- vnitřní síly – nenulový kroutící moment $M_x = T \neq 0 \; (M_x = \iint_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z)\, dA)$
- při volném kroucení vznikají pouze smyková napětí τ_{xy} a τ_{xz}
  (→ výsledné napětí $\tau_x = \tau_{xs} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$
  • má směr tečny k smykové čáře)
- výpočet deformace

$$\vartheta(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{M_x}{G I_k}$$ diferenciální rovnice volného kroucení

ϑ … relativní úhel zkroucení [–]

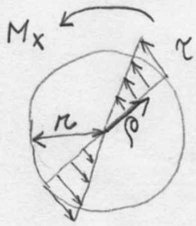
φ … úhel pootočení průřezu kolem osy x [rad]

I_k … moment tuhosti průřezu ve volném kroucení [m^4]

→ používají se přibližné metody výpočtu

- smyková napětí τ_{xs} a momenty tuhosti v kroucení I_k pro různé průřezy

ⓐ kruhový průřez



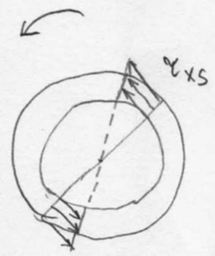
$$\tau_{xs} = \frac{M_x}{I_k} \cdot \rho$$

ρ … vzdálenost od středu

$$\rightarrow \max \tau_{xs} = \frac{M_x}{I_k} \cdot r$$

$$I_k = I_p = I_y + I_z$$

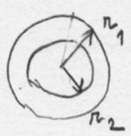
I_p … polární moment setrvačnosti



kruh

$$I_k = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

mezikruží



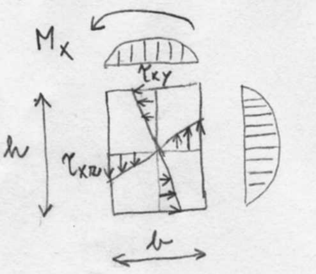
$$I_k = \frac{\pi r_1^4}{2} - \frac{\pi r_2^4}{2}$$

ⓑ nekruhový masivní průřez

Saint Venantův vzorec – pro obecný průřez

$$I_k \doteq \frac{A^4}{40 I_p} \qquad I_p = I_y + I_z, \quad A \ldots \text{plocha průřezu}$$

obdélníkový průřez – zpřesnění (metoda smykových čar)



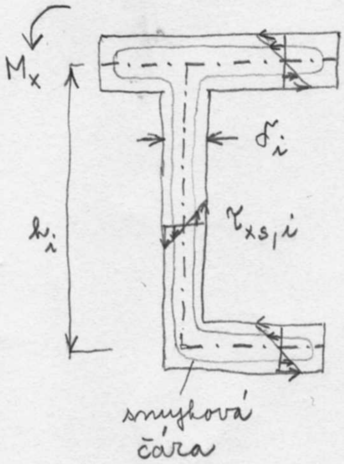
$$\max \tau_{xz} \doteq \frac{9}{2} \frac{M_x}{b^2 h}$$

$$\max \tau_{xy} \doteq \frac{9}{2} \frac{M_x}{b h^2}$$

$$I_k \doteq \frac{A^4}{36 I_p} \qquad I_p = I_y + I_z = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{1}{12} h \cdot b^3 = \frac{1}{12}(b h^3 + h b^3)$$

ⓒ tenkostěnné průřezy otevřené

(rozhodující složka – kroucení vázané → není probíráno v PRPA)



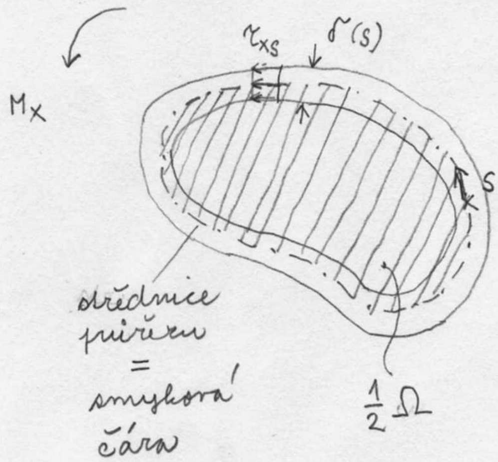
- smykové napětí v i-té větvi

$$\max \tau_{xs,i} = \frac{M_K}{I_K} \cdot \delta_i$$

$$I_K \doteq \frac{1}{3} \sum_i h_i \delta_i^3$$

- předpoklad: výsledné smykové napětí τ_{xs} má po tloušťce průřezu lineární průběh

ⓓ tenkostěnné průřezy uzavřené



- předpoklad: výsledné smykové napětí τ_{xs} má po tloušťce průřezu konstantní hodnotu
- smykový tok t se podél střednice nemění

$$t = \tau_{xs} \cdot \delta(s) = \text{konst.}$$

$\delta(s)$ ... tloušťka stěny prutu

- 1. Bredtův vzorec

$$M_x = t \cdot \Omega$$

Ω ... dvojnásobek plochy opsané střednicí průřezu

$$\tau_{xs} = \frac{M_x}{\delta(s) \cdot \Omega}$$

- 2. Bredtův vzorec

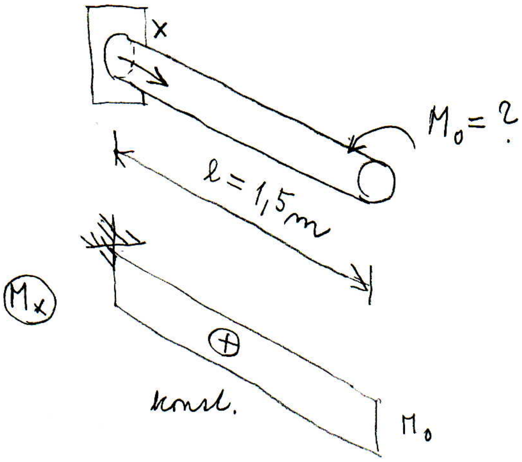
$$I_K = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}$$

(je-li tloušťka δ_i konstantní na jednotlivých částech průřezu, pak platí

$$\oint \frac{ds}{\delta(s)} = \sum_i \frac{l_i}{\delta_i}$$

l_i ... délka části průřezu s konstantní tloušťkou δ_i

(1) Jak velkým kroutícím momentem lze namáhat ocelovou tyč, jestliže maximální napětí nesmí překročit hodnotu $\overline{\tau} = 50\,MPa$ a maximální pootočení nesmí být větší než $\overline{\varphi} = 4°$. $G = 0{,}8 \cdot 10^5\,MPa$



a) podmínka maximálního napětí: $\max \tau \leq \overline{\tau}$

$$\max \tau_{xs} = \frac{M_x}{I_k} \cdot r \leq \overline{\tau} \qquad I_k = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$M_x \leq \frac{\overline{\tau} \cdot I_k}{r} = \frac{\overline{\tau} \cdot \pi \cdot r^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{r} \cdot 2} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot 0{,}015^3}{2}$$

$$\underline{M_x \leq 0{,}265\,kNm}$$

b) podmínka maximálního pootočení: $\max \varphi \leq \overline{\varphi}$ $\qquad \overline{\varphi} = \frac{4}{180} \cdot \pi = 0{,}0698\,rad$!

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{M_x}{G I_k} \leftarrow \text{KONST}$$

integrací

$$\varphi(x) = \frac{M_x}{G I_k} \cdot x + C$$

okrajová podmínka – ve vetknutí nulové pootočení $\varphi(x=0)=0$

$$\varphi(x=0) = \frac{M_x}{G I_k} \cdot 0 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = 0$$

maximální pootočení na volném konci $x = l$

$$\max \varphi = \varphi(x=l) = \frac{M_x}{G I_k} \cdot l \leq \overline{\varphi}$$

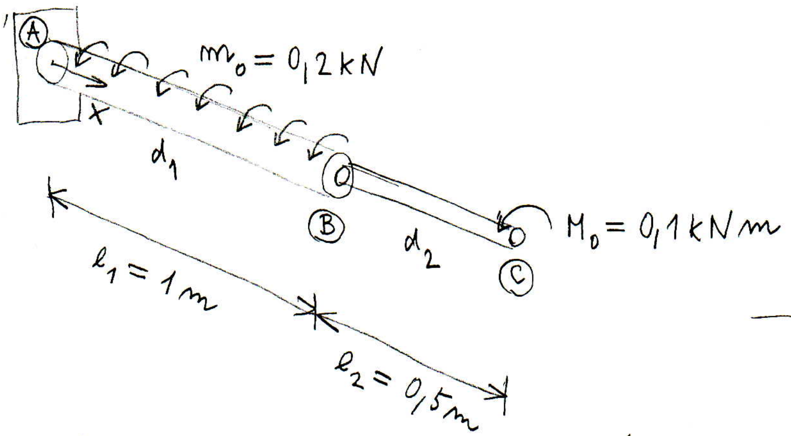
$\left(\frac{G I_k}{l} \ldots \text{tuhost prutu v kroucení}\right)$

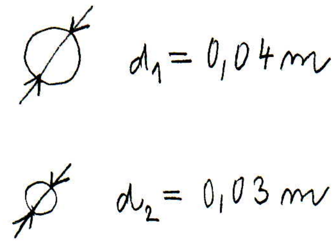
$$M_x \leq \frac{\overline{\varphi}\, G I_k}{l} = \overline{\varphi} \cdot G \cdot \frac{\pi r^4}{2 \cdot l} = 0{,}0698 \cdot 0{,}8 \cdot 10^8 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}015^4}{2 \cdot 1{,}5}$$

$$\underline{M_x \leq 0{,}296\,kNm}$$

Rozhoduje podmínka max. napětí: $\underline{\underline{M_0 = M_x \leq 0{,}265\,kNm}}$

② Určete maximální smykové napětí v prutu a pootočení volného konce. Vykreslete průběhy M_x a φ. $G = 0{,}8 \cdot 10^{8}\,\mathrm{kPa}$



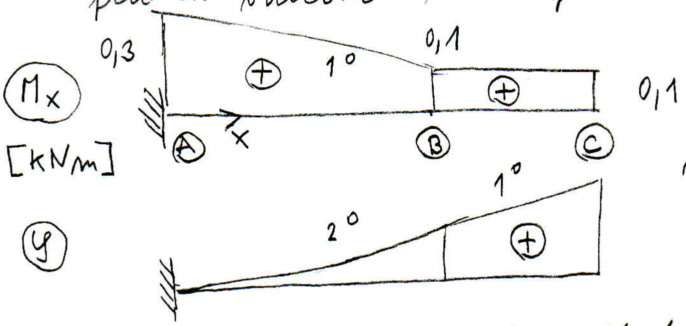


$$I_K = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$I_K^{①} = \frac{\pi \cdot 0{,}02^4}{2} = 25{,}1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^4$$

$$I_K^{②} = \frac{\pi \cdot 0{,}015^4}{2} = 7{,}95 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^4$$

- průběh vnitřních sil a pootočení



$$\max M_x^{AB} = 0{,}3\,\mathrm{kNm}$$

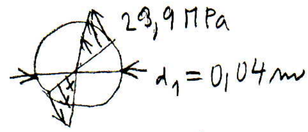
$$\max M_x^{BC} = 0{,}1\,\mathrm{kNm}$$

- maximální smykové napětí $\quad \max \tau_{xs} = \frac{M_x}{I_K} \cdot r$

$$\max \tau_{xs}^{AB} = \frac{0{,}3}{25{,}1 \cdot 10^{-8}} \cdot 0{,}02 = 23\,904\,\mathrm{kPa}$$

$$\max \tau_{xs}^{BC} = \frac{0{,}1}{7{,}95 \cdot 10^{-8}} \cdot 0{,}015 = 18\,868\,\mathrm{kPa}$$

$$\Big\} \quad \underline{\underline{\max \tau_{xs} = 23{,}9\,\mathrm{MPa}}}$$



- pootočení volného konce $\quad \varphi(x) = \int \frac{M_x}{G I_K} \cdot dx$

<AB>

$M_x = 0{,}3 - 0{,}2 \cdot x$

$G I_K^{①} \varphi' = 0{,}3 - 0{,}2x$

$G I_K^{①} \varphi = 0{,}3 \cdot x - 0{,}2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_1$

<BC>

$M_x = 0{,}1$

$G I_K^{②} \varphi' = 0{,}1$

$G I_K^{②} \varphi = 0{,}1x + c_2$

- okrajová podmínka ve vetknutí

$$\varphi^{AB}(x=0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$$

- podmínka spojitosti $\quad \varphi^{AB}(x = 1\,\mathrm{m}) = \varphi^{BC}(x = 1\,\mathrm{m})$

$$\frac{1}{\cancel{G} I_K^{①}} \Big(\underbrace{0{,}3 \cdot 1 - 0{,}2 \cdot \frac{1^2}{2}} + \cancelto{0}{c_1} \Big) = \frac{1}{\cancel{G} I_K^{②}} \left(0{,}1 \cdot 1 + c_2 \right)$$

$$c_2 = \frac{I_K^{②}}{I_K^{①}} (0{,}2) - 0{,}1 = \frac{7{,}95 \cdot 10^{-8}}{25{,}1 \cdot 10^{-8}} \cdot 0{,}2 - 0{,}1 = -0{,}037$$

- pootočení konce $x = 1{,}5\,\mathrm{m}$

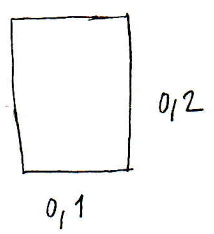
$$\varphi^{BC} = \frac{1}{G I_K^{②}} (0{,}1 \cdot 1{,}5 - 0{,}037) = \frac{1}{0{,}8 \cdot 10^8 \cdot 7{,}95 \cdot 10^{-8}} (0{,}15 - 0{,}037) = \underline{\underline{0{,}0178\,\mathrm{rad}}}$$

$$(1{,}02°)$$

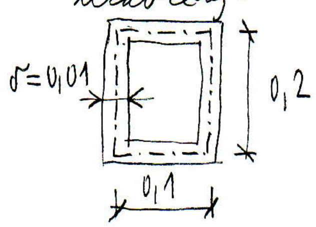
3 Určete maximální smykové napětí od volného kroucení a moment tuhosti ve volném kroucení pro tři typy průřezů

$M_x = 10\ \mathrm{kNm}$

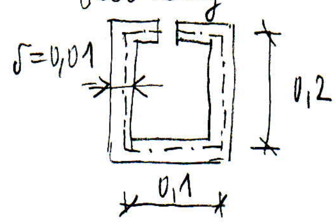
a) masivní



b) tenkostěnný uzavřený

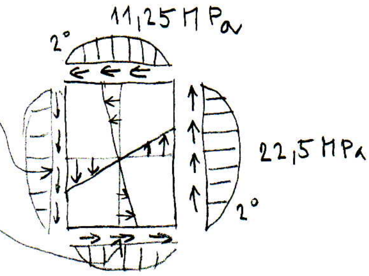


c) tenkostěnný otevřený



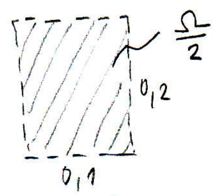
a)
$$\max \tau_{xz} = \frac{9}{2}\,\frac{M_x}{b^2 h} = \frac{9 \cdot 10}{2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}2} = \underline{22500\ \mathrm{kPa}}$$

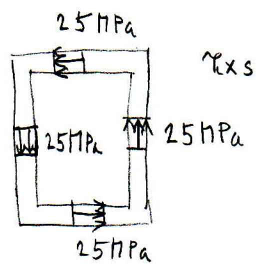
$$\max \tau_{xy} = \frac{9}{2}\,\frac{M_x}{b h^2} = \frac{9 \cdot 10}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2^2} = 11250\ \mathrm{kPa}$$



$$I_K = \frac{A^4}{36 \cdot I_p} = \frac{A^4}{36 \cdot \frac{1}{12} \cdot (b h^3 + h b^3)} = \frac{(0{,}1 \cdot 0{,}2)^4}{3(0{,}1 \cdot 0{,}2^3 + 0{,}2 \cdot 0{,}1^3)} = \underline{5{,}33 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^4}$$

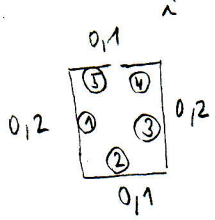
b)
$$\tau_{xs} = \frac{M_x}{\delta \cdot \Omega} = \frac{10}{0{,}01 \cdot (2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2)} = \underline{25000\ \mathrm{kPa}}$$



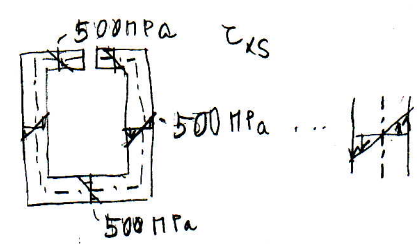


$$I_K = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{(2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2)^2}{\frac{0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2}{0{,}01}} = \frac{(0{,}04)^2}{\frac{0{,}6}{0{,}01}} = \underline{2{,}66 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^4}$$

c)
$$I_K = \frac{1}{3} \sum_i h_i \underbrace{\delta_i^3}_{\text{KONST}} = \frac{1}{3}(2 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2) \cdot 0{,}01^3 = \underline{2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^4}$$



$$\max \tau_{xs,i} = \frac{M_K}{I_K} \cdot \delta_i = \frac{10}{2 \cdot 10^{-7}} \cdot 0{,}01 = \underline{500\,000\ \mathrm{kPa}}$$



Závěr: maximální smyková napětí τ_{xs} v masivním a uzavřeném průřezu jsou stejného řádu, ale v otevřeném průřezu je smykové napětí o řád vyšší.