# Matice vodivosti lineárního trojúhelníkového prvku

- Interpolační funkce jsou v tomto případě shodné s trojúhelníkovými souřadnicemi $N_i = \xi_i$
- Kartézské souřadnice jsou s troůhelníkovými svázány prostřednictvím

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\}$$

První rovnice vyjadřuje, že součet trojúhelníkových souřadnic je roven jedné. Druhá a třetí rovnice vyjadřují souřadnice x a y jako lineární kombinaci $\xi_i$. Inverzí získáme

$$\left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\} = \frac{1}{2A} \left[ \begin{array}{ccc} x_1^e y_3^e - x_3^e y_2^e & y_2^e - y_3^e & x_3^e - x_2^e \\ x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e & y_3^e - y_1^e & x_1^e - x_3^e \\ x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e & y_1^e - y_2^e & x_2^e - x_1^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array} \right\}$$

- Aproximace teploty

$$\left\{\ T\ \right\} = \left[\ N_1 \quad N_2 \quad N_3\ \right] \left\{ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right\}$$

$$\boldsymbol{T}^e = \boldsymbol{N}^e \boldsymbol{r}^e$$

- Výpočet gradentu teploty ($\boldsymbol{\nabla} T^e(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{B}^e(\boldsymbol{x})\boldsymbol{r}^e$ vyžaduje členy

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial x} = \frac{y_{jk}}{2A} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \xi_i}{\partial L_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial \xi_i}{\partial L_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial y} = \frac{x_{kj}}{2A} \end{aligned}$$

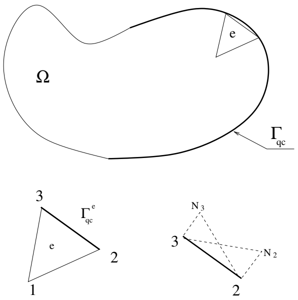
- Matice $\boldsymbol{B}^e$ má tedy tvar

$$\boldsymbol{B}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{B}^e$ je po prvku konstantní
- Matice vodivosti $\boldsymbol{K}_{e,\Omega}$ (předpokládáme, že $\lambda^e$ je též konstantní)

$$(\boldsymbol{K}_{e,\Omega})_{3\times 3} = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{B}^{eT} \lambda^e \boldsymbol{B}^e d\Omega = \boldsymbol{B}^{eT} \lambda^e \boldsymbol{B}^e \int_{\Omega^e} d\Omega = A\boldsymbol{B}^{eT} \lambda^e \boldsymbol{B}^e$$

# Výpočet matice $\boldsymbol{K}_{e,\Gamma}$




$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{e,\Gamma} &= \int_{\Gamma_{qc}^{e}} \boldsymbol{N}^{eT} \alpha \boldsymbol{N}^{e} \, d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_{qc}} \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \alpha \, [0,\ N_2,\ N_3] \, d\Gamma \\
&= \alpha \int_{\Gamma_{qc}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 N_2 & N_2 N_3 \\ 0 & N_3 N_2 & N_3 N_3 \end{bmatrix} d\Gamma \\
&= \alpha l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$