Přednáška č. 3

Dvojrozměrné ustálené vedení tepla

Obsah přednášky

- Motivace
- Diferenciální rovnice problému
  - Gradient teploty
  - Fourierův zákon
  - Bilance energie
  - Diferenciální rovnice vedení tepla
- Slabé řešení
- Diskretizace metodou konečných prvků

Diferenciální rovnice vedení tepla

Základní pojmy a veličiny:

- Postup je stejný jako pro 1D úlohy jen je ve dvou dimenzích

$$\boxed{\text{Diferenciální rovnice}} + \boxed{\text{okrajové podmínky}}$$
$$\rightarrow \boxed{\text{slabé řešení}} \rightarrow \boxed{\text{diskretizace, MKP}}$$

- Gradient teploty v bodě (x, y):

$$\boldsymbol{\nabla} T(x,y) = \mathrm{grad} T(x,y) = \left[\frac{\mathrm{d}T(x,y)}{x}, \frac{\mathrm{d}T(x,y)}{y}\right]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

- Tepelný tok $\boldsymbol{q}_n$ je množství tepla, které projde jednotkovou plochou A [1m^2] s normálou $\boldsymbol{n}$ za jednotku času t [s].

Diferenciální rovnice vedení tepla

- Tepelný tok uvnitř tělesa $(x, y \in \Omega)$ lze rozdělit do dvou směrů:

$$\boldsymbol{q} = [q_x(x,y), q_y(x,y)]^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

Transportní rovnice:

- Fourierův zákon: tepelný tok v bodě tělesa $x, y \in \Omega$

$$\boldsymbol{q}(x,y) = -\boldsymbol{\lambda}(x,y)\,\boldsymbol{\nabla} T(x,y), \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{\lambda}(x,y)$ je matice součinitelů tepelné vodivosti [$\mathrm{Wm}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$].

Bilanční rovnice:

- Bilance energie v objemovém elementu tělesa Ω

$$\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}}\left(-\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x})\right) = 0, \tag{4}$$

kde $\boldsymbol{x} = (x, y)$

Diferenciální rovnice vedení tepla

Odvození bilance energie:

- Uvnitř tělesa ($\boldsymbol{x} \in \Omega$) platí:

$$
\begin{aligned}
& q_x(x,y)\Delta y - q_x(x+\Delta x, y)\Delta y && (\rightarrow x) \\
& +q_y(x,y)\Delta x - q_y(x, y+\Delta y)\Delta x && (\uparrow y) \\
& +\overline{Q}\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \Delta y = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

- Vydělením $\Delta x \Delta y$ a limitním přechodem $\Delta x \rightarrow 0$ a $\Delta y \rightarrow 0$ vyjde

$$
-\frac{\partial q_x}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial q_y}{\partial y}(x,y) + \overline{Q}(x,y) = 0, \tag{6}
$$

- což můžeme zapsat maticově

$$
-\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x(x,y) \\ q_y(x,y) \end{bmatrix} + \overline{Q}(x,y) = 0 \tag{7}
$$

  jinak:

$$
-\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) + \overline{Q}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{8}
$$

Diferenciální rovnice vedení tepla

Odvození rovnice vedení tepla:

- Dosazením Fourierova zákona z rovnice (3) dostáváme diferenciální rovnici pro ustálené vedení tepla

$$\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla}T(\boldsymbol{x})\right)+\overline{Q}(\boldsymbol{x})=0. \tag{9}$$

$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})$ je matice součinitelů tepelé vodivosti:

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})=\left[\begin{array}{cc}\lambda_{xx}(x,y), & \lambda_{xy}(x,y)\\ \lambda_{yx}(x,y), & \lambda_{yy}(x,y)\end{array}\right]. \tag{10}$$

Matice je symetrická ($\lambda_{xy}=\lambda_{yx}$) a pozitivně definitní. Pro izotropní materiál je

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})=\left[\begin{array}{cc}\lambda(\boldsymbol{x}), & 0\\ 0, & \lambda(\boldsymbol{x})\end{array}\right]. \tag{11}$$

Diferenciální rovnice vedení tepla

Okrajové podmínky:

- Dirichletova okrajová podmínka - předepsaná teplota na hranici:

$$T(\boldsymbol{x}) = \overline{T}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_T. \tag{12}$$

- Neumannova okrajová podmínka - předepsaný tok na hranici:

$$q_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \overline{q}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{qp}, \tag{13}$$

kde

$$q_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \left[\; n_x(\boldsymbol{x}), n_y(\boldsymbol{x}) \;\right] \begin{bmatrix} q_x(\boldsymbol{x}) \\ q_y(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}), \tag{14}$$

- Cauchyho - přestup tepla na hranici:

$$q_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\boldsymbol{x})\left(T(\boldsymbol{x}) - T_\infty(\boldsymbol{x})\right) \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{qc}, \tag{15}$$

- Radiace:

$$q_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon(\boldsymbol{x})\sigma(\boldsymbol{x})\left(T^4(\boldsymbol{x}) - T_\infty^4(\boldsymbol{x})\right) \qquad \text{pro} \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{qr}, \tag{16}$$

Řešení diferenciání rovnice vedení tepla

Galerkinova metoda:

- Hledáme řešení (dostatečně hladké) takové aby pro $x \in \Omega$:

$$\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x}) \right) + \overline{Q}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{17}$$

- pro $\boldsymbol{x} \in \Gamma_T$:

$$T(\boldsymbol{x}) = \overline{T}(\boldsymbol{x}), \tag{18}$$

- pro $\boldsymbol{x} \in \Gamma_q$:

$$-\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x}) = \overline{q}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}), \tag{19}$$

  kde:

  - pro $\boldsymbol{x} \in \Gamma_{qp}$: $\overline{q}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ je dáno
  - pro $\boldsymbol{x} \in \Gamma_{qc}$: $\overline{q}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \alpha(\boldsymbol{x}) \left(T(\boldsymbol{x}) - T_\infty(\boldsymbol{x}) \right)$
  - pro $\boldsymbol{x} \in \Gamma_{qr}$: $\overline{q}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon(\boldsymbol{x}) \sigma(\boldsymbol{x}) \left(T^4(\boldsymbol{x}) - T^4_\infty(\boldsymbol{x}) \right)$ (při odvození zanedbáme)

Řešení diferenciání rovnice vedení tepla

Galerkinova metoda:

- Pro libovolnou váhovou funkci δT takovou, aby $\delta T(\boldsymbol{x}) = 0$ pro $\boldsymbol{x} \in \Gamma_T$:

$$\int_\Omega \left(\delta T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x}) \right) + \overline{Q}(\boldsymbol{x}) \right) \mathrm{d}\Omega = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{20}$$

- Integrace "per-partes" ve dvou dimezích (divergenční theorém):

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega g(\boldsymbol{x}) \frac{\partial f_x}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} & = & \displaystyle\int_\Gamma g(\boldsymbol{x}) n_x(\boldsymbol{x}) f_x(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}s - \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{x}) f_x(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \displaystyle\int_\Omega g(\boldsymbol{x}) \frac{\partial f_y}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} & = & \displaystyle\int_\Gamma g(\boldsymbol{x}) n_y(\boldsymbol{x}) f_y(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}s - \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{x}) f_y(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \hline \displaystyle\int_\Omega g(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} & = & \displaystyle\int_\Gamma g(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}s - \int_\Omega \left(\boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{x}) \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \end{array} \tag{21}$$

kde

$$\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left[\; \tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y} \; \right] \left[\begin{array}{c} f_x(\boldsymbol{x}) \\ f_y(\boldsymbol{x}) \end{array} \right] = \frac{\partial f_x}{\partial x}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f_y}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \tag{22}$$

Řešení diferenciání rovnice vedení tepla

Galerkinova metoda:

- Aplikujeme divergenční theorém pro $\delta T = g$ a $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x})$:

$$\int_\Omega \Big(\delta T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x})\right) + \overline{Q}(\boldsymbol{x})\Big)\,\mathrm{d}\Omega =$$
$$= \int_\Gamma \delta T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \left(\boldsymbol{\nabla}\delta T(\boldsymbol{x})\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta T(\boldsymbol{x})\overline{Q}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega, \quad (23)$$

kde integrál na hranici lze rozdělit na několik částí:

$$\int_\Gamma \delta T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_T} \overbrace{\delta T(\boldsymbol{x})}^{=0}\,\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_q} \delta T(x)\,\underbrace{\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x})}_{=-q\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\Gamma \quad (24)$$

Řešení diferenciání rovnice vedení tepla

dále:

$$\int_{\Gamma_q} \delta T(\boldsymbol{x}) q_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_{qp}} \delta T(\boldsymbol{x}) \overline{q}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{qc}} \delta T(\boldsymbol{x}) \alpha(\boldsymbol{x}) \left(T(\boldsymbol{x}) - T_\infty(\boldsymbol{x})\right) \mathrm{d}\Gamma. \tag{25}$$

Slabé řešení:

- Po drobných matematických úpravách dostáváme tzv. slabé řešení

$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \delta T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\nabla} T(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{qc}} \delta T(\boldsymbol{x}) \alpha(\boldsymbol{x}) T(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_{qp}} \delta T(\boldsymbol{x}) \overline{q}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_{qc}} \delta T(\boldsymbol{x}) \alpha(\boldsymbol{x}) T_\infty(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega \delta T(\boldsymbol{x}) \overline{Q}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Omega, \tag{26}$$

  u kterého hledáme $T(\boldsymbol{x})$ (dostatečně integrovatelné).

Diskretizace slabého řešení

Metoda konečných prvků:

- Uvažujeme dělení oblasti Ω na n konečných prvků Ω^e
- Na každém prvku e zavedeme tzv. lokální aproximaci:

$$T^e(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{N}^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{r}^e, \quad \boldsymbol{\nabla} T^e(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{B}^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{r}^e, \quad \delta T^e(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{N}^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}^e, \quad \boldsymbol{\nabla}\delta T^e(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{B}^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}^e. \tag{27}$$

- dosazením do slabého řešení - pro všechna taková $\boldsymbol{w}^e$, že $\boldsymbol{w}^e = 0$ na Γ_T získáme vztah:

$$\sum_{e=1}^{n} \boldsymbol{w}^{e\mathrm{T}} \Bigg[\overbrace{\int_{\Omega^e} \boldsymbol{B}^{e\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\lambda}^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}^e(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega}^{\boldsymbol{K}^e_\Omega}\, \boldsymbol{r}^e + \overbrace{\int_{\Gamma^e} \boldsymbol{N}^{e\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\alpha^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{N}^e(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma}^{\boldsymbol{K}^e_\Gamma}\, \boldsymbol{r}^e \quad + \tag{28}$$

$$- \overbrace{\int_{\Gamma^e} \boldsymbol{N}^{e\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\alpha^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{N}^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^e_0\mathrm{d}\Gamma}^{\boldsymbol{f}^e_{\Gamma_c}} + \overbrace{\int_{\Gamma^e} \boldsymbol{N}^{e\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{N}^e(\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{q}}^e_n\mathrm{d}\Gamma}^{-\boldsymbol{f}^e_{\Gamma_p}} \quad - \quad \overbrace{\int_{\Omega^e} \boldsymbol{N}^{e\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{N}^e(\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{Q}}^e\mathrm{d}\Omega}^{\boldsymbol{f}^e_\Omega} \Bigg] = 0$$

Diskretizace slabého řešení

Metoda konečných prvků:

- Globální veličiny = lokalizace, při které je zavedena pro každý prvek distribučí funkce $\boldsymbol{L}^e$ taková že platí $\boldsymbol{r}^e = \boldsymbol{L}^e \boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \sum_{e=1}^{n} \left((\boldsymbol{L}^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{K}^e_{\Omega} \boldsymbol{L}^e + \boldsymbol{L}^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{K}^e_{\Gamma} \boldsymbol{L}^e) \boldsymbol{r} - \boldsymbol{L}^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{f}^e_{\Gamma_c} - \boldsymbol{L}^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{f}^e_{\Gamma_p} - \boldsymbol{L}^{e\mathrm{T}} \boldsymbol{f}^e_{\Omega} \right) = 0, \tag{29}$$

zapsané formálně

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \left(\sum_{e=1}^{n} \hat{\boldsymbol{K}}^e \boldsymbol{r} - \sum_{e=1}^{n} \hat{\boldsymbol{f}}^e \right) = 0. \tag{30}$$

- Konečná podoba soustavy rovnic:

$$\boldsymbol{K} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}. \tag{31}$$

- Rozepsána pro neznámé teploty a teploty předepsané (stupně volnosti - Dirichletovy okr. podmínky $\boldsymbol{d}$):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{TT} & \boldsymbol{K}_{Td} \\ \boldsymbol{K}_{dT} & \boldsymbol{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_T \\ \boldsymbol{f}_d \end{bmatrix}. \tag{32}$$