Přednáška č. 7

Sdružené nestacionární vedení tepla a vlhkosti

Sdružené nestacionární vedení tepla a vlhkosti

Modely a přístupy

- Fenomenologické modely
  - Künzelův model
- Mikromechanické přístupy
  - Lewis a Schrefler
  - Tenchev

Řídicí mechanismy, počet neznámých

- Künzelův model
  2 neznámé - relativní vlhkost (φ), teplota (T)
- Lewis a Schrefler
  3 neznámé - kapilární tlak (p_c), kapilární tlak plynu (p_g), teplota (T)
- Tenchev
  3 neznámé - kapilární obsah vody (ρ_l), kapilární tlak plynu (p_g), teplota (T)

Künzelův model

Prezentovaný např. v:

- Künzel, H. M. (1995) Simulation of heat and moisture transport in building components, PhD thesis. Frauhofer IRB Verlag, Stuttgart 1995
- Künzel, H. M. Kiessl, K. (1997) Calculation of heat and moisture transfer in exposed building components. Int. J. Heat Mass Transfer, 40, 159-167, 1997

Jedná se o jednoduchý model. Jeho výhodou je použití při analýzách stavebních konstrukcí za běžných klimatických podmínek a snadné a rychlé uplatnění fyzikálních vlastností materiálů získaných z laboratorních měření.

Řídicí mechanismy

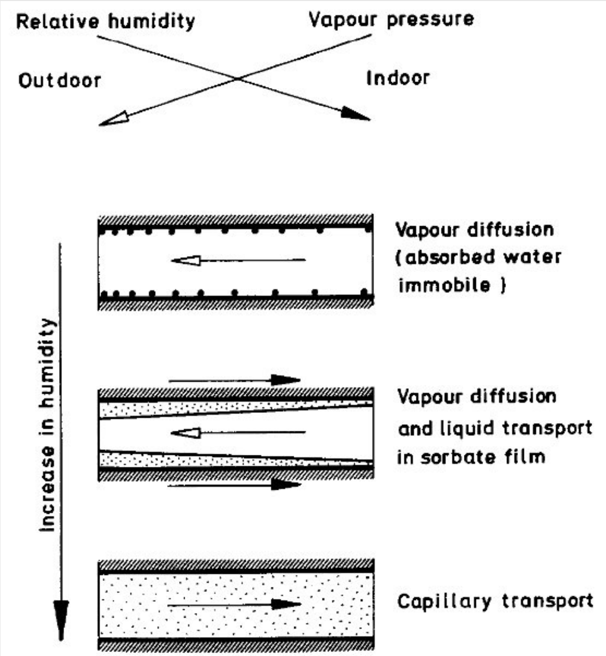
- Přenos (tok) vodní páry (plynná fáze), transport vody (kapalná fáze)
- Přenos tepla

Zavedené neznámé veličiny

- φ [-] relativní vlhkost
- T [K] teplota

Künzelův model

Přenos vlhkosti



Diferenciální rovnice sdruženého vedení tepla a vlhkosti

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \nabla^{\mathrm{T}}\big(D_\varphi \nabla \varphi + \delta_p \nabla(\varphi p_{\mathrm{sat}})\big) && (1)\\
\left(\rho C + \frac{\partial H_w}{\partial T}\right)\frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla^{\mathrm{T}}\big(\lambda \, \nabla T\big) + h_v \nabla\big(\delta_p \nabla(\varphi p_{\mathrm{sat}})\big), && (2)
\end{aligned}
$$

kde ρ [kg.m^{-3}] je objemová hmotnost materiálu; C [J.kg^{-1}.K^{-1}] je specifická tepelná kapacita; H_w [J.m^{-3}] je entalpie materiálové vlhkosti; λ [W.m^{-1}.K^{-1}] je tepelná vodivost; h_v [J.kg^{-1}] je specifické výparné teplo; δ_p [kg.m.s^{-1}.Pa^{-1}] je permeabilita vodní páry v porézním materiálu; p_{sat} [Pa] je tlak nasycených vodních par; w [kg.m^{-3}] je obsah vody; D_φ [kg.m.s^{-1}] je vodivost kapalné fáze

Difuze vodní páry

$$
g_v = -\delta_p \nabla p = -\frac{\delta}{\mu}\nabla p \qquad (3)
$$

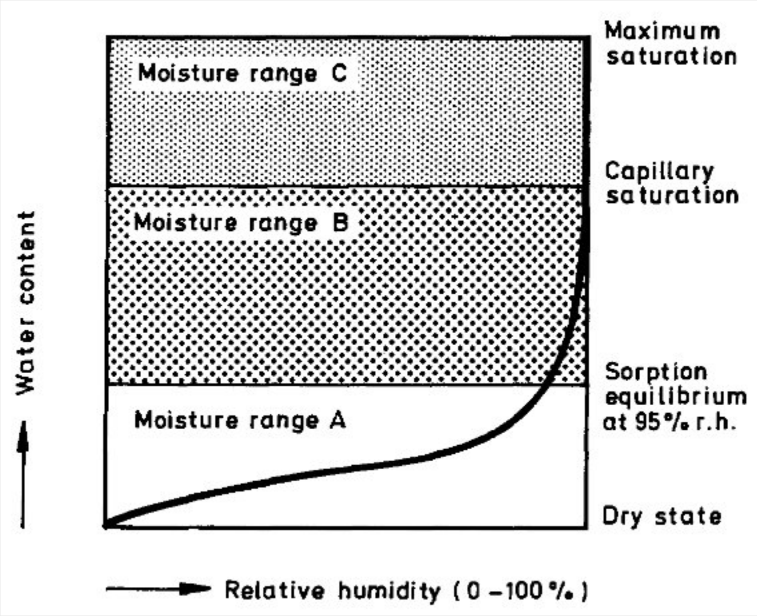
Transport vody

$$
g_w = -D_\varphi \nabla \varphi, \qquad (4)
$$

kde $D_\varphi = D_w \mathrm{d}w/\mathrm{d}\varphi$.

Künzelův model

Akumulační funkce vlhkosti (Retenční křivka)



Okrajové podmínky

Dirichletova

$$T(\boldsymbol{x},t) = \overline{T}(\boldsymbol{x},t), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_T \tag{5}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \overline{\varphi}(\boldsymbol{x},t), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_\varphi \tag{6}$$

Neumannova

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t) = \overline{q}(\boldsymbol{x},t), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{qpT}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) = \overline{g}(\boldsymbol{x},t), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{gp\varphi}, \tag{8}$$

Cauchyho

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t) = \alpha(T(\boldsymbol{x},t) - T_\infty(\boldsymbol{x},t)), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{qcT}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t) = \beta(p(\boldsymbol{x},t) - p_\infty(\boldsymbol{x},t)), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_{gc\varphi}, \tag{10}$$

Pozn.: Sdružené okrajové podmínky nejsou v tomto modelu uvedeny.

Diferenciální rovnice sdruženého vedení tepla a vlhkosti

Galerkinova metoda je aplikována na obě rovnice

Na 1. rovnici (rovnice pro vlhkost) aplikujeme *Galerkinovu metodu*

$$\int_\Omega \delta\varphi \Big(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla^{\mathrm{T}} \big(D_\varphi \nabla \varphi + \delta_p \nabla (\varphi p_{\mathrm{sat}}) \big) \Big) \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{11}$$

Na 2. rovnici (rovnice pro teplo) aplikujeme *Galerkinovu metodu*

$$\int_\Omega \delta T \Big(\big(\rho C \; + \frac{\partial H_w}{\partial T} \big) \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^{\mathrm{T}} \big(\lambda \, \nabla T \big) - h_v \nabla \big(\delta_p \nabla (\varphi p_{\mathrm{sat}}) \big) \Big) \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{12}$$

Předpoklad: $\delta T = 0$ na Γ_T a $\delta\varphi = 0$ na Γ_φ

$$\int_{\Gamma_T} \delta T \; \lambda \; \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\vec{n}} \mathrm{d}\Gamma = 0 \qquad \int_{\Gamma_\varphi} \delta\varphi \; \ldots \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{n}} \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{13}$$

Řešení MKP - sdružené vedení tepla a vlhkosti

Galerkinova metoda - odvození rovnice pro vlhkost (11)

Protože

$$\begin{aligned} D_\varphi &= D_w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi} \\ D_\varphi \nabla\varphi &= D_w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi} \nabla\varphi, \end{aligned} \tag{14}$$

a protože p_{sat} je funkcí pouze teploty T

$$\delta_p \nabla(\varphi p_{\mathrm{sat}}) = \delta_p \big(p_{\mathrm{sat}} \nabla\varphi + \varphi \frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d}T} \nabla T \big), \tag{15}$$

rovnice (11) přejde na tvar

$$\int_\Omega \delta\varphi \Big(\frac{\partial w}{\partial\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \nabla^{\mathrm{T}} \big(D_w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi} \nabla\varphi + \delta_p p_{\mathrm{sat}} \nabla\varphi + \delta_p \varphi \frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d}T} \nabla T \big) \Big) \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{16}$$

Řešení MKP - sdružené vedení tepla a vlhkosti

Galerkinova metoda - odvození rovnice pro vlhkost (11)

Integrací per-partes dostáváme

$$\begin{aligned}\int_\Omega \delta\varphi\Big(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \nabla\delta\varphi\Big(D_w\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi} + \delta_p p_{\mathrm{sat}}\Big)\nabla\varphi\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \nabla\delta\varphi\Big(\delta_p\varphi\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d}T}\Big)\nabla T\mathrm{d}\Omega + \\ - \int_{\Gamma_{gp\varphi}} \delta\varphi\Big(D_w\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi} + \delta_p p_{\mathrm{sat}}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} - \int_{\Gamma_{qpT}} \delta\varphi\Big(\delta_p\varphi\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d}T}\Big)\frac{\partial T}{\partial\vec{n}} = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Pozn.: Integrály na hranici (vyjadřují okrajové podmínky) jsou pouze na části hranice, kde jsou předepsané toky, viz rovnice (13). Tyto členy v konečné soustavě rovnic představují “zatížení“ - pravou strany soustavy.

Řešení MKP - sdružené vedení tepla a vlhkosti

Galerkinova metoda - odvození rovnice pro teplo (12)

Uplatněním vztahu (15):

$$\delta_p \nabla(\varphi p_{\mathrm{sat}}) = \delta_p \Big(p_{\mathrm{sat}} \nabla \varphi + \varphi \frac{\mathrm{d} p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d} T} \nabla T \Big),$$

rovnice (12) přejde na tvar

$$\int_\Omega \delta T \Big(\big(\rho C \ + \frac{\partial H_w}{\partial T} \big) \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^{\mathrm{T}} \big(\lambda \ \nabla T \big) - h_v \nabla^{\mathrm{T}} \big(\delta_p p_{\mathrm{sat}} \nabla \varphi + \delta_p \varphi \frac{\mathrm{d} p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d} T} \nabla T \big) \Big) \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{18}$$

Integrací per-partes dostáváme

$$\int_\Omega \delta T \Big(\rho C \ + \frac{\partial H_w}{\partial T} \Big) \frac{\partial T}{\partial t} \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \nabla \delta T \Big(\lambda + h_v \delta_p \varphi \frac{\mathrm{d} p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d} T} \Big) \nabla T \mathrm{d}\Omega +$$
$$\int_\Omega \nabla \delta T \Big(h_v \delta_p p_{\mathrm{sat}} \Big) \nabla \varphi \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{gp\varphi}} \delta T \Big(h_v \delta_p p_{\mathrm{sat}} \Big) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} - \int_{\Gamma_{qpT}} \delta T \Big(\lambda + h_v \delta_p \varphi \frac{\mathrm{d} p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d} T} \Big) \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0. \tag{19}$$

Pozn.: Integrály na hranici jako v rovnici pro vlhkost (vyjadřují okrajové podmínky) jsou pouze na části hranice, kde jsou předepsané toky, viz rovnice (13). Tyto členy v konečné soustavě rovnic představují “zatížení“ - pravou strany soustavy.

Numerické řešení MKP

Prostorová diskretizace

Teplotu T i relativní vlhkost φ na prvku aproximujeme stejným způsobem:

$$T^e = \boldsymbol{N_e r_T^e}, \qquad \mathrm{grad} T^e = \boldsymbol{B_e r_T^e}$$

$$\delta T^e = \boldsymbol{N_e w^e}, \qquad \mathrm{grad} \delta T^e = \boldsymbol{B_e w^e}$$

$$\varphi^e = \boldsymbol{N_e r_\varphi^e}, \qquad \mathrm{grad} \varphi^e = \boldsymbol{B_e r_\varphi^e}$$

$$\delta \varphi^e = \boldsymbol{N_e w^e}, \qquad \mathrm{grad} \delta \varphi^e = \boldsymbol{B_e w^e}$$

Numerické řešení MKP

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{\varphi\varphi} & \boldsymbol{K}_{\varphi T} \\ \boldsymbol{K}_{T\varphi} & \boldsymbol{K}_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{r}_{\varphi} \\ \boldsymbol{r}_{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\varphi\varphi} & \boldsymbol{C}_{\varphi T} \\ \boldsymbol{C}_{T\varphi} & \boldsymbol{C}_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}_{\varphi} \\ \dot{\boldsymbol{r}}_{T} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{g}_{\varphi} \\ \boldsymbol{q}_{T} \end{Bmatrix}, \tag{20}$$

kde

$$\boldsymbol{K}_{\varphi\varphi} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^T k_{\varphi\varphi} \boldsymbol{B} \mathrm{d}\Omega, \qquad \boldsymbol{K}_{\varphi T} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^T k_{\varphi T} \boldsymbol{B} \mathrm{d}\Omega,$$

$$\boldsymbol{K}_{T\varphi} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^T k_{T\varphi} \boldsymbol{B} \mathrm{d}\Omega, \qquad \boldsymbol{K}_{TT} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^T k_{TT} \boldsymbol{B} \mathrm{d}\Omega,$$

$$\boldsymbol{C}_{\varphi\varphi} = \int_{\Omega} \boldsymbol{N}^T c_{\varphi\varphi} \boldsymbol{N} \mathrm{d}\Omega, \qquad \boldsymbol{C}_{\varphi T} = \int_{\Omega} \boldsymbol{N}^T c_{\varphi T} \boldsymbol{N} \mathrm{d}\Omega,$$

$$\boldsymbol{C}_{T\varphi} = \int_{\Omega} \boldsymbol{N}^T c_{T\varphi} \boldsymbol{N} \mathrm{d}\Omega, \qquad \boldsymbol{C}_{TT} = \int_{\Omega} \boldsymbol{N}^T c_{TT} \boldsymbol{N} \mathrm{d}\Omega,$$

$$\boldsymbol{g}_{\varphi} = \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{N}^T \overline{g}_{\varphi} \mathrm{d}\Gamma, \qquad \boldsymbol{q}_{T} = \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{N}^T \overline{q}_{T} \mathrm{d}\Gamma,$$

Numerické řešení MKP

Vodivostní a kapacitní členy

$$k_{\varphi\varphi} = D_w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\varphi} + \delta_p p_{\mathrm{sat}}, \qquad k_{\varphi T} = \delta_p \varphi \frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d}T},$$

$$k_{T\varphi} = h_v \delta_p p_{\mathrm{sat}}, \qquad k_{TT} = \lambda + h_v \delta_p \varphi \frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d}T},$$

$$c_{\varphi\varphi} = \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \qquad c_{\varphi T} = 0,$$

$$c_{T\varphi} = 0, \qquad c_{TT} = \rho C \ + \frac{\partial H_w}{\partial T},$$

Výsledná nesymetrická soustava algebraických nelineárních rovnic

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f} \tag{21}$$

Numerické řešení MKP

Řešení lineárního problému - časová diskretizace (v-forma)

Numerická řešení soustavy diferenciálních rovnic (21) vychází ze vztahu pro známé hodnoty vektoru $\boldsymbol{r}$ v čase $n+1$

$$\boldsymbol{r}_{n+1} = \boldsymbol{r}_n + \Delta t \boldsymbol{v}_{n+\alpha} \ , \tag{22}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}, \tag{23}$$

kde vektor $\boldsymbol{v}_{n+\alpha}$:

$$\boldsymbol{v}_{n+\alpha} = (1-\alpha)\boldsymbol{v}_n + \alpha \boldsymbol{v}_{n+1} \ . \tag{24}$$

Vektor $\boldsymbol{v}$ obsahuje časové derivace pro neznámé proměnné (časová derivace vektoru $\boldsymbol{r}$). Rovnici (21) v čase $n+1$ můžeme přepsat do následujícího tvaru

$$\left(\boldsymbol{C} + \Delta t \alpha \boldsymbol{K}\right) \boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{F}_{n+1} - \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{r}_n + \Delta t (1-\alpha) \boldsymbol{v}_n\right) \tag{25}$$

Numerické řešení MKP

Algoritmus řešení lineárního problému

Počáteční vektory (definované počátečními podmínkami)	$\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}_0$
dělej dokud	$i \leq n$ (n je počet časových kroků)
prediktor	$\tilde{\boldsymbol{r}}_{i+1} = \boldsymbol{r}_i + (1-\alpha)\Delta t \boldsymbol{v}_i$
vektor pravé strany	$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{f}_{i+1} - \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{r}}_{i+1}$
matice systému rovnic	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} + \alpha \Delta t \boldsymbol{K}$
řešení systému rovnic	$\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}_{i+1}$
nová aproximace	$\boldsymbol{r}_{i+1} = \tilde{\boldsymbol{r}}_{i+1} + \alpha \Delta t \boldsymbol{v}_{i+1}$

Numerické řešení MKP

Řešení nelineárního problému

1. Rovnováha toků (sil)

$$\boldsymbol{f}_{int} + \boldsymbol{f}_{ext} = \mathbf{0}, \tag{26}$$

kde $\boldsymbol{f}_{int}$ and $\boldsymbol{f}_{ext}$ obsahují jak vypočtené (vnitřní) hodnoty tak předepsané.

uzlové toky:

$$\boldsymbol{f}^{e}_{int} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}_g^T \boldsymbol{q} \mathrm{d}\Omega_e \tag{27}$$

gradient:

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{B}_g \boldsymbol{r} \ , \tag{28}$$

tok:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{D}_q \boldsymbol{g} \ , \tag{29}$$

Residuum:

$$\boldsymbol{f}_{int} - \boldsymbol{f}_{ext} = \boldsymbol{R} \tag{30}$$

přírůstek vektoru $\boldsymbol{v}$ je vypočten z rovnice:

$$(\boldsymbol{C} + \Delta t \alpha \boldsymbol{K})\, \Delta \boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{R} \ . \tag{31}$$

Numerické řešení MKP

Řešení nelineárního problému

2. Dosazení do výchozí rovnice (25)

Residuum:

$$(\boldsymbol{C} + \Delta t \alpha \boldsymbol{K})\, \boldsymbol{v}_{n+1} + \boldsymbol{K}\,(\boldsymbol{r}_n + \Delta t(1-\alpha)\boldsymbol{v}_n) - \boldsymbol{F}_{n+1} = \boldsymbol{R}\ , \tag{32}$$

přírůstek vektoru $\boldsymbol{v}$ je vypočten z rovnice:

$$(\boldsymbol{C} + \Delta t \alpha \boldsymbol{K})\, \Delta \boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{R}\ .$$

Cyklus vnitřní iterace v i-tém časovém kroku:

dělej dokud	$j \leq m$
	(m je počet kroků vnitřní iterace)
výpočet residua - rovnice (26) nebo (32)	$\boldsymbol{R}$
výpočet přírůsktu vektoru v rov. (31)	$\Delta \boldsymbol{v}_{i+1}$
výpočet vektoru v	$\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{v}_{i+1} + \Delta \boldsymbol{v}_{i+1}$

Numerické řešení MKP

Řešení nelineárního problému

- Newton-Raphsonova metoda

  Matice vodivosti, kapacity a vektor pravé strany se sestavují a počítají v každém časovém kroku i v každém kroku vnitří iterace

  \+ přesnější řešení, numerická stabilita
  − časově a výpočetně náročnější

- Modifikovaná Newton-Raphsonova metoda

  Matice vodivosti, kapacity a vektor pravé strany se sestavují a počítají pouze v každém časovém kroku

  \+ rychlejší výpočet, časově a výpočetně méně náročné
  − horší konvergence a numerická stabilita