

• obecné centrální osy ( $S_y = S_z = 0$ )

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z \cdot I_y + M_y \cdot D_{yz}}{I_y \cdot I_z - D_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y \cdot I_z + M_z \cdot D_{yz}}{I_y \cdot I_z - D_{yz}^2} \cdot z$$

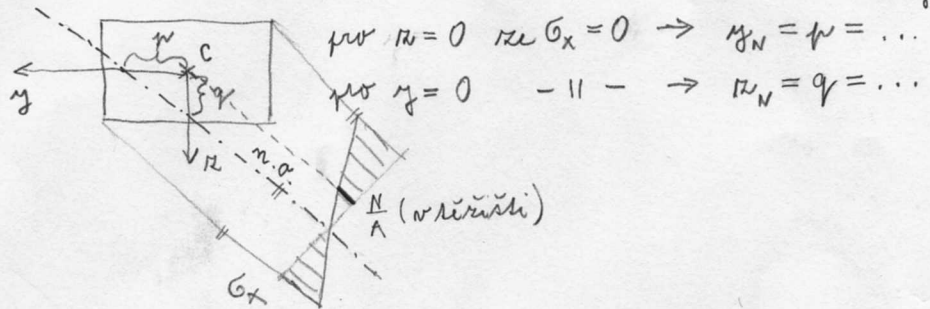
• hlavní centrální osy ( $D_{yz} = S_y = S_z = 0$ )

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

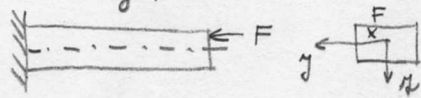
• neutrální osa ( $\sigma_x = 0$ ) - obecná poloha

- neprochází těžištěm ( $N \neq 0$ )

- hledají se úseky, které vyříná n. osa na osách souřadnic  $y_N, z_N$



• speciální případ - excentricky působící osová síla  $F = -N_x$  (tah), resp  $F = N_x$  (tlak)



$y_c, z_c \dots$  souřadnice tzv. tlakového centra F

→ pro F tlakovou ( $N_x < 0$ ):  $N_x = -F$ ,  $M_y = -F \cdot z_c$ ,  $M_z = F \cdot y_c$

→ neutrální osa v hlavních souřadnicích

$$(\sigma_x = 0): -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot y_c}{I_z} \cdot y + \frac{-F \cdot z_c}{I_y} \cdot z = 0 \quad \left( i_y^2 = \frac{I_y}{A}, i_z^2 = \frac{I_z}{A} \right)$$

$$1 + \frac{y_c}{i_z^2} \cdot y + \frac{z_c}{i_y^2} \cdot z = 0$$

• pro  $z = 0$

$$y_N = r = -\frac{i_z^2}{y_c}$$

• pro  $y = 0$

$$z_N = q = -\frac{i_y^2}{z_c}$$

• jádro průřezu - část průřezu, v níž musí působit tlaková (tlaková) osová síla F, aby normálové napětí  $\sigma_x$  v celém průřezu bylo tlakové (tlakové)

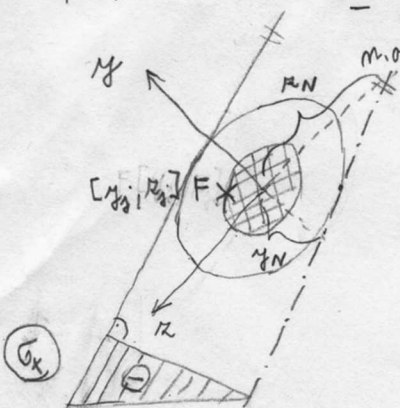
F - tlak

- obsahuje vždy těžiště

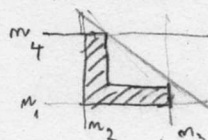
souřadnice jádrového bodu

$$y_j = -\frac{i_z^2}{y_N}$$

$$z_j = -\frac{i_y^2}{z_N}$$



postup: pokládáme neutrální osy jako obálku průřezu, ke každé poloze neutrální osy najdeme úseky  $y_N, z_N$  a ke vzorci určíme souřadnice jádrového bodu  $y_j, z_j$

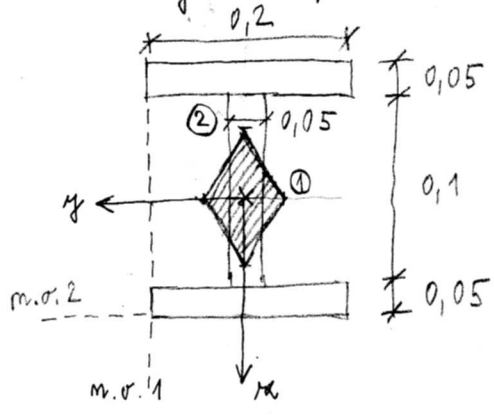


obálka - musí být konvexní útvar

- nemá jediný průřez

je-li průřez mnohoúhelníkem, je mnohoúhelníkem i jádrový úsek.

① úhled jádro průřezu



$$A = 0,025 \text{ m}^2$$

$$I_y = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_z = 0,6771 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 0,0696 \text{ m}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 0,052 \text{ m}$$

- poloha jádrových bodů - pro neutrální osu 1:

$$y_{j1} = -\frac{i_z^2}{y_N} = -\frac{0,052^2}{0,1} = -0,027 \text{ m}$$

$$z_{j1} = -\frac{i_y^2}{z_N} = -\frac{0,0696^2}{\infty} = 0 \text{ m}$$

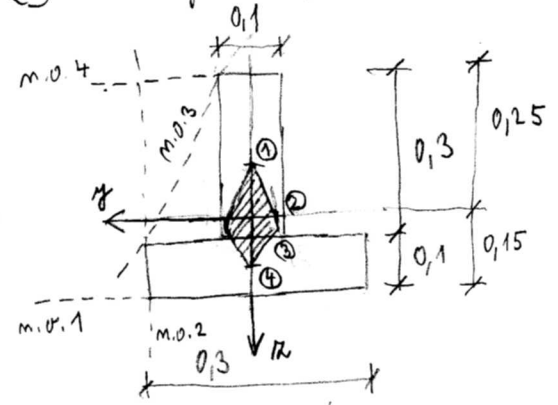
- pro neutrální osu 2:

$$y_{j2} = -\frac{i_z^2}{y_N} = -\frac{0,052^2}{\infty} = 0 \text{ m}$$

$$z_{j2} = -\frac{i_y^2}{z_N} = -\frac{0,0696^2}{0,1} = -0,048 \text{ m}$$

→ ostatní body se symetrie

② úhled jádro průřezu



$$A = 0,06 \text{ m}^2$$

$$I_y = 0,00085 \text{ m}^4$$

$$I_z = 0,00025 \text{ m}^4$$

$$i_y = \frac{I_y}{A} = \frac{0,00085}{0,06} = 0,01417 \text{ m}^2$$

$$i_z = \frac{I_z}{A} = \frac{0,00025}{0,06} = 0,00417 \text{ m}^2$$

- poloha jádrových bodů pro jednotlivé neutrální osy

$$y_{ji} = -\frac{i_z^2}{y_N} \quad z_{ji} = -\frac{i_y^2}{z_N}$$

①  $y_{j1} = -\frac{0,00417}{\infty} = 0 \text{ m}$   $z_{j1} = -\frac{0,01417}{0,15} = -0,0945 \text{ m}$

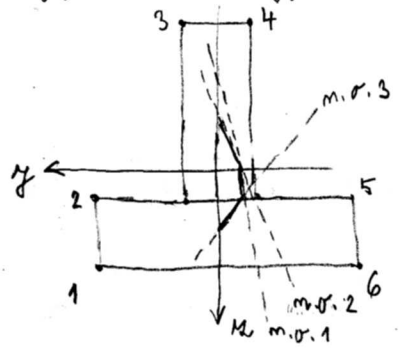
②  $y_{j2} = -\frac{0,00417}{0,15} = -0,0278 \text{ m}$   $z_{j2} = -\frac{0,01417}{\infty} = 0 \text{ m}$

③  $y_{j3} = -\frac{0,00417}{0,133} = -0,0313 \text{ m}$   $z_{j3} = -\frac{0,01417}{(-0,4)} = 0,0354 \text{ m}$

④  $y_{j4} = -\frac{0,00417}{\infty} = 0 \text{ m}$   $z_{j4} = -\frac{0,01417}{(-0,25)} = 0,0567 \text{ m}$

→ ostatní body se symetrie

alternativní výpočet:



do vrcholů průřezu umístíme sílu, hledáme úseky, které vyplývají n.o.

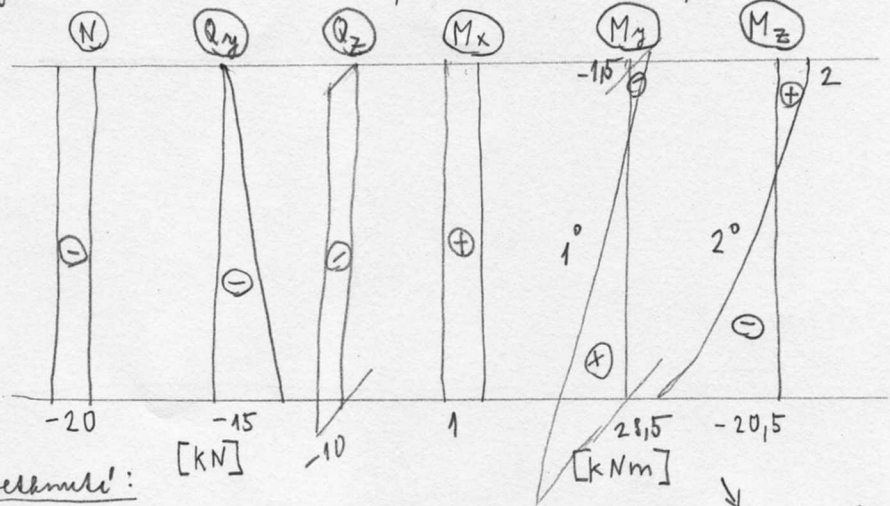
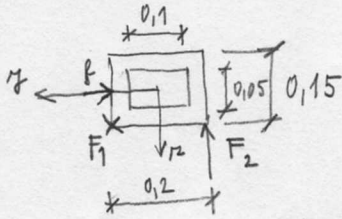
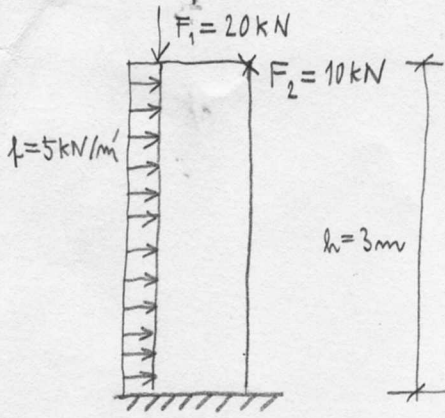
$$y_N = -\frac{i_z^2}{y_j}$$

$$z_N = -\frac{i_y^2}{z_j}$$

bod	$y_j$	$z_j$	$y_N$	$z_N$
1	0,15	0,15	-0,0278	-0,0945
2	0,15	0,05	-0,0278	-0,2834
3	0,05	-0,25	-0,0834	0,0567

→ JÁDRO VYJDE STEJNÉ - osami symetrie

③ Určete průběh  $\sigma_x$  v nejvíce namáhaném průřezu sloupu



velikosti:

$$N = -20 \text{ kN}$$

$$M_y = -20 \cdot 0,075 + 10 \cdot 3 = 28,5 \text{ kNm}$$

$$M_z = 20 \cdot 0,1 - 5 \cdot 3 \cdot 1,5 = -20,5 \text{ kNm}$$

↓  
podrobný výpočet  
viz doplněk

průřezové charakteristiky

$$A = 0,2 \cdot 0,15 - 0,1 \cdot 0,05 = 0,025 \text{ m}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,15^3 - \frac{1}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,05^3 = 5,521 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 0,15 \cdot 0,2^3 - \frac{1}{12} \cdot 0,05 \cdot 0,1^3 = 9,583 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

normálové napětí

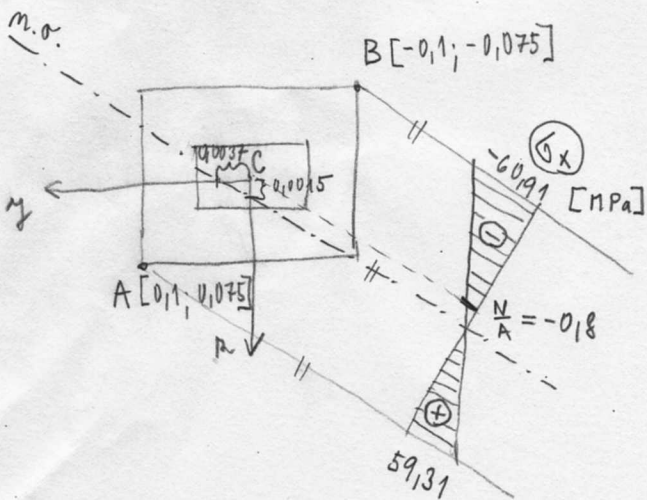
$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \frac{-0,02}{0,025} - \frac{(-0,0205)}{9,583 \cdot 10^{-5}} \cdot y + \frac{0,0285}{5,521 \cdot 10^{-5}} \cdot z$$

$$\sigma_x = -0,8 + 213,92 y + 516,21 z$$

• nulová osa  $\sigma_x = 0$

$$y = 0 \quad 0 = -0,8 + 516,21 \cdot z_N \rightarrow z_N = 0,0015 \text{ m}$$

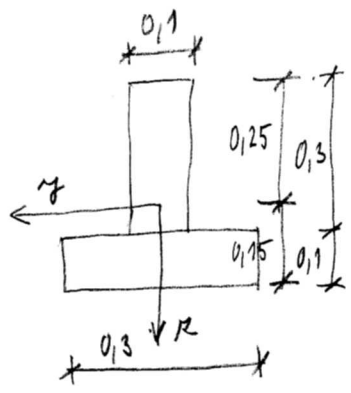
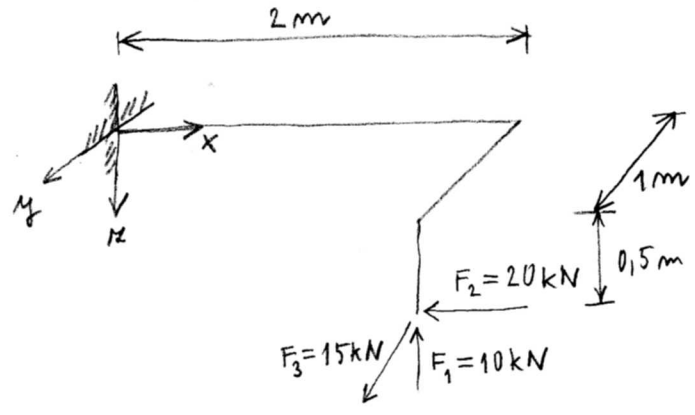
$$z = 0 \quad 0 = -0,8 + 213,92 y_N \rightarrow y_N = 0,0037 \text{ m}$$



$$\sigma_x^A = -0,8 + 213,92 \cdot 0,1 + 516,21 \cdot 0,075 = 59,31 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^B = -0,8 + 213,92 \cdot (-0,1) + 516,21 \cdot (-0,075) = -60,91 \text{ MPa}$$

④ Věte průběh  $\sigma_x$  ve velkém průřezu lomené kowedy.



$A = 0,06 \text{ m}^2$   
 $I_y = 0,00085 \text{ m}^4$   
 $I_z = 0,00025 \text{ m}^4$

velikosti

$N = -20 \text{ kN}$   
 $M_y = 10 \cdot 2 - 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ kNm}$   
 $M_z = 20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 = 50 \text{ kNm}$

normálové napětí

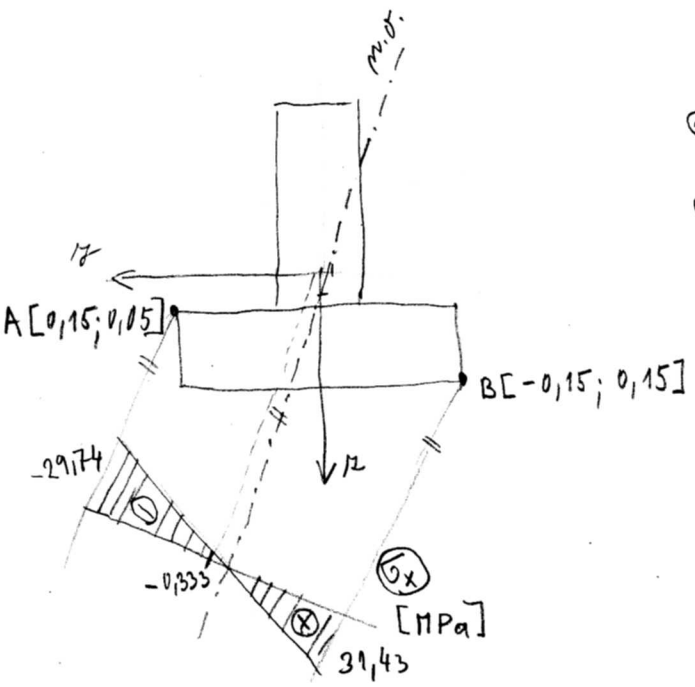
$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \frac{-0,02}{0,06} - \frac{0,05}{0,00025} \cdot y + \frac{0,01}{0,00085} \cdot z$$

$$\sigma_x = -0,333 - 200y + 11,765z$$

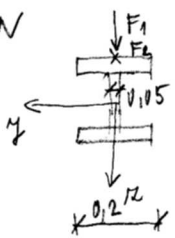
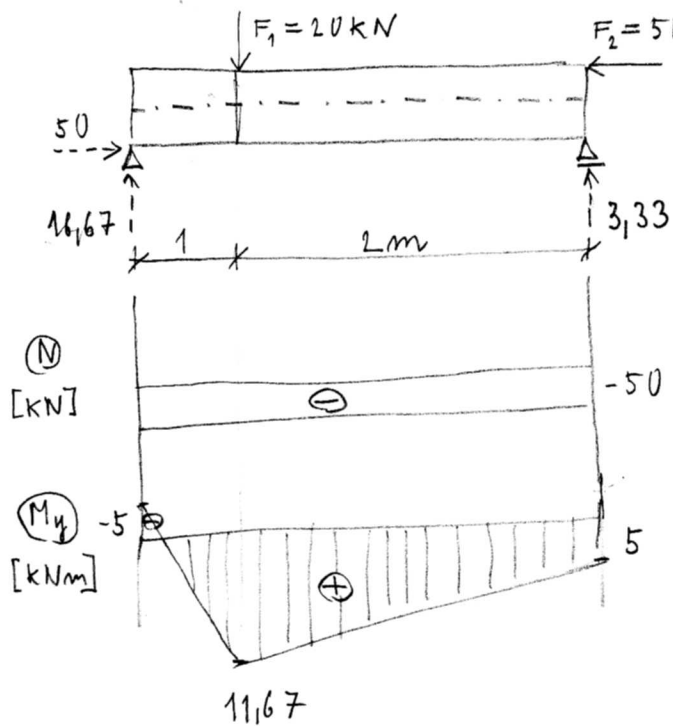
• neutrální osa ( $\sigma_x = 0$ )

$y = 0 \quad 0 = -0,333 + 11,765 \cdot z_N \rightarrow z_N = 0,0283 \text{ m}$   
 $z = 0 \quad 0 = -0,333 - 200 \cdot y_N \rightarrow y_N = -0,00166 \text{ m}$

$\sigma_x^A = -0,333 - 200 \cdot 0,15 + 11,765 \cdot 0,05 = -29,74 \text{ MPa}$   
 $\sigma_x^B = -0,333 - 200(-0,15) + 11,765 \cdot 0,15 = 31,43 \text{ MPa}$



⑤ Všechny příklady  $\sigma_x$  v nejvíce namáhaném průřezu nosníku.

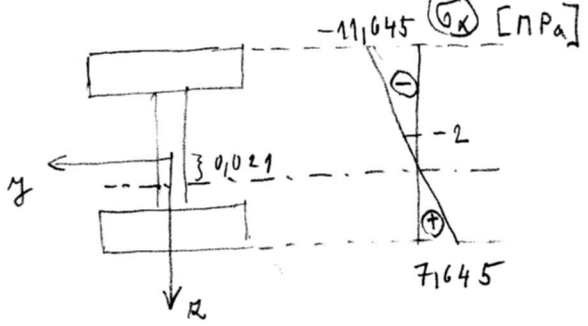


$A = 0,025 \text{ m}^2$   
 $I_y = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

$N = -50 \text{ kN}$   
 $M_y = 11,67 \text{ kNm}$   
 $M_x = 0$

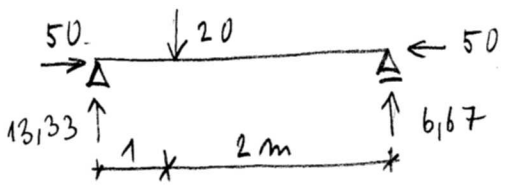
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \frac{-50}{0,025} + \frac{0,01167}{1,21 \cdot 10^{-4}} \cdot z = -2 + 96,45 z$$

neutrální osa  $\sigma_x = 0 \rightarrow 0 = -2 + 96,45 z_N \rightarrow z_N = 0,021 \text{ m}$



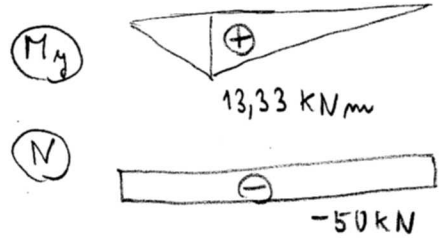
$\sigma_x^d = -2 + 96,45 \cdot 0,1 = 7,645 \text{ MPa}$   
 $\sigma_x^k = -2 + 96,45 \cdot (-0,1) = -11,645 \text{ MPa}$

Porovnání se zjednodušeným modelem



$$\sigma_x = \frac{-50}{0,025} + \frac{0,01333}{1,21 \cdot 10^{-4}} z = -2 + 110,17 z$$

neutrální osa  $0 = -2 + 110,17 z \rightarrow z_N = 0,018 \text{ m}$



$\sigma_x^d = -2 + 110,17 \cdot 0,1 = 9,017 \text{ MPa}$   
 $\sigma_x^k = -2 + 110,17 \cdot (-0,1) = -13,017 \text{ MPa}$

