

Diferenciální rovnice ohybové čáry

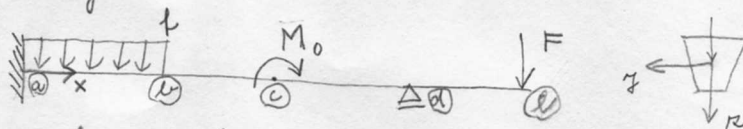
POZNÁMKA

$$\int (x-a)^m dx = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + C$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{M_y}{EI_y} \xrightarrow[\text{zápis}]{\text{zjednodušený}} w'' = - \frac{M}{EI} \quad *$$

- prut realizován pouze silami působícími v rovině xz
- y, z jsou hlavní centrální osy

Postup řešení:



- 1) Nepojité realizování \rightarrow rozdělíme nosník na intervaly se kalibrováním po částech spojilym
- 2) Vyjádříme průběh momentu M v závislosti na x . Vypočítáme moment setrvačnosti I na každém intervalu (pokud se liší).
- 3) Dvojitou integrací diferenciální rovnice ohybové čáry * získáme funkci průhybu w v závislosti na x . Řešení přísluší dvě integrační konstanty v každém intervalu.
- 4) Tyto integrační konstanty vypočítáme pomocí podmínek obrazových, p. spojitosti či p. symetrie:

a) obrazové podmínky

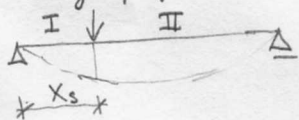
- na prostě podepřeném obrazi je průhyb nulový

$$w(x_p) = 0 \quad \triangle \quad \triangle \quad x_p \dots \text{souřadnice } x \text{ v místě podepření}$$

- na vklamaném obrazi je nulový průhyb i položení

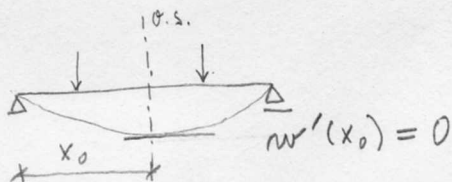
$$w(x_v) = 0, \quad (-) \frac{dw}{dx}(x_v) = 0 \quad (w'(x_v) = 0) \quad \nabla \quad x_v \dots \text{souřadnice } x \text{ v místě vklamání}$$

b) podmínky spojitosti



- stejný průhyb $w_I(x_s) = w_{II}(x_s)$
- stejné položení $w'_I(x_s) = w'_{II}(x_s)$

c) podmínky symetrie

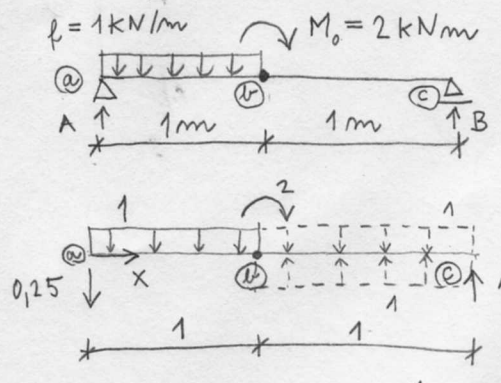


$$w'(x_0) = 0$$

Chebšchův způsob integrace - pouze pro nosníky s ohybovou tuhostí $EI = \text{konst.}$

- 1) ohybový moment vyjádříme v každém následujícím intervalu jako součet momentů z předcházejících intervalů a další funkce \rightarrow u spojitého kalibrování přidáváme fikční kalibrování
- 2) rázový typ $(x-a)^m$ integrujeme v uzavřeném tvaru (neroznášovat) osamělý moment integrujeme přes $d(x-a)$
- 3) x volit jednoduše rovnočetný intervaly, jako

① Použijím Clebschovy metody více průhyb uprostřed rozpětí.



reakce: $\sum a: -1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 2 + B \cdot 2 = 0 \rightarrow B = 1,125 \text{ kN}$
 $\sum c: -2 + 1 \cdot 1 \cdot 1,5 - A \cdot 2 = 0 \rightarrow A = -0,25 \text{ kN}$

$w'' = -\frac{M}{EI} \rightarrow EI w'' = -M$

interval $\langle a, b \rangle$

$M = -0,25x - \frac{x^2}{2}$

$EI w'' = 0,25x + \frac{x^2}{2}$
 $EI w' = 0,25 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + C_1$
 $EI w = 0,25 \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot x + C_2$

okrajové podmínky

- 1) $x = 0 \dots w_{ab} = 0$
- 2) $x = 2 \dots w_{bc} = 0$

$\rightarrow C_2 = 0$

$0 = 0,25 \cdot \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{24} - \frac{(2-1)^4}{24} - 2 \frac{(2-1)^2}{2} + C_1 \cdot 2 + C_2 \rightarrow 0$

$C_1 = \frac{1}{48} = 0,0208$

průhyb uprostřed

$w_x = w_{ab}(x=1) = w_{bc}(x=1)$

$EI \cdot w_x = 0,25 \cdot \frac{1^3}{6} + \frac{1^4}{24} + \frac{1}{48} \cdot 1$

$w_x = \frac{5}{48EI}$

kontrola: podmínky spojitosti

$x = 1 \dots w'_{ab} = w'_{bc} \dots$ stejná polohění

$\frac{1}{EI} (0,25 \cdot \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{6} + C_1) = \frac{1}{EI} (0,25 \cdot \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{6} - \frac{0^3}{6} - 2 \cdot 0 + C_1)$

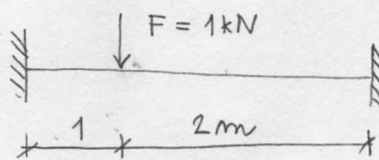
$C_1 = C_1$

$x = 1 \dots w_{ab} = w_{bc} \dots$ stejné průhyby

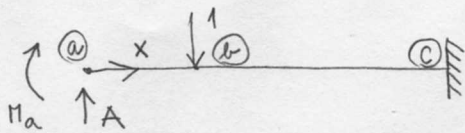
$\frac{1}{EI} (0,25 \cdot \frac{1^3}{6} + \frac{1^4}{24} + C_1 + C_2) = \frac{1}{EI} (0,25 \cdot \frac{1^3}{6} + \frac{1^4}{24} - \frac{0^4}{24} - 2 \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 + C_2)$

$C_1 + C_2 = C_1 + C_2 \rightarrow C_2 = C_2$

② Pomocí diferenciálních rovnic dýchové čáry určete průběhy vnitřních sil.



3x stat. neurčitá lež, vzhledem k nulovému vodorovnému rozložení a absenci teplotního rozložení je $N_x = 0 \rightarrow$ 2x staticky neurčitá lež



základní soustava

\rightarrow 2 neznámé A, M_a

\rightarrow 2 přecházející podmínky $w_a = 0, w'_a = 0$

• vyjádření průhybu a polohění z rovnice $w'' = -\frac{M}{EI}$

< a; b >

$$M = Ax + M_a$$

$$EI w'' = -Ax - M_a$$

$$EI w' = -A \frac{x^2}{2} - M_a x + C_1$$

$$EI w = -A \frac{x^3}{6} - M_a \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

< b; c >

$$M = Ax + M_a - 1 \cdot (x-1)$$

$$EI w'' = -Ax - M_a + (x-1)$$

$$EI w' = -A \frac{x^2}{2} - M_a x + \frac{(x-1)^2}{2} + C_1$$

$$EI w = -A \frac{x^3}{6} - M_a \frac{x^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Okrajové a přecházející podmínky

• $x = 0 \dots w'_a = 0$ (polohění v a)

• $x = 0 \dots w_a = 0$ (průhyb v a)

• $x = 3 \dots w'_c = 0$ (polohění v c)

• $x = 3 \dots w_c = 0$ (průhyb v c)

$$0 = C_1$$

$$0 = C_2$$

$$0 = -A \cdot \frac{3^2}{2} - M_a \cdot 3 + \frac{2^2}{2} + C_1$$

$$0 = -A \cdot \frac{3^3}{6} - M_a \cdot \frac{3^2}{2} + \frac{2^3}{6} + C_1 \cdot 3 + C_2$$

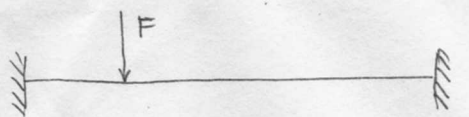
$$4,5A + 3M_a = 2$$

$$4,5A + 4,5M_a = \frac{4}{3}$$

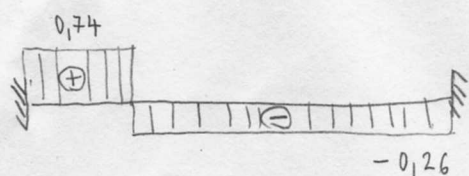
$$-1,5M_a = -\frac{2}{3}$$

$$M_a = -0,44 \text{ kNm}$$

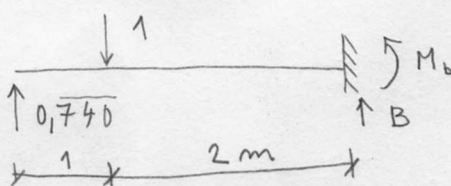
$$A = 0,740 \text{ kN}$$



Q_z
[kN]

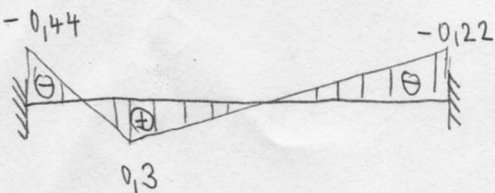


0,44



$$B = 0,26 \text{ kN}$$

M_y
[kNm]



$$M_b = -1 \cdot 2 + 0,740 \cdot 3 - 0,44$$

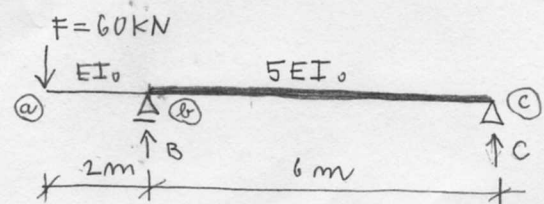
$$M_b = -0,22 \text{ kNm}$$

$$M_F = 0,740 \cdot 1 - 0,44$$

$$M_F = 0,3 \text{ kNm}$$

③ Vypočítejte průhyb přívěšného konce nosníku.

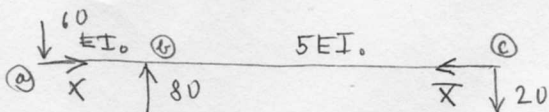
$EI_0 = \text{konstantní}$



reakce:

$$\sum \bar{x} : 60 \cdot 2 + C \cdot 6 = 0 \rightarrow C = -20 \text{ kN}$$

$$\sum \bar{c} : 60 \cdot 8 - B \cdot 6 = 0 \rightarrow B = 80 \text{ kN}$$



$$w'' = \frac{-M}{EI} \rightarrow EI \cdot w'' = -M$$

$\langle a; b \rangle$

$$M = -60x$$

$$EI_0 \cdot w'' = 60x$$

$$EI_0 \cdot w' = 60 \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$EI_0 \cdot w = 60 \cdot \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

$\langle c; b \rangle$

$$M = -20 \cdot \bar{x}$$

$$5EI_0 \cdot w'' = 20 \bar{x}$$

$$5EI_0 \cdot w' = 20 \frac{\bar{x}^2}{2} + c_3$$

$$5EI_0 \cdot w = 20 \cdot \frac{\bar{x}^3}{6} + c_3 \bar{x} + c_4$$

okrajové podmínky a podmínky spojitosti

$$1) x=2 \dots w_{av} = 0 \rightarrow 0 = 60 \cdot \frac{2^3}{6} + c_1 \cdot 2 + c_2$$

$$2) \bar{x}=0 \dots w_{cv} = 0 \rightarrow 0 = 20 \cdot \frac{0^3}{6} + c_3 \cdot 0 + c_4 \rightarrow \underline{c_4 = 0}$$

$$3) w'_{av}(x=2) = -w'_{cv}(\bar{x}=6) \dots ! (dx = -d\bar{x})$$

$$\frac{1}{EI_0} (60 \cdot \frac{2^2}{2} + c_1) = \frac{-1}{5EI_0} (20 \cdot \frac{6^2}{2} + c_3)$$

$$4) (w_{av}(x=2) =) w_{cv}(\bar{x}=6) = 0$$

$$0 = 20 \cdot \frac{6^3}{6} + c_3 \cdot 6 + c_4 \rightarrow \underline{c_3 = -120}$$

upravenou rovnici: 3) $120 + c_1 = -\frac{1}{5} (360 - 120) \rightarrow \underline{c_1 = -168}$

1) $80 + (-168) \cdot 2 + c_2 = 0 \rightarrow \underline{c_2 = 256}$

průhyb přívěšného konce:

$$w_{av}(x=0) = (60 \cdot \frac{0^3}{6} - 168 \cdot 0 + 256) \cdot \frac{1}{EI_0}$$

$$w_{av}(x=0) = \underline{\underline{\frac{256}{EI_0}}}$$

Poznámka: jednotky rovinné $EI_0 \rightarrow$ je-li kN, kNm , délky m
pak $E [kPa], I_0 [m^4]$