kinematicky, jak tomu bylo v metodě FEM.

#### 3.2 Funkcionál energie

Nyní, narozdíl od části 2.2, neuvažujme o  $\mathcal{UC}$  jako o jednom poddajném tělese, ale uvažujme o jejích složkách, tedy o matrici a r inkluzích jako o soustavě poddajných těles v  $\mathbb{E}^n$ . Tato tělesa jsou ve shodě s částí 2.2 reprezentována oblastmi  $\Omega^{\mathcal{M}}$  a  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$ , kde  $q = 1, 2, \ldots, r$ , pro něž zůstávají v platnosti vztahy (2.1), (2.2) a (2.3).

V dalších úvahách budeme tvrdit, že hranice  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  náleží oblasti  $\Omega^{\mathcal{M}}$ , resp.  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$ , pokud normála k této hranici bude směřovat ven z této oblasti. Hranici, jež náleží oblasti  $\Omega^{\mathcal{M}}$ , resp.  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$  označíme  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\underline{\mathcal{M}}}$ , resp.  $\Gamma_q^{\underline{\mathcal{I}}\cap\mathcal{M}}$  a vnější normálu k této hranici, ve shodě s již



Obrázek 3.1: Oblasti  $\Omega_g^{\mathcal{I}}$  reprezentující inkluze v  $\mathcal{UC}$ , tedy v oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ . Podrobnější pohled na obrázek 2.1 z hlediska inkluzí.

zavedeným značením vnější normály,  $n_i^{\Omega^{\mathcal{M}}},$  resp. $n_i^{\Omega^{\mathcal{I}}_q}.$  Podobně jako v (2.3) dále platí

$$\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}\cap\mathcal{M}} = \bigcup_{q=1}^{r} \Gamma^{\underline{\mathcal{I}}\cap\mathcal{M}}_{q}, \quad \Gamma^{\mathcal{I}\cap\underline{\mathcal{M}}} = \bigcup_{q=1}^{r} \Gamma^{\mathcal{I}\cap\underline{\mathcal{M}}}_{q}, \tag{3.1}$$

kde  $\Gamma_q^{\mathcal{I} \cap \underline{\mathcal{M}}}$  odpovídá hranici  $\Gamma_q^{\underline{\mathcal{I}} \cap \mathcal{M}}$ , ale s opačným směrem vnější normály. I když obrázek 2.1 zůstává v platnosti, je z důvodu nově zavedeného značení zapotřebí podívat se na situaci, kterou zobrazuje, podrobněji. Tento podrobnější pohled umožňují obrázky 3.1 a 3.2.

Jednotlivá tělesa jsou zatížena shodnou makroskopickou deformací  $E_{ij}(x_k)$  a povrchovými silami  $t_i(y_j)$  na rozhraní složek. Jednotlivé inkluze reprezentované oblastmi  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$  jsou na jejich hranicích  $\Gamma_{\overline{q}}^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  zatíženy povrchovými silami, jež označíme  $t_i^{\Omega_q^{\mathcal{I}}}$  a které můžeme dle (2.2) uvažovat ve sjednocené formě s označením  $t_i^{\Omega^{\mathcal{I}}}$ . Matrice reprezentovaná oblastí  $\Omega^{\mathcal{M}}$  je zatížena na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  povrchovými silami, které označíme  $t_i^{\Omega^{\mathcal{M}}}$  a které lze rozdělit dle (3.1) na q částí  $t_i^{\Omega_q^{\mathcal{M}}}$ , jež působí na odpovídající části hranice  $\Gamma_q^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ .

Zatížení makroskopickou deformací  $E_{ij}$  je na jednotlivá tělesa zavedeno z principu homogenizace, který je schématicky naznačen na obrázku 1.2 a je popsán v části 1.4.3. Povrchovými silami  $t_i^{\Omega^{\mathcal{M}}}$  a  $t_i^{\Omega^{\mathcal{I}}}$  můžeme ovládat posuvy těch částí hranic, na nichž jsou tyto síly zavedeny. V souvislosti s povrchovými silami  $t_i^{\Omega^{\mathcal{M}}}$ , resp.  $t_i^{\Omega^{\mathcal{I}}}$  na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ , resp.  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  můžeme mluvit o statických okrajových podmínkách zavedených na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ , resp.  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ .

Funkcionál energie  $\Pi(u_i)$ , výše popsané soustavy poddajných těles má ve shodě s (2.5)


Obrázek 3.2: Oblast  $\Omega^{\mathcal{M}}$  jež reprezentuje matrici v  $\mathcal{UC}$ , tedy v oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ . Podrobnější pohled na obrázek 2.1 z hlediska matice.

následující tvar

$$\Pi(u_i) = \int_{\Omega^{\mathcal{M}}} W d\Omega^{\mathcal{M}} + \sum_{q=1}^r \int_{\Omega_q^{\mathcal{I}}} W d\Omega_q^{\mathcal{I}} - \int_{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \underline{\mathcal{M}}} t_i^{\Omega^{\mathcal{M}}} u_i d\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \underline{\mathcal{M}} - \sum_{q=1}^r \int_{\Gamma_q^{\underline{\mathcal{I}}} \cap \mathcal{M}} t_i^{\Omega^{\mathcal{I}}} u_i d\Gamma_q^{\underline{\mathcal{I}}} \cap \mathcal{M}, \quad \forall u_i \in \mathcal{D}_{\Pi}^1, \qquad (3.2)$$

s definičním oborem  $\mathcal{D}_{\Pi}^{1\ 1}$ dle vztahu (2.10), tedy

$$\mathcal{D}_{\Pi}^{1} = \left\{ u_{i}\left(y_{j}\right) = E_{ij}y_{j} + u_{i}^{*}\left(y_{j}\right), \quad \forall y_{j} \in \Omega^{\mathcal{UC}} \right\}$$
  

$$\cap \left\{ u_{i}^{*}\left(y_{j}\right) = u_{i}^{*D}\left(y_{j}\right), \quad \forall y_{j} \in \Gamma_{D}^{\mathcal{UC}} \right\}$$
  

$$\cap \left\{ u_{i}^{*}\left(y_{j}\right) \#, \quad \forall y_{j} \in \Gamma^{\mathcal{UC}} \right\}.$$
(3.3)

#### 3.2.1 Shodné posuvy na rozhraní složek

Naším cílem je na části rozhraní složek, tedy na části hranice  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ , vynutit shodné posuvy složek, tuto část rozhraní nechť reprezentuje hranice  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ . Na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  má tedy platit

$$u_i(y_j) = u_i(z_j), \quad \forall y_j \in \Gamma^{\underline{\mathcal{I}} \cap \mathcal{M}}, \quad \forall z_j \in \Gamma^{\mathcal{I} \cap \underline{\mathcal{M}}}, \quad y_j = z_j.$$
(3.4)

K vynucení shodných posuvů využijeme právě povrchové síly  $t_i$ . Představíme-li si rozhraní složek, na kterém jsou nejprve složky dokonale spojené a na kterém nemá dojít

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> V další mezikroku, ve které budeme upravovat podobu výše uvedeného funkcionálu  $\Pi(u_i)$ , nebudeme uvádět jeho definiční obor  $\mathcal{D}_{\Pi}^1$ . Z důvodu přehlednosti ho uvedeme až u jeho finálního tvaru.

k jejich rozpojení, jako myšlený řez zatíženou konstrukcí, jež i po zatížení zůstává spojitá, potom na tomto řezu musejí být vnitřní síly obou myšlených částí oddělené konstrukce v rovnováze. Povrchové síly  $t_i^{\Omega^{\mathcal{M}}}$  na tomto rozhraní musí mít tedy shodnou velikost, jejíž průběh označíme  $\epsilon_i(y_j)$ , ale opačnou orientaci než povrchové síly  $t_i^{\Omega^{\mathcal{I}}}$ , tedy

$$t_{i}^{\Omega^{\mathcal{M}}}\left(y_{j}\right) = -\epsilon_{i}\left(y_{j}\right), \quad \forall y_{j} \in \Gamma^{\mathcal{I} \cap \underline{\mathcal{M}}}$$

$$(3.5)$$

a

$$t_i^{\Omega^{\mathcal{I}}}(y_j) = \epsilon_i(y_j), \quad \forall y_j \in \Gamma^{\underline{\mathcal{I}} \cap \mathcal{M}}.$$
(3.6)

Pokud bychom teorii založili na problematice kvadratického programování, potom bychom o povrchových silách  $\epsilon_i$  mluvili jako o Lagrangeových multiplikátorech, pomocí nichž jsou do funkcionálu  $\Pi(u_i)$  zavedeny omezující podmínky ve tvaru rovností.

Použijeme-li výrazy (3.5) a (3.6), lze funkcionál (3.2) vyjádřit následovně

$$\Pi(u_{i},\epsilon_{i}) = \int_{\Omega^{\mathcal{M}}} W d\Omega^{\mathcal{M}} + \sum_{q=1}^{r} \int_{\Omega^{\mathcal{I}}_{q}} W d\Omega^{\mathcal{I}}_{q} + \int_{\Gamma^{\mathcal{I}}\cap\underline{\mathcal{M}}} \epsilon_{i} u_{i} d\Gamma^{\mathcal{I}}\cap\underline{\mathcal{M}}} - \sum_{q=1}^{r} \int_{\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}}_{q}\cap\mathcal{M}} \epsilon_{i} u_{i} d\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}}_{q}^{\underline{\mathcal{H}}}.$$
(3.7)

# 3.2.2 Předepsané rozpojení na rozhraní složek

Pro naše účely je nutné dokázat na rozhraní složek vynutit jejich rozpojení předepsané velikosti a orientace, tedy skok v posuvech, který označíme  $c_i(y_j)$ . Hranici, jež reprezentuje tuto část rozhraní, označme  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$ . Požadujeme tedy, aby na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$  platilo

$$u_{i}(y_{j}) = u_{i}(z_{j}) + c_{i}(z_{j}), \quad \forall y_{j} \in \Gamma^{\underline{\mathcal{I}} \cap \mathcal{M}}, \quad \forall z_{j} \in \Gamma^{\underline{\mathcal{I}} \cap \underline{\mathcal{M}}}, \quad y_{j} = z_{j}.$$
(3.8)

Za tímto účelem vynutíme na hranicích  $\Gamma^{\underline{\mathcal{I}} \cap \mathcal{M}}$  posuvy  $c_i$ , zavedeme tedy počáteční rozevření rozhraní. Na takto upraveném rozhraní necháme znovu působit stejně velké síly opačné orientace, které označíme  $\iota_i(y_j)$  a které nám zajistí, že předepsané rozpojení zůstane zachováno i po zatížení  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  homogenní deformací  $E_{ij}$ . Ve shodě se (3.5) a (3.6) zavedeme

$$t_{i}^{\Omega^{\mathcal{M}}}(y_{j}) = -\iota_{i}(y_{j}), \quad \forall y_{j} \in \Gamma^{\mathcal{I} \cap \underline{\mathcal{M}}}$$

$$(3.9)$$

a

$$t_i^{\Omega^{\mathcal{I}}}(y_j) = \iota_i(y_j), \quad \forall y_j \in \Gamma^{\underline{\mathcal{I}} \cap \mathcal{M}}.$$
(3.10)

Podobně jako v případě povrchových sil  $\epsilon_i$ , lze o silách  $\iota_i$  mluvit jako o Lagrangeových multiplikátorech, pomocí nichž jsou do funkcionálu  $\Pi(u_i)$  zavedeny omezující podmínky, nyní však ve tvaru nerovností.

Obrázek 3.3 ukazuje příklad dekompozice hranice  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  na část  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  a část  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ , pro které, stejně jako na obrázku 3.3 i obecně platí, že

$$\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} = \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} \cup \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} \quad \land \quad \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} \cap \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} = \emptyset.$$
(3.11)



Obrázek 3.3: Dekompozice hranice  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  na část  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  a část  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ .

# 3.2.3 Funkcionál energie pro obecný konstitutivní vztah

Funkcionál energie (3.2) pro obecný konstitutivní zákon bude mít ve finální podobě následující tvar

$$\Pi(u_{i},\epsilon_{i},\iota_{i}) = \int_{\Omega^{\mathcal{M}}} W d\Omega^{\mathcal{M}} + \sum_{q=1}^{r} \int_{\Omega^{\mathcal{I}}_{q}} W d\Omega^{\mathcal{I}}_{q} + \int_{\Gamma^{\mathcal{I}}\cap\underline{\mathcal{M}}} \epsilon_{i} u_{i} d\Gamma^{\mathcal{I}}\cap\underline{\mathcal{M}} - \sum_{q=1}^{r} \int_{\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}}_{q}\cap\mathcal{M}} \epsilon_{i} u_{i} d\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}}_{\underline{q}} + \int_{\Gamma^{\mathcal{I}}\cap\underline{\mathcal{M}}} \iota_{i} u_{i} d\Gamma^{\mathcal{I}}\cap\underline{\mathcal{M}} - \sum_{q=1}^{r} \int_{\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}}_{q}\cap\mathcal{M}} \iota_{i} (u_{i} + c_{i}) d\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}}_{q}$$
(3.12)

jehož tři nezávislá pole  $u_i$ ,  $\epsilon_i$  a  $\iota_i$  musejí ležet v definičním oboru  $\mathcal{D}^3_{\Pi}$ .

# 3.2.4 Definiční obor funkcionálu energie

Na funkci  $u_i$  klade definiční obor  $\mathcal{D}^3_{\Pi}$  stejné požadavky, jako definiční obor  $\mathcal{D}^1_{\Pi}$  daný vztahem (3.3).

Dále mohou být definičním oborem  $\mathcal{D}^3_\Pi$ omezeny funkce  $\iota_i$ a to například následujícím způsobem

$$\iota_i^{\min} < \iota_i < \iota_i^{\max}. \tag{3.13}$$

V souvislosti s výše uvedenou podmínkou (3.13) bývá v anglicky mluvících zemích uváděn pojem "box constraint", jež dobře vystihuje toto omezení. V článku [5] a diplomové práci

[20] je omezení (3.13) použito již ve fázi řešení minimalizačního problému metodu modifikovaných sdružených gradientů (o této metodě, tedy bez omezující podmínky (3.13), bude pojednáno v části 3.8 a aplikaci omezení (3.13) představuje článek [4]). Omezení (3.13) je v těchto pracích uvažováno pro  $\iota_i$ , jehož první, resp. druhá složka má shodnou orientaci se směrem normály, resp. tečny k hranici  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$ . Normálové síly (zavedeny kladné v případě tahu) jsou v uvedené práci [5] či [20] omezeny takto

$$0 < \iota_1 < \iota_1^{\max},$$
 (3.14)

kde dolní mez zamezí tlakovému namáhání kontaktu (a tedy průniku jednotlivých složek) a horní mez má význam normálové pevnosti na rozhraní složek. V tangenciálním směru je použito podmínky

$$\iota_2^{\min} < \iota_2 < \iota_2^{\max}, \quad \text{kde } |\iota_2^{\min}| = |\iota_2^{\max}|,$$
(3.15)

ve které má horní i dolní mez význam tangenciální pevnosti na rozhraní složek.

V našem případě funkce  $\iota_i$  omezovat nebudeme, jelikož v části 3.6 zavedeme konstitutivní vztah na rozhraní složek jiným způsobem, než je tomu v práci [5], resp. [20] a omezení ve tvaru (3.13) k našim účelům nebude zapotřebí. Funkce  $\epsilon_i$  není omezena v uvedených pracích a ani v naší práci jí nebudeme omezovat.

Ve shodě s výše uvedenými odstavci můžeme vyjádřit definiční obor  $\mathcal{D}_{\Pi}^3$ následovně

$$\mathcal{D}_{\Pi}^{3} = \left\{ u_{i}\left(y_{j}\right) = E_{ij}y_{j} + u_{i}^{*}\left(y_{j}\right), \quad \forall y_{j} \in \Omega^{\mathcal{UC}} \right\} \cap \left\{ u_{i}^{*}\left(y_{j}\right) = u_{i}^{*D}\left(y_{j}\right), \quad \forall y_{j} \in \Gamma^{\mathcal{UC}} \right\} \cap \left\{ u_{i}^{*}\left(y_{j}\right) \#, \quad \forall y_{j} \in \Gamma^{\mathcal{UC}} \right\} \cup \left\{ \epsilon_{i}\left(y_{i}\right), \quad \forall y_{i} \in \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} \right\} \cup \left\{ \iota_{i}\left(y_{i}\right), \quad \forall y_{i} \in \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} \right\}.$$
(3.16)

#### 3.2.5 Funkcionál energie pro lineárně pružné složky

Pro složky z lineárně elastického materiálu s použitím obecného Hookeova zákona (2.12) a rozlišením homogenní složky posuvů  $E_{ij}y_j$  a složky fluktuující  $u_i^*$  dostáváme

$$\Pi(u_{i},\epsilon_{i},\iota_{i}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\mathcal{M}}} \left( C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + 2C_{ijkl} E_{ij} \varepsilon_{kl}^{*} + C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^{*} \varepsilon_{kl}^{*} \right) d\Omega^{\mathcal{M}} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{r} \int_{\Omega^{\mathcal{I}}_{q}} \left( C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + 2C_{ijkl} E_{ij} \varepsilon_{kl}^{*} + C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^{*} \varepsilon_{kl}^{*} \right) d\Omega^{\mathcal{I}}_{q} + \int_{\Gamma^{\mathcal{I}}\cap\mathcal{M}} \epsilon_{i} \left( E_{ij} y_{j} + u_{i}^{*} \right) d\Gamma^{\mathcal{I}}\cap\mathcal{M}} + \int_{\Gamma^{\mathcal{I}}\cap\mathcal{M}} \iota_{i} \left( E_{ij} y_{j} + u_{i}^{*} \right) d\Gamma^{\mathcal{I}}\cap\mathcal{M}} - \sum_{q=1}^{r} \int_{\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}}_{q}\cap\mathcal{M}} \epsilon_{i} \left( E_{ij} y_{j} + u_{i}^{*} \right) d\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}}\cap\mathcal{M}} - \sum_{q=1}^{r} \int_{\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}}_{q}\cap\mathcal{M}} \iota_{i} \left( E_{ij} y_{j} + u_{i}^{*} + c_{i} \right) d\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}}_{q}\cap\mathcal{M}, \quad \forall \{u_{i}, \epsilon_{i}, \iota_{i}\} \in \mathcal{D}_{\Pi}^{3}. \quad (3.17)$$

#### 3.3 Minimalizační problém

Shodnými úvahami jako v části 2.3 dospějeme k minimalizačnímu problému

$$\min_{u_i^*,\epsilon_i,\iota_i} \Theta(u_i^*,\epsilon_i,\iota_i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\mathcal{M}}} \left( 2C_{ijkl} E_{ij} \varepsilon_{kl}^* + C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kl}^* \right) d\Omega^{\mathcal{M}} 
+ \frac{1}{2} \sum_{q=1}^r \int_{\Omega^{\mathcal{I}}_q} \left( 2C_{ijkl} E_{ij} \varepsilon_{kl}^* + C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kl}^* \right) d\Omega^{\mathcal{I}}_q 
+ \int_{\Gamma^{\mathcal{I}} \overline{\cap}_{\mathcal{M}}} \epsilon_i u_i^* d\Gamma^{\mathcal{I}} \overline{\cap}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{M}} + \int_{\Gamma^{\mathcal{I}} \overline{\cap}_{\mathcal{M}}} \iota_i u_i^* d\Gamma^{\mathcal{I}} \overline{\cap}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{M}} 
- \sum_{q=1}^r \int_{\Gamma^{\mathcal{I}}_q} \epsilon_i u_i^* d\Gamma^{\mathcal{I}} \overline{\cap}_q^{\mathcal{M}} \\ - \sum_{q=1}^r \int_{\Gamma^{\mathcal{I}}_q} \varepsilon_i u_i^* d\Gamma^{\mathcal{I}} \overline{\cap}_q^{\mathcal{M}}, \quad \forall \{u_i^*, \epsilon_i, \iota_i\} \in \mathcal{D}_{\Pi}^3, \quad (3.18)$$

s definičním oborem funkcionálu  $\Theta(u_i^*, \epsilon_i, \iota_i)$  dle vztahu (2.17), rozšířeným o funkce  $\epsilon_i$  a  $\iota_i$  na které, stejně jako definiční obor  $\mathcal{D}^3_{\Pi}$  daný vztahem (3.16), neklade žádná omezení, tedy

$$\mathcal{D}_{\Theta}^{3} = \left\{ u_{i}^{*}\left(y_{j}\right) = u_{i}^{*D}\left(y_{j}\right), \quad \forall y_{j} \in \Gamma_{D}^{\mathcal{UC}} \right\} \cap \left\{ u_{i}^{*}\left(y_{j}\right) \#, \quad \forall y_{j} \in \Gamma^{\mathcal{UC}} \right\} \\ \cup \left\{ \epsilon_{i}\left(y_{i}\right), \quad \forall y_{i} \in \Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}} \right\} \cup \left\{ \iota_{i}\left(y_{i}\right), \quad \forall y_{i} \in \Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}} \right\}.$$
(3.19)

#### 3.4 Diskretizace

Stejně jako v části 2.4, zavedeme pro další úvahy Voigtovu notaci (viz dodatek A).

#### 3.4.1 Spojitě aproximované veličiny

Narozdíl od spojité aproximace veličin v metodě FEM z části 2.4, aproximujeme fluktuující složku posuvů  $u_i^*$  zvlášť nad jednotlivými oblastmi, jež reprezentují složky, tedy

$$\tilde{u}_{i}^{*}(y_{k}) = \begin{cases} N_{ij}^{\Omega^{\mathcal{M}}}(y_{k}) \underline{u}_{j}^{*\Omega^{\mathcal{M}}}, & \forall y_{k} \in \Omega^{\mathcal{M}} \\ N_{ij}^{\Omega^{\mathcal{I}}}(y_{k}) \underline{u}_{j}^{*\Omega^{\mathcal{I}}}, & \forall y_{k} \in \Omega^{\mathcal{I}}_{q}, \quad q = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$
(3.20)

kde  $N_{ij}^{\Omega^{\mathcal{M}}}$ , resp.  $N_{ij}^{\Omega_q^{\mathcal{I}}}$  značí bázové funkce nad oblastí  $\Omega^{\mathcal{M}}$ , resp.  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$  a  $\underline{u}_j^{*\Omega^{\mathcal{M}}}$ , resp.  $\underline{u}_j^{*\Omega_q^{\mathcal{I}}}$  odpovídající koeficienty neznámé lineární kombinace.

Ve shodě s aproximací fluktuující složky posuvů  $u_i^*$ , aproximujeme příslušnými derivacemi příslušných bázových funkcí také fluktuující složku heterogenního pole deformace  $\varepsilon_i^*$ , tedy

$$\tilde{\varepsilon}_{i}^{*}(y_{k}) = \begin{cases} B_{ij}^{\Omega\mathcal{M}}(y_{k}) \underline{u}_{j}^{*\Omega\mathcal{M}}, & \forall y_{k} \in \Omega^{\mathcal{M}} \\ B_{ij}^{\Omega_{q}^{\mathcal{I}}}(y_{k}) \underline{u}_{j}^{*\Omega_{q}^{\mathcal{I}}}, & \forall y_{k} \in \Omega_{q}^{\mathcal{I}}, \quad q = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$
(3.21)

# 3.4.2 Diskrétně aproximované veličiny

Zatížení  $\iota_i$ , resp.  $\epsilon_i$  aproximujeme diskrétními hodnotami. Takto diskretizované zatížení necháme působit pouze v uzlech sítě konečných prvků a označíme  $\underline{\iota}_i$ , resp.  $\underline{\epsilon}_i$ . Pro obecné spojité zatížení  $t_i$  definované na hranici  $\Gamma$  oblasti  $\Omega$ , diskretizované výše popsaným způsobem pomocí  $t_i$ , zřejmě platí

$$\int_{\Gamma} t_i u_i \,\mathrm{d}\Gamma = \underline{t}_i \mathfrak{E}_{ik}^{\Omega} \underline{u}_k^{\Omega}, \qquad (3.22)$$

kde matice  $\mathfrak{E}_{ik}^{\Omega}$ vybírá koeficienty lineární kombinace  $\underline{u}_k^{\Omega}$  tak, aby docházelo k jejich násobení s odpovídajícími hodnotami diskrétně působícího zatížení  $t_i$ .

#### 3.4.3 Aproximace pomocného funkcionálu

Aproximovaný funkcionál  $\Theta$  můžeme poté chápat jako kvadratickou funkci proměnných

$$\tilde{\Theta} = f\left(\underline{u}_{i}^{*\Omega^{\mathcal{M}}}, \underline{u}_{i}^{*\Omega_{1}^{\mathcal{I}}}, \underline{u}_{i}^{*\Omega_{2}^{\mathcal{I}}}, \dots, \underline{u}_{i}^{*\Omega_{r}^{\mathcal{I}}}, \underline{\epsilon}_{i}, \underline{\iota}_{i}\right), \qquad (3.23)$$

danou předpisem

$$\widetilde{\Theta} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\mathcal{M}}} \left( 2C_{ij} E_i B_{jk}^{\Omega^{\mathcal{M}}} \underline{u}_k^{*\Omega^{\mathcal{M}}} + C_{ij} B_{ik}^{\Omega^{\mathcal{M}}} \underline{u}_k^{*\Omega^{\mathcal{M}}} B_{jl}^{\Omega^{\mathcal{M}}} \underline{u}_l^{*\Omega^{\mathcal{M}}} \right) d\Omega^{\mathcal{M}} 
+ \frac{1}{2} \sum_{q=1}^r \int_{\Omega^{\mathcal{I}}_q} \left( 2C_{ij} E_i B_{jk}^{\Omega^{\mathcal{I}}_q} \underline{u}_k^{*\Omega^{\mathcal{I}}_q} + C_{ij} B_{ik}^{\Omega^{\mathcal{I}}_q} \underline{u}_k^{*\Omega^{\mathcal{I}}_q} B_{jl}^{\Omega^{\mathcal{I}}_q} \underline{u}_l^{*\Omega^{\mathcal{I}}_q} \right) d\Omega^{\mathcal{I}}_q 
+ \underline{\epsilon}_i \mathfrak{E}_{ik}^{\Omega^{\mathcal{M}}} \underline{u}_k^{*\Omega^{\mathcal{M}}} + \underline{\iota}_i \mathfrak{I}_{ik}^{\Omega^{\mathcal{M}}} \underline{u}_k^{*\Omega^{\mathcal{M}}} 
- \sum_{q=1}^r \underline{\epsilon}_i \mathfrak{E}_{ik}^{\Omega^{\mathcal{I}}_q} \underline{u}_k^{*\Omega^{\mathcal{I}}_q} - \sum_{q=1}^r \underline{\iota}_i \mathfrak{I}_{ik}^{\Omega^{\mathcal{I}}_q} \underline{u}_k^{*\Omega^{\mathcal{I}}} + \underline{\iota}_i \underline{c}_i.$$
(3.24)

V posledním členu (3.24) jsou ve vektoru  $\underline{c}_i$  seřazeny předepsané hodnoty rozevření rozhraní, tedy skoku v posuvech. Uspořádání je takové, že skok v posuvech  $\underline{c}_i$  odpovídá diskretizovanému zatížení  $\underline{\iota}_i$ . Matice  $\mathfrak{E}_{ij}^{\Omega}$ , resp.  $\mathfrak{I}_{ij}^{\Omega}$  vybírá ty koeficienty lineární kombinace  $\underline{u}_k^{\Omega}$ , jež odpovídají shodnému uzlu, ve kterém působí diskretizované zatížení  $\underline{\epsilon}_i$ , resp.  $\underline{\iota}_i$ .

Pro definiční obor  $\mathcal{D}^3_{\tilde{\Theta}}$  kvadratické funkce  $\tilde{\Theta}$  zůstává v platnosti část 2.4.2.

#### 3.5 Minimalizace aproximovaného funkcionálu

Obdobně jako v kapitole 2.5 využijeme pozitivní definitnosti matice  $C_{ij}B_{ik}B_{jl}$  a nalezneme stacionární bod funkce  $\tilde{\Theta}$ , který je shodný právě s hledaným minimem. Podmínky, které

musí stacionární bod splňovat jsou

$$\frac{d\tilde{\Theta}}{d\underline{u}_{k}^{*\Omega^{\mathcal{M}}}} = \int_{\Omega^{\mathcal{M}}} \left( C_{ij} E_{i} B_{jk}^{\Omega^{\mathcal{M}}} + C_{ij} B_{ik}^{\Omega^{\mathcal{M}}} B_{jl}^{\Omega^{\mathcal{M}}} \underline{u}_{l}^{*\Omega^{\mathcal{M}}} \right) d\Omega^{\mathcal{M}} 
+ \underline{\epsilon}_{i} \mathfrak{E}_{ik}^{\Omega^{\mathcal{M}}} + \underline{\iota}_{i} \mathfrak{E}_{ik}^{\Omega^{\mathcal{M}}} = 0_{k},$$

$$\frac{d\tilde{\Theta}}{d\underline{u}_{k}^{*\Omega_{q}^{\mathcal{T}}}} = \int_{\Omega_{q}^{\mathcal{T}}} \left( C_{ij} E_{i} B_{jk}^{\Omega_{q}^{\mathcal{T}}} + C_{ij} B_{ik}^{\Omega_{q}^{\mathcal{T}}} B_{jl}^{\Omega_{q}^{\mathcal{T}}} \underline{u}_{l}^{*\Omega_{q}^{\mathcal{T}}} \right) d\Omega_{q}^{\mathcal{T}} 
- \underline{\epsilon}_{i} \mathfrak{E}_{ik}^{\Omega_{q}^{\mathcal{T}}} - \underline{\iota}_{i} \mathfrak{I}_{ik}^{\Omega_{q}^{\mathcal{T}}} = 0_{k}, \quad q = 1, 2, \dots, r,$$
(3.26)

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\Theta}}{\mathrm{d}\epsilon_{i}} = \mathfrak{E}_{ik}^{\Omega^{\mathcal{M}}} \underline{u}_{k}^{*\Omega^{\mathcal{M}}} - \sum_{q=1}^{r} \mathfrak{E}_{ik}^{\Omega^{\mathcal{I}}_{q}} \underline{u}_{k}^{*\Omega^{\mathcal{I}}_{q}} = 0_{i}, \qquad (3.27)$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\Theta}}{\mathrm{d}\underline{\iota}_{i}} = \mathfrak{I}_{ik}^{\Omega^{\mathcal{M}}} \underline{u}_{k}^{*\Omega^{\mathcal{M}}} - \sum_{q=1}^{r} \mathfrak{I}_{ik}^{\Omega^{\mathcal{I}}_{q}} \underline{u}_{k}^{*\Omega^{\mathcal{I}}_{q}} + \underline{c}_{i} = 0_{i}.$$
(3.28)

Dále zavedeme matici tuhosti  $K_{ij}$  a vektor zatížení  $f_i$  obdobně jako v (2.25) a (2.26). Použijeme-li navíc následujícího vektorového zápisu

$$\mathcal{L}_{il} = \begin{bmatrix} \mathfrak{E}_{jl} \\ \mathfrak{I}_{kl} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mu}_i = \begin{bmatrix} \underline{\epsilon}_j \\ \underline{\iota}_k \end{bmatrix}, \quad \underline{d}_i = \begin{bmatrix} 0_j \\ \underline{c}_k \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

můžeme předchozí podmínky stacionárního bodu (3.25–3.28) zapsat v přehledném tvaru

$$K_{kl}^{\Omega\mathcal{M}}\underline{u}_{l}^{*\Omega\mathcal{M}} = f_{k}^{\Omega\mathcal{M}} - \underline{\mu}_{i}\mathcal{L}_{ik}^{\Omega\mathcal{M}}$$

$$(3.30)$$

$$K_{kl}^{\Omega_q^{\mathcal{I}}} \underline{u}_l^{*\Omega_q^{\mathcal{I}}} = f_k^{\Omega_q^{\mathcal{I}}} + \underline{\mu}_i \mathcal{L}_{ik}^{\Omega_q^{\mathcal{I}}}, \quad q = 1, 2, \dots, r$$
(3.31)

$$\mathcal{L}_{il}^{\Omega^{\mathcal{M}}} \underline{u}_{l}^{*\Omega^{\mathcal{M}}} = \sum_{q=1}^{r} \mathcal{L}_{il}^{\Omega^{\mathcal{I}}_{q}} \underline{u}_{l}^{*\Omega^{\mathcal{I}}_{q}} + \underline{d}_{i}$$
(3.32)

K dalším úvahám, jež se budou zabývat řešením předchozích soustav lineárních rovnic, je vhodné přeznačit veličiny X, jež přísluší oblastem  $\Omega^{\mathcal{M}}$  a  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$ ,  $q = 1, 2, \ldots, r$ , což provedeme následovně

$$X^1 = X^{\Omega^{\mathcal{M}}} \tag{3.33}$$

$$X^q = -X^{\Omega_{q-1}^2}, \quad q = 2, 3, \dots, r+1.$$
 (3.34)

Dále se na horní indexy vztahuje Einsteinova sumační konvence, jejíž pravidla naopak nesvazují mezi sebou indexy horní a dolní. Jinými slovy, sumační konvence platí v horních, resp. dolních indexech, ne však navzájem mezi horními a dolními indexy.

Dostáváme se tak k finálnímu zápisu podmínek stacionárního bodu (3.25–3.28) ve tvaru

$$\delta^{qs} K^q_{ij} \underline{u}^{*s}_j = f^q_i - \underline{\mu}_k \mathcal{L}^q_{ki} \tag{3.35}$$

$$\mathcal{L}_{nj}^{q}\underline{u}_{j}^{*q} = \underline{d}_{n}. \tag{3.36}$$

Jedná se tedy o několik sdružených soustav lineárních rovnic, které je nutné vyřešit. V případě nejasností týkajících se přechodu ze systémů lineárních rovnice (3.30-3.32) k systémům (3.35-3.36) je vhodné přečíst poznámku<sup>2</sup>.

Ve vztahu (3.35) je zaveden nový symbol  $\delta^{qs}$ , který značí Kroneckerovo delta, též nazýváno substituční operátor a definováno jako matice (či tenzor druhého řádu) s následujícími vlastnostmi

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{pro } i = j \quad \land \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{pro } i \neq j.$$
 (3.40)

V této práci je substituční operátor využíván také jako tenzor vyššího řádu, jehož prvky nabývají hodnoty jedna, právě a jen tehdy, pokud všechny jejich indexy nabývají shodné hodnoty a všechny ostatní prvky jsou nulové. Uvedeme-li jako případ tenzoru čtvrté valence, bude Kroneckerovo delta definováno následovně

$$\delta_{ijkl} = 1$$
 pro  $i = j = k = l$   $\wedge$   $\delta_{ijkl} = 0$  pokud neplatí  $i = j = k = l.$  (3.41)

Dále je Kroneckerovo delta užíváno ve dvou variantách a to s horními, resp. dolními indexy, tedy  $\delta^{ij}$ , resp.  $\delta_{ij}$  a to vše v souladu s odstavcem, jež se vztahuje k předpisům (3.33) a (3.34). Stále se však jedná o jeden a tentýž tenzor definovaný vztahem (3.40), resp. (3.41).

#### 3.5.1 Podmínka řešitelnosti

Uvážíme-li, že matice soustavy  $K_{ij}^q$  systému (3.35) je v obecné případě singulární, je k řešitelnosti takové soustavy nutné, aby vektor pravých stran  $\left(f_i^q - \underline{\mu}_k \mathcal{L}_{ki}^q\right)$  ležel v obraze této matice, který označíme Im  $\left(K_{ij}^q\right)$ , tedy

$$\left(f_{i}^{q}-\underline{\mu}_{k}\mathcal{L}_{ki}^{q}\right)\in\operatorname{Im}\left(K_{ij}^{q}\right).$$

$$(3.42)$$

Tuto podmínku si můžeme přiblížit, představíme-li si jednotlivé sloupce matice soustavy  $K_{i\bullet}^{q,3}$  jako geometrické vektory v prostoru  $\mathbb{E}^n$ . Stejně tak, tedy jako o geometrickém vektoru v prostoru  $\mathbb{E}^n$ , uvažujme o vektoru pravých stran  $\left(f_i^q - \underline{\mu}_k \mathcal{L}_{ki}^q\right)$ . Uvědomme si nyní,

$$\delta^{11} K_{ij}^{1} \underline{u}_{j}^{*1} + \delta^{12} K_{ij}^{1} \underline{u}_{j}^{*2} = \delta^{11} K_{ij}^{1} \underline{u}_{j}^{*1} = f_{i}^{1} - \underline{\mu}_{k} \mathcal{L}_{ki}^{1}$$
(3.37)

$$\delta^{21} K_{ij}^2 \underline{u}_j^{*1} + \delta^{22} K_{ij}^2 \underline{u}_j^{*2} = \delta^{22} K_{ij}^2 \underline{u}_j^{*2} = f_i^2 - \underline{\mu}_k \mathcal{L}_{ki}^2, \qquad (3.38)$$

což je v souladu se vztahy (3.30–3.31) a (3.33–3.34). Ve vztahu (3.36) je použito běžné sumační konvence. Pro názornost opět uvedeme příklad, kde q = 1, 2 a s = 1, 2, pak

$$\mathcal{L}_{nj}^1 \underline{u}_j^{*1} + \mathcal{L}_{nj}^2 \underline{u}_j^{*2} = \underline{d}_n, \qquad (3.39)$$

což je v souladu se vztahem (3.32).

 $<sup>^2</sup>$ V případě q-tého vztahu (3.35) nemůže v tenzoru  $\delta^{qs}$  index q probíhat přes všechny možné hodnoty, ale je fixován příslušející q-tou pravou stranou soustavy. Pro názornost uvedeme příklad, kde q = 1, 2 a s = 1, 2, pak

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Pokud je v indexu obecné matice  $A_{ij}$  použit symbol •, znamená to, že index který je tímto symbolem nahrazen považujeme za fixní (nejde o fixaci konkrétní hodnoty indexu, ale libovolné možné). Index který zůstává volný, může probíhat stále přes všechny své hodnoty, tím pádem se z matice stane sloupcový  $A_{i\bullet}$  či řádkový  $A_{\bullet j}$  vektor. I když se tomu zdá býti naopak, je toto značení kompatibilní se značením používaným v programu MATLAB, kde je používán symbol : na místě volného indexu, stejně jako v našem případě, kdy tento volný index zůstává na svém místě a není nahrazen symbolem •.

že při řešení soustavy rovnic (3.35) hledáme takové koeficienty  $\underline{u}_{j}^{*q}$  lineární kombinace vektorů  $K_{i\bullet}^{q}$ , abychom získali právě vektor pravých stran  $\left(f_{i}^{q} - \underline{\mu}_{k}\mathcal{L}_{ki}^{q}\right)$ . Je zřejmé, že v případě singulární matice  $K_{ij}^{q}$  je dimenze lineárního obalu vektorů  $K_{i\bullet}^{q}$ , tedy prostoru Im  $\left(K_{ij}^{q}\right)$ , nižší než *n*. Vektor pravých stran  $\left(f_{i}^{q} - \underline{\mu}_{k}\mathcal{L}_{ki}^{q}\right)$  tedy nemůže být libovolným vektorem z prostoru  $\mathbb{E}^{n}$ , ale musí ležet právě v Im  $\left(K_{ij}^{q}\right)$ , aby ho bylo možné lineární kombinací sloupců matice  $K_{ij}^{q}$  vyjádřit.

Jelikož je matice  $K_{ij}^q$  symetrická, tedy

$$K_{ij}^{q} = K_{ji}^{q}, (3.43)$$

pak je obraz, resp. jádro matic<br/>e $K^q_{ij}$ shodný s obrazem, resp. jádrem matice k ní transponované, tedy

$$\operatorname{Im}\left(K_{ij}^{q}\right) = \operatorname{Im}\left(K_{ji}^{q}\right),\tag{3.44}$$

resp.

$$\operatorname{Ker}\left(K_{ij}^{q}\right) = \operatorname{Ker}\left(K_{ji}^{q}\right), \qquad (3.45)$$

kde Ker  $(K_{ij}^q)$  značí jádro matice  $K_{ij}^q$ . Dále, i pro nesymetrické matice, je v platnosti vztah

$$\operatorname{Im}\left(K_{ij}^{q}\right) \perp \operatorname{Ker}\left(K_{ji}^{q}\right), \qquad (3.46)$$

který lze pomocí vztahů (3.44) a (3.45) pro případ symetrických matic vyjádřit následovně

$$\operatorname{Im}\left(K_{ij}^{q}\right) \perp \operatorname{Ker}\left(K_{ij}^{q}\right), \qquad (3.47)$$

Podmínka řešitelnosti (3.42) lze pak vyjádřit pomocí jádra matice soustavy Ker $\binom{K_{ij}^q}{K_{ij}^q}$ následovně

$$\left(f_{i}^{q}-\underline{\mu}_{k}\mathcal{L}_{ki}^{q}\right)\perp\operatorname{Ker}\left(K_{ij}^{q}\right).$$

$$(3.48)$$

Seřaďme bázové vektory jádra Ker $(K_{ij}^q)$  do sloupců matice, kterou označíme  $\mathcal{R}_{ij}^q$  a dospějeme k podmínce řešitelnosti, která je vhodná pro další výpočty

$$\delta^{qs} \mathcal{R}^{q}_{ij} \left( f^{s}_{i} - \underline{\mu}_{k} \mathcal{L}^{s}_{ki} \right) = 0^{q}_{j}.$$
(3.49)

# 3.5.2 Vyjádření fluktuující složky posuvů pro regulární matice tuhosti

Nyní vyjádříme neznámou  $\underline{u}_{j}^{*q}$  ze soustavy (3.35), za předpokladu regulárnosti matice soustavy  $K_{ij}^{q}$ , tedy za předpokladu, že je q-té složce okrajovými podmínkami odebrán dostatečný počet stupňů volnosti, pak

$$\underline{u}_{j}^{*q} = \delta^{qs} K_{ji}^{q-1} \left( f_{i}^{s} - \underline{\mu}_{k} \mathcal{L}_{ki}^{s} \right).$$
(3.50)

# 3.5.3 Vyjádření fluktuující složky posuvů pro singulární matice tuhosti

#### Partikulární řešení

V případě, že matice soustavy  $K_{ij}^q$  není regulární, což je vzhledem k okrajovým podmínkám na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  a rozmístění jednotlivých složek v oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  téměř pravidlem, inverzní matice  $K_{ij}^{q-1}$  neexistuje. Je-li splněna podmínka řešitelnosti (3.49), potom lze vektor pravých stran  $\left(f_i^q - \underline{\mu}_k \mathcal{L}_{ki}^q\right)$  vyjádřit jako lineární kombinaci sloupců matice  $K_{ij}^q$ , tedy

$$f_i^q - \underline{\mu}_k \mathcal{L}_{ki}^q = K_{ij}^q h_j, \qquad (3.51)$$

kde vektor  $h_j$  představuje koeficienty lineární kombinace, který odpovídá partikulárnímu řešení systému (3.35). Těchto kombinací existuje dokonce nekonečně mnoho. Najdeme-li matici, jež označíme  $K_{ij}^{q\,\dagger}$ , která splňuje následující

$$\delta^{qst} K^{q}_{ik}{}^{\dagger} K^{s}_{kl} K^{t}_{lj}{}^{\dagger} = K^{q}_{ij}{}^{\dagger} \quad \Leftrightarrow \quad \delta^{qst} K^{q}_{ik} K^{s}_{kl}{}^{\dagger} K^{t}_{lj} = K^{q}_{ij}, \tag{3.52}$$

pak o takové matici budeme mluvit jako o pseudoinverzi matice  $K_{ij}^q$ . Partikulární řešení systému (3.35) budeme poté hledat ve tvaru

$$\underline{u}_{j}^{*q} = \delta^{qs} K_{ji}^{q\dagger} \left( f_{i}^{s} - \underline{\mu}_{k} \mathcal{L}_{ki}^{s} \right).$$

$$(3.53)$$

O tom, že vztah (3.53) skutečně vyjadřuje partikulární řešení systému (3.35) se přesvědčíme tím, že ho do systému (3.35) dosadíme, tedy

$$\delta^{qs} K^{q}_{ij} \underline{u}^{*s}_{j} = \delta^{qst} K^{q}_{ij} K^{s}_{jk}^{\dagger} \left( f^{t}_{k} - \underline{\mu}_{l} \mathcal{L}^{t}_{lk} \right)$$
(3.54)

$$= \delta^{qst} K^q_{ij} K^{s}_{jk}{}^{\dagger} K^t_{kl} h_l \tag{3.55}$$

$$= K_{il}^q h_l \tag{3.56}$$

$$= \left(f_i^q - \underline{\mu}_l \mathcal{L}_{li}^g\right), \qquad (3.57)$$

kde ve výrazu (3.55) využijeme možnosti vyjádřit pravou stranu  $\left(f_k^t - \underline{\mu}_l \mathcal{L}_{lk}^t\right)$  jako lineární kombinaci sloupců matice soustavy  $K_{ij}^q$ , tedy vztah (3.51), ve výrazu (3.56) použijeme vlastnost pseudoinverzní matice (3.52) a nakonec znovu vztah (3.51). V prvních dvou vztazích (3.54–3.55) je nutné uvažovat fixní q. O výpočtu pseudoinverzní matice  $K_{ij}^{q\dagger}$  a problematice s tím spojené pojednává dodatek B.

#### Homogenní řešení

Homogenním řešením je libovolný vektor z jádra matice Ker  $(K_{ij}^q)$ , jelikož

$$\delta^{qs} K^q_{ij} \underline{u}^{*s}_j = 0^q_i \Leftrightarrow \underline{u}^{*q}_j \in \operatorname{Ker}\left(K^q_{ij}\right).$$
(3.58)

Takový vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů jádra matice Ker  $(K_{ij}^q)$ , tedy jako lineární kombinaci sloupců matice  $\mathcal{R}_{ij}^q$ 

$$\underline{u}_{j}^{*q} = \delta^{qs} \mathcal{R}_{ji}^{q} \underline{\alpha}_{i}^{s}, \qquad (3.59)$$

ve vektoru  $\underline{\alpha}_{i}^{q}$  jsou uspořádány koeficienty lineární kombinace. Na tomto místě si je vhodné uvědomit fyzikální význam vektorů  $\mathcal{R}_{j\bullet}^{q}$ , jež mají význam posuvů tělesa jako tuhého celku, což je v souladu s tím, že jejich lineární kombinace nezpůsobí v  $\mathcal{UC}$  žádné vnitřní síly.

#### Obecné řešení

Obecné řešení je součtem libovolného partikulárního řešení (3.53) a řešení homogenního (3.59), tedy

$$\underline{u}_{j}^{*q} = \delta^{qs} \left[ K_{ji}^{q\dagger} \left( f_{i}^{s} - \underline{\mu}_{k} \mathcal{L}_{ki}^{s} \right) + \mathcal{R}_{ji}^{q} \underline{\alpha}_{i}^{s} \right].$$
(3.60)

# 3.5.4 Vyloučení fluktuující složky posuvů

Neznámou  $\underline{u}_{j}^{*q}$ ze soustavy (3.35), vyjádřenou pomocí (3.60), dosadíme do soustavy (3.36), tedy

$$\mathcal{L}_{nj}^{q} \left[ K_{ji}^{q\dagger} \left( f_{i}^{q} - \underline{\mu}_{k} \mathcal{L}_{ki}^{q} \right) + \mathcal{R}_{ji}^{q} \underline{\alpha}_{i}^{q} \right] = \underline{d}_{n}$$
(3.61)

Elementárními úpravami systému (3.61) a přidáním podmínky řešitelnosti (3.49), získáme systém lineárních rovnic, pro neznámé  $\underline{\mu}_k$  a  $\underline{\alpha}_i^q$ , tedy

$$\mathcal{L}_{nj}^{q}K_{ji}^{q\dagger}\mathcal{L}_{ki}^{q}\underline{\mu}_{k} - \mathcal{L}_{nj}^{q}\mathcal{R}_{ji}^{q}\underline{\alpha}_{i}^{q} = \mathcal{L}_{nj}^{q}K_{ji}^{q\dagger}f_{i}^{q} - \underline{d}_{n}, \qquad (3.62)$$

$$\delta^{qs} \mathcal{R}^{q}_{ij} \left( f^{s}_{i} - \underline{\mu}_{k} \mathcal{L}^{s}_{ki} \right) = 0^{q}_{j}, \qquad (3.63)$$

který pomocí následující substituce

$$F_{nk} = \mathcal{L}_{nj}^q K_{ji}^{q\dagger} \mathcal{L}_{ki}^q, \qquad (3.64)$$

$$G_{ni}^q = -\delta^{qs} \mathcal{L}_{nj}^q \mathcal{R}_{ji}^s, \tag{3.65}$$

$$g_n = \mathcal{L}^q_{nj} K^{q\,\dagger}_{ji} f^q_i, \qquad (3.66)$$

$$e_j^q = -\delta^{qs} \mathcal{R}_{ij}^q f_i^s, \tag{3.67}$$

převedeme do přehledné podoby

$$F_{nk}\underline{\mu}_{k} + G_{ni}^{q}\underline{\alpha}_{i}^{q} = g_{n} - \underline{d}_{n}, \qquad (3.68)$$

$$G^q_{kj}\underline{\mu}_k = e^q_j, aga{3.69}$$

a nakonec použijeme "přehlednější" indexování

$$F_{ij}\underline{\mu}_{j} + G^{q}_{ij}\underline{\alpha}^{q}_{j} = g_{i} - \underline{d}_{i}, \qquad (3.70)$$

$$G_{ji}^q \underline{\mu}_i = e_i^q. \tag{3.71}$$

# 3.6 Konstitutivní zákon na rozhraní složek

Metoda FETI umožňuje pomocí diagonální matice, kterou označíme  $H_{ij}$  a o níž budeme mluvit jako o matici poddajnosti rozhraní, předepsat konstitutivní zákon na té části rozhraní složek, která je reprezentována hranicí  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$  (na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$  nemá smysl o konstitutivním vztahu mluvit, jelikož zde předpokládáme dokonalé spojení složek). Docílíme toho tím, že předepíšeme diskretizované rozpojení složek  $\underline{c}_i$ , nebo-li skok v posuvech, lineárně závislé na velikosti příslušné působící síly  $\underline{\iota}_i$ , tedy

$$\underline{c}_i = H_{ij}\underline{L}_j. \tag{3.72}$$

Diagonální prvek matice  $H_{ij}$  má zřejmě fyzikální význam poddajnosti v místě a směru působícího zatížení  $\underline{\iota}_{j}$ , z čehož plyne zavedené pojmenování matice  $H_{ij}$ .

Vztah (3.72) lze rozšířit na celý vektor  $\underline{d}_i$  následovně

$$\underline{d}_i = H_{ij}\underline{\mu}_j,\tag{3.73}$$

kde diagonální prvek, tedy poddajnost v místě a směru působícího zatížení  $\underline{\epsilon}_j$ , musí být nulový, aby byly dodrženy požadavky kladené na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$ . Tento lineární vztah je vhodný, jelikož jeho aplikace do systému (3.70) je velice přirozená

$$(F_{ij} + H_{ij})\underline{\mu}_i + G^q_{ij}\underline{\alpha}^q_j = g_i, \qquad (3.74)$$

$$G_{ji}^q \underline{\mu}_j = e_i^q. \tag{3.75}$$

Některé další informace, jež se týkají předepsání poddajnosti na rozhraní složek, s přístupem založeným na použití matice poddajnosti  $H_{ij}$ , lze nalézt v [12].

#### 3.6.1 Transformace do lokálního souřadného systému

Směr diskretizovaného zatížení  $\underline{\iota}_j$  a tedy i směr, ve kterém je možné řídit poddajnost, je dán vektorem odpovídající uzlové neznámé  $\underline{u}_j^*$  a směr tohoto vektoru je volen (samozřejmě společně s jeho orientací). Naším cílem bude řídit poddajnost ve směru normály a tečny k hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ , proto budeme v uzlech, jež přísluší této hranici, uvažovat lokální souřadný systém právě v těchto směrech. Přesněji řečeno, v každém zmíněném uzlu budeme používat pravotočivý souřadný systém, jehož první bázový vektor, který označíme  $e_1^L$ , bude odpovídat vnější jednotkové normále k hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  (vždy ve směru vně z inkluze, i když se bude jednat o uzel příslušející prvku matrice), tedy vektoru  $n_i^{\Omega^{\mathcal{I}}}$  v místě tohoto uzlu.

Jelikož předpokládáme pravotočivý souřadný systém, bude druhý bázový vektor $e_2^L$ dán jednoznačně vektorem

$$\begin{bmatrix} -n_2^{\Omega^{\mathcal{I}}} \\ n_1^{\Omega^{\mathcal{I}}} \end{bmatrix}, \qquad (3.76)$$

neboť

$$\det \begin{bmatrix} e_1^L & e_2^L & e_3^L \\ n_1^{\Omega^{\mathcal{I}}} & n_2^{\Omega^{\mathcal{I}}} & 0 \\ -n_2^{\Omega^{\mathcal{I}}} & n_1^{\Omega^{\mathcal{I}}} & 0 \end{bmatrix} = e_3^L \left( n_1^{\Omega^{\mathcal{I}}} n_1^{\Omega^{\mathcal{I}}} + n_2^{\Omega^{\mathcal{I}}} n_2^{\Omega^{\mathcal{I}}} \right) > 0.$$
(3.77)

Horní index L odlišuje lokální souřadný systém od globálního, u něhož nebyl, ani nebude žádný index používán.

K transformaci z globálního do lokálního souřadného systému použijeme transformační matici  $T_{ij}$ , danou vztahem

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} n_1^{\Omega^{\mathcal{I}}} & n_2^{\Omega^{\mathcal{I}}} \\ -n_2^{\Omega^{\mathcal{I}}} & n_1^{\Omega^{\mathcal{I}}} \end{bmatrix}.$$
 (3.78)

pro kterou již z podstaty transformační matice platí, že

$$T_{ij}^{-1} = T_{ji}. (3.79)$$

Neznámé složky pole posuvů  $\underline{u}_j^*$  a vektor zatížení  $f_i$  transformovaný z globálního souřadného systému do lokálního, tedy

$$\underline{u}_{j}^{*L} = T_{jk}\underline{u}_{k}^{*}, \quad f_{i}^{L} = T_{in}f_{n}, \qquad (3.80)$$

dosadíme do lokální soustavy rovnic

$$K_{ij}^L \underline{u}_j^{*L} = f_i^L, (3.81)$$

ve kterém vystupuje lokální matice tuhosti  $K_{ij}^L$ , tedy

$$K_{ij}^L T_{jk} \underline{u}_k^* = T_{in} f_n, \qquad (3.82)$$

přenásobíme získaný vztah zleva inverzní transformační maticí  $T_{ij}^{-1}$ s využitím vztahu (3.79) a získáme soustavu rovnic

$$T_{in}K_{ij}^L T_{jk}\underline{u}_k^* = f_n, aga{3.83}$$

ze které je zřejmý předpis pro výpočet globální matice tuhosti z matice lokální, tedy

$$K_{nk} = T_{in} K_{ij}^L T_{jk}.$$
(3.84)

Obdobným způsobem bychom získali inverzní vztah

$$K_{nk}^{L} = T_{ni} K_{ij} T_{kj}.$$
 (3.85)

Tím jsou dány všechny vztahy potřebné pro transformaci vektoru neznámých koeficientů  $\underline{u}_{j}^{*}$ , vektoru pravých stran  $f_{i}$  a matice tuhosti  $K_{ij}$  z globálního souřadného sytému do lokálního a zpět. Popsanou situaci o transformaci souřadného sytému přibližuje obrázek 3.4.

## 3.6.2 Dokonalé rozpojení na rozhraní složek

Tato část ukazuje možnosti, jakými lze v metodě FETI zařídit dokonalé rozpojení složek, tedy rozpojení s nulovou tuhostí, resp. nekonečnou poddajností.

#### Velká poddajnost

Rozpojení složek v uzlu lze předepsat velkou poddajností v normálovém a tečném směru. Výhodou tohoto přístupu je možnost kontroly, zda dochází k tlakovému či tahovému namáhání i po odtržení a tudíž zůstává možnost zamezit proniknutí složek ve směru normály k hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ . Naopak nevýhodou je porušení dobré podmíněnosti matice  $F_{ij} + H_{ij}$  a tím zapříčiněná špatná konvergence modifikovaných sdružených gradientů (část 3.8). Tento nepříznivý jev je tím zřetelnější, čím je větší matice  $F_{ij} + H_{ij}$ , z čehož plyne omezená použitelnost tohoto přístupu pouze na problémy menšího rozsahu (pro malé matice  $F_{ij} + H_{ij}$ ).

Jev zhoršené konvergence by nenastal, pokud by byly všechny prvky na diagonále matice  $H_{ij}$  podobného řádu. Pokud by se jejich velikost blížila nule, což v krajním případě odpovídá dokonalému spojení složek, pak by samozřejmě rychlost konvergence odpovídala základnímu problému ve kterém vystupuje původní matice  $F_{ij}$ . Pokud však budou prvky



Obrázek 3.4: Transformované uzlové neznámé v uzlech na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$ . Modře jsou označeny uzlové neznámé v globálním souřadném systému a červeně uzlové neznámé, které byly transformovány do lokálních souřadných systémů, které mohou být obecně všechny různé. V uzlu  $n_j$  jsou uzlové neznámé označeny shodně, to však neznamená že jejich hodnota musí být shodná, jelikož patří do různých vektorů uzlových neznámých a jejich hodnota je určována z rozdílných systémů rovnic. Je však vhodné uzlovým neznámým přiřazovat kódová čísla odvozená z čísla uzlu, kterému náleží.

na diagonále matice  $H_{ij}$  všechny o několik řádů převyšovat prvky z matice  $F_{ij}$ , což odpovídá dokonalému odtržení všech složek (bez aplikace statických okrajových podmínek dle odstavce 3.10), lze mimodiagonální prvky matice  $F_{ij} + H_{ij}$  téměř "zanedbat" a řešit problém s "téměř diagonální" maticí. V takovém případě samozřejmě dochází k velmi rychlé konvergenci, jak vyplývá z povahy problému.

#### Kondenzace

Další způsob, jak předepsat dokonalé rozpojení složek, vychází ze znalosti silových podmínek v místě rozpojení složek. Síla  $\underline{\iota}_i$  je v takovém případě rovna nule a soustavu rovnic (3.74) s podmínkou (3.75) postačí kondenzovat. Nyní ukážeme, jakým způsobem lze kondenzaci provést. Za tímto účelem rozdělíme vektor neznámých  $\underline{\mu}_j$  do dvou bloků tak, aby v prvním bloku, který označíme  $\underline{\mu}_i$ , byly neznámé jejichž hodnotu hledáme a ve druhém bloku, který označíme  $\underline{\mu}_i^0$ , složky s nulovou hodnotou, tedy

$$\underline{\mu}_{k} = \begin{bmatrix} \underline{\overline{\mu}}_{i} \\ \underline{\mu}_{j}^{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\overline{\mu}}_{i} \\ \overline{0}_{j} \end{bmatrix}.$$
(3.86)

Dále je nutné ve shodě s dekompozicí (3.86) rozdělit do bloků také matice a vektory ze systémů rovnic (3.74) a (3.75), které budou mít poté následující podobu

$$\left( \begin{bmatrix} F_{li}^{11} & F_{lj}^{12} \\ F_{ni}^{21} & F_{nj}^{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{li}^{11} & H_{lj}^{12} \\ H_{ni}^{21} & H_{nj}^{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \overline{\mu}_i \\ \overline{0}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{lk}^1 \\ G_{nk}^2 \end{bmatrix}^q \underline{\alpha}_k^q = \begin{bmatrix} g_l \\ g_n \end{bmatrix}, \quad (3.87)$$

$$\begin{bmatrix} G_{ik}^1 & G_{jk}^2 \end{bmatrix}^q \begin{bmatrix} \overline{\mu}_i \\ \overline{0}_j \end{bmatrix} = e_k^q.$$
(3.88)

K určení vektoru neznámých $\underline{\mu}_i$ pak postačí řešit systémy

$$\left(F_{li}^{11} + H_{li}^{11}\right)\underline{\overline{\mu}}_{i} + G_{lk}^{1,q}\underline{\alpha}_{k}^{q} = g_{l}, \qquad (3.89)$$

$$G_{ik}^{1,q}\underline{\overline{\mu}}_i = e_k^q. aga{3.90}$$

# Modifikace matice $\Im_{ij}$

Nabízí se také možnost modifikace matice  $\mathfrak{I}_{ij}$ , resp.  $\mathcal{L}_{ij}$  tak, aby již uzly ve kterých má dojít k rozpojení složek nebyly touto maticí spojovány (omezení ve tvaru rovností již není zavedeno). Tato možnost se zdá být z teoretického hlediska nejpřirozenější, ale její algoritmizace přináší větší obtíže než zmíněná kondenzace.

#### 3.6.3 Obecnější konstitutivní vztah na rozhraní složek

Obecnější konstitutivní zákon předepíšeme pomocí procedury, o které budeme mluvit jako o vnější smyčce modifikovaných sdružených gradientů.

Na začátku této vnější smyčky předepíšeme na celém rozhraní, tedy na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ , počáteční podmínky (tedy konstitutivní zákon na rozhraní složek před zatížením), kterými může být např. dokonalé spojení fází (tedy nulovou poddajnost v normálovém i tečném směru). Metodou modifikovaných sdružených gradientů vypočteme hodnoty normálových

a tečných sil v uzlech příslušejících hranici  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$ , tedy na té části rozhraní, na které předpokládáme obecnější konstitutivní zákon. Dále v závislosti na velikosti vypočtených sil předepíšeme na rozhraní  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$  odpovídající normálovou a tečnou poddajnost či dokonalé rozpojení složek. Za takto upravených podmínek na rozhraní složek znovu vypočteme metodou modifikovaných sdružených gradientů hodnoty normálových a tečných sil a v závislosti na takto určených silách upravíme poddajnost na rozhraní.

Předchozí odstavec popisuje vnější smyčku, která se bude opakovat až do splnění určitého kritéria. Za tímto účelem je vhodné porovnat vypočtené síly z jednotlivých, po sobě jdoucích kroků vnější smyčky. Tyto síly za nezměněných podmínek na rozhraní složek budou shodné, popřípadě bude jejich rozdíl (měřeno určitou normou, například Euklidovskou) při složitější nelineární závislosti poddajnosti na vypočtených tečných a normálových silách konvergovat k nule.

Aby byla metoda korektní, je nutné zatěžovat  $\mathcal{UC}$  inkrementálně v několika krocích. Tím by měla mít  $\mathcal{UC}$  na rozhraní složek možnost postupně uvolňovat nahromaděnou energii a to dle předepsané závislosti poddajnosti tohoto rozhraní na působících silách. Jinými slovy by při zatěžování  $\mathcal{UC}$  v několika krocích nemělo dojít k přílišnému namáhání určité části hranice  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$ , ke kterému by vlivem změněných podmínek na rozhraní složek ve skutečnosti nedošlo.

# 3.7 Konkrétní příklady konstitutivních vztahů na rozhraní složek

V této části předvedeme konkrétní příklady konstitutivních vztahů na rozhraní složek a to takové, které jsou použity v numerických experimentech, tedy v II. části této práce. Pro účely následujících odstavců označme normálovou sílu, resp. skok v posuvech ve směru normály k hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  v uzlu  $n_i$  symbolem  $\underline{\iota}_i^n$ , resp.  $\underline{c}_i^n$  a sílu tečnou, resp. skok v posuvech ve směru tečny k hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  symbolem  $\underline{\iota}_i^n$ , resp.  $\underline{c}_i^n$ .

# 3.7.1 Dokonalé rozhraní

Dokonalé spojení složek lze předepsat nulovou tečnou i normálovou poddajností ve všech uzlech ležících na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$ , tedy

$$\delta_{ij}H_{ij}^n = \delta_{ij}H_{ij}^t = 0_i, \quad \forall n_i \in \Gamma^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}.$$
(3.91)

V takovém případě není nutné aktivovat vnější smyčku, jelikož se konstitutivní vztah rozhraní nemění. Tento případ je zobrazen na obrázku 3.5.

Druhou, přirozenější možností je uvažovat hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  shodnou s hranicí  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ , tedy

$$\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} = \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} \quad \wedge \quad \Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}} = \emptyset.$$
(3.92)

# 3.7.2 Konstantní poddajnost rozhraní

Dalším uvedeným modelem je rozhraní s konstantní poddajností v tečném i normálovém směru (obecně rozdílnou). Zde již nastává nutnost rozlišovat mezi tlakovým a tahovým



Obrázek 3.5: Konstitutivní zákon na rozhraní v případě dokonalého spojení složek.



Obrázek 3.6: Konstantní poddajnost rozhraní, bez možnosti průniku složek.

normálovým namáháním rozhraní, tedy pokud je naším cílem zamezit průniku jednotlivých složek. V případě tlakového normálového namáhání uzlu je nutné předepsat nulovou poddajnost v tomto směru, tedy

$$\delta_{ij}H_{ij}^n = \begin{cases} 0_i, & \forall \underline{\iota}_i^n \leq 0\\ k_i^n, & \forall \underline{\iota}_i^n > 0 \end{cases} \land \quad \delta_{ij}H_{ij}^t = k_i^t, \quad \forall \underline{\iota}_i^t \in \mathbb{R}^1,$$
(3.93)

kde  $k_i^n$ , resp.  $k_i^t$  je normálová, resp. tangenciální poddajnost v uzlu  $n_i$ , kterou je nutné určit diskrétní aproximací předpokládané spojit normálové, resp. tangenciální tuhosti rozhraní. Tento příklad konstitutivního vztahu na rozhraní složek je uveden na obrázku 3.6.

#### 3.7.3 Konstantní poddajnost rozhraní s počáteční pevností

Uvážíme-li na rozhraní složek počáteční normálovou, resp. tangenciální pevnost, kterou označíme  $\underline{\iota}_i^{0,n}$ , resp.  $\underline{\iota}_i^{0,t}$ , pak lze po jejím překročení uvažovat dvě odezvy rozhraní na narůstající zatížení za mez pevnosti.

#### Skokový pokles v napětích

Jednou z možností je předpokládat, že po překročení počáteční pevnosti bude přenášet rozhraní celou působící sílu, jak naznačuje obrázek 3.7.

### Narůstající napětí

Druhým předpokladem může být takové chování rozhraní, které popisuje obrázek 3.8. V takovém případě poddajné rozhraní přenáší pouze přírůstek síly nad mezí počáteční pevnosti. Bude-li nejdříve překonána normálová počáteční pevnost  $\underline{\iota}_i^{0,n}$  (v tomto případě



Obrázek 3.7: Rozhraní, které se po překonání počáteční pevnosti chová pružně.

musí jít o normálové tahové namáhání rozhraní, jinak nemůže být normálová pevnost překonána, z čehož plyne kladná hodnota  $\underline{\iota}_i^n$  v následujících vztazích), pak bude tento přírůstek vypadat následovně

$$\Delta \underline{\iota}_i^n = \underline{\iota}_i^n - \underline{\iota}_i^{n,0}, \qquad (3.94)$$

$$\Delta \underline{\iota}_{i}^{t} = \underline{\iota}_{i}^{t} - \frac{\underline{\iota}_{i}^{n,0}}{\underline{\iota}_{i}^{n}} \underline{\iota}_{i}^{t}.$$

$$(3.95)$$

Naopak, bude-li nejprve překročena tangenciální počáteční pevnost  $\underline{\iota}_i^{0,t}$ , pak bude navíc záležet, zda je rozhraní namáháno tlakem či tahem. V případě tahového namáhání bude přírůstek síly, který se podílí na rozevření rozhraní vypadat následovně

$$\Delta \underline{\iota}_{i}^{n} = \underline{\iota}_{i}^{n} - \frac{\underline{\iota}_{i}^{t,0}}{|\underline{\iota}_{i}^{t}|} \underline{\iota}_{i}^{n}, \qquad (3.96)$$

$$\Delta \underline{\iota}_{i}^{n} = \underline{\iota}_{i}^{t} - \underline{\iota}_{i}^{t,0} \tag{3.97}$$

a v případě tlakového namáhání rozhraní takto

$$\Delta \underline{\iota}_i^n = 0, \qquad (3.98)$$

$$\Delta \underline{\iota}_i^n = \underline{\iota}_i^t - \underline{\iota}_i^{t,0}. \tag{3.99}$$

V tomto konstitutivním vztahu se nedá o významu  $\underline{\iota}_i^{0,n}$ , resp.  $\underline{\iota}_i^{0,t}$  mluvit v pravém slova smyslu jako o počáteční pevnosti. Jedná se spíše o určitou mez, do které dokáže rozhraní odolávat zatížení bez toho, aby se rozevřelo a po překročení této meze již působí s určitou poddajností.

V tomto případě je nutné upravit úlohu (3.74) a to následovně

$$F_{ij}\underline{\mu}_{j} + G^{q}_{ij}\underline{\alpha}^{q}_{j} = g_{i} - H_{ij}\underline{\Delta}\underline{\mu}_{i}, \qquad (3.100)$$

$$F_{ij}\underline{\mu}_j + G^q_{ij}\underline{\alpha}^q_j = g_i - H_{ij}\left(\underline{\mu}_i - \underline{\mu}^0_i\right), \qquad (3.101)$$

$$(F_{ij} + H_{ij})\underline{\mu}_j + G^q_{ij}\underline{\alpha}^q_j = g_i + H_{ij}\underline{\mu}^0_i, \qquad (3.102)$$

kde na příslušných pozicích vektoru  $\underline{\mu}_i^0$  jsou uloženy síly v souladu se vztahem (3.94) až (3.99) a v ostatních případech nuly.



Obrázek 3.8: Konstitutivní zákon rozhraní s dokonalou tuhostí až do překročení počáteční pevnosti.



Obrázek 3.9: Oblast pružného chování rozhraní.

# 3.7.4 Poddajné rozhraní s počáteční pevností a omezenou duktilitou

Posledním uvedeným zdokonalením konstitutivního zákona na rozhraní složek je omezení jeho duktility v pružném stavu. Uvažujme tedy, že se rozhraní chová dle některého výše uvedeného konstitutivního vztahu, ve kterém se nachází některá jeho část v pružném stavu. Pak lze v uzlech  $n_i$  ležících na této části rozhraní kontrolovat například jeho celkové rozevření, které označíme  $\Delta \underline{c}_i$  a jež je dáno vztahem

$$\Delta \underline{c}_i = \sqrt{\underline{c}_i^{n^2} + \underline{c}_i^{t^2}}.$$
(3.103)

Dále předepíšeme mezní rozevření rozhraní, které označíme  $\Delta \underline{c}_i^{\max}$ , po jehož překročení dojde k dokonalému rozpojení složek dle odstavce 3.6.2. Oblast, ve které se rozhraní chová pružně, je zobrazena na obrázku 3.9.

Pokud zadáme  $\Delta \underline{c}_i^{\text{max}} = 0$ , pak při kombinaci s konstitutivním zákonem, jež uvažuje počáteční pevnost, dojde po jejím překonání ihned k dokonalému rozpojení složek.

#### 3.7.5 Další možnosti

Zdá se, že předepsání konstitutivního zákona pomocí vnější smyčky metody modifikovaných gradientů v kombinaci s maticí poddajnosti rozhraní závislé na působícím zatížení, umožňuje předepsat i výstižnější chování rozhraní, jako změkčení či tření při tlakovém namáhání. V rozsahu této práce se však nepodařilo takový fyzikální zákon implementovat do numerického modelu a tedy ani ověřit.

### 3.8 Modifikované sdružené gradienty

Systém lineárních rovnic (3.74) a (3.75) je zřejmě ekvivalentní optimalizační úloze

$$\min_{\underline{\mu}_i} \max_{\underline{\alpha}_j^q} \Phi\left(\underline{\mu}_i, \underline{\alpha}_j^q\right) = \frac{1}{2} \left(F_{ij} + H_{ij}\right) \underline{\mu}_i \underline{\mu}_j - g_i \underline{\mu}_i + \left(G_{ij}^q \underline{\mu}_i - e_j^q\right) \underline{\alpha}_j^q, \tag{3.104}$$

ve které má vektor  $\underline{\alpha}_{j}^{q}$ význam Lagrangeových multiplikátorů a vektor  $\underline{\mu}_{i}$  představuje primární neznámou. Naším cílem bude z problému (3.104) vypočítat pouze neznámou  $\underline{\mu}_{i}$ , jelikož neznámou  $\underline{\alpha}_{j}^{q}$  poté vyjádříme z (3.74), tedy

$$(F_{ij} + H_{ij})\underline{\mu}_j + G^q_{ij}\underline{\alpha}^q_j = g_i, \qquad (3.105)$$

následujícími úpravami, kde nejprve provedeme elementární úpravu

$$G_{ij}^q \underline{\alpha}_j^q = g_i - (F_{ij} + H_{ij}) \underline{\mu}_j, \qquad (3.106)$$

dále z důvodu obecně obdélníkového tvaru matice  $G_{ij}^q$  přenásobíme předchozí soustavu zleva transponovanou maticí k matici  $G_{ij}^q$ , tedy

$$G_{ik}^{q}G_{ij}^{q}\underline{\alpha}_{j}^{q} = G_{ik}^{q} \left[ g_{i} - (F_{ij} + H_{ij}) \underline{\mu}_{j} \right]$$
(3.107)

a nakonec přenásobíme zleva inverzí k již čtvercové matic  $G_{ik}^q G_{ij}^q$ 

$$\underline{\alpha}_{k}^{q} = \left(G_{lk}^{q}G_{lj}^{q}\right)^{-1}G_{ik}^{q}\left[g_{i} - \left(F_{ij} + H_{ij}\right)\underline{\mu}_{j}\right].$$
(3.108)

Je-li tedy naším cílem z problému (3.104) nejprve vypočítat pouze neznámou  $\underline{\mu}_i$ , převedeme tento problém na tvar, který odpovídá našemu cíli a je navíc vhodný pro řešení modifikovanou metodou sdružených gradientů, tedy

$$\min_{\underline{\mu}_{i}} \Psi\left(\underline{\mu}_{i}\right) = \frac{1}{2} \left(F_{ij} + H_{ij}\right) \underline{\mu}_{i} \underline{\mu}_{j} - g_{i} \underline{\mu}_{i}, \qquad (3.109)$$

za podmínek

$$G^q_{jk}\underline{\mu}_j = e^q_k. \tag{3.110}$$

#### 3.8.1 Modifikace klasické metody sdružených gradientů

Modifikace klasické metody sdružených gradientů spočívá v nutnosti splnit podmínky řešitelnosti (3.110) v každém iteračním kroku metody. Toho se dosáhne, jak je uvedeno dále, vhodnou projekcí směrů postupu, které označíme  $s_i$ , a to v každé iteraci.

V souladu s klasickou metodou sdružených gradientů [19, str. 572–578][2, str. 181–199] hledejme nové přiblížení stacionárního bodu  $\underline{\mu}_i^{(k+1)}$  iterací ve vhodném směru a vzdálenosti od aktuální aproximace  $\mu_i^{(k)}$ , tedy

$$\underline{\mu}_{i}^{(k+1)} = \underline{\mu}_{i}^{(k)} + \alpha^{(k)} s_{i}^{(k)}, \qquad (3.111)$$

kde koeficient  $\alpha^{(k)}$ určíme tak, abychom funkci  $\Psi\left(\underline{\mu}_i\right)$ minimalizovali právě na přímce

$$\underline{\mu}_i = \underline{\mu}_i^{(k)} + \alpha^{(k)} s_i^{(k)}. \tag{3.112}$$

#### Projekce směru postupu

Uvažujme nyní, že pro k-tý krok iterace platí

$$G^q_{ij}\underline{\mu}^{(k)}_i = e^q_j, \qquad (3.113)$$

tedy že jsou podmínky (3.110) v k-tém kroku splněny. Dále požadujeme, aby podmínky (3.110) byly splněny i v dalším, tedy v k + 1 kroku iterace. Vynásobíme-li vhodně vztah (3.111) maticemi  $G_{ij}^q$  tak, abychom na levé straně rovnic dostali právě podmínky (3.110) pro k + 1 iteraci, tedy

$$G_{ij}^{q}\underline{\mu}_{i}^{(k+1)} = G_{ij}^{q}\underline{\mu}_{i}^{(k)} + G_{ij}^{q}\alpha^{(k)}s_{i}^{(k)}$$

$$(3.114)$$

a uvážíme-li splnění podmínky (3.110) v k-tém kroku, tedy rovnost (3.113), dostaneme

$$G_{ij}^{q}\underline{\mu}_{i}^{(k+1)} = e_{j}^{q} + \alpha^{(k)}G_{ij}^{q}s_{i}^{(k)}.$$
(3.115)

Z předchozího vztahu je zřetelné, že pokud chceme splnit podmínku (3.110) i vk+1kroku iterace, musí platit identita

$$\alpha^{(k)}G^q_{ij}s_i^{(k)} = 0_j. ag{3.116}$$

Jelikož koeficient  $\alpha^{(k)}$  je nulový pouze v bodě minima, je v ostatních bodech možné podmínku (3.116) splnit pouze vhodnou volbou směru  $s_i^{(k)}$  tak, aby platilo

$$G_{ij}^q s_i^{(k)} = 0_j. ag{3.117}$$

Vhodný směr, který nám zaručí splnění identity (3.117) a tedy i podmínky (3.110) pro k + 1 iteraci, získáme projekcí obecně libovolného směru  $s_i^{(k)}$ , pomocí vhodné projekční matice  $P_{ij}$ , tedy

$$\hat{s}_i = P_{ij} s_j, \tag{3.118}$$

kde o projekční matici mluvíme pouze a jen tehdy, pokud

$$P_{ij}P_{jk} = P_{ik}. (3.119)$$

Matice

$$P_{ij} = I_{ij} - G^q_{il} (G^q_{nl} G^q_{nk})^{-1} G^q_{jk}$$
(3.120)

zřejmě splňuje podmínku (3.119) a je tedy maticí projekční. Je navíc maticí vhodnou k našemu úmyslu projektovat pomocí ní směr postupu  $s_i$ , jelikož

$$G^q_{im}\hat{s}_i = G^q_{im}P_{ij}s_j \tag{3.121}$$

$$= G_{im}^{q} \left[ I_{ij} - G_{il}^{q} (G_{nl}^{q} G_{nk}^{q})^{-1} G_{jk}^{q} \right] s_{j}$$
(3.122)

$$= \left[ G_{im}^{q} I_{ij} - G_{im}^{q} G_{il}^{q} (G_{nl}^{q} G_{nk}^{q})^{-1} G_{jk}^{q} \right] s_{j}$$
(3.123)

$$= \left(G_{im}^q I_{ij} - I_{mk} G_{jk}^q\right) s_j \tag{3.124}$$

$$= \left(G_{mj}^q - G_{mj}^q\right)s_j \tag{3.125}$$

a tedy po projekci libovolného směru $s_j$  projekční maticí  ${\cal P}_{ij}$ danou předpisem (3.120) platí

$$G_{jm}^q \hat{s}_j = 0_m. (3.126)$$

#### Splnění podmínky řešitelnosti v prvním kroku iterace

Na tomto místě zavedme označení gradientu funkce  $\Psi\left(\underline{\mu}_{i}\right)$  následovně

$$\gamma_i = \Psi_{,i} = (F_{ij} + H_{ij}) \,\underline{\mu}_j - g_i.$$
 (3.127)

Jelikož musíme podmínku (3.110) splnit ve všech krocích iterace, tedy i v prvním, čehož nelze dosáhnout výše popsaným způsobem pomocí projekce směru postupu  $s_i$ , musíme správně zvolit první přiblížení  $\underline{\mu}_i^{(0)}$ . Není tedy možné volit  $\underline{\mu}_i^{(0)}$  libovolně, jak je tomu u klasické metody sdružených gradientů. Jednou z možností, jak správně zvolit  $\underline{\mu}_i^{(0)}$ , aby byla splněna podmínka (3.110), je vyjádřit  $\mu_i^{(0)}$  jako lineární kombinaci

$$\underline{\mu}_{i}^{(0)} = G_{ij}^{q} \xi_{j}^{q} \tag{3.128}$$

a neznámé koeficienty  $\xi_i^q$  určit tak, aby byly splněny rovnice (3.110), tedy

$$G_{ij}^q \underline{\mu}_i^{(0)} = \delta^{qrs} G_{ij}^q G_{ik}^r \xi_k^s = e_j^q.$$
(3.129)

Vyřešením systému rovnic (3.129) pro neznámé koeficient<br/>y $\xi_j^q$ s uvážením, že matice $G_{ij}^q$ není obecně čtver<br/>cová, získáme

$$\xi_j^q = \delta^{qrs} \left( G_{ij}^q G_{ik}^r \right)^{-1} e_k^s \tag{3.130}$$

a první přiblížení  $\mu_i^{(0)}$  budeme tedy hledat ve tvaru

$$\underline{\mu}_{i}^{(0)} = G_{ik}^{q} \left( G_{nj}^{q} G_{nk}^{q} \right)^{-1} e_{j}^{q}, \qquad (3.131)$$

jelikož v takovém případě budeme mít zaručeno splnění podmínek (3.110).

Z výše uvedených úvah vyplývá, že modifikace klasické metody sdružených gradientů spočívá ve správné volbě výchozího bodu iterace  $\underline{\mu}_i^{(0)}$  a v projekci směrů postupu  $s_i$  ve všech iteracích. V obou případech z důvodu zajištění podmínek řešitelnosti (3.110).

#### Nové přiblížení v projektovaném směru

Známe-li projektovaný vektor směru  $\hat{s}_i^{(k)}$ , ve kterém postupujeme z aktuálního bodu  $\underline{\mu}_i^{(k)}$  do bodu  $\underline{\mu}_i^{(k+1)}$ , pak pro nové přiblížení stacionárního bodu  $\underline{\mu}_i^{(k+1)}$  nechť platí

$$\underline{\mu}_{i}^{(k+1)} = \underline{\mu}_{i}^{(k)} + \alpha^{(k)} \hat{s}_{i}^{(k)}, \qquad (3.132)$$

kde koeficient  $\alpha^{(k)}$  určíme tak, abychom funkci  $\Psi\left(\underline{\mu}_{i}\right)$  minimalizovali právě na přímce

$$\underline{\mu}_i = \underline{\mu}_i^{(k)} + \alpha^{(k)} \hat{s}_i^{(k)}, \qquad (3.133)$$

tedy

$$\min_{\alpha^{(k)}} \Psi\left(\alpha^{(k)}\right) = \frac{1}{2} \left(F_{ij} + H_{ij}\right) \left(\underline{\mu}_{i}^{(k)} + \alpha^{(k)} \hat{s}_{i}^{(k)}\right) \left(\underline{\mu}_{j}^{(k)} + \alpha^{(k)} \hat{s}_{j}^{(k)}\right) - g_{i} \left(\underline{\mu}_{i}^{(k)} + \alpha^{(k)} \hat{s}_{i}^{(k)}\right).$$
(3.134)

Z pozitivní definitnosti matice  $(F_{ij} + H_{ij})$  vyplývá, že minimum funkce  $\Psi(\alpha^{(k)})$  bude shodné se stacionárním bodem této funkce, tedy

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\alpha^{(\mathrm{k})}} = (F_{ij} + H_{ij}) \left(\underline{\mu}_i^{(k)} \hat{s}_j^{(k)} + \hat{s}_i^{(k)} \hat{s}_j^{(k)} \alpha^{(k)}\right) - g_i \hat{s}_i^{(k)} = 0.$$
(3.135)

Upravíme-li podmínku (3.135) elementárními úpravami na tvar

$$(F_{ij} + H_{ij}) \,\hat{s_i}^{(k)} \hat{s_j}^{(k)} \alpha^{(k)} = \left[ g_j - (F_{ij} + H_{ij}) \,\underline{\mu_i}^{(k)} \right] \hat{s_j}^{(k)} \tag{3.136}$$

a použijeme-li vztah pro gradient  $\gamma_i$  z rovnice (3.127), tedy

$$(F_{ij} + H_{ij}) \hat{s}_i^{(k)} \hat{s}_j^{(k)} \alpha^{(k)} = -\gamma_j^{(k)} \hat{s}_j^{(k)}, \qquad (3.137)$$

pak získáme vztah pro koeficient  $\alpha^{(k)},$ který minimalizuje (3.135), tedy funkci $\Psi$ ve směru $\hat{s_{j}}^{(k)},$ ve tvaru

$$\alpha^{(k)} = -\frac{\gamma_i^{(k)} \hat{s}_i^{(k)}}{(F_{ij} + H_{ij}) \hat{s}_i^{(k)} \hat{s}_j^{(k)}}, \qquad (3.138)$$

který je vzhledem k vlastnosti projekční matice (3.119) ekvivalentní vztahu

$$\alpha^{(k)} = -\frac{\hat{\gamma}_i^{(k)} \hat{s}_i^{(k)}}{(F_{ij} + H_{ij}) \hat{s}_i^{(k)} \hat{s}_j^{(k)}}.$$
(3.139)

#### 3.8.2 Algoritmus modifikované metody sdružených gradientů

S poznatky z předchozích odstavců části, jež se týká modifikované metody sdružených gradientů, lze sestavit celý algoritmus této metody.

#### První krok iterace

Ke splnění podmínky (3.110) je nutné začít iterovat z výchozího bodu

$$\underline{\mu}_{i}^{(0)} = G_{ik}^{q} (G_{nj}^{q} G_{nk}^{q})^{-1} e_{j}^{q}, \qquad (3.140)$$

ve kterém vypočteme gradient

$$\gamma_i^{(0)} = (F_{ij} + H_{ij}) \underline{\mu}_j^{(0)} - g_i.$$
(3.141)

Jako první projektovaný směr postupu  $\hat{s}_i^{(0)}$  použijeme vektor opačný k projektovanému gradientu, jelikož jde o směr největšího klesání, ve kterém navíc splníme podmínky (3.110), tedy

$$\hat{s}_i^{(0)} = P_{ij}\gamma_j^{(0)} = -\hat{\gamma}_i^{(0)}.$$
(3.142)

#### Další krok iterace

Jelikož od dalších směrů  $s_i^{(k+1)}$  požadujeme, aby byly nejen projektované, ale i sdružené, tedy ortogonální vzhledem k  $(F_{ij} + H_{ij})$ , což je ekvivalentní podmínce

$$(F_{ij} + H_{ij}) s_i^{(k+1)} s_j^{(k)} = 0, (3.143)$$

nelze z bodu  $\underline{\mu}_i^{(k)}$  postupovat jako v prvním kroku, čistě jen proti směru projektovaného gradientu  $\gamma_i^{(k+1)}$ . Z tohoto důvodu vyjádříme následující směr  $s_i^{(k+1)}$  následovně

$$s_i^{(k+1)} = -\gamma_i^{(k+1)} + \beta^{(k)} s_i^{(k)}, \qquad (3.144)$$

kde pomocí koeficientu  $\beta^{(k)}$  zaručíme  $(F_{ij} + H_{ij})$ -ortogonalitu směru  $s_i^{(k+1)}$  vzhledem k předchozímu směru  $s_i^{(k)}$ .

Dosadíme-li do podmínky orotogonality (3.143) vyjádření následujícího směru  $s_i^{(k+1)}$ dle (3.144), potom

$$(F_{ij} + H_{ij}) \left( -\gamma_i^{(k+1)} + \beta^{(k)} s_i^{(k)} \right) s_j^{(k)} = 0.$$
(3.145)

Provedeme-li dále elementární úpravy a dosadíme-li ze vztahu (3.127) pro gradient  $\gamma_i$ , pak

$$(F_{ij} + H_{ij}) \beta^{(k)} s_i^{(k)} s_j^{(k)} = (F_{ij} + H_{ij}) \gamma_i^{(k+1)} s_j^{(k)}.$$
(3.146)

Z předchozí rovnice získáme vztah pro koeficient  $\beta^{(k)}$ , který zaručuje ortogonalitu směrů  $s_i^{(k)}$  a  $s_i^{(k+1)}$  vzhledem k matici  $(F_{ij} + H_{ij})$ , ve tvaru

$$\beta^{(k)} = \frac{(F_{ij} + H_{ij}) \gamma_i^{(k+1)} s_j^{(k)}}{(F_{ij} + H_{ij}) s_i^{(k)} s_j^{(k)}}.$$
(3.147)

Nakonec musíme směr  $s_i^{(k+1)}$  projektovat, tedy

$$\hat{s_i}^{(k+1)} = P_{ij} \left( -\gamma_i^{(k+1)} + \beta^{(k)} s_i^{(k)} \right)$$
(3.148)

$$= -P_{ij}\gamma_i^{(k+1)} + P_{ij}\beta^{(k)}s_i^{(k)}$$
(3.149)

$$= -\hat{\gamma}_i^{(k+1)} + \beta^{(k)}\hat{s}_i^{(k)}, \qquad (3.150)$$

kde

$$\beta^{(k)} = \frac{(F_{ij} + H_{ij}) \,\hat{\gamma_i}^{(k+1)} \hat{s_j}^{(k)}}{(F_{ij} + H_{ij}) \,\hat{s_i}^{(k)} \hat{s_j}^{(k)}},\tag{3.151}$$

čímž se zřejmě ortogonalita směrů  $\hat{s_i}^{(k)}$  a  $\hat{s_i}^{(k+1)}$  vzhledem k matici  $(F_{ij} + H_{ij})$  nenaruší.

Nové přiblížení  $\underline{\underline{\mu}}_{i}^{(k+1)}$ získáme takto

$$\underline{\mu}_{i}^{(k+1)} = \underline{\mu}_{i}^{(k)} + \alpha^{(k)} \hat{s}_{i}^{(k)}, \qquad (3.152)$$

kde

$$\alpha^{(k)} = -\frac{\hat{\gamma}_i^{(k)} \hat{s}_i^{(k)}}{(F_{ij} + H_{ij}) \hat{s}_i^{(k)} \hat{s}_j^{(k)}}.$$
(3.153)

# 3.8.3 Efektivnější vztahy

## Vyjádření gradientu z gradientu předcházejícího

Pro další úvahy je vhodné dokázat vyjádřit gradient  $\gamma_i^{(k+1)}$  z předchozího gradientu  $\gamma_i^{(k)}$ . Dle vztahu (3.127) lze gradient v k + 1 kroku určit následovně

$$\gamma_i^{(k+1)} = (F_{ij} + H_{ij}) \underline{\mu}_j^{(k+1)} - g_i, \qquad (3.154)$$

kde použitím vztahu (3.111) pro nové přiblížení  $\underline{\mu_i}^{(k+1)},$ získáme

$$\gamma_i^{(k+1)} = (F_{ij} + H_{ij}) \left(\underline{\mu}_j^{(k)} + \alpha^{(k)} s_j^{(k)}\right) - g_i, \qquad (3.155)$$

$$\gamma_i^{(k+1)} = (F_{ij} + H_{ij}) \underline{\mu}_j^{(k)} - g_i + (F_{ij} + H_{ij}) \alpha^{(k)} s_j^{(k)}.$$
(3.156)

Elementárními úpravami a dosazením ze vztahu (3.127) pro gradient dospějeme k vyjádření gradientu  $\gamma_i^{(k+1)}$  v závislosti na gradientu předchozím  $\gamma_i^{(k)}$ 

$$\gamma_i^{(k+1)} = \gamma_i^{(k)} + \alpha^{(k)} \left( F_{ij} + H_{ij} \right) s_j^{(k)}.$$
(3.157)

Předchozí vztah je nejen vhodný pro následné úvahy o vzájemné ortogonálnosti gradientů a ortogonálnosti gradientů se směry postupu, ale je ho vhodné použít i v samotném algoritmu.

### Ortogonálnost následných gradientů

Nyní rozepišme následující skalární součin

$$\gamma_i^{(k)} \gamma_i^{(k+1)} = \gamma_i^{(k)} \left[ \gamma_i^{(k)} + \alpha^{(k)} \left( F_{ij} + H_{ij} \right) s_j^{(k)} \right]$$
(3.158)

$$= \gamma_i^{(k)} \gamma_i^{(k)} + \alpha^{(k)} \left( F_{ij} + H_{ij} \right) \gamma_i^{(k)} s_j^{(k)}$$
(3.159)

$$= \gamma_i^{(k)} \gamma_i^{(k)} - \frac{\gamma_l^{(k)} s_l^{(k)}}{(F_{ln} + H_{ln}) s_l^{(k)} s_n^{(k)}} (F_{ij} + H_{ij}) \gamma_i^{(k)} s_j^{(k)} \qquad (3.160)$$

$$= \gamma_i^{(k)} \gamma_i^{(k)} - \gamma_l^{(k)} \gamma_l^{(k)}, \qquad (3.161)$$

z kterého je zřetelné, že použijeme-li iteraci metodou sdružených gradientů, jsou gradienty ve dvou následných krocích ortogonální, tedy

$$\gamma_i^{(k)}\gamma_i^{(k+1)} = 0, (3.162)$$

což samozřejmě platí i pro gradienty projektované, tedy

$$\hat{\gamma_i}^{(k)} \hat{\gamma_i}^{(k+1)} = 0. \tag{3.163}$$

Lze dokonce dokázat, že ve všech bodech  $\underline{\mu}_i^{(k)}$ , které postupně získáme touto metodou, jsou gradienty  $\gamma_i^{(k)}$  navzájem ortogonální. Pro nás je ale důležitá především vlastnost (3.162).

# Ortogonálnost gradientu na předešlý směr postupu

Dále si všimněme následujícího skalárního součinu

$$s_i^{(k)} \gamma_i^{(k+1)} = s_i^{(k)} \left[ \gamma_i^{(k)} + \alpha^{(k)} \left( F_{ij} + H_{ij} \right) s_j^{(k)} \right]$$
(3.164)

$$= s_i^{(k)} \gamma_i^{(k)} + \alpha^{(k)} \left( F_{ij} + H_{ij} \right) s_i^{(k)} s_j^{(k)}$$
(3.165)

$$= s_i^{(k)} \gamma_i^{(k)} - \frac{\gamma_l^{(k)} s_l^{(k)}}{(F_{ln} + H_{ln}) s_l^{(k)} s_n^{(k)}} (F_{ij} + H_{ij}) s_i^{(k)} s_j^{(k)}$$
(3.166)

$$= s_i^{(k)} \gamma_i^{(k)} - \gamma_l^{(k)} s_l^{(k)}, \qquad (3.167)$$

který ukazuje na vzájemnou ortogonálnost gradientu  $\gamma_i^{(k+1)}$  v bodě  $\underline{\mu}_i^{(k+1)}$ s předchozím směrem postup  $s_i^{(k)}$ , tedy

$$s_i^{(k)}\gamma_i^{(k+1)} = 0, (3.168)$$

což platí i pro projektovaný směr postupu $\hat{s_i}^{(k)}$ a projektovaný gradient $\hat{\gamma_i}^{(k+1)},$ tedy

$$\hat{s}_i^{(k)} \hat{\gamma}_i^{(k+1)} = 0. \tag{3.169}$$

Podobně jako v případě ortogonálnosti následných gradientů (3.162) se dá dokázat, že všechny směry  $s_i$ , kterými jsme se dostali do bodu  $\underline{\mu}_i^{(k)}$  jsou na gradient v tomto bodě  $\gamma_i^{(k)}$  ortogonální. My ale využijeme pouze vlastnosti (3.168).

Vztahu (3.157) využijeme ještě k úpravě následujícího výrazu

$$(F_{ij} + H_{ij}) s_j^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)}} \left( \gamma_i^{(k+1)} - \gamma_i^{(k)} \right).$$
(3.170)

# Koeficient $\alpha$

Využijeme-li výrazu (3.144) a (3.168), můžeme vztah pro koeficient  $\alpha^{(k)}$ upravit následovně

$$\alpha^{(k)} = -\frac{\gamma_i^{(k)} s_i^{(k)}}{(F_{ij} + H_{ij}) s_i^{(k)} s_j^{(k)}}$$
(3.171)

$$= -\frac{\gamma_i^{(k)} \left(-\gamma_i^{(k)} + \beta^{(k-1)} s_i^{(k-1)}\right)}{\left(F_{ij} + H_{ij}\right) s_i^{(k)} s_j^{(k)}}$$
(3.172)

$$= \frac{\gamma_i^{(k)}\gamma_i^{(k)} - \gamma_i^{(k)}\beta^{(k-1)}s_i^{(k-1)}}{(F_{ij} + H_{ij})s_i^{(k)}s_j^{(k)}}$$
(3.173)

a získat nový efektivnější vztah

$$\alpha^{(k)} = \frac{\gamma_i^{(k)} \gamma_i^{(k)}}{(F_{ij} + H_{ij}) \, s_i^{(k)} s_j^{(k)}}.$$
(3.174)

# Koeficient $\beta$

Podobně jako v případě koeficientu  $\alpha^{(k)}$  budeme postupovat v případě koeficientu  $\beta^{(k)}$ . Zde použijeme výrazy (3.170), (3.162) a (3.168), tedy

$$\beta^{(k)} = \frac{(F_{ij} + H_{ij}) \gamma_i^{(k+1)} s_j^{(k)}}{(F_{ij} + H_{ij}) s_i^{(k)} s_j^{(k)}}$$
(3.175)

$$= \frac{\gamma_i^{(k+1)} \left(\gamma_i^{(k+1)} - \gamma_i^{(k)}\right)}{\left(\gamma_i^{(k+1)} - \gamma_i^{(k)}\right) s_i^{(k)}} \tag{3.176}$$

$$= \frac{\gamma_i^{(k+1)}\gamma_i^{(k+1)} - \gamma_i^{(k+1)}\gamma_i^{(k)}}{\gamma_i^{(k+1)}s_i^{(k)} - \gamma_i^{(k)}s_i^{(k)}}$$
(3.177)

a získáme i v tomto případě efektivnější vztah

$$\beta^{(k)} = \frac{\gamma_i^{(k+1)} \gamma_i^{(k+1)}}{\gamma_i^{(k)} \gamma_i^{(k)}}.$$
(3.178)

Efektivnost vztahů (3.174), resp. (3.178) pro koeficient  $\alpha^{(k)}$ , resp.  $\beta^{(k)}$ , spočívá v menší výpočetní náročnosti a menší náročnosti na paměť počítače.

# 3.9 Kinematické okrajové podmínky

Jsou-li na celé hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  předepsány kinematické okrajové podmínky, pak po dekompozici oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  na jednotlivé části  $\Omega^{\mathcal{M}}$ a  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$  budou tyto okrajové podmínky předepsány na hranicích

$$\Gamma^{\mathcal{M}} \cap \Gamma^{\mathcal{UC}} \tag{3.179}$$

a

$$\Gamma_a^{\mathcal{I}} \cap \Gamma^{\mathcal{UC}}.\tag{3.180}$$

Až na některé výjimky, které budou uvedeny dále, lze aplikovat kinematické okrajové podmínky na jednotlivé části, jež jsou reprezentovány oblastmi  $\Omega^{\mathcal{M}}$ a  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$ , analogicky s částí 2.6.

#### 3.9.1 Periodické okrajové podmínky

Periodické okrajové podmínky jsme v části 2.6.1 aplikovali přiřazením shodných kódových čísel odpovídajícím si uzlovým neznámým (z hlediska periodických okrajových podmínek). Tato aplikace není v metodě FETI vždy možná. Uvažujme jednotlivé oblasti  $\Omega^{\mathcal{M}}$  a  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$  již rozdělené na konečné prvky. Je zřejmé, že mohou vzniknout oblasti (většinou vzniknou a jsou to převážně oblasti, jež reprezentují inkluze, tedy  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$ ) na jejichž hranici leží uzel, kterému jsou předepsány periodické okrajové podmínky, ale jemu odpovídající uzel již na této hranici neleží. Na takové hranici tedy nelze přiřadit shodná kódová čísla odpovídajícím si uzlovým neznámým a tak aplikovat periodické okrajové podmínky na pole posuvů. Na takových částech hranice  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  nahradíme kinematické okrajové podmínky podmínkami statickými.

# 3.9.2 Dodatečná kinematická podmínka

Aplikace dodatečné kinematické podmínky odpovídá části (2.6.2), pouze s tím rozdílem, že je aplikujeme na jednotlivé oblasti  $\Omega^{\mathcal{M}}$ a  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$  a ne přímo na oblast $\Omega^{\mathcal{I}}$ .

# 3.10 Statické okrajové podmínky

K takovým částem hranice, na kterých není možné aplikovat periodické okrajové podmínky na pole posuvů z důvodu uvedeného v předešlém odstavci, budeme přistupovat podobně jako k hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}_{i}$ , dle části (3.2.1). Existují-li odpovídající si části hranic  $\Gamma^{\mathcal{U}\mathcal{C}}_{\#1}$ a  $\Gamma^{\mathcal{U}\mathcal{C}}_{\#2}$ , které přísluší různým oblastem, pak na takové části hranice  $\Gamma^{\mathcal{U}\mathcal{C}}_{\#1}$ , resp.  $\Gamma^{\mathcal{U}\mathcal{C}}_{\#2}$  nechme působit plošné zatížení  $t_i^{\Gamma^{\mathcal{U}\mathcal{C}}_{i}}$ , resp.  $t_i^{\Gamma^{\mathcal{U}\mathcal{C}}_{\#2}}$ , tak aby platilo

$$t_i^{\Gamma_{\#1}^{\mathcal{UC}}} = -t_i^{\Gamma_{\#2}^{\mathcal{UC}}}, \tag{3.181}$$

což je v souladu s antiperiodickými okrajovými podmínkami  $\sigma_{ij} n_j^{\Omega^{\mathcal{UC}}} - \#.$ 

# Kapitola 4

# MATICE TUHOSTI A VEKTOR PRAVÝCH STRAN NA JEDNOTLIVÝCH ELEMENTECH

#### **4.1** Úvod

Tato kapitola si klade za cíl vyjádřit konkrétní podobu matice tuhosti  $K_{ij}^{e^k}$  a vektoru pravých stran  $f_j^{e^k}$  plošného trojúhelníkového konečného prvku, který označíme  $e^k$ . Jednotlivé složky  $\mathcal{UC}$  budeme uvažovat z lineárně elastického izotropního materiálu, pro který platí zobecněný Hookeův zákon [3, str. 179–189]. Dále uvažujme lineární bázové funkce fluktuující složky pole posuvů  $u_i^*$ , které uspořádáme do matice  $N_{ij}^{e^k}$ . Index  $e^k$  odlišuje matici tuhosti, vektor zatížení a bázové funkce nad elementem  $e^k$  od matice tuhosti, vektoru zatížení a bázových funkcí celé  $\mathcal{UC}$ . Matici tuhosti  $K_{ij}$ , resp. vektor pravých stran  $f_j$  celé  $\mathcal{UC}$ získáme z  $K_{ij}^{e^k}$ , resp.  $f_j^{e^k}$  procedurou, jež bývá nazývána lokalizace (princip lokalizace je objasněn na příkladě prutové konstrukce např. v [13, str. 164–180]). Obecný tvar matice tuhosti  $K_{ij}^{e^k}$ , resp. vektoru pravých stran  $f_j^{e^k}$  elementu  $e^k$ , má dle

(2.25), resp. (2.26) následující tvar

$$K_{nl}^{e^{k}} = \int_{\Omega^{e^{k}}} C_{ij} B_{in}^{e^{k}} B_{jl}^{e^{k}} \,\mathrm{d}\Omega^{e^{k}},\tag{4.1}$$

resp.

$$f_n^{e^k} = -\int_{\Omega^{e^k}} C_{ij} E_i B_{jn}^{e^k} \,\mathrm{d}\Omega^{e^k},\tag{4.2}$$

kde symbolem  $\Omega^{e^k}$  značíme oblast, jež reprezentuje konečný prvek  $e^k$  a v matici  $B_{ij}^{e^k}$  jsou seřazeny příslušné derivace bázových funkcí $N_{ij}^{e^k}.$ 

Soustředíme se pouze na rovinnou úlohu, oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  nechť je tedy podmnožinou prostoru  $\mathbb{E}^2$ . Dále předpokládejme, že je oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  regulárně rozdělena na trojúhelníkové konečné prvky. O tomto dělení oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  budeme mluvit jako o triangulaci oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ .

#### 4.2Plošné trojúhelníkové souřadnice

Pro snadné analytické vyjádření bázových funkcí na jednotlivých trojúhelníkových elementech  $e^k$  je vhodné zavést plošné trojúhelníkové souřadnice. Těmito souřadnicemi je jednoznačně popsána poloha bodu  $y_i$  uvnitř elementu  $e^k$ .

Mějme trojúhelníkovou oblast  $\Omega^{123}$  s vrcholy v bodech  $1(y_i^1), 2(y_i^2)$  a  $3(y_i^3)$ . Nechť uvnitř této oblasti leží bod  $X(y_i)$ , jehož polohu chceme jednoznačně popsat plošnými souřadnicemi, které označíme  $L_1$ ,  $L_2$  a  $L_3$ . Za tímto účelem uvažujme v oblasti  $\Omega^{123}$  podoblasti  $\Omega^{12X}$ ,  $\Omega^{23X}$  a  $\Omega^{31X}$ . Značení podoblastí odpovídá označení jejich vrcholů, stejně jako je tomu v případě oblasti  $\Omega^{123}$ . Nakonec přeznačme podoblasti vynecháním X v jejich horním indexu. Příklad oblasti  $\Omega^{123}$ , ze kterého je zřetelné zavedené značení, zobrazuje obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: Plošné trojúhelníkové souřadnice.

Plošné souřadnice  $L_1$ ,  $L_2$  a  $L_3$  definujme následovně

$$L_1 = \frac{|\Omega^{23}|}{|\Omega^{123}|}, \quad L_2 = \frac{|\Omega^{31}|}{|\Omega^{123}|}, \quad L_3 = \frac{|\Omega^{12}|}{|\Omega^{123}|}.$$
 (4.3)

Je zřejmé, že souřadnice dle definice (4.3) jednoznačně určují polohu bodu  $X(y_i)$  uvnitř oblasti  $\Omega^{123}$ , jelikož jsou dány jednoznačným přiřazením trojice naznačených podoblastí trojúhelníkového tvaru. Nyní vypočteme plochu oblasti  $\Omega^{23}$ , k čemuž využijeme vlastnosti vektorového součinu<sup>1</sup>, tedy

$$|\Omega^{23}| = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_2 \\ 1 & y_1^2 & y_2^2 \\ 1 & y_1^3 & y_2^3 \end{bmatrix}$$
(4.4)

$$= \frac{1}{2} \left( y_1^2 y_2^3 + y_1 y_2^2 + y_2 y_1^3 - y_2^2 y_1^3 - y_1 y_2^3 - y_2 y_1^2 \right)$$
(4.5)

$$= \frac{1}{2} \left[ y_1 \left( y_2^2 - y_2^3 \right) + y_2 \left( y_1^3 - y_1^2 \right) + y_1^2 y_2^3 - y_2^2 y_1^3 \right].$$
(4.6)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Na tomto místě je nutné upozornit na fakt, že vztahy odvozené v této kapitole jsou závislé na pořadí, ve kterém uvažujeme číslování vrcholů oblasti  $\Omega^{123}$ , ale i všech zavedených podoblastí, které musí být v našem případě (bývá to zvykem) pravotočivý. A to nejen z důvodu, že dále uvažovaný vektorový součin bude v takovém případě kladný, což je v souladu s významem plochy, k jejímuž výpočtu vektorový součin mimo jiné používáme (což by šlo vyřešit použitím absolutní hodnoty a tato poznámka by nebyla nutná), ale také z důvodu snadné algoritmizace sestavení matice  $N_{ij}$  a  $B_{ij}$ , v níž hrají zásadní roli koeficienty zavedené pomocí vztahů (4.7).

Dále zavedeme pomocné veličiny

$$a_{1} = y_{2}^{2} - y_{2}^{3},$$
  

$$b_{1} = y_{1}^{3} - y_{1}^{2},$$
  

$$c_{1} = y_{1}^{2}y_{2}^{3} - y_{2}^{2}y_{1}^{3},$$
(4.7)

které nám pomohou dosáhnout přehledného zápisu a provedeme jejich substituci do výrazu (4.6), pak

$$|\Omega^{23}| = \frac{1}{2} \left( a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 \right) \tag{4.8}$$

S využitím vztahu (4.8) můžeme vyjádřit plošnou souřadnici  $L_1$ , jež je dána prvním vztahem v (4.3), tedy

$$L_1 = \frac{a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1}{2|\Omega^{123}|}.$$
(4.9)

Ostatní plošné souřadnice získáme cyklickou záměnou indexů. Obecný tvar plošné souřadnice  $L_i$  s přeznačením  $\Omega^{123}$  na  $\Omega$  bude poté následující

$$L_i = \frac{a_i y_1 + b_i y_2 + c_i}{2|\Omega|},\tag{4.10}$$

kde

$$a_i = y_2^j - y_2^k, (4.11)$$

$$b_i = y_1^k - y_1^j, (4.12)$$

$$c_i = y_1^j y_2^k - y_2^j y_1^k. (4.13)$$

#### 4.3 Lineární bázové funkce

Aproximujeme-li na trojúhelníkovém prvku  $e^k$  pole posuvů  $u_i^{*e^k}$  (horní index  $e^k$  naznačuje, že se jedná o aproximaci pouze nad elementem  $e^k$ ) lineární kombinací lineárních bázových funkcí, získáme prvky, které jsou v literatuře označovány jako CST (Constant Strain Triangle). Jak již název napovídá, na těchto prvcích je odpovídající aproximované pole fluktuující složky deformace  $\tilde{\varepsilon}_i^{*e^k}$  konstantní, což je zapříčiněno tím, že deformace je úměrná příslušným derivacím pole posuvů, které je na prvku  $e^k$  lineární.

Všimněme si nyní těchto vlastností plošných souřadnic

$$L_{i}(y_{n}) = 0, \quad \forall y_{n} : y_{n} = y_{n}^{j} + \left(y_{n}^{k} - y_{n}^{j}\right)t, \quad t \in [0, 1],$$
(4.14)

$$L_i(y_n^i) = 1. (4.15)$$

Plošná souřadnice  $L_i$  je tedy rovna nule na úsečce jk, nabývá hodnoty jedna v bodě i a je lineární. Toto jsou vlastnosti, které očekáváme od lineárních bázových funkcí na elementu  $e^k$ . Budeme-li tedy ve výrazu (4.10) uvažovat oblast  $\Omega$  jako oblast reprezentující prvek  $e^k$ , pak lineární bázové funkce nad oblastí  $\Omega^{e^k}$ , jež reprezentuje tento prvek, vyjádříme následovně

$$L_i^{e^k} = \frac{a_i y_1 + b_i y_2 + c_i}{2|\Omega^{e^k}|},\tag{4.16}$$

s konstantami  $a_i$ ,  $b_i$  a  $c_i$  dle (4.13).

# Matice bázových funkcí

Chceme-li hledanou aproximaci fluktuující složky posuvů  $\tilde{u}_i^{*e^k}$ nad prvkem $e^k$ vyjádřit maticovým zápisem

$$\tilde{u}_i^{*e^k} \approx N_{ij}^{e^k} \underline{u}_j^{*e^k, n_l}, \tag{4.17}$$

kde ve vektoru  $\underline{u}_j^{*e^k,n_l}$ jsou uloženy neznámé koeficienty lineární kombinace odpovídající uzlům  $n_l$  elementu  $e^k$ s následujícím uspořádáním

$$\underline{u}_{i}^{*e^{k},n_{l}} = \left[ \begin{array}{ccc} \underline{u}_{1}^{*e^{k},1} & \underline{u}_{2}^{*e^{k},1} & \underline{u}_{1}^{*e^{k},2} & \underline{u}_{2}^{*e^{k},2} & \underline{u}_{1}^{*e^{k},3} & \underline{u}_{2}^{*e^{k},3} \end{array} \right], \tag{4.18}$$

pak matice  $N_{ij}^{e^k}$  obsahující bázové funkce musí mít následující tvar

$$N_{ij}^{e^k} = \begin{bmatrix} L_1^{e^k} & 0 & L_2^{e^k} & 0 & L_3^{e^k} & 0 \\ 0 & L_1^{e^k} & 0 & L_2^{e^k} & 0 & L_3^{e^k} \end{bmatrix}.$$
 (4.19)

#### Matice příslušných derivací bázových funkcí

Dále bude potřeba aproximovat nad prvkem  $e^k$ vektor fluktuující složky heterogenní deformace  $\varepsilon_i^{*e^k}$ , získaný ze symetrického tenzoru  $\varepsilon_{ij}^{*e^k}$  pomocí Voigtovy notace (viz část A), který budeme v rovině  $y_1 \times y_2$ uvažovat ve tvaru

$$\tilde{\varepsilon}_{i}^{*e^{k}} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11} \\ \tilde{\varepsilon}_{22} \\ 2\tilde{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1,1}^{*e^{k}} \\ \tilde{u}_{2,2}^{*e^{k}} \\ \tilde{u}_{1,2}^{*e^{k}} + \tilde{u}_{2,1}^{*e^{k}} \end{bmatrix}, \qquad (4.20)$$

tedy

$$\tilde{\varepsilon}_{i}^{*e^{k}} \approx \begin{bmatrix} L_{1,1}^{e^{k}} & 0 & L_{2,1}^{e^{k}} & 0 & L_{3,1}^{e^{k}} & 0 \\ 0 & L_{1,2}^{e^{k}} & 0 & L_{2,2}^{e^{k}} & 0 & L_{3,2}^{e^{k}} \\ L_{1,2}^{e^{k}} & L_{1,1}^{e^{k}} & L_{2,2}^{e^{k}} & L_{3,2}^{e^{k}} & L_{3,1}^{e^{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\underline{u}_{1}^{*e^{k},1}}{\underline{u}_{2}} \\ \underline{u}_{2}^{*e^{k},2} \\ \underline{u}_{2}^{*e^{k},3} \\ \underline{u}_{2}^{*e^{k},3} \\ \underline{u}_{2}^{*e^{k},3} \end{bmatrix} = B_{ij}^{e^{k}} \underline{u}_{j}^{*e^{k},n_{l}}, \qquad (4.21)$$

kde pro lineární bázové funkce  $L_i^{e^k}$  platí

$$B_{ij}^{e^k} = \frac{1}{2|\Omega^{e^k}|} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0\\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3\\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}.$$
 (4.22)

### 4.4 Konstitutivní vztahy

K vyjádření matice tuhosti  $K_{ij}^{e^k}$ , resp. vektoru pravých stran  $f_j^{e^k}$  elementu  $e^k$  zbývá použít vhodnou matici materiálové tuhosti  $C_{ij}(y_k)$ . Budeme předpokládat takovou triangulaci oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , na níž bude matice materiálové tuhosti  $C_{ij}(y_k)$  nad jednotlivými prvky  $e^k$  konstantní. Symbolem  $C_{ij}^{e^k}$  poté označíme konstantní matici, pro níž platí

$$C_{ij}^{e^k} = C_{ij}(y_n), \quad \forall y_n \in \Omega^{e^k}.$$
(4.23)

Zobecněný Hookeův zákon pro izotropní materiál v prostoru  $\mathbb{E}^3$ má následující tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{\lambda^{e^k}}{\nu^{e^k}} \begin{bmatrix} 1 - \nu^{e^k} & \nu^{e^k} & 0 & 0 & 0 \\ \nu^{e^k} & 1 - \nu^{e^k} & 0 & 0 & 0 \\ \nu^{e^k} & \nu^{e^k} & 1 - \nu^{e^k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu^{e^k}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu^{e^k}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu^{e^k}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

kde $\lambda^{e^k}$ značí jednu z Lamého konstant na elementu  $e^k,$  jež je dána vztahem

$$\lambda^{e^{k}} = \frac{\nu^{e^{k}} E^{e^{k}}}{\left(1 + \nu^{e^{k}}\right) \left(1 - 2\nu^{e^{k}}\right)}.$$
(4.25)

Symbol  $E^{e^k}$ , resp.  $\nu^{e^k}$  značí Youngův modul (modul pružnosti v tahu či tlaku), resp. Poissonovu konstantu materiálu, jež tvoří element  $e^k$ . Výše uvedené materiálové konstanty jsou uvažovány na celé oblasti  $\Omega^{e^k}$  konstantní, což je v souladu se vztahem (4.23).

Jelikož se soustředíme na rovinnou úlohu, musíme matici tuhosti materiálu  $C_{ij}^{e^k}$  danou vztahem (4.23) redukovat tak, aby bylo možné vyjádřit zobecněný Hookeův zákon (4.24) v rovině. Budeme uvažovat rovinu  $y_1 \times y_2$  a Hookeův zákon ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{e^k} & C_{12}^{e^k} & C_{13}^{e^k} \\ C_{21}^{e^k} & C_{22}^{e^k} & C_{23}^{e^k} \\ C_{31}^{e^k} & C_{32}^{e^k} & C_{33}^{e^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}.$$
(4.26)

#### 4.4.1 Konstitutivní zákon v rovině

Stav napětí, o kterém budeme mluvit jako o rovinné úloze, je zjednodušením skutečnosti, které použijeme pro převedení původně trojrozměrné úlohy na úlohu rovinnou. Zmíníme se o dvou rovinných úlohách, kterými jsou rovinná deformace a rovinná napjatost.

#### Efektivni vlastnosti

Uvažujme efektivní konstitutivní vztah v rovině  $y_1 \times y_2$ , který lze vyjádřit pomocí Hookeova zákona (4.26). Pak je nutné poukázat na následující

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{\text{ef}} & C_{12}^{\text{ef}} & C_{13}^{\text{ef}} \\ C_{21}^{\text{ef}} & C_{22}^{\text{ef}} & C_{23}^{\text{ef}} \\ C_{31}^{\text{ef}} & C_{32}^{\text{ef}} & C_{33}^{\text{ef}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{\text{ef}} \\ C_{21}^{\text{ef}} \\ C_{31}^{\text{ef}} \end{bmatrix},$$
(4.27)

tedy na fakt, že vhodným zatěžováním, o kterém můžeme mluvit jako o jednotkovém zatěžování, jsme schopni zjistit jednotlivé prvky efektivní matice tuhosti, které budou odpovídat příslušnému napětí  $\Sigma_i$ . Je zřejmé, že pokud budeme homogenizační úlohu řešit ve stavu rovinné deformace, resp. rovinné napjatosti, získáme tak efektivní matici tuhosti, která bude odpovídat právě řešené rovinné úloze.

#### Rovinná deformace

Budeme předpokládat kompozitní vzorek z prostoru  $\mathbb{E}^3$ , který má nezanedbatelný rozměr ve směru souřadné osy  $y_3$  (teoreticky až nekonečný, v takovém případě by dále uvedené předpoklady o stavu napětí byly splněny přesně). Tento vzorek nechť je zatížen pouze v rovině  $y_1 \times y_2$ , pak s ohledem na předpokládanou geometrii vzorku toto zatížení vyvodí deformaci pouze v rovině  $y_1 \times y_2$ , tedy

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0. \tag{4.28}$$

Toto zjednodušení je vhodné například tehdy, pokud vyšetřujeme napjatost dlouhovlákného kompozitu v rovině kolmé na směr vláken, ale nevhodné pokud vyšetřujeme efektivní materiálové charakteristiky v této rovině (jelikož vyjádření efektivních materiálových konstant z matice tuhosti při rovinné deformaci, při jiném než izotropním chování homogenizovaného materiálu, je problematické a v mnohých případech bez dalších informací o vzorku dokonce nemožné). Obecněji lze říci, že vzorky kompozitních materiálů jsou většinou tělesa z prostoru  $\mathbb{E}^3$  a některé z nich je možné pro účely homogenizace zkoumat pouze v jedné rovině, v níž se napjatost blíží rovinné deformaci. Rovina, ve které je vyšetřována napjatost, většinou reprezentuje příčný řez tímto kompozitním vzorkem.

Z předpokladu (4.28) a Hooke<br/>ova zákona v prostoru  $\mathbb{E}^3$  (4.24) rovnou získáme hledaný<br/> Hookeův zákon v rovině  $y_1\times y_2$ izotropního tělesa, tedy

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{\lambda^{e^k}}{\nu^{e^k}} \begin{bmatrix} 1 - \nu^{e^k} & \nu^{e^k} & 0 \\ \nu^{e^k} & 1 - \nu^{e^k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left( 1 - 2\nu^{e^k} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$
(4.29)

dále identitu pro smyková napětí

$$\sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \tag{4.30}$$

a v neposlední řadě vztah pro normálové napětí kolmé k uvažované rovině  $y_1 \times y_2$ 

$$\sigma_{33} = \lambda \left( \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \right), \tag{4.31}$$

na kterém není Hookeův zákon (4.29) závislý a lze ho tedy uvažovat samostatně. Normálové napětí  $\sigma_{33}$  kolmé na rovinu  $y_1 \times y_2$ , dané vztahem (4.31) lze vyjádřit také v závislosti na normálových napětích v této rovině. K tomuto vyjádření je nutné sečíst první dva řádky v Hookeově zákoně (4.29), tedy

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{\lambda^{e^k}}{\nu^{e^k}} \left( \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \right) \tag{4.32}$$

a z výše vzniklého výrazu substituovat ( $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ ) do vztahu (4.31), tedy

$$\sigma_{33} = \nu^{e^k} \left( \sigma_{11} + \sigma_{22} \right). \tag{4.33}$$

#### Rovinná napjatost

Předpoklady rovinného napětí nejsou pro účely vyšetřování napjatosti v rovině  $y_1 \times y_2$  tak vhodné, jako předpoklady rovinné deformace, jelikož neodpovídají stavu napětí ve vyšetřovaných kompozitních vzorcích, které většinou nesplňují předpoklady rovinného napětí (způsobeno geometrií vzorků). Aby se napjatost v kompozitních vzorcích blížila předpokladům rovinného napětí, musela by se tloušťka těchto vzorků blížit nule a vzorky by musely mít charakter stěny, zatížení by tedy muselo působit pouze ve střednicové rovině vzorku a nesmělo by vyvodit normálové napětí kolmé na rovinu tvořící vzorek. Rovina, ve které je vyšetřována napjatost, poté reprezentuje přímo tenký kompozitní vzorek.

Předpokládat, že se kompozitní vzorek nachází ve stavu rovinného napětí je však vhodné, jak bude objasněno dále, pokud je naším cílem určit efektivní materiálové charakteristiky tohoto vzorku. I když napjatost ve vzorku určená na základě Hookeova zákona při rovinném napětí neodpovídá napětí skutečnému a tudíž není ani tento konstitutivní vztah vhodný (snad ani použitelný), lze získat při tomto stavu zatížený vhodný tvar efektivní matice tuhosti<sup>2</sup>.

Těleso se nachází ve stavu rovinného napětí, pokud

$$\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0. \tag{4.34}$$

Obdobným způsobem jako v případě rovinné deformace využijeme vztahů (4.34), s tím rozdílem, že je dosadíme do inverzního vztahu Hookeova zákona v prostoru  $\mathbb{E}^3$  (4.24), tedy vztahu, ve kterém vystupuje matice poddajnosti materiálu  $L_{ij}$ . Bez uvedení dalších podrobných kroků výpočtu, které je možné najít v [25, str. 75–80], nebo [3, str. 280–286] a které jsou analogické předchozí části, jež se týká rovinné deformace, získáme Hookeův zákon při rovinné napjatosti, který má následující podobu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E^{e^k}}{(1 - \nu^{e^k})(1 + \nu^{e^k})} \begin{bmatrix} 1 & \nu^{e^k} & 0 \\ \nu^{e^k} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu^{e^k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$
(4.35)

identity

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{12} = 0 \tag{4.36}$$

a následující vztah pro deformaci $\varepsilon_{33},$ jež je kolmá k vyšetřované rovině  $y_1\times y_2$ 

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu^{e^k}}{E^{e^k}} \left( \sigma_{11} + \sigma_{22} \right) = -\frac{\nu^{e^k}}{1 - \nu^{e^k}} \left( \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \right).$$
(4.37)

#### 4.5 Závěr

Z výsledků získaných napříč touto kapitolou můžeme sestavit konkrétní tvar matice tuhosti  $K_{ij}^{e^k}$  a vektoru pravých stran  $f_j^{e^k}$  plošného CST trojúhelníkového konečného prvku  $e^k$ , lineárně elastického izotropního materiálu při rovinné deformaci, resp. rovinné napjatosti, jejichž obecné vyjádření má následující tvar

$$K_{nl}^{e^{k}} = \int_{\Omega^{e^{k}}} C_{ij} B_{in}^{e^{k}} B_{jl}^{e^{k}} \, \mathrm{d}\Omega^{e^{k}}, \qquad (4.38)$$

$$f_n^{e^k} = -\int_{\Omega^{e^k}} C_{ij} E_i B_{jn}^{e^k} \mathrm{d}\Omega^{e^k}.$$
(4.39)

 $<sup>^{2}</sup>$  Přesněji řečeno, vhodný tvar má matice inverzní k matici tuhosti, tedy matice poddajnosti, ze které není problém určit efektivní materiálové charakteristiky homogenizovaného materiálu, který vykazuje obecnější chování, než izotropní (více v kapitole 5).

V předchozích rovnicích využijeme vztahu (4.23) a konstantnosti jednotlivých matic nad oblastí  $\Omega^{e^k},$  pak

$$K_{nl}^{e^{k}} = |\Omega^{e^{k}}| C_{ij}^{e^{k}} B_{in}^{e^{k}} B_{jl}^{e^{k}}, \quad f_{n}^{e^{k}} = -|\Omega^{e^{k}}| C_{ij}^{e^{k}} E_{i} B_{jn}^{e^{k}}, \tag{4.40}$$

kde

$$B_{ij}^{e^k} = \frac{1}{2|\Omega^{e^k}|} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0\\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3\\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}$$
(4.41)

a (pro rovinnou deformaci)

$$C_{ij}^{e^{k}} = \frac{\lambda^{e^{k}}}{\nu^{e^{k}}} \begin{bmatrix} 1 - \nu^{e^{k}} & \nu^{e^{k}} & 0\\ \nu^{e^{k}} & 1 - \nu^{e^{k}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(1 - 2\nu^{e^{k}}\right) \end{bmatrix},$$
(4.42)

resp. (pro rovinnou napjatost)

$$C_{ij}^{e^{k}} = \frac{E^{e^{k}}}{\left(1 - \nu^{e^{k}}\right)\left(1 + \nu^{e^{k}}\right)} \begin{bmatrix} 1 & \nu^{e^{k}} & 0 \\ \nu^{e^{k}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(1 - \nu^{e^{k}}\right) \end{bmatrix}.$$
 (4.43)
# Kapitola 5

# EFEKTIVNÍ VLASTNOSTI KOMPOZITŮ

#### 5.1 Úvod

V této kapitole si ukážeme, jakým způsobem lze získat efektivní materiálové charakteristiky homogenizovaného materiálu (například Poissonovo číslo  $\nu^{\text{ef}}$ , Youngův modul tuhosti  $E^{\text{ef}}$ , smykový modul  $G^{\text{ef}}$  nebo přímo matici materiálové tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$ ) a zamyslíme se, do jaké míry je ještě jejich určování vhodné a kdy už je výhodnější či nutné určovat makroskopické napětí  $\Sigma_{ij}$  z makroskopické deformace  $E_{ij}$  přímo principem homogenizace dle části 1.4.3, který je znázorněn na obrázku 1.2.

Níže uvedené úvahy již nelze úplně zobecnit, jelikož existují rozmanité kompozitní materiály, jež vykazují rozdílný stupeň anizotropie, který se může měnit dokonce během historie zatěžování a to vlivem rozpojování jednotlivých složek. V této kapitole se soustředíme na dlouhovlákný kompozit, jehož geometrie je vhodná pro homogenizaci, jež je založena na geometrické periodicitě vzorku.

#### 5.2 Zobecněný Hookeův zákon

Efektivní matici tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$  homogenizovaného materiálu je možné získat pomocí jednotkového impulsu vektorem makroskopické deformace  $E_i$ , jak pro případ rovinné úlohy přibližuje odstavec 4.4.1.

Chceme-li ze získané efektivní matice tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$  určit efektivní materiálové konstanty homogenizovaného materiálu, je navíc nutná úvaha, jež se týká jeho očekávané odezvy na zatížení působící v různých směrech. Znalost výše uvedeného chování materiálu, které můžeme určit z geometrie vzorku, či získané matice efektivní tuhosti (popřípadě kombinací obou dvou), je nutná pro správnou volbu soustavy rovnic, jež jsou založeny na analytickém vyjádření matice tuhosti předpokládaného typu homogenizovaného materiálu a jejichž řešením lze efektivní materiálové konstanty tohoto materiálu určit. Materiálové konstanty vzorků, jež vykazují obecnější anizotropní chování než ortotropní, může být obtížné (někdy pro nedostatek doplňujících informací o vzorku dokonce nemožné) z matice efektivní tuhosti  $C_{ii}^{\text{ef}}$  vyjádřit.

V jednotlivých bodech této části ukážeme, jakým způsobem se může chovat vzorek dlouhovlákného kompozitu a jaký analytický tvar má příslušná efektivní matice tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$ či poddajnosti  $L_{ij}^{\text{ef}}$ , vystupující v zobecněném Hookeově zákoně. Podrobnější informace o Hookeově zákoně pro anizotropní tělesa lze získat například v [16, str. 8–20]

#### 5.2.1 Ortotropní chování homogenizovaného materiálu

Představíme-li si vzorek kompozitu, který chceme matematicky modelovat, jako dlouhá rovnoběžná vlákna periodicky rozmístěná a dokonale spojená s matricí, dojdeme k závěru, že jde o těleso se třemi navzájem kolmými rovinami symetrie elastických vlastností. O

takovém tělese mluvíme jako o ortogonálně anizotropním či zkráceně o ortotropním. Jeden hlavní směr anizotropie je rovnoběžným s podélným směrem vláken a další dva (vzájemně ortogonální) leží v rovině kolmé k podélném směru. Hookeův zákon má v prostoru  $\mathbb{E}^3$  pro tento materiál devět nezávislých materiálových konstant.

Při koincidenci os souřadnicového systému s hlavními směry anizotropie bude mít zobecněný Hookeův zákon následující tvar

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{(1)} & -\nu_{(21)}/E_{(2)} & -\nu_{(31)}/E_{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{(12)}/E_{(1)} & 1/E_{(2)} & -\nu_{(32)}/E_{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{(13)}/E_{(1)} & -\nu_{(23)}/E_{(2)} & 1/E_{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{(23)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{(13)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{(12)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$
(5.1)

Ze symetrie matice poddajnosti  $L_{ij}$ , jež vystupuje v předchozím vztahu (5.1) vyplývá, že

$$\frac{\nu_{(21)}}{E_{(2)}} = \frac{\nu_{(12)}}{E_{(1)}}, \quad \frac{\nu_{(31)}}{E_{(3)}} = \frac{\nu_{(13)}}{E_{(1)}}, \quad \frac{\nu_{(32)}}{E_{(3)}} = \frac{\nu_{(23)}}{E_{(2)}}, \tag{5.2}$$

a dále

$$\nu_{(12)}\nu_{(23)}\nu_{(31)} = \nu_{(21)}\nu_{(32)}\nu_{(13)}.$$
(5.3)

#### 5.2.2 Transverzálně izotropní chování homogenizovaného materiálu

V některé literatuře, např. [16, str. 17], bývá o tomto modelovaném vzorku (obecně s náhodným rozmístěním vláken) uvažováno dokonce jako o transverzálně izotropním, s hlavním směrem anizotropie rovnoběžným s podélným směrem vláken. V takovém případě by měl Hookeův zákon pět nezávislých materiálových konstant. Orientujeme-li osu  $x_1$  s hlavním směrem anizotropie, pak bude Hookeův zákon vypadat následovně

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{(1)} & -\nu_{(21)}/E_{(2)} & -\nu_{(21)}/E_{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{(12)}/E_{(1)} & 1/E_{(2)} & -\nu_{(23)}/E_{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{(12)}/E_{(1)} & -\nu_{(23)}/E_{(2)} & 1/E_{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{(23)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{(12)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{(12)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$
(5.4)

kde

$$G_{(23)} = \frac{E_{(2)}}{2\left(1 + \nu_{(23)}\right)}.$$
(5.5)

#### 5.2.3 Pseudoizotropní chování homogenizovaného materiálu

Nutno poznamenat, že v některém případě periodického rozmístění složek můžeme dospět k závěru, že v rovině kolmé k podélnému směru vláken jsou materiálové konstanty ve dvou vzájemně kolmých směrech shodné. I tak není možné považovat takovou rovinu za izotropní a materiál jako celek tedy transverzálně izotropní, jelikož tyto shodné materiálové konstanty jsou vzájemně nezávislé, jedná se o případ tzv. pseudoizotropie v rovině.

#### 5.2.4 Monoklinické a anizotropní chování homogenizovaného materiálu

Jakmile uvažujeme o možnosti rozpojování jednotlivých složek, může se i těleso původně transverzálně izotropní chovat v některých módech zatěžování ortotropně, jelikož trhliny mohou v rovině izotropie způsobit tento případ anizotropního chování (pouze speciální, spíše teoretický způsob symetrického a periodického porušení). Způsobená anizotropie bude spíš tak obecná, že se poruší i ortotropní chování tělesa a těleso se bude chovat až monoklinicky (zůstane pouze jedna rovina symetrických vlastností, třináct nezávislých materiálových konstant), či dokonce obecně anizotropně (jednadvacet nezávislých materiálových konstant).

#### 5.3 Efektivní matice tuhosti

Samotná efektivní matice tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$  bez znalosti doplňujících informací, jež se týkají trajektorie zatížení či geometrie kompozitního vzorku, nemá zásadní vypovídající hodnotu, jelikož může popisovat homogenizovaný materiál v celém oboru uvažovaného zatížení (dokonalé spojení fází s nepřekonanou počáteční pevností při maximálním uvažovaném zatížení), jeho části nebo pouze v jednom bodě. Dále zmíníme některé základní případy, ze kterých je zřejmá nutnost individuálního přístupu k získaným maticím tuhosti na základě dodatečných informací o vzorku a jeho zatížení v čase. Budeme se zabývat pouze rovinnou úlohou a uvažované efektivní matice tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$  budou odpovídat stavu rovinné deformace či rovinného napětí.

### 5.3.1 Dokonalé spojení složek

Uvažujeme-li v celém oboru zatížení dokonalé spojení jednotlivých složek, pak je zaručena lineární odezva na zatížení (samozřejmě pouze za zavedeného předpokladu lineárně pružných složek v oboru malých deformací) a získaná efektivní matice tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$  nebude závislá na historii, ani trajektorii zatížení. V případě, že je naším cílem analyzovat napětí v homogenizovaném vzorku, postačí využívat získanou efektivní matici tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$ , pouze s ohledem na správnou volbu rovinné úlohy, kterou bývá pro většinu kompozitních vzorků rovinná deformace.

Je-li však naším cílem určit efektivní materiálové konstanty takového vzorku, musíme určit stupeň jeho anizotropie. Na tomto místě ukážeme, jakým způsobem lze určit efektivní materiálové konstanty ortotropního materiálu. Jak již bylo řečeno v části 4.4.1, je vhodné k tomuto účelu uvažovat homogenizovaný vzorek ve stavu rovinné napjatosti (z důvodu vhodného tvaru matice poddajnosti), i v případě, že se vzorek ve skutečnosti v takovém stavu napjatosti nacházet nemůže.

Z matice poddajnosti  $L_{ij}$ , jež odpovídá ortotropnímu materiálu v prostoru  $\mathbb{E}^3$  a je dána vztahem (5.1), vyjádříme matici poddajnosti homogenizovaného materiálu, tedy efektivní matici poddajnosti  $L_{ij}^{\text{ef}}$  ve stavu rovinné napjatosti (více viz část 4.4.1, [25, str. 75–80] nebo [1, str. 17–21])

$$L_{ij}^{\rm ef} = \begin{bmatrix} 1/E_{(1)}^{\rm ef} & -\nu_{(21)}^{\rm ef}/E_{(2)}^{\rm ef} & 0\\ -\nu_{(12)}^{\rm ef}/E_{(1)}^{\rm ef} & 1/E_{(2)}^{\rm ef} & 0\\ 0 & 0 & 1/G_{(12)}^{\rm ef} \end{bmatrix},$$
(5.6)

z jejíž diagonálních členů rovnou určíme efektivní moduly tuhosti  $E_{(1)}^{\text{ef}}, E_{(2)}^{\text{ef}}$  a smykový

modul  $G_{(12)}^{\text{ef}}$ , tedy

$$E_{(1)}^{\text{ef}} = \frac{1}{L_{11}^{\text{ef}}}, \quad E_{(2)}^{\text{ef}} = \frac{1}{L_{22}^{\text{ef}}}, \quad G_{(12)}^{\text{ef}} = \frac{1}{L_{33}^{\text{ef}}}.$$
 (5.7)

Poté již není problém určit efektivní Poissonova čísla  $\nu_{(12)}^{\text{ef}}$  a  $\nu_{(21)}^{\text{ef}}$ , tedy

$$\nu_{(21)}^{\text{ef}} = -E_{(2)}^{\text{ef}}L_{12}^{\text{ef}}, \quad \nu_{(12)}^{\text{ef}} = -E_{(1)}^{\text{ef}}L_{21}^{\text{ef}}.$$
 (5.8)

Pokud nastane v uvažované rovině zvláštní případ ortotropie, tzv. pseudoizotropie, pak bude mít efektivní matice poddajnosti  $L_{ij}^{\text{ef}}$  materiálu ve stavu rovinné napjatosti následující tvar

$$L_{ij}^{\text{ef}} = \begin{bmatrix} 1/E^{\text{ef}} & -\nu^{\text{ef}}/E^{\text{ef}} & 0\\ -\nu^{\text{ef}}/E^{\text{ef}} & 1/E^{\text{ef}} & 0\\ 0 & 0 & 1/G^{\text{ef}} \end{bmatrix},$$
(5.9)

z jejíž diagonálních členů opět určíme efektivní modul tuhosti  $E^{\text{ef}}$  a smykový modul  $G^{\text{ef}}$  (které jsou nezávislé), tedy

$$E^{\rm ef} = \frac{1}{L_{11}^{\rm ef}} = \frac{1}{L_{22}^{\rm ef}}, \quad G^{\rm ef} = \frac{1}{L_{33}^{\rm ef}}$$
 (5.10)

a efektivní Poissonovo číslo $\nu^{\rm ef}$ 

$$\nu^{\rm ef} = -E^{\rm ef}L_{12}^{\rm ef} = -E^{\rm ef}L_{21}^{\rm ef}.$$
(5.11)

Jelikož z numerických výpočtů nezískáme dokonale symetrickou efektivní matici poddajnosti  $L_{ij}^{\text{ef}}$ , je vhodné uvažovat průměrnou hodnotu efektivního Youngova modulu tuhosti  $E^{\text{ef}}$  následovně

$$E^{\rm ef} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L_{11}^{\rm ef}} + \frac{1}{L_{22}^{\rm ef}} \right) = \frac{L_{11}^{\rm ef} + L_{22}^{\rm ef}}{2L_{11}^{\rm ef} L_{22}^{\rm ef}}$$
(5.12)

a Poissonova čísla $\nu^{\rm ef}$ takto

$$\nu^{\text{ef}} = \frac{1}{2} \left( -E^{\text{ef}} L_{12}^{\text{ef}} - E^{\text{ef}} L_{21}^{\text{ef}} \right) = -\frac{E^{\text{ef}}}{2} \left( L_{12}^{\text{ef}} + L_{21}^{\text{ef}} \right).$$
(5.13)

#### 5.3.2 Trhlina na části původního rozhraní složek

Pokud uvažujeme o možnosti rozpojení složek, které je způsobené již z důvodu jejich nedokonalého spojení a nebo překonáním počáteční pevnosti na jejich rozhraní, pak nebude odezva takového materiálu obecně lineárně závislá na zatížení, jak tomu bylo při dokonalém spojení složek.

V takové případě již bude záležet na historii zatížení (k jaké geometrii trhlin na rozhraní složek již došlo), jeho intenzitě, ale třeba i na tom, zda se jedná o tlakové či tahové namáhání vzorku. V tomto případě jsou již materiálové charakteristiky uvažovaného vzorku natolik proměnné, že není výhodné se zabývat jejich zjišťováním. Dá se říci, že má praktický význam pouze zkoumání jeho odezvy (makroskopické napětí  $\Sigma_{ij}$ ) na zatížení (makroskopická deformace  $E_{ij}$ ) a to principem homogenizace.

# Kapitola 6

# GENERÁTOR SÍTĚ

# 6.1 Úvod

Použitý generátor, který je implementován v programu MATLAB, produkuje nestrukturovanou regulární trojúhelníkovou síť v prostoru  $\mathbb{E}^2$ . Topologie takové sítě je zřejmě závislá na vzájemné poloze jednotlivých uzlů, která je v tomto generátoru upravována pomocí fyzikální analogie s příhradovou konstrukcí a topologie následně hledána pomocí Delaunayova algoritmu, o němž je možné získat více informací například v [6, str. 31–35].

V následujícím výčtu jsou uvedeny důvody, proč je v implementaci použit právě tento generátor sítě.

- Numerický model, na kterém jsou prováděny experimenty, je implementován v MATLABU a je tedy přirozené použít také generátor sítě implementovaný v tomto programu. Implementace ve stejném jazyce má jistě výhodu snadné integrace jednotlivých problémů a působí uceleným dojmem.
- Jelikož je algoritmus, který hledá polohu jednotlivých uzlů založen na fyzikální analogii s příhradovou konstrukcí, je takový pohled na problém jistě blízký stavebnímu inženýrství.
- Většina generátorů sítě působí jako "black box" a bývá obtížné je přizpůsobit, byť jen nepatrně, účelům ke kterým je chceme využít. Převzatý algoritmus, který slouží jako jádro uvedeného generátoru sítě, je lehce pochopitelný a tím i dobře modifikovatelný.
- V neposlední řadě měla vliv na výběr generátoru i kvalita generovaných sítí a snadná definice geometrie diskretizované oblasti.

# 6.2 Původní jádro algoritmu

Tato část popisuje algoritmus, který je převzat z článku [15]. Autoři tohoto článku považují tento algoritmus za jakési jádro, které si mohou uživatelé přizpůsobit a vložit do vlastního generátoru sítě, jehož cílem je vytvořit síť v prostoru  $\mathbb{E}^2$  či  $\mathbb{E}^3$ , dále jen  $\mathbb{E}^n$ . Aby byla možná modifikace tohoto jádra, je nutné jeho algoritmus pochopit a právě z toho důvodu je zde zařazen jeho popis. Slovo popis vystihuje charakter této části, jelikož nebudeme zacházet do detailů algoritmu, ale pouze předvedeme jeho podstatu (detaily lze najít v [15]).

# 6.2.1 Funkce vzdálenosti a popis geometrie oblasti

Uvažujme v prostoru  $\mathbb{E}^n$  oblast  $\Omega$  a její hranici  $\Gamma$ . Ukážeme si, jakým způsobem budeme rozhodovat o tom, zda libovolný bod daný polohovým vektorem  $y_i$  z prostoru  $\mathbb{E}^n$  náleží



Obrázek 6.1: Příklad funkce vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$ , jež odpovídá oblasti  $\Omega$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$ . Pro větší názornost je funkce  $d^{\Omega}(y_i)$  zobrazena pouze v rovině  $y_1 \times d^{\Omega}(y_i)$ .

této oblasti, tedy zda

$$y_i \in \Omega. \tag{6.1}$$

Pro tento účel sestavíme funkci, kterou označíme  $d^{\Omega}(y_i)$ , jejíž gradient  $d^{\Omega}_{,i}(y_i)$  bude mít konstantní velikost rovnu jedné, tedy

$$\sum_{i=1}^{n} d_{,i}^{\Omega} (y_i)^2 = 1$$
(6.2)

a bude mít navíc následující vlastnosti

$$d^{\Omega}(y_i) \begin{cases} >0, & \forall y_i \notin \Omega \\ =0, & \forall y_i \in \Gamma \\ <0, & \forall y_i \in \Omega \end{cases}$$
(6.3)

O takové funkci budeme mluvit jako o funkci vzdálenosti, nebo přesněji znaménkové funkci vzdálenosti<sup>1</sup>. Dle vlastností (6.3) znaménko funkce vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$  rozhoduje o tom, jakou polohu má bod  $y_i$  z prostoru  $\mathbb{E}^n$  vzhledem k oblasti Ω a požadavek na gradient (6.2) zaručí, že absolutní hodnota této funkce v daném bodě  $y_i$ , odpovídá jeho nejmenší kolmé vzdálenosti od hranice  $\Gamma$ . Řez typickou funkcí vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$  jež odpovídá oblasti  $\Omega$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$  zobrazuje obrázek 6.1.

#### Oblast tvaru koule nebo kruhu

Uvažujme oblast  $\Omega$  v prostoru  $\mathbb{E}^3$ , resp.  $\mathbb{E}^2$ , tvaru koule, resp. kruhu o poloměru r, se středem v bodě  $y_i^c$ . Funkce vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$  bude mít poté tvar

$$d^{\Omega}(y_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^c)^2} - r, \qquad (6.4)$$

kde n = 3, resp. n = 2.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Z anglického distance function, resp. signed distance function



Obrázek 6.2: Příklad oblasti  $\Omega$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$ . Z toho obrázku by mělo být zřetelné, jakým způsobem byl sestaven předpis (6.5) pro funkci vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$ , jež odpovídá oblasti  $\Omega$  tvaru pravoúhlého čtyřúhelníka.

#### Oblast tvaru pravoúhlého kvádru nebo pravoúhlého čtyřúhelníka

Uvažujme oblast  $\Omega$  v prostoru  $\mathbb{E}^3$ , resp.  $\mathbb{E}^2$ , tvaru kvádru, resp. pravoúhlého čtyřúhelníka s hranami o rozměrech  $a_i$ , kde i = 1, 2, 3, resp. i = 1, 2, jejíž hrany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Funkce vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$  bude mít poté v prostoru  $\mathbb{E}^n$  tvar

$$d^{\Omega}(y_{i}) = -\min\left[\min_{i=1}^{n} \left(y_{i} - y_{i}^{A}\right), \min_{i=1}^{n} \left(y_{i}^{B} - y_{i}\right)\right],$$
(6.5)

kde n = 3, resp. n = 2. Zavedené značení je zřejmé z obrázku 6.2, který zobrazuje příklad oblasti  $\Omega$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$ .

Pro lepší představu o funkci vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$ , která přísluší oblasti tvaru kruhu, resp. pravoúhlého čtyřúhelníka si uvědomme, že tato funkce tvoří nad oblastí  $\Omega$  kužel, resp. jehlan s podstavou, jež odpovídá právě oblasti  $\Omega$ .

#### Průnik a rozdíl oblastí

Nyní si ukážeme, jakým způsobem lze pomocí funkce vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$  definovat oblast, která vznikne průnikem či rozdílem dvou oblastí. Uvažujme tedy oblast  $\Omega^1$ , resp.  $\Omega^2$ , jež je definovaná funkcí vzdálenosti  $d^{\Omega^1}(y_i)$ , resp.  $d^{\Omega^2}(y_i)$ . Pak oblast  $\Omega$ , která vznikne průnikem, resp. rozdílem oblasti  $\Omega^1$  a  $\Omega^2$ , tedy

$$\Omega = \Omega^1 \cap \Omega^2, \tag{6.6}$$

resp.

$$\Omega = \Omega^1 - \Omega^2, \tag{6.7}$$

je dána funkcí vzdálenosti v tomto tvaru

$$d^{\Omega}(y_i) = \max\left(d^{\Omega^1}(y_i), d^{\Omega^2}(y_i)\right), \qquad (6.8)$$

resp.

$$d^{\Omega}(y_i) = \max\left(d^{\Omega^1}(y_i), -d^{\Omega^2}(y_i)\right).$$
(6.9)



Obrázek 6.3: Příklad funkce vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$ , jež odpovídá oblasti  $\Omega$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$ , která vznikla průnikem oblastí  $\Omega^1$  a  $\Omega^2$ . Pro větší názornost je funkce  $d^{\Omega}(y_i)$  zobrazena pouze v rovině  $y_1 \times d^{\Omega}(y_i)$ .



Obrázek 6.4: Příklad funkce vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$ , jež odpovídá oblasti  $\Omega$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$ , která vznikla rozdílem oblastí  $\Omega^1$  a  $\Omega^2$ . Pro větší názornost je funkce  $d^{\Omega}(y_i)$  zobrazena pouze v rovině  $y_1 \times d^{\Omega}(y_i)$ .

Příklad funkce vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$ , takto vzniklé oblasti  $\Omega$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$  zobrazuje obrázek 6.3, resp. 6.4.

Pomocí funkce vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$  lze definovat oblasti v prostoru  $\mathbb{E}^3$  a  $\mathbb{E}^2$  téměř libovolného tvaru. Není problém vytvořit sjednocení více oblastí či jejich rotace a posunutí, viz. [15]. Jelikož je naším cílem rozdělit na konečné prvky oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  z prostoru  $\mathbb{E}^2$ , kterou předpokládáme tvaru pravoúhlého čtyřúhelníka s inkluzemi tvaru kruhu (nebo jeho části), pak našim účelům postačí, pokud dokážeme v prostoru  $\mathbb{E}^2$  definovat oblasti, jež vzniknou průnikem či rozdílem oblastí tvaru kruhu a pravoúhlého čtyřúhelníka. Z tohoto důvodu, se v další části kapitoly budeme pohybovat pouze v prostoru  $\mathbb{E}^2$ .

#### 6.2.2 Fyzikální analogie

Představme si, že požadujeme rozdělit oblast  $\Omega$  na konečné trojúhelníkové prvky tvaru rovnostranného trojúhelníka, jejichž plochy budou přibližně shodné. Vhodnou polohu uzlů budeme hledat na základě myšlenky, jež je založena na následujících úvahách, které mají fyzikální podstatu.

Uvažujme fyzikální model, který je tvořen vodorovnou deskou, jež představuje oblast  $\Omega$ , na které jsou náhodně rozmístěny a fixovány kuličky, reprezentující uzly sítě, které po-

žadujeme, dle výše uvedeného požadavku na vzniklou síť, vhodně rozmístit po desce. Za tímto účelem použijeme stejně dlouhé a tuhé pružiny, kterými (pomocí Delaunayova algoritmu [6, str. 31–35]) spojíme jednotlivé kuličky. Kuličky budou poté plnit funkci styčníků a my o nich v této souvislosti také jako o styčnících budeme mluvit.

Je zřejmé, že pokud naráz zrušíme fixaci všech styčníků, budou silami v pružinách nuceny změnit svou polohu a tato poloha bude z pohledu kvality sítě, jež je reprezentována vzniklou konstrukcí z pružin a styčníků, výhodnější. Pro úplnost by musel být fyzikální model doplněn o mantinel ohraničující výše zmíněnou desku, který by reprezentoval hranici  $\Gamma$  a zabránil by, aby kuličky vlivem sil v pružinách opustily desku. Necháme tedy na nefixované kuličky určitý čas působit soustavu pružin a kuličky opět fixujeme, pokud se poloha kuliček za tento čas výrazně změní, pokusíme se najít lepší možnost propojení kuliček pružinami a opět zrušíme fixaci kuliček. Tento postup budeme opakovat dokud mezi jednotlivými časovými kroky budou malé diference v poloze kuliček.

#### 6.2.3 Funkce relativní velikosti – geometrická adaptivita

Pomocí funkce, o které budeme mluvit jako o funkci relativní velikosti a kterou označíme  $s^{\Omega}(y_i)$ , lze dosáhnout geometrické adaptivity sítě na oblasti  $\Omega$ . Tato funkce neudává absolutní velikost jednotlivých hran elementů, resp. pružin, jak plyne z jejího názvu, nýbrž její hodnota ve středech jednotlivých hran, resp. pružin, řídí jejich relativní velikost vůči ostatním hranám, resp. pružinám v oblasti  $\Omega$ .

Pokud se tedy funkce relativní velikosti  $s^{\Omega}(y_i)$  rovná jedné, tedy

$$s^{\Omega}\left(y_{i}\right) = 1,\tag{6.10}$$

pak budou jednotlivé hrany, resp. pružiny přibližně stejně dlouhé.

#### 6.2.4 Konstitutivní zákon

Jelikož budeme výše uvedenou fyzikální analogii modelovat pomocí matematického modelu, je třeba zavést vhodný konstitutivní zákon na jednotlivých pružinách. Abychom se vyhnuli potížím při algoritmizaci, které by byly způsobeny rozdílem mezi tlakem a tahem v pružině, konstitutivní zákon zavedeme tak, aby jednotlivé pružiny kladly odpor pouze při tlakovém namáhání. Uvažujme původní délku pružiny (tedy délku v jejím nezatíženém stavu), kterou označíme  $l^0$  a délku zatížené pružiny, jež označíme l. Sílu v zatížené pružině označme F a její závislost na deformaci předepíšeme následujícím konstitutivním vztahem

$$F(l^{0}, l) = \begin{cases} c(l^{0} - l), & l < l^{0} \\ 0, & l \ge l^{0} \end{cases},$$
(6.11)

kde c značí tuhost pružiny. V našem modelu budeme předpokládat pouze pružiny stejné tuhosti a pro naše účely není ani velikost této tuhosti rozhodující a proto jí zvolíme rovnu jedné, tedy

$$c = 1. \tag{6.12}$$

Pomocí této konstanty zaručíme správné užití fyzikálních jednotek a konstitutivní vztah budeme uvažovat v následující podobě

$$F(l^{0}, l) = \begin{cases} l^{0} - l, & l < l^{0} \\ 0, & l \ge l^{0} \end{cases}$$
(6.13)

Při této volbě konstitutivního vztahu je nutné zabránit tahovému namáhání pružin v rovnovážném stavu, jelikož v takovém případě by byly pružiny nekonečně poddajné a nalezená rovnovážná poloha by neodpovídala reálným pružinám. Z toho důvodu budeme v každém kroku zvětšovat původní délku pružin a tím docílíme tlakového namáhání všech (nebo alespoň téměř všech) pružin v rovnovážném stavu.

#### 6.2.5 Řešení rovnováhy – Eulerova metoda

Fyzikální analogii, jež je slovně popsána v části 6.2.2, nyní popíšeme pro naše účely vhodným matematickým modelem. Je nutné poznamenat, že v matematickém modelu budeme uvažovat celou uvedenou soustavu pružin a styčníků nehmotnou, abychom zabránili rozkmitu jednotlivých složek. Toto zjednodušení je přijatelné, jelikož není naším cílem fyzikálně správně popsat průběh posuvů, kterým se soustava dostává do rovnováhy, ale pouze poloha v rovnovážném stavu.

Uvažujme pro jistou polohu styčníků, určitou volbu soustavy pružin. Po zrušení fixace, jednotlivým styčníkům předepíšeme rychlost pohybu shodnou se směrem a velikostí na ně působící nevyrovnané síly. Nevyrovnanou sílu, jež působí na styčník daný polohovým vektorem  $y_i$ , označíme  $F_i^{tot}(y_j)$ . Takto předepsaný pohyb jednotlivých styčníků není v souladu s fyzikálním hlediskem, ale soustava by se po určitém čase ustálila v rovnovážné poloze a pouze tato poloha, jak již bylo uvedeno výše, je předmětem našeho zkoumání.

Diferenciální rovnice, jež popisuje výše uvedenou představu o pohybu styčníků, má následující tvar

$$\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t} = F_i^{tot}\left(y_j\right). \tag{6.14}$$

Tuto rovnici budeme řešit numericky pomocí Eulerovy metody. Provedeme tedy časovou diskretizaci a hodnotu derivace určíme z aktuálního a následujícího kroku. Po takto provedené diskretizaci bude mít rovnice (6.14) následující podobu

$$\frac{y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}}{\Delta t} \approx F_i^{tot} \left( y_j^{(k)} \right).$$
(6.15)

Dospějeme tedy k následujícímu iteračnímu vztahu, pomocí něhož se budeme přibližovat k rovnovážné poloze soustavy pružin a styčníků, tedy

$$y_j^{(k+1)} \approx \Delta t F_i^{tot} \left( y_j^{(k)} \right) + y_j^{(k)}.$$
 (6.16)

Na tomto místě je vhodné připomenout, že v každém kroku iterace se podle vhodně zvoleného kritéria posuzuje, zda došlo k velké změně polohy uzlů a pokud ano, pokusíme se nalézt pomocí Delaunayova algoritmu [6, str. 31–35] vhodnější topologii soustavy pružin. Naopak, pokud diference polohy mezi jednotlivými kroky již bude dostatečně malá, rozhodneme se tuto polohu považovat za polohu rovnovážnou.

#### 6.2.6 Okrajová podmínka

Pokud se styčník vlivem nevyrovnaných sil  $F_i^{tot}(y_j)$  dostane mimo oblast  $\Omega$ , pak ho proti směru gradientu funkce vzdálenosti  $d_{,i}^{\Omega}(y_i)$  vrátíme na hranici  $\Gamma$ . Z vlastností funkce vzdálenosti (6.2) a (6.3) vyplývá, že tento směr odpovídá směru normály  $n_i^{\Omega}$ . Tento způsob okrajových podmínek je analogický kinematickým okrajovým podmínkám, které fixují



Obrázek 6.5: Newtonova metoda pro obecnou konvexní funkci  $f(y_i)$  dvou proměnných.

posuvy v normálovém směru ven z oblasti $\Omega$ a povolují pohyb ve směru tečném k hranici $\Gamma.$ 

Styčníku, který se vlivem nevyrovnaných sil $F_i^{tot}\left(y_j\right)$ dostal mimo oblast $\Omega,$ do polohy určené polohovým vektorem  $y_i^{out},$ tedy upravíme polohu následovně

$$y_i = y_i^{out} - \frac{d^{\Omega}\left(y_i^{out}\right)}{d_i^{\Omega}\left(y_i^{out}\right)},\tag{6.17}$$

což odpovídá jednomu kroku Newtonovy metody, jelikož hledáme bod v opačném směru gradientu  $d^{\Omega}_{,i}\,(y_i),$  pro který platí

$$d^{\Omega}\left(y_{i}\right) = 0. \tag{6.18}$$

Uvážíme-li navíc vlastnost (6.2), tedy

$$\sum_{i=1}^{n} d_{,i}^{\Omega} \left( y_i \right)^2 = 1, \tag{6.19}$$

lze vztah (6.17) vyjádřit následovně

$$y_i = y_i^{out} - d^{\Omega} \left( y_i^{out} \right) d^{\Omega}_{,i} \left( y_i^{out} \right)$$
(6.20)

a v obou případech, tedy pomocí vztahu (6.17) i (6.20) získáme hledaný výsledek v jednom kroku, není tedy třeba iterovat jako v obecném případě Newtonovy metody. Tento rozdíl se snaží přiblížit obrázky 6.5 a 6.6.



Obrázek 6.6: Newtonova metoda pro funkci vzdálenosti  $d^{\Omega}(y_i)$  dvou proměnných. Pro větší názornost je zvolena taková funkce, pro níž platí  $d^{\Omega}_{,1}(y^{out}_i)=1$  a  $d^{\Omega}_{,2}(y^{out}_i)=0$ .

V případě že bod $y_i^{out}$ má takovou polohu, pro kterou je alespoň jedna ze složek gradientu $d^\Omega_{,i}\,(y_i^{out})$ rovna nule, tedy

$$d_{,i}^{\Omega}\left(y_{i}^{out}\right) = 0, \tag{6.21}$$

pak je vztah (6.17) nepoužitelný a právě z toho důvodu byl zaveden vztah (6.20).

#### 6.3 Generátor sítě

V této části ukážeme, jaké modifikace jsou v jádře algoritmu zapotřebí, pokud má generátor sítě fungovat správně z hlediska FEM či FETI. Také předvedeme další rozšíření, které jsou zapotřebí, pokud má být generátor pro naše účely efektivní. Tato rozšíření a modifikace se týkají definice geometrie  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , návaznosti sítí jednotlivých oblastí v  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , periodicity sítě na hranici a pravotočivosti jednotlivých elementů.

#### 6.3.1 Efektivní definice geometrie jednotkové buňky

Generátor sítě je přizpůsoben našim účelům, tedy k rozdělení oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  v prostoru  $\mathbb{E}^2$ , jež je tvaru pravoúhlého čtyřúhelníka a je disjunktně složena z oblastí  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$ , které mají tvar kruhu (nebo jeho části) a oblasti  $\Omega^{\mathcal{M}}$ , která tvoří zbytek oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ .

Nejprve se definuje umístění a geometrie oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , jejíž hrany jsou předpokládány rovnoběžné se souřadnými osami. Tato definice se provede pomocí souřadnic levého dolního bodu, který označíme  $y_i^A$  a souřadnic pravého horního bodu, který označíme  $y_i^B$ 

(označení souhlasí s obrázkem 6.2). Funkce vzdálenosti  $d^{\Omega^{UC}}(y_i)$  bude mít poté dle (6.5) následující tvar

$$d^{\Omega^{\mathcal{UC}}}(y_i) = -\min\left[\min_{i=1}^{2} \left(y_i - y_i^A\right), \min_{i=1}^{2} \left(y_i^B - y_i\right)\right],$$
(6.22)

Označme symbolem  $\Omega^q$  oblast, jež má tvar kruhu (vždy celého), pro niž platí

$$\Omega_q^{\mathcal{I}} = \Omega^{\mathcal{UC}} \cap \Omega^q \tag{6.23}$$

a pomocí poloměru  $r^q$  a souřadnic středu  $y_i^q$  definuje umístění a geometrii této oblasti. Jednotlivé funkce vzdálenosti  $d^{\Omega^q}(y_i)$  budou mít poté dle (6.4) následující tvar

$$d^{\Omega^{q}}(y_{i}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (y_{i} - y_{i}^{q})^{2}} - r^{q}.$$
 (6.24)

Algoritmus, z výše zadaných informacích o oblastech  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  a  $\Omega^q$ , sám vytvoří dle (6.8) a (6.9) odpovídající funkce vzdálenosti  $d^{\Omega^{\mathcal{I}}_q}(y_i)$  a  $d^{\Omega^{\mathcal{M}}}(y_i)$ , následovně

$$d^{\Omega_q^{\mathcal{I}}}(y_i) = \max\left(d^{\Omega^{\mathcal{UC}}}(y_i), d^{\Omega^q}(y_i)\right)$$
(6.25)

a

$$d^{\Omega^{\mathcal{M}}}(y_i) = \max\left(d^{\Omega^{\mathcal{UC}}}(y_i), -\max_{q=1}^r d^{\Omega^q}(y_i)\right).$$
(6.26)

Než přistoupíme k dalším modifikacím, je vhodné vyjmenovat základní kroky, které následují po definici geometrie  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  a kterými generátor sítě rozdělí oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  na konečné prvky.

- Vytvoření primární sítě na oblastech  $\Omega_a^{\mathcal{I}}$ .
- Vytvoření primární sítě na oblasti  $\Omega^{\mathcal{M}}$ .
- Úprava vzniklé primární sítě a to polohy uzlů na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$ , z důvodu snadné aplikace periodických okrajových podmínek.
- Vytvoření finální sítě na oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ .

# 6.3.2 Vytvoření primární sítě na oblastech $\Omega_a^{\mathcal{I}}$

K vytvoření primárních sítí na oblastech  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$  není třeba žádné modifikace jádra algoritmu, pouze stačí zajistit, aby algoritmus automaticky tyto sítě vytvořil. Když je síť na oblasti  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$  vytvořena, je nutné zjistit, které uzly  $n_i$  leží na hranici  $\Gamma_q^{\mathcal{I}}$ , resp.  $\Gamma_q^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}$ . Tuto množinu uzlů označíme  $\mathcal{N}^{\Gamma_q^{\mathcal{I}}}$ , resp.  $\mathcal{N}^{\Gamma_q^{\mathcal{I} \cap \mathcal{M}}}$ . Zřejmě platí, že

$$\mathcal{N}^{\Gamma_q^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}} \subseteq \mathcal{N}^{\Gamma_q^{\mathcal{I}}}.$$
(6.27)

### 6.3.3 Vytvoření primární sítě na oblasti $\Omega^{\mathcal{M}}$

První zásah přímo do jádra algoritmu je nutný ve chvíli, kdy chceme vytvořit primární síť na oblasti  $\Omega^{\mathcal{M}}$  a to k zajištění návaznosti jednotlivých sítí na rozhraní složek, tedy na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ . Z toho důvodu musíme při tvorbě primární sítě na oblasti  $\Omega^{\mathcal{M}}$  zajistit, aby na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$  ležely právě všechny uzly z množiny  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}}$  a žádné jiné. Z toho důvodu budeme při tvorbě sítě na oblasti  $\Omega^{\mathcal{M}}$  uvažovat uzly z množiny  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}}$  jako fixní (což umožňuje původní algoritmus vynulováním příslušných nevyrovnaných sil  $F_i^{tot}$ , čímž se zamezí pohybu těchto bodů) a všechny nové uzly, které se posunou na hranici  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ smažeme (tato podmínka již musí být do původního jádra algoritmu doplněna). Když je taková primární síť vytvořena, je opět nutné zjistit, které uzly  $n_i$  leží na hranici  $\Gamma^{\mathcal{M}}$ , resp.  $\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}$ . Tuto množinu uzlů označíme  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{M}}}$ , resp.  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}}$ . Zřejmě opět platí, že

$$\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{I}} \cap \underline{\mathcal{M}}} \subseteq \mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{M}}} \tag{6.28}$$

a zároveň

$$\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{I}}\cap\underline{\mathcal{M}}} = \mathcal{N}^{\Gamma^{\underline{\mathcal{I}}}\cap\mathcal{M}}.$$
(6.29)

#### 6.3.4 Periodicita

Aby bylo možné efektivně aplikovat periodické okrajové podmínky, je potřeba zajistit, aby na paralelních částech hranice  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  ležely odpovídající si uzly (viz část 2.6.1) a je tedy nutné polohu uzlů primární sítě na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  opravit. Poloha uzlů se opraví pouze na části  $\Gamma^{\mathcal{UC}}_{\#2}$  tak, aby odpovídala poloze uzlů z části  $\Gamma^{\mathcal{UC}}_{\#1}$ , jejichž poloha se ponechá. Množinu všech uzlů s opravenou polohou dle tohoto odstavce, které leží na hranici  $\Gamma^{\mathcal{UC}}$  označíme  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{UC}}}$ . Tato množina se skládá z disjunktních množin  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{UC}}_{\#1}}$  a  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{UC}}_{\#2}}$ , tedy

$$\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{UC}}} = \mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{UC}}_{\#1}} \cup \mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{UC}}_{\#2}}.$$
(6.30)

#### 6.3.5 Finální síť

Finální topologie sítě pokrývající oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  je hledána pro celou tuto oblast najednou, s počáteční polohou uzlů, jež odpovídá primárním sítím jednotlivých podoblastí  $\Omega_q^{\mathcal{I}}$  a  $\Omega^{\mathcal{M}}$ . Pouze uzly z podmnožiny  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{I}\cap\mathcal{M}}}$  a  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{UC}}}$  jsou při hledání finální polohy uzlů a topologie sítě na oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  považovány za fixní. Z toho vyplývá, že se jedná pouze o drobnou korekci primární sítě, která je způsobená změnou polohy těch uzlů, jež patří do množiny  $\mathcal{N}^{\Gamma^{\mathcal{UC}}}$ .

#### 6.3.6 Pravotočivost

Primárním výstupem generátoru sítě je matice souřadnic, jejíž n-tý řádek je tvořen souřadnicemi n-tého uzlu (v *i*-tém sloupci je uložena souřadnice  $y_i^n$ ) a matice elementů, jejíž m-tý řádek je tvořen čísly uzlů, které tvoří vrcholy m-tého elementu  $e^m$ . Pro správnou funkci implementace FEM, resp. FETI je nutné, aby byla čísla vrcholů v řádcích matice elementů seřazena v pravotočivém pořadí, z důvodu, který objasňuje poznámka 1 na straně 53. Ke kontrole, zda je tato podmínka splněna, lze s výhodou použít právě vektorový součin a na základě jeho znaménka se rozhodnout, zda je zapotřebí prohodit dvě čísla vrcholů v řádce matice elementů, čímž se v případě nedodržení podmínky pravotočivosti již tato podmínka zajistí.

#### 6.4 Kvalita sítě

Kvalita celé sítě z hlediska FEM je závislá na kvalitě jednotlivých elementů. Ideálním trojúhelníkovým prvkem v rovině je rovnostranný trojúhelník. Čím více se bude trojúhelníkový prvek blížit ideálu, tedy trojúhelníku rovnostrannému, tím větší bude poměr poloměru kružnice jemu vepsané  $r_{in}$ , ku poloměru kružnice opsané  $r_{out}$ . Tento poměr je pro trojúhelník rovnostranný největší. Naopak trojúhelníkový prvek je tím méně vhodný, čím menší vnitřní úhel obsahuje, v takovém případě výše uvedený poměr klesá v porovnání s trojúhelníkem rovnostranným. Ve shodě s výše uvedenými úvahami je při rozhodování o kvalitě jednotlivých elementů použito kritérium, které porovnává poměr kružnice vepsané  $r_{in}$  a opsané  $r_{out}$ .

Použijeme-li výraz

$$q = 2\frac{r_{in}}{r_{out}} \tag{6.31}$$

zjistíme, že pro trojúhelník rovnostranný je jeho hodnota q = 1. Pro ostatní trojúhelníkové prvky klesá úměrně zmenšujícímu se vnitřnímu úhlu, teoreticky až k nule, tedy

$$q \in \langle 0, 1 \rangle. \tag{6.32}$$

Je tedy zřejmé, že čím vhodnější bude trojúhelníkový prvek, tím větší hodnotu q z intervalu (6.32) mu výraz (6.31) přiřadí, tudíž můžeme pomocí (6.31) rozhodovat o kvalitě prvku.

# Část II

# Numerické experimenty

# Kapitola 7

# NUMERICKÉ EXPERIMENTY

#### 7.1 Úvod

Na tomto místě představíme vybrané výsledky, získané implementací předchozí teoretické části do programu MATLAB 7.1. S elementárními znalostmi o programování v jazyce C (např. na úrovni publikace [10]), lze využít MATLAB k rychlé implementaci daného problému a to pouze se základními znalostmi o něm, získanými například v příručkách [23] a [22]. Především z výše uvedeného důvodu byl pro numerické experimenty zvolen právě MATLAB. Navíc nelze opomenout efektivní práci s maticemi, kterou tento program umožňuje a pro kterou byl vyvinut.

Nejprve jsou představeny takové experimenty, které byly provedeny především k ověření správné implementace metody FEM a FETI do programu MATLAB. V prvním případě se jedná o určení efektivních materiálových konstant kompozitu, jehož inkluze jsou uspořádány do čtvercové mřížky a to za předpokladu dokonalého spojení fází (výsledky porovnány s článkem [7]). Ve druhém případě jde znovu o určení materiálových charakteristik, ale kompozitu s hexagonálním uspořádáním inkluzí, které nejsou dokonale spojeny s matricí (výsledky porovnány s článkem [26]).

V dalším experimentu je měněn konstitutivní vztah na rozhraní složek. Experiment by měl na pracovním diagramu vzorku ukázat, jaký vliv má změna uvedených parametrů na chování homogenizovaného vzorku.  $\mathcal{UC}$  je v tomto experimentu namáhána pouze tahovou makrodeformací.

Poslední experiment ukazuje celkovou deformaci  $\mathcal{UC}$ , která je zatížena obecnou makroskopickou deformací, která je v prvním případě kombinací tlaku a tahu a ve druhém případě kombinací tlaku, tahu a smyku.

#### 7.2 Dokonalé spojení složek

Jak bylo řečeno již v úvodu této kapitoly, je cílem tohoto numerického experimentu, tedy experimentu na  $\mathcal{UC}$  kompozitu s dokonalým spojením složek, především ověření správné implementace metody FEM a FETI, a to za uvedených předpokladů o rozhraní složek. K těmto účelům výborně poslouží článek [7], který nám umožní porovnat námi získané výsledky s takovými hodnotami, u nichž je zaručena přesnost na deset desetinných míst.

Na tomto místě nám tedy půjde o reprodukci některých výsledků prezentovaných v článku [7], které odpovídají kompozitnímu vzorku s kruhovými inkluzemi, jež jsou rozmístěnými do čtvercové mřížky a dokonale spojeny s matricí a to vše za předpokladu rovinného napětí. Takový kompozit je v našem experimentu reprezentován  $\mathcal{UC}^1$ , jež je dána čtvercovou oblastí  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  a obsahuje kruhovou oblast  $\Omega^{\mathcal{I}}$ . Jak ukazuje obrázek 7.1, považujeme oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  a  $\Omega^{\mathcal{I}}$  za soustředné, což ale není v souladu s poznámkou 1 nutné.

 $<sup>^1</sup>$ Volba $\mathcal{UC}$ není jednoznačná, ale výsledky získané na různých  $\mathcal{UC},$  jejichž periodickým opakováním získáme shodnou mikrostrukturu, budou totožné.



Obrázek 7.1: Geometrie  $\mathcal{UC}$ , tedy oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , s dokonalým spojením složek.

Výsledky z článku [7] jsou uvedeny v [7, tabulka 1, str. 1452] pro různá objemová zastoupení inkluzí, která jsou dána poměrem

$$p = \frac{|\Omega^{\mathcal{I}}|}{|\Omega^{\mathcal{UC}}|}.$$
(7.1)

V případě námi zvolené  $\mathcal{UC}$  se jedná o poměr plochy jedné kruhové inkluze o poloměru, který označíme r, k ploše celé  $\mathcal{UC}$  tvaru čtverce o straně a. Konkrétní podoba tohoto poměru pro zavedené předpoklady o geometrii  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  (viz obrázek 7.1), bude zřejmě následující

$$p = \frac{\pi r^2}{a^2}.\tag{7.2}$$

Abychom byli schopni vytvořit oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  o předepsaném poměru p, a tak reprodukovat alespoň jeden řádek tabulky, zvolíme vnější rozměr oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  a dále určíme poloměr r následovně

$$r = \sqrt{\frac{pa^2}{\pi}}.$$
(7.3)

Jelikož jsou ve zmíněné tabulce uváděny materiálové konstanty, které nejsou v běžné praxi standardně používány, je v dodatku C naznačeno, jakým způsobem je lze z efektivní matice materiálové tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$  získat. Chování homogenizovaného materiálu je v uvažované rovině pseudoizotropní, což je způsobené uspořádáním kruhových inkluzí do čtvercové mřížky.

Pro porovnání výsledků získaných na numerickém modelu metodou FEM i FETI, jsme zvolili geometrii  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  danou poměrem p = 0.5 a hranu  $a = 2 \,\mathrm{j},^2$  s materiálovými

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Symbol j značí v této kapitole stále shodnou délkovu jednotku, a je hrana čtvercové oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ .



Obrázek 7.2: Relativní odchylka metodou FEM aproximovaných materiálových konstant  $\tilde{X}$  od hodnot X uvedených v článku [7], u nichž je zaručena přesnost na deset desetinných míst, určená vztahem  $\Delta = \frac{\tilde{X}-X}{X} \cdot 10^3$  [‰], v závislosti na počtu uzlů obsažených v oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ .

konstantami matrice

$$\begin{array}{lll}
\kappa^{\mathcal{M}} &=& 3\frac{1}{3}\,\text{GPa} \\
G^{\mathcal{M}}_{(12)} &=& 1\,\text{GPa} \\
\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lll}
E^{\mathcal{M}} &=& \frac{40}{13} \doteq 3.077\,\text{GPa} \\
\nu^{\mathcal{M}} &=& \frac{7}{13} \doteq 0.538 \\
\end{array} \tag{7.4}$$

a inkluze

$$\begin{aligned}
\kappa^{\mathcal{I}} &= 225 \,\mathrm{GPa} \\
G^{\mathcal{I}}_{(12)} &= 135 \,\mathrm{GPa} \\
\end{aligned}
\qquad \Leftrightarrow \qquad E^{\mathcal{I}} &= 337.5 \,\mathrm{GPa} \\
\nu^{\mathcal{I}} &= 0.25 \\
\end{aligned}$$
(7.5)

kde  $\kappa$  značí objemový modul tuhosti (více viz dodatek C).

#### 7.2.1 Konvergence FEM

V tabulce 7.1 jsou shrnuty výsledky parametrické studie s jedním primárním parametrem, kterým je hrana konečného prvku s označením  $h_0$ .<sup>3</sup> Pro větší názornost jsou získané výsledky uvedeny také na obrázku 7.2.

Z uvedených výsledků lze usuzovat o správné implementaci metody FEM a to v případě dokonalého spojení jednotlivých složek v  $\mathcal{UC}$ . Dále uvedené výsledky naznačují průběh konvergence metody FEM, přesněji řečeno materiálových charakteristik získaných pomocí metody FEM, v závislosti na jemnosti sítě.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Velikost  $h_0$  je pouze orientační, samozřejmě že hrany sítě mají velikost různou, ale dá se říci, že v průměru mají prvky velikost přibližně  $h_0$ .

$h_0$	0.1000	0.0900	0.0800	0.0700	0.0600	0.0500	0.0400	0.0300	0.0200
$  ilde{\Omega}^{\mathcal{I}} $	1.9949	1.9956	1.9965	1.9969	1.9979	1.9986	1.9991	1.9995	1.9998
$ \tilde{\Omega}^{\mathcal{M}} $	2.0051	2.0044	2.0035	2.0031	2.0021	2.0014	2.0009	2.0005	2.0002
$  ilde{\Omega}^{\mathcal{UC}} $	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
p	0.4987	0.4989	0.4991	0.4992	0.4995	0.4996	0.4998	0.4999	0.4999
$\min\left(q\right)$	0.6290	0.6279	0.6102	0.6264	0.6349	0.6521	0.6011	0.6315	0.6741
$\operatorname{mean}\left(q\right)$	0.9675	0.9733	0.9739	0.9781	0.9842	0.9855	0.9877	0.9906	0.9944
med(q)	0.9903	0.9927	0.9932	0.9951	0.9970	0.9979	0.9988	0.9994	0.9998
$\max\left(q\right)$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$ \mathcal{E}^{\Omega^{\mathcal{I}}} $	405	511	652	876	1206	1736	2765	4972	11289
$ {\cal E}^{\Omega^{\cal M}} $	479	543	678	864	1230	1850	2815	4930	11441
$ {\cal E}^{\Omega^{\cal UC}} $	884	1054	1330	1740	2436	3586	5580	9902	22730
$ \mathcal{N}^{\Omega^\mathcal{I}} $	178	229	296	406	564	820	1322	2405	5521
$ \mathcal{N}^{\Omega^{\mathcal{M}}} $	258	288	362	460	644	962	1454	2526	5812
$ \mathcal{N}^{\Omega^{\mathcal{UC}}} $	487	572	720	932	1288	1880	2899	5095	11582
$\kappa^{ m ef}$	7.5876	7.5877	7.5881	7.5871	7.5881	7.5889	7.5897	7.5900	7.5903
$G^{\mathrm{ef}}$	3.8253	3.8228	3.8213	3.8165	3.8108	3.8068	3.8041	3.8017	3.7997
$G_{(12)}^{\rm ef}$	2.1867	2.1861	2.1842	2.1813	2.1793	2.1772	2.1764	2.1754	2.1748
$\Delta \kappa^{\rm ef}$	-0.0030	-0.0029	-0.0025	-0.0035	-0.0025	-0.0017	-0.0009	-0.0006	-0.0003
$\Delta G^{\mathrm{ef}}$	0.0269	0.0244	0.0228	0.0180	0.0124	0.0083	0.0057	0.0033	0.0013
$\Delta G_{(12)}^{\mathrm{ef}}$	0.0124	0.0118	0.0098	0.0069	0.0049	0.0028	0.0021	0.0011	0.0005
t	-	41	49	55	84	106	209	450	1674

Tabulka 7.1: Porovnání numerických výsledků získaných metodou FEM s [7, tabulka 1, str. 1452]. Hodnoty  $\Delta X$  jsou vypočteny odečtením hodnoty X se zaručenou přesností na deset desetinných míst, od hodnoty  $\tilde{X}$  získané z numerického modelu metodou FEM, tedy  $\Delta X = \tilde{X} - X$ . V tabulce jsou navíc uvedeny informace o síti, na které byly výsledky získány, proměnná q vypovídá o kvalitě sítě dle části 6.4. Hodnoty materiálových konstant jsou uvedeny v GPa, délky a plochy v j. Symbol t značí výpočetní čas v sekundách.



Obrázek 7.3: Informace o kvalitě sítí, které aproximují oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  v následujících experimentech. Z grafu je mimo jiné patrná závislost kvality sítě q (viz 6.4), na její hustotě.

#### 7.2.2 FETI v závislosti na ukončovacím kritériu MCG

Na oblastech  $\hat{\Omega}^{\mathcal{UC}}$  aproximovaných dle šestého až posledního sloupce tabulky 7.1, tedy oblastech s počáteční velikostí hrany konečného prvku  $h_0 = 0.05$  j až  $h_0 = 0.02$  j, byla provedena parametrická studie, jejímž parametrem bylo ukončovací kritérium iterace MCG, přesněji řečeno velikost nevyrovnaného gradientu  $\gamma_i$ , měřená Euklidovskou normou s označím  $\|\gamma_i\|$ .

Z grafu na obrázku 7.3 si lze udělat představu o kvalitě sítí, pomocí nichž byla aproximována oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$  v jednotlivých, dále porovnávaných numerických modelech, ale také o samotném generátoru sítě, představeném v kapitole 6.

Na tomto místě je nutné poznamenat, že v grafech na obrázcích 7.3 až 7.7, jsou výsledky z jednotlivých numerických modelů zobrazeny shodnou barvou. V některých obrázcích je navíc uvedena legenda, která by měla mít pro daný graf nejvyšší vypovídající hodnotu, ale která je platná pro všechny uvedené grafy z obrázků 7.3 až 7.7.

Porovnání výsledků této parametrické studie s výsledky získanými již ověřenou metodou FEM (obrázek 7.7) navíc prokazuje správnost implementace metody FETI při dokonalém spojení složek.

V obrázku 7.4 je použita funkce size  $(X_i)$ , kterou definujeme následovně

size 
$$(X_i) = \max(i)$$
. (7.6)

Funkci size  $(X_i)$  lze rozšířit i na tenzory vyšší valence. Například pro tenzor třetího řádu takto

size 
$$(X_{ijk}) = [\max(i), \max(j), \max(k)].$$
 (7.7)



Obrázek 7.4: Závislost počtu iterací na přesnosti, se kterou jsou vypočteny multiplikátory  $\underline{\mu}_i$ . Jednotlivé závislosti končí v bodě, ve kterém došlo k poslední konvergenci MCG. V legendě obrázku je poprvé využito funkce size s definicí dle vztahu (7.6).



Obrázek 7.5: Obdoba obrázku 7.4. Počet iterací je v tomto případě vztažen k jedné neznámé  $\underline{\mu}_i$ , tedy vydělen příslušným počtem neznámých size  $(\underline{\mu}_i)$ .



Obrázek 7.6: Počet iterací v závislosti na počtu neznámých  $\underline{\mu}_i,$  pro ukončovací kritérium  $\|\gamma_i\| \leq 10^{-5}.$ 



Obrázek 7.7: Závislost relativní odchylky  $\Delta C_{11}$  na přesnosti, se kterou jsou vypočteny multiplikátory  $\underline{\mu}_i$ , přesněji řečeno na velikosti nevyrovnaného gradientu  $\gamma_i$ . Relativní odchylka je určená vztahem  $\Delta C_{11} = \frac{C_{11}^{\text{FETI}} - C_{11}^{\text{FEM}}}{C_{11}^{\text{FEM}}}$ . Z obrázku je zřejmá nízká citlivost materiálových charakteristik na přesnosti, se kterou jsou určeny silové podmínky na rozhraní složek.



Obrázek 7.8: Geometrie  $\mathcal{UC}$ , tedy oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , s předepsaným dokonalým rozpojením složek. Šedými odstíny je zobrazena  $\mathcal{UC}$ , použitá v článku [26], která je navíc uvažována s jednotkovou výškou. Dále je naznačen úhel rozpojení  $\alpha$ , pomocí něhož je řízeno dokonalé rozpojení složek.

#### 7.3 Předepsané dokonalé rozpojení složek

Druhý experiment je znovu uveden především pro kontrolu implementace, nyní však pro případ předepsaného dokonalého rozpojení složek<sup>4</sup>. Kontrola implementace je opět provedena porovnáním získaných výsledků, nyní však s článkem [26].

Ve zmíněném článku jsou uvedeny vypočtené efektivní materiálové konstanty a prvky homogenizované matice tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$  dlouhovlákného kompozitu s hexagonálním uspořádáním kruhových inkluzí. Jelikož je tento vzorek v článku [26] matematicky modelován jako trojrozměrné těleso, je v našem experimentu použito jak předpokladů rovinné deformace (vhodné k určení homogenizované matice tuhosti, považujeme-li kompozit ve směru vláken nekonečně dlouhý), tak předpokladů rovinné napjatosti (vhodné v případě zjišťování efektivních materiálových konstant, ale také k určení efektivní matice tuhosti kompozitního vzorku, jehož délka se blíží nule). V obou případech je uvažována rovina kolmá na směr vláken.

Geometrii  $\mathcal{UC}$ , která byla použita v našem experimentu, jehož výsledky budou dále uvedeny, je naznačena na obrázku 7.8. Výsledky uvedené v článku [26] jsou získány na trojrozměrné  $\mathcal{UC}$ , o jednotkové výšce. Geometrie  $\mathcal{UC}$ , použité ve zmíněném článku, v námi vyšetřované rovině odpovídá části  $\mathcal{UC}$  z obrázku 7.8 a to té, která je zobrazena v odstínech šedi.

Konkrétní podoba  $\mathcal{UC}$  použité v experimentu je dána poměrem p = 0.4 a materiálo-

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Když mluvíme o předepsaném dokonalém rozpojení složek, máme na mysli rozpojení s předem určenou hranicí  $\Gamma^{\mathcal{I} \stackrel{f}{\cap} \mathcal{M}}$ , na které uvažujeme nulovou tuhost rozhraní. Je tedy předepsáno, kde má dojít k dokonalému rozpojení.

	$ \mathcal{N} $	$ \mathcal{E} $	$\min\left(q\right)$	$\mathrm{mean}\left(q\right)$	$\operatorname{med}\left(q\right)$
$\tilde{\Omega}_1^{\mathcal{I}}$	614	1132			
$\tilde{\Omega}_2^{\mathcal{I}}$	614	1131			
$\tilde{\Omega}_3^{\mathcal{I}}$	598	1095			
$\tilde{\Omega}_4^{\mathcal{I}}$	600	1102	0.5617	0.9917	0.9995
$\tilde{\Omega}_5^{\mathcal{I}}$	2375	4586			
$\tilde{\Omega}^{\mathcal{M}}$	7193	13834			
$\tilde{\Omega}^{\mathcal{UC}}$	11660	22880			

Tabulka 7.2: Informace o aproximované oblasti  $\tilde{\Omega}^{\mathcal{UC}}$ .

vými konstantami matrice

a inkluze

$$E^{\mathcal{I}} = 200 \,\text{GPa}$$
  
 $\nu^{\mathcal{I}} = 0.299$  (7.9)

Na tomto místě je nutné upozornit na fakt, že všechny níže uvedené výsledky byly získány krokovým zvyšováním úhlu rozpojení  $\alpha$  po 10°. V tabulkách jsou uváděny výsledky pouze pro úhel  $\alpha$  zvětšující se po 30°, jelikož v článku [26] jsou právě tyto hodnoty uváděny. Data, které odpovídají jemnějšímu dělění úhlu rozpojení  $\alpha$ , byly získány osobně od autora článku doc. Michala Šejnohy<sup>5</sup>.

Toto upozornění je zde uvedeno ze dvou důvodů a to především proto, aby čtenář tuto poznámku vedl v patrnosti, až bude analyzovat grafické zobrazení následujících výsledků. Ve zmíněných výsledcích jsou totiž na křivkách patrné "lomy"<sup>6</sup>, které ale nejsou primárně způsobeny diskretizací úhlu rozpojení  $\alpha$ , jelikož křivky mají mezi těmito "lomy" poměrně "hladký" průběh. Samozřejmě přesnou polohu a průběh popsané změny příslušejících funkcí již nelze s použitou diskretizací úhlu  $\alpha$  popsat a zkoumání (především příčiny) tohoto jevu je bohužel za hranicemi rozsahu této práce.

Za druhé je třeba poznámka o topologii konečně<br/>prvkové sítě, pomocí níž je diskretizována oblast  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ . Aby bylo možné vytvořit co nejlepší aproximace  $\tilde{\Omega}^{\mathcal{UC}}$  pro<br/> jednotlivé úhly rozpojení  $\alpha$ , tedy aproximace oblast<br/>í  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ s proměnnou hranicí  $\Gamma^{\mathcal{I}_{\cap}^{I}\mathcal{M}}$ , je nutné použít<br/> takovou síť, která obsahuje v krajních bodech jednotlivých hranic<br/>  $\Gamma^{\mathcal{I}_{\cap}^{I}\mathcal{M}}$ uzly.

# 7.3.1 Informace o aproximované oblasti $\tilde{\Omega}^{UC}$

Všechny výsledky v této části, získané metodou FEM i FETI, byly vypočteny na oblasti  $\tilde{\Omega}^{\mathcal{UC}}$ , jejíž charakteristiky jsou uvedeny v tabulce 7.2.

 $<sup>^5</sup>$ Doc. Ing. Michal Šejnoha, Ph.D., České vysoké učení technické, Fakulta stavební, Katedra mechaniky, Praha

 $<sup>^6</sup>$ Přesněji řečeno nespojitost prvních derivací příslušející funkce.



Obrázek 7.9: Závislost jednotlivých prvků matice tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$  na úhlu rozpojení  $\alpha$ . Čárkovanou, resp. čerchovanou čarou jsou zobrazeny prvky efektivní matice tuhosti vypočtené za předpokladu rovinné deformace (RD), resp. rovinného napětí (RN). Plná čára reprezentuje příslušející prvky matice tuhosti, dle článku [26], tedy určené na trojrozměrném modelu.

#### 7.3.2 Efektivní matice tuhosti

Jak již bylo řečeno, v článku [26] je vzorek kompozitu modelován jako trojrozměrné těleso, s konečnou délkou kolmou na námi vyšetřovanou rovinu o velikosti jedna. Příslušné prvky efektivních matic tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$  získané na takovém modelu jsou v tabulce 7.3 porovnány s maticemi tuhosti, získanými implementací metody FEM a to za předpokladů rovinné deformace (RD) i rovinné napjatosti (RN). Grafické zobrazení výsledků z tabulky 7.3 je možné nalézt na obrázku 7.9.

Na základě tohoto experimentu lze rozhodnout o správnosti implementace metody FEM, jelikož lze předpokládat, že homogenizovaná matice tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$  určená za předpokladu rovinné deformace (nekonečná dálka tělesa ve směru kolmém na uvažovanou rovinu), resp. rovinného napětí (nulová dálka tělesa ve směru kolmém na uvažovanou rovinu), bude pro prvky matice tuhosti, jež přísluší normálovým směrům namáhání, vypočtené na trojrozměrném modelu s konečnou délkou kolmou na uvažovanou rovinu, působit jako horní, resp. dolní mez.

#### 7.3.3 Efektivní materiálové konstanty

K porovnání efektivních materiálových konstant je vhodné vycházet z homogenizované matice tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$ , vypočtené za předpokladů rovinného napětí a ortotropního chování materiálu (viz část 5.3.1). Homogenizované materiálové konstanty určené tímto způsobem

1

0	χ	0 °	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^{\circ}$	$150^{\circ}$	$180^{\circ}$
$C_{11}$	RD	149.686	127.948	93.734	61.224	43.959	38.671	36.156
	3D	140.990	124.981	88.630	56.129	41.508	35.144	32.830
	RN	127.569	109.805	81.321	53.504	38.361	33.730	31.765
$C_{22}$	RD	149.689	145.935	139.449	130.437	111.232	88.683	36.169
	3D	140.938	138.641	132.427	123.462	108.196	82.672	32.842
	RN	127.573	125.626	121.855	115.125	98.216	78.272	31.777
$C_{33}$	RD	46.359	43.141	37.051	29.554	20.859	14.937	10.821
	3D	47.031	44.944	38.450	30.042	22.571	15.111	10.564
	RN	46.127	42.822	36.544	28.829	20.038	14.174	10.143
$C_{12}$	RD	56.970	48.091	34.646	24.248	20.834	19.211	14.514
	3D	46.000	40.322	27.008	17.364	15.129	14.308	11.671
	RN	35.317	29.633	21.046	14.891	13.886	13.562	11.479
$C_{13}$	RD	-0.001	-0.021	0.005	-0.002	-0.002	0.001	-0.007
	3D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	RN	-0.001	-0.018	0.007	0.001	-0.001	0.001	-0.007
$C_{23}$	RD	0.001	-0.016	0.003	-0.000	-0.063	-0.013	-0.002
	3D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	RN	0.001	-0.014	0.002	-0.000	-0.060	-0.014	-0.001

Tabulka 7.3: Závislost jednotlivých prvků matice tuhosti  $C_{ij}^{\text{ef}}$  na úhlu rozpojení  $\alpha$ . Řádky označené RD, resp. RN odpovídají předpokladům rovinné deformace, resp. rovinného napětí a řádky označené 3D odpovídají výsledkům z článku [26], tedy trojrozměrnému modelu. Jednotlivé hodnoty jsou uvedeny v GPa.



Obrázek 7.10: Závislost homogenizovaných materiálových konstant na úhlu rozpojení  $\alpha$ . Plnou čarou jsou zobrazeny materiálové konstanty určené z efektivní matice tuhosti vzorku ve stavu rovinného napětí, čárkovanou čarou zas materiálové konstanty dle článku [26].

jsou porovnány s hodnotami z článku [26] a to jak v tabulce 7.4, tak na obrázku 7.10.

#### 7.3.4 Aplikace kontaktní úlohy

Jednotlivé, výše uvedené výsledky numerických experimentů, jež se týkají dokonalého rozpojení složek, odpovídají tahovému namáhání  $\mathcal{UC}$ . Jelikož při takovém namáhání nedochází ke kontaktu oddělených složek, jsou získané výsledky korektní, tedy až na smykový mód zatížení, při kterém se nelze kontaktní úloze vyhnout. Kompozit lze charakterizovat pomocí efektivních materiálových charakteristik, s výjimkou parametrů získaných pro smykové namáhání. Na obrázku 7.11 jsou zobrazeny tři zatěžovací módy, pomocí nichž byla v předchozích odstavcích zjišťována efektivní matice tuhosti. Uvedený obrázek potvrzuje předchozí slova a je z něj tedy patrné, že kontaktní úlohu je nutné řešit pouze v případě smykového zatížení.

Právě pro případ smykového namáhání  $\mathcal{UC}$ , tedy

$$E_i = \begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix}, \tag{7.10}$$

byl proveden experiment, jehož výsledek ukazuje rozdíl v napjatosti  $\mathcal{UC}$  s a bez uvážení kontaktní úlohy (tedy s a bez možnosti průniku jednotlivých složek), aplikované metodou FETI dle části 3.7. Zmíněné výsledky jsou zobrazeny v tabulce a na obrázku 7.12. Dále obrázek 7.13, resp. 7.14 ukazuje rozdíl v periodické, resp. celkové deformaci  $\mathcal{UC}$ .



Obrázek 7.11: Módy zatížení, pomocí nichž byly zjišťovány efektivní vlastnosti v tahu bez uvážení kontaktní úlohy.

lpha		0 °	$30^{\circ}$	$60^{\circ}$	$90^{\circ}$	$120^{\circ}$	$150^\circ$	$180^{\circ}$
$E_{(1)}$	RN	117.792	102.816	77.686	51.578	36.397	31.380	27.618
	3D	118.499	107.284	80.027	52.509	38.820	32.298	28.380
$E_{(2)}$	RN	117.796	117.629	116.408	110.981	93.190	72.819	27.629
	3D	118.454	118.232	116.985	111.575	97.736	74.105	28.391
$G_{(12)}$	RN	46.127	42.822	36.544	28.829	20.038	14.174	10.143
	3D	47.031	44.944	38.450	30.042	22.571	15.111	10.564

Tabulka 7.4: Závislost homogenizovaných materiálových konstant na úhlu rozpojení  $\alpha$ . Řádky označené RN vycházejí z efektivní matice tuhosti vzorku ve stavu rovinného napětí a řádky označené 3D odpovídají výsledkům z článku [26], tedy trojrozměrnému modelu. Jednotlivé hodnoty jsou uvedeny v GPa.



Obrázek 7.12: Rozdíl v makroskopickém napětí, které odpovídá makroskopické deformaci  $E_i = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$ s a bez uvážení kontaktní úlohy. Čárkovanou, resp. plnou čarou jsou zobrazeny výsledky bez resp. s uvážením kontaktní úlohy. Z těchto výsledků je zřejmé porušení ortotropní odezvy materiálu na smykové namáhání v důsledku zamezení průniku jednotlivých složek.



Obrázek 7.13: Fluktuující složka deformace  $\mathcal{UC}$  odpovídající makroskopické deformaci  $E_i = [0, 0, 0.2]^{\mathrm{T}}$ .

90



Obrázek 7.14: Celková deformace  $\mathcal{UC}$ odpovídající makroskopické deformaci $E_i=[0,0,0.2]^{\mathrm{T}}.$ 

#### 7.4 Neřízené rozpojení složek

Na obrázcích v této části jsou uvedeny pracovní diagramy homogenizovaných kompozitů ve stavu rovinného napětí, namáhaných tahovou makrodeformací. Ve všech diagramech je plnou čarou zobrazeno makroskopické normálové napětí  $\Sigma_1$  (ve směru zatížení) a tečkovaně makroskopické napětí  $\Sigma_2$  (kolmé na směr zatížení). Materiálové charakteristiky složek a rozhraní (především rozhraní) neodpovídají reálným materiálům, ale jsou zvoleny tak, aby ve výsledném pracovním diagramu bylo obsaženo co nejvíce informací a aby  $\mathcal{UC}$  odolávala i velkým makrodeformacím, což umožní také vizuální hodnocení výsledků. Materiálové konstanty matrice jsou tedy uvažovány následovně

a inkluze takto

$$E^{\mathcal{I}} = 500 \,\text{GPa}$$
  
 $\nu^{\mathcal{I}} = 0.2.$  (7.12)

Konstitutivní zákon na rozhraní složek je předepsán dle části 3.7.3. Ve všech případech jde tedy o rozhraní s počáteční pevností a následnou předepsanou konstantní poddajností. Další specifikace o předepsaném fyzikálním vztahu rozhraní jsou uvedeny před jednotlivými experimenty.

Numerický experiment je dále prováděn na  $\mathcal{UC}$ , která byla použita již v prvním experimentu a jejíž geometrie je patrná z obrázku 7.1. Je použit i shodný poměr složek p = 0.5 a hrana a = 2 j. Aproximace  $\tilde{\Omega}^{\mathcal{UC}}$  je provedena sítí trojúhelníkových prvků, jejíž parametry jsou uvedeny v předposledním sloupci tabulky 7.1.

Cílem tohoto experimentu je ukázat, jak daná implementace reaguje na změnu výše uvedených vstupních parametrů, není však jeho cílem hledat závislost homogenizovaných vlastností na fyzikálním vztahu, který je předepsán na rozhraní složek.

Pracovní diagramy uvedené v této části mají všechny, vyjma posledního, podobný charakter. Nejprve je patrná lineární odezva materiálu, která odpovídá dokonalému spojení složek. V porovnání se zbylou částí pracovního diagramu lze tuto část charakterizovat velkou tuhostí. Při určitém stavu zatížení dojde k překonání počáteční pevnosti a k prudkému poklesu napětí, které je způsobené rychlým rozvojem trhliny. Tuhost homogenizovaného materiálu po překonání počáteční pevnosti také poklesne.

Díky periodickým okrajovým podmínkám, charakteru zatížení a symetričnosti  $\mathcal{UC}$  je nutné předpokládat její symetrickou deformaci a tedy symetrický rozvoj trhlin. Jelikož se jedná o numerický experiment, který je navíc zatížen chybou, jež je do výpočtu vnesena nesymetrickou aproximací oblasti  $\Omega^{\mathcal{UC}}$ , je nutné k získání symetrického řešení, jež odpovídá homogenizačním předpokladům, přitížit  $\mathcal{UC}$  po překonání počáteční pevnosti dostatečně velkým krokem, který zaručí symetrickou odezvu na zatížení. Jinými slovy, na symetrické  $\mathcal{UC}$  je známá množina bodů, ve kterých by měla být překonána počáteční pevnost ve shodném zatěžovacím kroku, pokud je však tento krok zvolen tak, že k překonání počáteční pevnosti nedojde v celé množině předpokládaných uzlů, pak prudký nárůst napětí v počátku a konci trhliny způsobí redistribuci pole napětí v  $\mathcal{UC}$  a tím pádem nemusí být zaručena symetrická deformace  $\mathcal{UC}$ .

V této části je poprvé zavedeno označení  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^t$ , resp.  $L^n$  a  $L^t$ , které značí spojitou normálovou a tečnou počáteční pevnost, resp. spojitou normálovou a tečnou poddajnost rozhraní.



Obrázek 7.15: Pracovní diagram homogenizovaných materiálů s rozdílnou normálovou a shodnou tangenciální počáteční pevností  $R^t = 30 \text{ GN/j}$  na rozhraní. Plnou čarou je zobrazeno makroskopické normálové napětí  $\Sigma_1$  a tečkovaně makroskopické napětí  $\Sigma_2$ , což platí i pro další pracovní diagramy uvedené v této části.

#### 7.4.1 Normálová a tangenciální počáteční pevnost a následné dokonalé rozpojení

Z tohoto experimentu by měla být patrná změna odezvy materiálu, způsobená změnou počáteční normálové a tangenciální pevnosti. Konstitutivní zákon je uvažován dle části 3.7.3, tedy s předepsanou konstantní poddajností, v tomto případě rovnou nule. Pracovní diagramy, které odpovídají uvedeným předpokladům o rozhraní složek, jsou uvedeny na obrázku 7.15, 7.16 a 7.17.

V průběhu některých uvedených pracovních diagramů se vyskytují změny, jejichž příčina nemusí být čtenáři zřejmá. Prvním případem je rychlý pokles napětí kolmého na směr zatížení, tedy napětí  $\Sigma_2$ . Tento pokles je způsoben nesymetrickým odtržením inkluze od matrice, jak uvádí obrázek 7.18. Nesymetrické odtržení matrice není v souladu s homogenizačním předpokladem, ale tento pokles napětí by nastal i v případě symetrického odtržení.

Druhá poznámka se týká značně nelineárního průběhu normálového napětí od okamžiku překonání počáteční pevnosti, což je patrné například na pracovním diagramu, který je uveden na obrázku 7.17 a odpovídá počátečním pevnostem  $R^n = 15 \,\text{GN/j}$  a



Obrázek 7.16: Pracovní diagram homogenizovaných materiálů s rozdílnou normálovou a nekonečnou tangenciální počáteční pevností  $R^t = \infty$  na rozhraní.



Obrázek 7.17: Pracovní diagram homogenizovaných materiálů s rozdílnou tangenciální a shodnou normálovou počáteční pevností $R^n=15\,{\rm GN/j}$ na rozhraní.


Obrázek 7.18: Odtržení inkluze od matrice ve směru kolmém na zatížení.

 $R^t = 30 \,\text{GN/j}$ . Tato nelinearita je způsobená rychlostí rozvoje trhliny a je výrazná především při vhodném poměru počátečních pevností. Deformaci  $\mathcal{UC}$  s rozdílnou rychlostí rozvoje trhliny ukazuje obrázek 7.19.

# 7.4.2 Normálová a tangenciální tuhost rozhraní

Z tohoto experimentu by měla být patrná odezva materiálu v závislosti na změně normálové a tangenciální tuhosti. Konstitutivní zákon je uvažován dle části 3.7.3, tedy s předepsanou konstantní poddajností po překonání počáteční pevnosti, kde se na deformaci poddajného rozhraní podílí celá působící síla. I když to není nutné, je dále pro přehlednost zvolena shodná normálová a tangenciální tuhost rozhraní. Příklady pracovních diagramů, jež respektují uvedený fyzikální vztah na rozhraní složek, jsou uvedeny na obrázku 7.20 a 7.21.

# 7.4.3 Normálová a tangenciální tuhost rozhraní bez skoku v napětí

Konstitutivní zákon na rozhraní je v tomto případě uvažován dle části 3.7.3, tedy s předepsanou konstantní poddajností po překonání počáteční pevnosti, kde se na deformaci poddajného rozhraní podílí pouze přírůstek působící síly nad mez počáteční pevnosti. Tento příklad pracovního diagramu je zobrazen na obrázku 7.22.



Obrázek 7.19: Rozdíl v rychlosti rozvoje trhliny, způsobený různým poměrem počátečních pevností. Levá a pravá strana odpovídá stejnému stupni zatížení a to ihned po překonání počáteční pevnosti. Obrázek zobrazuje pouze levé spodní rohy  $\mathcal{UC}$ .



Obrázek 7.20: Pracovní diagram homogenizovaných materiálů s rozdílnou poddajností na rozhraní, kde $R^n=15\,{\rm GN/j},\,R^t=30\,{\rm GN/j}$ a duktilita rozhraní není omezena.



Obrázek 7.21: Pracovní diagram homogenizovaných materiálů s rozdílnou schopností duktility na rozhraní, kde $L^n=L^t=50\,{\rm GN/j}.$ 



Obrázek 7.22: Pracovní diagram homogenizovaných materiálů s rozdílnou poddajností na rozhraní, kde $R^n=15\,{\rm GN/j},\,R^t=30\,{\rm GN/j}$ a duktilita rozhraní není omezena.

# 7.5 Další příklady

Sada obrázků, jež je obsažena v této části, je získána na shodném matematickém modelu, na kterém byly prováděny numerické experimenty v části předchozí. Konstitutivní zákon na rozhraní je uvažován dle části 3.7.3, tedy s předepsanou konstantní poddajností po překonání počáteční pevnosti, kde se na deformaci poddajného rozhraní podílí celá působící síla.

$$E_i = \frac{2}{12} [0.2, -0.2, 0]^{\mathrm{T}}$$

 $E_i = \frac{4}{12}[0.2, -0.2, 0]^{\mathrm{T}}$ 



 $E_i = \frac{6}{12}[0.2, -0.2, 0]^{\mathrm{T}}$ 

 $E_i = \frac{8}{12} [0.2, -0.2, 0]^{\mathrm{T}}$ 



Obrázek 7.23: Postupné přitěžování  $\mathcal{UC}$ makroskopickou deformací až do $E_i=[0.2,-0.2,0]^{\rm T}.$ 



 $E_i = [0.2, -0.2, 0]^{\mathrm{T}}, R^t = 30 \,\mathrm{GN/j}$ 



Obrázek 7.24: Rozdíl v celkové deformaci  $\mathcal{UC}$ , jež je zatížena makroskopickou deformací  $E_i = [0.2, -0.2, 0]^{\mathrm{T}}$ , který je způsoben odlišnou počáteční pevností v tečném směru  $R^t$ .



Obrázek 7.25: Detail rozhraní  $\mathcal{UC}$ , jež je zatížena makroskopickou deformací  $E_i = [0.2, -0.2, 0]^{\mathrm{T}}$ . Rozdíl je způsoben odlišnou počáteční pevností v tečném směru  $R^t$ . Jedná se o spodní levý roh  $\mathcal{UC}$ , který je otočen o devadesát stupňů pravotočivě.

 $E_i = \frac{2}{12} [0.2, -0.2, 0.2]^{\mathrm{T}}$ 

 $E_i = \frac{4}{12}[0.2, -0.2, 0.2]^{\mathrm{T}}$ 



 $E_i = \frac{6}{12} [0.2, -0.2, 0.2]^{\mathrm{T}}$ 

 $E_i = \frac{8}{12}[0.2, -0.2, 0.2]^{\mathrm{T}}$ 



Obrázek 7.26: Postupné přitěžování  $\mathcal{UC}$  makroskopickou deformací až do  $E_i=[0.2,-0.2,0.2]^{\rm T}.$ 



 $E_i = [0.2, -0.2, 0.2]^{\mathrm{T}}, R^t = 30 \,\mathrm{GN/j}$ 

Obrázek 7.27: Rozdíl v celkové deformaci  $\mathcal{UC}$ , jež je zatížena makroskopickou deformací  $E_i = [0.2, -0.2, 0.2]^{\mathrm{T}}$ , který je způsoben odlišnou počáteční pevností v tečném směru  $R^t$ .



Obrázek 7.28: Detail rozhraní  $\mathcal{UC}$ , jež je zatížena makroskopickou deformací  $E_i = [0.2, -0.2, 0.2]^{\mathrm{T}}$ . Rozdíl je způsoben odlišnou počáteční pevností v tečném směru  $R^t$ . Jedná se o spodní levý roh  $\mathcal{UC}$ , který je otočen o devadesát stupňů pravotočivě.

### Kapitola 8

# SHRNUTÍ

V předložené práci se s ohledem na zvolený cíl, tedy matematické modelování rozhraní složek, podařilo v omezeném rozsahu předvést klasickou homogenizační teorii periodických mikrostruktur s dokonalým i nedokonalým spojením složek. Bylo předvedeno numerické řešení homogenizační teorie kompozitů s dokonalým rozpojením, resp. spojením složek metodou konečných prvků i metodou FETI a to bez uvážení kontaktní úlohy. Správnost zmíněného matematického modelu byla ověřena jeho implementací do programu MATLAB a následovným porovnáním výsledků s článkem [7] a [26]. Dále byla soustředěna pozornost na modelování obecnějšího konstitutivního vztahu na rozhraní složek diskretizovaného problému, nyní už jen metodou FETI. Za nejobecnější rozhraní, které se podařilo předvést, lze považovat rozhraní s počáteční pevností, následnou konstantní poddajností a omezenou duktilitou (po jejím překonání již dojde k dokonalému odtržení vláken). Rozumné a intuitivní chování matematického modelu s uvedeným rozhraním, podložené řadou numerických experimentů, vypovídá o správnosti tohoto modelu.

Další vylepšení a rozšíření předvedeného matematického modelu, jež vedou k výstižnějšímu a efektivnějšímu modelování kompozitních materiálů, ale sahají za hranice této práce, se dají rozdělit na dvě skupiny – fyzikální a numerické.

Z fyzikálního hlediska by bylo vhodné předepsat výstižnější konstitutivní zákon na rozhraní složek se zaměřením na jeho sestupnou větev v pracovním diagramu (změkčení) a tření v tečném směru při tlakovém namáhání. Rozsah použití modelu by zřejmě rozšířila také možnost uvážit obecnější fyzikální zákon, který charakterizuje složky kompozitu (zatím uvažovány pouze izotropní, lineárně pružné složky). S ohledem na charakter deformací  $\mathcal{UC}$  (především při nedokonalém spojení složek), o kterém si lze udělat představu z numerických experimentů uvedených v druhé části, by bylo vhodné porovnat používanou teorii malých deformací s teorií konečných deformací.

Z numerického hlediska se nabízí možnost předpodmínění modifikované metody sdružených gradientů [11, str. 113–114] a ortonormalizace duálního problému [5]. Obě uvedené možnosti značně sníží počet iterací MCG a tak urychlí výpočetní algoritmus. V neposlední řadě by bylo vhodné použít při diskretizaci primární proměnné (posuvů) polynomické bázové funkce minimálně druhého stupně.

### Dodatek A

### VOIGTOVA NOTACE

#### A.1 Voigtova notace

Pomocí Voigtovy notace lze snížit řád symetrických tenzorů, čehož lze v našem případě využít například k přehlednému zápisu zobecněného Hookeova zákona. Použití Voigtovy notace osvětlíme právě na zobecněném Hookeově zákoně (například na mikroúrovni)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \tag{A.1}$$

Začněme tedy u symetrického tenzoru čtvrtého řádu  $C_{ijkl}^{[3\times3\times3\times3]}$ , o kterém mluvíme, díky jeho fyzikální podstatě, jako o tenzoru materiálové tuhosti. V prostoru  $\mathbb{E}^3$  má tento tenzor v případě obecné anizotropie 21 nezávislých prvků (viz [3, str.179–181]), které lze uspořádat do symetrické matice  $C_{ab}^{[3\times3]}$ . Dále použijeme k této redukci následující systém

- prvky tenzoru  $C_{ijkl}$  na pozici ij či ji (tenzor  $C_{ijkl}$  je v těchto indexech symetrický) dosadíme v matici  $C_{ab}$  na pozici a,
- podobně prvky tenzoru  $C_{ijkl}$  na pozici kl či lk (tenzor  $C_{ijkl}$  je opět v těchto indexech symetrický) dosadíme v matici  $C_{ab}$  na pozici b,
- přesné umístění prvků z tenzoru  $C_{ijkl}$  v matici  $C_{ab}$  bude následující
  - je-li i = j, resp. k = l pak a = i, resp. b = k,
  - je-li  $i \neq j$ , resp.  $k \neq l$  pak *a*, resp. *b* je rovno zbývajícímu číslu z posloupnosti 1, 2, 3 zvětšenému o 3.

Tenzor materiálové tuhosti  $C_{ijkl}$  dle úprav popsaných v předchozím odstavci převedeme na matici  $C_{ab}$ , o které mluvíme jako o matici materiálové tuhosti, s následujícím uspořádáním prvků

$$C_{ab} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix}.$$
(A.2)

Dále redukujme řád symetrického tenzoru druhého řádu, tedy tenzor mikroskopického napětí  $\sigma_{ij}$ , resp. mikroskopické deformace  $\varepsilon_{ij}$  tak, aby nám vznikl vektor  $\sigma_a$ , resp.  $\varepsilon_a$ . Je zřejmé, že po redukci tenzoru materiálové tuhosti  $C_{ijkl}$  dle (A.2), již nelze systém uspořádání ve vektorech  $\sigma_a$  a  $\varepsilon_a$  volit libovolně, nýbrž bude závislý právě na vzniklé matici  $C_{ab}$ . Po redukci řádů tenzorů je totiž naším primárním cílem získat shodných šest lineárních konstitutivních vztahů Hookeova zákona (A.1), tedy šest lineárních rovnic, které mají s uvážením symetrie použitých tenzorů následující podobu

$$\sigma_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1133}\varepsilon_{33} + 2C_{1123}\varepsilon_{23} + 2C_{1113}\varepsilon_{13} + 2C_{1112}\varepsilon_{12}, \quad (A.3)$$

$$\sigma_{22} = C_{2211}\varepsilon_{11} + C_{2222}\varepsilon_{22} + C_{2233}\varepsilon_{33} + 2C_{2223}\varepsilon_{23} + 2C_{2213}\varepsilon_{13} + 2C_{2212}\varepsilon_{12}, \quad (A.4)$$

 $\sigma_{33} = C_{3311}\varepsilon_{11} + C_{3322}\varepsilon_{22} + C_{3333}\varepsilon_{33} + 2C_{3323}\varepsilon_{23} + 2C_{3313}\varepsilon_{13} + 2C_{3312}\varepsilon_{12}, \quad (A.5)$   $\sigma_{23} = C_{2311}\varepsilon_{11} + C_{2322}\varepsilon_{22} + C_{2322}\varepsilon_{22} + 2C_{2322}\varepsilon_{23} + 2C_{2312}\varepsilon_{12} + 2C_{2312}\varepsilon_{12}, \quad (A.6)$ 

$$\sigma_{23} = C_{2311}\varepsilon_{11} + C_{2322}\varepsilon_{22} + C_{2333}\varepsilon_{33} + 2C_{2323}\varepsilon_{23} + 2C_{2313}\varepsilon_{13} + 2C_{2312}\varepsilon_{12}, \quad (A.6)$$

 $\sigma_{13} = C_{1311}\varepsilon_{11} + C_{1322}\varepsilon_{22} + C_{1333}\varepsilon_{33} + 2C_{1323}\varepsilon_{23} + 2C_{1313}\varepsilon_{13} + 2C_{1312}\varepsilon_{12}, \quad (A.7)$ 

$$\sigma_{12} = C_{1211}\varepsilon_{11} + C_{1222}\varepsilon_{22} + C_{1233}\varepsilon_{33} + 2C_{1223}\varepsilon_{23} + 2C_{1213}\varepsilon_{13} + 2C_{1212}\varepsilon_{12}. \quad (A.8)$$

Snadno se přesvědčíme, že vektory  $\sigma_a$  <br/>a $\varepsilon_b$ s uspořádáním

$$\sigma_{a} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} \quad \varepsilon_{b} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (A.9)$$

vyhovují našemu cíli, jelikož získáme vztahy

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (A.10)$$

které odpovídají původnímu tenzorovému zápisu Hookeova zákona (A.1). O dvojnásobcích smíšených deformací, které jsou označeny  $\gamma_{ij}$  mluvíme jako o inženýrských smykových deformacích.

Nevýhodou Voigtovy notace je tvar vektoru napětí  $\sigma_a$  a vektoru deformace  $\varepsilon_b$ , který vyplynul ze zavedené matice materiálové tuhosti  $C_{ab}$ . Budeme-li totiž uvažovat inverzní vztah k (A.10), vyskytnou se v matici materiálové poddajnosti  $L_{ab}$  prvky, které přímo neodpovídají prvkům původního tenzoru materiálové poddajnosti  $L_{ijkl}$ , nýbrž jejich různým násobkům, jak je vidět z následujícího

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & L_{1133} & 2L_{1123} & 2L_{1113} & 2L_{1112} \\ L_{2211} & L_{2222} & L_{2233} & 2L_{2223} & 2L_{2213} & 2L_{2212} \\ L_{3311} & L_{3322} & L_{3333} & 2L_{3323} & 2L_{3313} & 2L_{3312} \\ 2L_{2311} & 2L_{2322} & 2L_{2333} & 4L_{2323} & 4L_{2313} & 4L_{2312} \\ 2L_{1311} & 2L_{1322} & 2L_{1333} & 4L_{1323} & 4L_{1313} & 4L_{1312} \\ 2L_{1211} & 2L_{1222} & 2L_{1233} & 4L_{1223} & 4L_{1213} & 4L_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad (A.11)$$

Navíc je nutné pro vektor napětí  $\sigma_a$  a vektor deformace  $\varepsilon_b$ , resp. matici tuhosti  $C_{ab}$  a matici poddajnosti  $L_{ab}$  používat různé transformační vztahy.

### A.2 Mandelova notace

Uvedenou nevýhodu řeší Mandelova notace [21], při jejímž použití lze Hookeův zákon napsat ve tvaru

$\sigma_{11}$		C <sub>1111</sub>	$C_{1122}$	$C_{1133}$	$\sqrt{2}C_{1123}$	$\sqrt{2}C_{1113}$	$\sqrt{2}C_{1112}$	] Г	$\varepsilon_{11}$ ]
$\sigma_{22}$		$C_{2211}$	$C_{2222}$	$C_{2233}$	$\sqrt{2}C_{2223}$	$\sqrt{2}C_{2213}$	$\sqrt{2}C_{2212}$		$\varepsilon_{22}$
$\sigma_{33}$		$C_{3311}$	$C_{3322}$	$C_{3333}$	$\sqrt{2}C_{3323}$	$\sqrt{2}C_{3313}$	$\sqrt{2}C_{3312}$		$\varepsilon_{33}$
$\sqrt{2}\sigma_{23}$	_	$\sqrt{2}C_{2311}$	$\sqrt{2}C_{2322}$	$\sqrt{2}C_{2333}$	$2C_{2323}$	$2C_{2313}$	$2C_{2312}$	1	$\sqrt{2}\varepsilon_{23}$
$\sqrt{2}\sigma_{13}$		$\sqrt{2}C_{1311}$	$\sqrt{2}C_{1322}$	$\sqrt{2}C_{1333}$	$2C_{1323}$	$2C_{1313}$	$2C_{1312}$	1	$\sqrt{2}\varepsilon_{13}$
$\sqrt{2}\sigma_{12}$		$\sqrt{2}C_{1211}$	$\sqrt{2}C_{1222}$	$\sqrt{2}C_{1233}$	$2C_{1223}$	$2C_{1213}$	$2C_{1212}$	lLι	$\sqrt{2}\varepsilon_{12}$
							-	-	(A.12)

a vztah inverzní takto

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & L_{1133} & \sqrt{2}L_{1123} & \sqrt{2}L_{1113} & \sqrt{2}L_{1112} \\ L_{2211} & L_{2222} & L_{2233} & \sqrt{2}L_{2223} & \sqrt{2}L_{2213} & \sqrt{2}L_{2212} \\ L_{3311} & L_{3322} & L_{3333} & \sqrt{2}L_{3323} & \sqrt{2}L_{3313} & \sqrt{2}L_{3312} \\ \sqrt{2}L_{2311} & \sqrt{2}L_{2322} & \sqrt{2}L_{2333} & 2L_{2323} & 2L_{2313} & 2L_{2312} \\ \sqrt{2}L_{1311} & \sqrt{2}L_{1322} & \sqrt{2}L_{1333} & 2L_{1323} & 2L_{1313} & 2L_{1312} \\ \sqrt{2}L_{1211} & \sqrt{2}L_{1222} & \sqrt{2}L_{1233} & 2L_{1223} & 2L_{1213} & 2L_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

$$(A.13)$$

Ihned je vidět konzistence mezi oběma posledně uvedenými vztahy a navíc je zřejmé, že i pro transformaci si vystačíme s jednou skupinou transformačních vztahů pro vektory a jednou pro matice.

### Dodatek B

# VÝPOČET PSEUDOINVERZE

Vynecháme-li v singulární matici tuhosti  $K_{ij}$  lineárně závislé sloupce a řádky, získáme regulární submatici, kterou označíme  $K_{kl}^{11}$ . Substituujeme-li do původní matice prvky inverzního bloku  $K_{kl}^{11-1}$  na místa prvků bloku původního  $K_{kl}^{11}$  a lineárně závislé sloupce, resp. řádky původní matice  $K_{ij}$  nahradíme nulovými sloupcovými, resp. řádkovými vektory příslušné velikosti, bude mít takto vzniklá matice vlastnosti pseudoinverzní matice  $K_{ij}^{\dagger}$ . Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt například v [11, str. 108].

Je potřeba zmínit, že přímý výpočet pseudoinverzní matice  $K_{ij}^{\dagger}$ , například dle předchozího odstavce, není pro naše účely nutný, jelikož nám postačí znát pouze součin této matice  $K_{ij}^{\dagger}$  s maticí transponovanou k matici  $\mathcal{L}_{ij}$ , tedy s vektory jež tvoří její řádky  $\mathcal{L}_{\bullet i}$ a vektorem pravých stran  $f_i$  (to vše ve vyjádření partikulárního řešení fluktuující složky posuvů  $\underline{u}_i^*$ , dle vztahu (3.53)). Partikulární součin matice  $K_{ij}^{\dagger}$  s obecným vektorem  $a_j$ označíme  $b_i$ , tedy

$$b_i = K_{ij}^{\dagger} a_j \tag{B.1}$$

a získáme ho řešením soustavy rovnic

$$K_{ij}b_j = a_i,\tag{B.2}$$

jejíž řešitelnost je dle vlastností pseudoinverze (tedy její existence ke každé matici) zaručena. Tento přístup je oproti přímému vyjádření pseudoinverze výhodný zejména u větších problému, ve kterých je obtížné určit inverzi k regulárnímu bloku matice tuhosti  $K_{kl}^{11}$ . K efektivnímu řešení soustavy (B.2) je vhodné použít numerické iterační metody lineární algebry, jakou je například metoda CG a to nejlépe s předpodmíněním (více viz [19, kapitola 30], nebo [2, str. 181–203]). Je zřejmé, že pokud je celý vektor  $a_i$  nulový, pak je nulový i vektor  $b_i$ , čehož lze využít k efektivnímu výpočtu součinu  $K_{ij}\mathcal{L}_{kj}$ , kde tento případ často nastává.

### Dodatek C

# **OBJEMOVÝ MODUL TUHOSTI**

Cílem tohoto dodatku je ukázat, jakým způsobem lze z matice materiálové tuhosti  $C_{ij}$  pseudoizotropního vzorku ve stavu rovinného napětí určit objemový modul tuhosti, který označíme  $\kappa$ . Jelikož je tento dodatek motivován numerickým experimentem z části 7.2, ukážeme navíc, jak získat z uvedené matice tuhosti  $C_{ij}$  i další materiálové konstanty použité ve zmíněné části. V celém dodatku budeme uvažovat rovinu  $y_1 \times y_2$ .

Nejprve zavedeme objemovou deformaci, kterou označíme  $\omega$ , jež je v souladu s intuitivní představou o deformaci uvažována následovně

$$\omega = \frac{V + dV - V}{V} = \frac{dV}{V} = \frac{y_1 dy_2 + dy_1 y_2 + dy_1 dy_2}{y_1 y_2} = \frac{dy_1}{y_1} + \frac{dy_2}{y_2}, \quad (C.1)$$

jelikož se pohybujeme v oboru malých deformací (viz např. [3, str. 149–162], nebo [24, str. 10–11]), zanedbali jsme nelineární diferenciální členy a navíc dále použijeme vztah

$$\varepsilon_i = \frac{dy_i}{y_i},\tag{C.2}$$

pak tedy

$$\omega = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}. \tag{C.3}$$

S využitím objemové deformace v rovině  $y_1 \times y_2$ , lze vypočítat průměrné normálové napětí v této rovině. K tomu využijeme konstitutivní zákon ve tvaru

$$\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \kappa \omega. \tag{C.4}$$

Jelikož se budeme zaobírat speciálním případem ortotropního materiálu (viz kapitola 5) ve stavu rovinného napětí, vyjdeme z Hookeova zákona ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{(1)} & -\nu_{(21)}/E_{(2)} & 0 \\ -\nu_{(12)}/E_{(1)} & 1/E_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{(12)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}.$$
 (C.5)

Konstitutivní zákon (C.4) ortotropního materiálu ve stavu rovinného napětí, jež svazuje objemovou deformaci  $\omega$  s průměrným normálovým napětím v této rovině, získáme součtem normálových deformací ve fyzikálních rovnicích (C.5), tedy

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \frac{1}{E_{(1)}} \sigma_{11} - \frac{\nu_{(21)}}{E_{(2)}} \sigma_{22} - \frac{\nu_{(12)}}{E_{(1)}} \sigma_{11} + \frac{1}{E_{(2)}} \sigma_{22}$$
(C.6)

$$= \frac{1 - \nu_{(12)}}{E_{(1)}} \sigma_{11} + \frac{1 - \nu_{(21)}}{E_{(2)}} \sigma_{22}.$$
(C.7)

V ortotropním materiálu jsou splněny následující identity

$$\frac{\nu_{(12)}}{E_{(1)}} = \frac{\nu_{(21)}}{E_{(2)}},\tag{C.8}$$

navíc budeme uvažovat speciální případ ortotropie, o kterém mluvíme jako o pseudoizotropii, pak tedy

$$E_{(1)} = E_{(2)} = E \quad \land \quad \nu_{(12)} = \nu_{(21)} = \nu.$$
 (C.9)

S poznatky získanými z posledního uvedeného vztahu, můžeme konstitutivní zákon $({\rm C.7})$ uvést ve tvaru

$$\omega = \frac{2(1-\nu)}{E} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$$
(C.10)

a porovnáním s obecným vztahem (C.4) získáme vztah pro objemový modul pružnosti pseudoizotropního materiálu ve stavu rovinného napětí<sup>1</sup>

$$\kappa = \frac{E}{2\left(1-\nu\right)}.\tag{C.11}$$

Pokud se materiál v rovině  $y_1 \times y_2$  chová pseudoizotropně, pak existují v této rovině tři lineárně nezávislé materiálové konstanty. Mohli bychom vybrat různé konstanty, které lze použít (přehledná tabulka, ve které jsou uvedeny i vztahy mezi těmito konstantami je uvedena např. v [3, str. 192]), ale jak již bylo uvedeno výše, je tento dodatek motivován numerickým experimentem z části 7.2, která má za cíl zreprodukovat tabulku z článku [7], proto zavedeme materiálovou konstantu, jež má význam smykového modulu a která je předepsána vztahem

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$
 (C.12)

Poslední uvažovanou nezávislou materiálovou konstantou bude smykový modul  $G_{(12)}$ .

Se zavedenými materiálovými konstantami lze pomocí následujících vztahů, ve kterých jsou rozepsány jednotlivé prvky matice tuhosti  $C_{ij}$  původně ortotropního materiálu ve stavu rovinného napětí a upraveny pro stav pseudoizotropního chování materiálu v rovině  $y_1 \times y_2$ , tedy

$$C_{11} = \frac{E_{(1)}}{1 - \nu_{(12)}\nu_{(21)}} = \frac{E}{1 - \nu^2} = \frac{E}{2(1 - \nu)} + \frac{E}{2(1 + \nu)} = \kappa + G, \quad (C.13)$$

$$C_{22} = \frac{E_{(2)}}{1 - \nu_{(12)}\nu_{(21)}} = \kappa + G, \qquad (C.14)$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{(21)}E_{(1)}}{1 - \nu_{(12)}\nu_{(21)}} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} = \frac{E}{2(1 - \nu)} - \frac{E}{2(1 + \nu)} = \kappa - G, \quad (C.15)$$

$$C_{21} = \frac{\nu_{(12)}E_{(2)}}{1 - \nu_{(12)}\nu_{(21)}} = \kappa - G, \qquad (C.16)$$

$$C_{33} = G_{(12)},$$
 (C.17)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Díky napjatostním předpokladům postačuje, pokud se materiál chová pseudoizotropně pouze v rovině  $y_1 \times y_2$ . Navíc je uvedený vztah pro objemový modul pružnosti  $\kappa$  platný i v případě izotropního chování materiálu.

vyjádřit matici tuhosti  $C_{ij}$  tohoto materiálu ve stavu rovinného napětí a to v závislosti na nově zavedených konstantách, tedy

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa + G & \kappa - G & 0\\ \kappa - G & \kappa + G & 0\\ 0 & 0 & G_{(12)} \end{bmatrix}.$$
 (C.18)

Z výše uvedené matice tuhosti $C_{ij}$  je možné vyjádřit objemový modul pružnosti $\kappa$ a to následovně

$$\kappa = \frac{C_{11} + C_{12}}{2} = \frac{C_{11} + C_{21}}{2} = \frac{C_{22} + C_{12}}{2} = \frac{C_{22} + C_{21}}{2}.$$
 (C.19)

Pokud je matice tuhosti  $C_{ij}$  získána numericky, pomocí FEM či FETI, je vhodné uvažovat průměr z jednotlivých hodnot vypočtených dle předchozího vztahu, tedy

$$\kappa = \frac{1}{4} \left( \frac{C_{11} + C_{12}}{2} + \frac{C_{11} + C_{21}}{2} + \frac{C_{22} + C_{12}}{2} + \frac{C_{22} + C_{21}}{2} \right)$$
(C.20)

$$= \frac{1}{4} \left( C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22} \right). \tag{C.21}$$

Obdobně lze postupovat v určení materiálové konstanty G, tedy

$$G = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{C_{11} - C_{21}}{2} = \frac{C_{22} - C_{12}}{2} = \frac{C_{22} - C_{21}}{2},$$
 (C.22)

jejíž průměrnou hodnotu získáme takto

$$G = \frac{1}{4} \left( \frac{C_{11} - C_{12}}{2} + \frac{C_{11} - C_{21}}{2} + \frac{C_{22} - C_{12}}{2} + \frac{C_{22} - C_{21}}{2} \right)$$
(C.23)

$$= \frac{1}{4} \left( C_{11} - C_{12} - C_{21} + C_{22} \right). \tag{C.24}$$

# LITERATURA

- Bittnar, Z.; Šejnoha, J.: Numerické metody mechaniky 1. Praha: ČVUT, první vydání, 1992, ISBN 80-01-00855-X.
- Braess, D.: Finite Elements, Theory, fast sovers, and aplications in solide mechanics. Cambridge (UK): Cambridge University Press, 1997, ISBN 0-521-58187-7, 323 s.
- [3] Brdička, M.; Samek, L.; Sopko, B.: Mechanika kontinua. Praha: Academia, třetí vydání, 2005, ISBN 80-200-1344-x, 799 s.
- [4] Dostál, Z.: Box Constrained Quadratic Programming with Proportioning and Projections. SIAM Journal on Optimization, ročník 7, č. 3, 1997: s. 871–887, ISSN 1052-6234, doi:http://dx.doi.org/10.1137/S1052623494266250.
- [5] Dostál, Z.; Horák, D.; Vlach, O.: FETI-based algorithms for modelling of fibrous composite materials with debonding. *Mathematics and Computers in Simulation*, ročník 76, č. 1-3, 2007: s. 57-64, ISSN 0378-4754, doi:10.1016/j.matcom.2007.01.026. URL http://www.sciencedirect.com/science/journal/03784754
- [6] Filipiak, M.: Mesh Generation. Edinburgh: The University of Edinburgh, první vydání, 1996, 42 s.
- [7] Greengard, L.; Helsing, J.: On the numerical evaluation of elastostatic fields in locally isotropic two-dimensional composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, ročník 46, č. 8, 1998: s. 1441-1462, ISSN 0022-5096, doi:10.1016/S0022-5096(97)00041-0.
   URL http://www.sciencedirect.com/science/journal/00225096
- [8] Hashin, Z.; Shtrikman, S.: On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, ročník 10, 1962: s. 335–342.
- [9] Hill, R.: Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, ročník 11, 1963: s. 357–372.
- [10] Koníčková, J.: Programování v jazyce C a C++. Praha: ČVUT, první vydání, 1998, ISBN 80-01-01853-9, 210 s.
- [11] Kruis, J.: Domain Decomposition Methods for Distributed Computing. Kippen, Stirling, Scotland: Saxe-Coburg Publications, druhé vydání, 2006, ISBN 1-874672-23-7, 178 s.

- [12] Kruis, J.; Bittnar, Z.: Reinforcement-matrix Interaction Modelled by FETI Method. In 17th International Conference on Domain Decomposition Methods, Linz: Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics, 2006.
- [13] Kuklík, P.; Blažek, V.; Kufner, V.: Stavební mechanika 40. Praha: ČVUT, první vydání, 2002, ISBN 80-01-02450-4, 226 s.
- [14] Michel, J. C.; Moulinec, H.; Suquet, P.: Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ročník 172, č. 1-4, 1999: s. 109-143, ISSN 0045-7825, doi:10.1016/S0045-7825(98)00227-8.
   URL http://www.sciencedirect.com/science/journal/00457825
- [15] Persson, P.-O.; Strang, G.: A Simple Mesh Generator in MATLAB. SIAM Review, ročník 46, č. 2, 2004: s. 329–345, ISSN 0036-1445 (print) / 1095-7200 (online), doi: 10.1137/S0036144503429121. URL http://link.aip.org/link/?SIR/46/329/1
- [16] Petrtýl, M.: Mechanika kompozitních těles. Praha: ČVUT, první vydání, 1991, ISBN 80-01-00639-5, 57 s.
- [17] Procházka, P.: Základy mechaniky složených materiálů. Praha: Academia, první vydání, 2001, ISBN 80-200-0913-2, 151 s.
- [18] Rektorys, K.: Variační metody v inženýrských problémech a problémech matematické fyziky. Praha: Academia, šesté vydání, 1999, ISBN 80-200-0714-8, 602 s.
- [19] Rektorys, K.: Přehled užité matematiky II. Praha: Prometheus, sedmé vydání, 2000, ISBN 80-7196-181-7, 874 s.
- [20] Vlach, O.: Modelování kompozitů pomocí řešičů založených na dualitě. Diplomová práce, VŠB, Ostrava, 2001.
- [21] Wikipedia: Voigt notation Wikipedia, The Free Encyclopedia. 2007, [Online; accessed 17-December-2007].
   URL http://en.wikipedia.org/wiki/Voigt notation
- [22] Zaplatílek, K.; Doňar, B.: MATLAB tvorba uživatelských aplikací. Praha: BEN technická literatura, první vydání, 2005, ISBN 80-7300-133-0, 216 s.
- [23] Zaplatílek, K.; Doňar, B.: MATLAB pro začátečníky. Praha: BEN technická literatura, druhé vydání, 2005, ISBN 80-7300-175-6, 152 s.
- [24] Šejnoha, J.; Bittnarová, J.: Pružnost a pevnost 10. Praha: ČVUT, druhé vydání, 2003, ISBN 80-01-02742-2, 163 s.

- [25] Šejnoha, J.; Bittnarová, J.: Pružnost a pevnost 20. Praha: ČVUT, druhé vydání, 2003, ISBN 80-01-02709-0, 144 s.
- [26] Šejnoha, M.; Srinivas, M.: Modeling of Effective Properties of Composites with Interfacial Microcracks Using PHA Model. *Building Research Journal*, ročník 46, č. 2, 1998: s. 99–108, ISSN RC-MK-7094/MIC 49624.
   URL www.ustarch.sav.sk