Metoda hraničních prvků

Úvod do metody

Motivace

Laplaceova rovnice

$$\nabla^2 u(x) = 0 \qquad \text{in } \Omega \ \ (x \in \Omega)$$

S okrajovými podmínkami

Dirichletova o. p. $\quad u(x) = \bar{u}(x) \qquad \text{in } \Gamma_1 \ \ (x \in \Gamma_1)$

Neumannova o. p. $\quad q(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = \bar{q}(x) \ \text{ in } \Gamma_2 \ \ (x \in \Gamma_2)$

Metoda vážených reziduí

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w \ d\Omega = 0$$

Greenova věta = integrace per partes

$$\iiint_{V} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \ d\mathrm{V} = -\iiint_{V} u \Delta v \ d\mathrm{V} + \iint_{S} u \operatorname{grad} v \ d\mathrm{S}$$

Klasifikace aproximačních metod

- Původní formulace

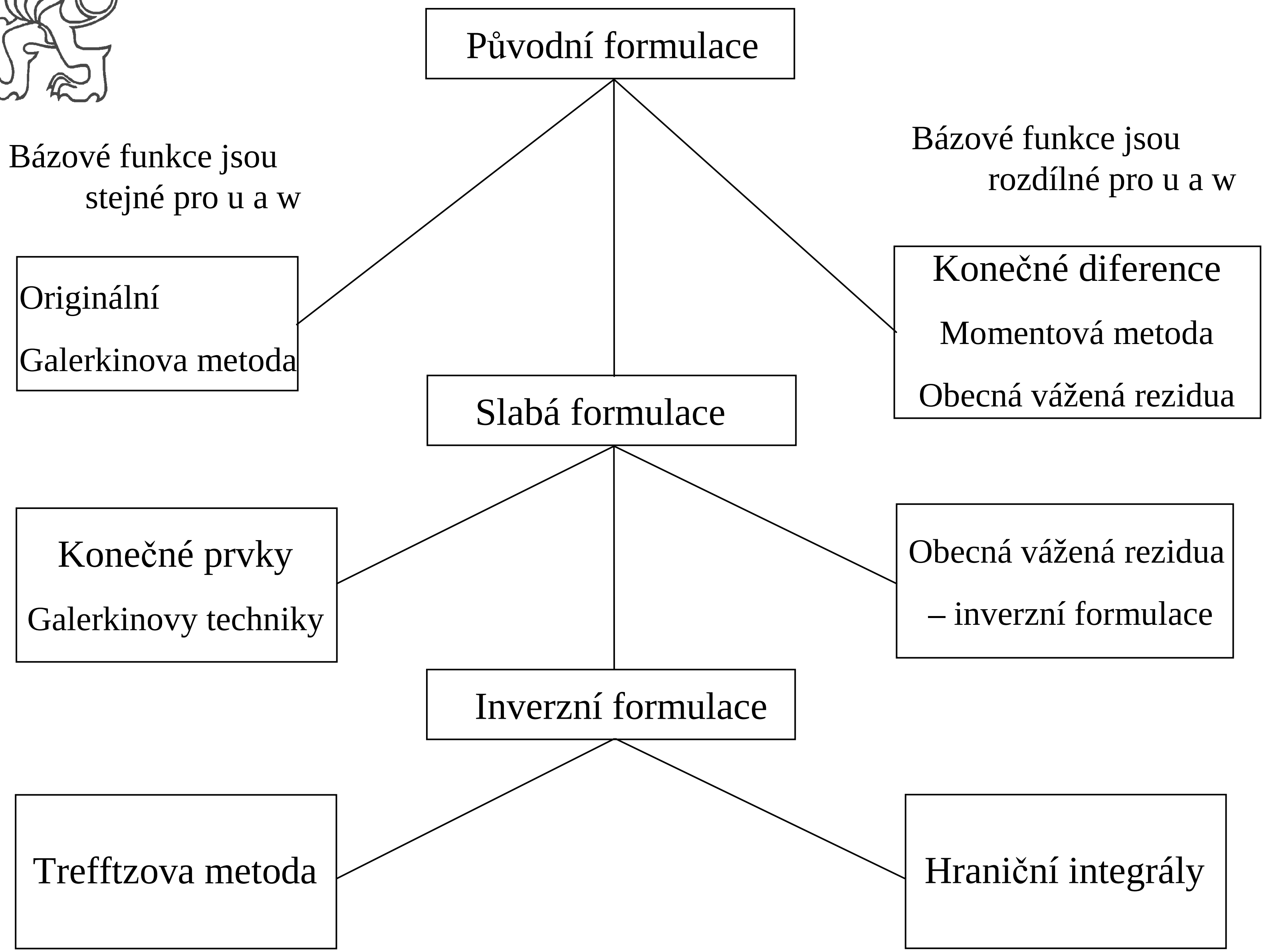
$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w \; d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w \; d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) w \; d\Gamma$$

- Slabá formulace (řešení)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k} \; d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{q} w \; d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q w \; d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} \; d\Gamma$$

- Inverzní formulace

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) u \; d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} w \; d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q w \; d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} \; d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} \; d\Gamma$$


Původní formulace
Bázové funkce jsou stejné pro u a w
Bázové funkce jsou rozdílné pro u a w
Originální
Galerkinova metoda
Konečné diference
Momentová metoda
Obecná vážená rezidua
Slabá formulace
Konečné prvky
Galerkinovy techniky
Obecná vážená rezidua
– inverzní formulace
Inverzní formulace
Trefftzova metoda
Hraniční integrály

MHP formulace

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^*(\xi, x) u(x) \; d\Omega(x) = -\int_{\Gamma_2} \overline{q}(x) u^*(\xi, x) \; d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_1} q(x) u^*(\xi, x) \; d\Gamma(x)$$

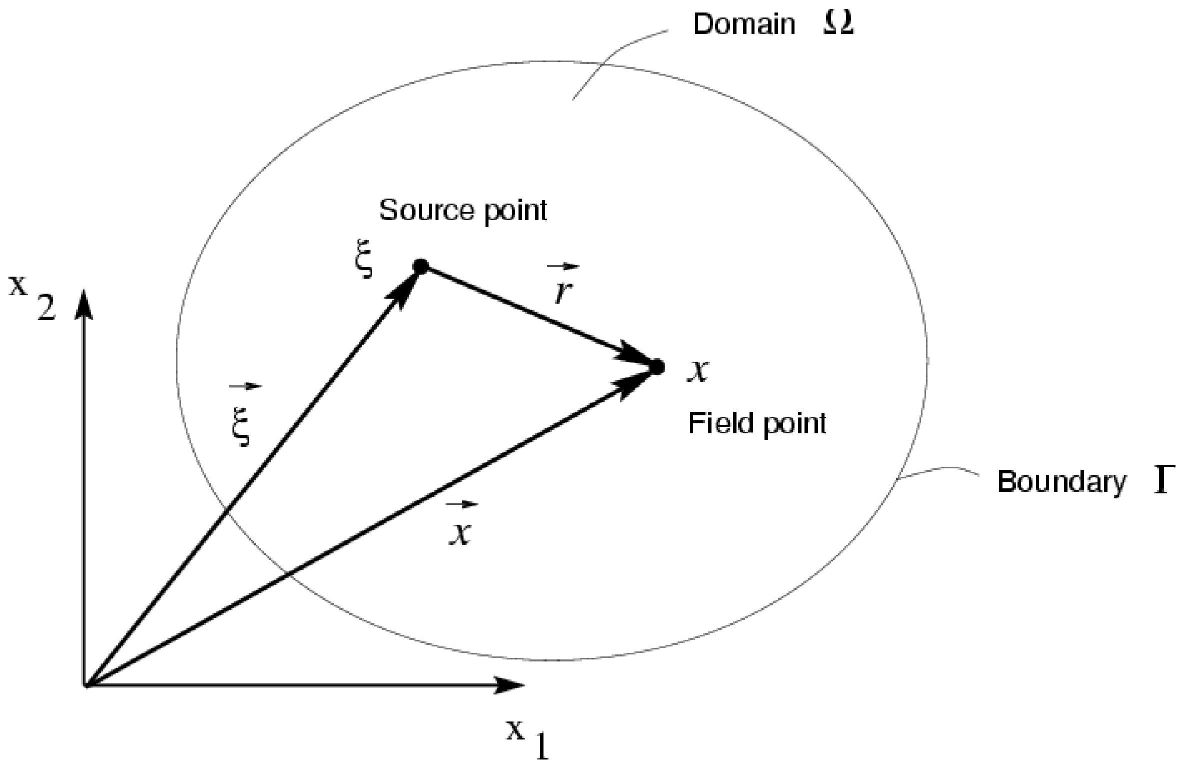
$$+ \int_{\Gamma_2} u(x) \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial n} \; d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_1} \overline{u}(x) \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial n} \; d\Gamma(x)$$

kde u^* je tzv. fundamentální řešení

$$\nabla^2 u^*(\xi, x) = -\Delta(\xi, x)$$

Poznámka:

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta(\xi, x) \; d\Omega = u(\xi)$$



Diracova funkce delta

$$\Delta(\xi, x) = 0 \qquad \text{for } \xi = x$$

$$\Delta(\xi, x) = \infty \qquad \text{for } \xi \neq x$$

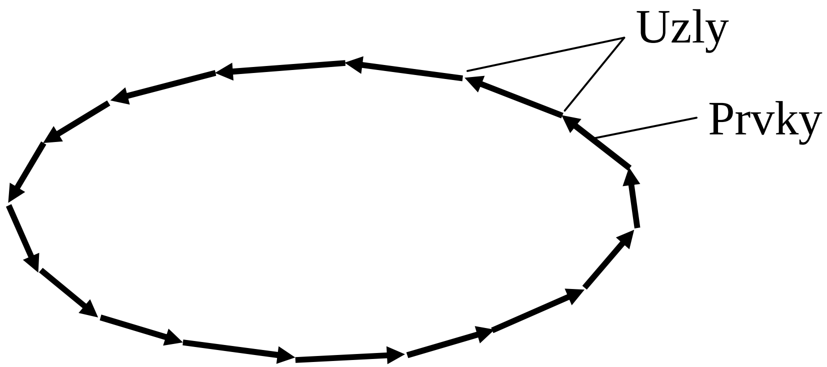
Rovnice pro hraniční integrály

$$c(\xi)u(\xi)+\int_{\Gamma} u(x)q^*(\xi,x)\ d\Gamma(x)=\int_{\Gamma} q(x)u^*(\xi,x)\ d\Gamma(x)$$

Fundamentální řešení pro Laplaceovu rovnici

$$u^* = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

Diskretizace



$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} u \;\; q^* \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} u^* q \;\; d\Gamma$$

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_{\Gamma_j} q^* \, d\Gamma \right\} u_j = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \, d\Gamma \right\} q_j$$

$$\sum_{j=1}^{N} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} q_j$$

$$H_{ij} = H_{ij} \quad \text{for} \quad i \neq j$$

$$H_{ij} = H_{ij} + c_i \quad \text{for} \quad i = j$$

Maticový zápis:

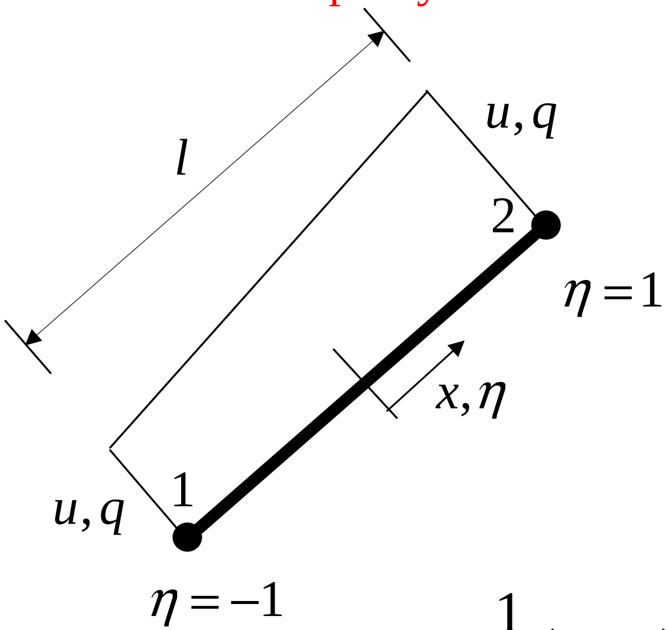
$$\boldsymbol{HU} = \boldsymbol{GQ}$$

$$\boldsymbol{AY} = \boldsymbol{F}$$

Poznámka: matice $\boldsymbol{A}$ je nesymetrická

2D-Interpolační funkce

- Lineární prvky



$$u(\eta) = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 = [\varphi_1 \varphi_2]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{u}^n$$

$$q(\eta) = \varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 = [\varphi_1 \varphi_2]\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{q}^n$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(1-\eta), \qquad \varphi_2 = \frac{1}{2}(1+\eta)$$

- Bilineární prvky
- Kvadratické prvky
- Kubické prvky

Lineární statika

Bettiho věta o vzájemnosti

$$\int_{\Omega} \sigma\varepsilon^* \; d\Omega = \int_{\Omega} \sigma^*\varepsilon \; d\Omega$$

Rovnice pole

$$\partial\boldsymbol{\sigma} + \overline{\boldsymbol{X}} = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \partial^T \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \qquad \text{in } \Omega$$

Okrajové podmínky

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \qquad \text{on } \Gamma_u$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma} = \overline{\boldsymbol{p}} \qquad \text{on } \Gamma_p$$

Lameho rovnice

$$\partial\boldsymbol{D}(\partial^T \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \overline{\boldsymbol{X}} = 0$$

Fundamentální řešení

Lameho rovnice

$$\partial \boldsymbol{D} \partial^T \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{I}\delta(\boldsymbol{x}) = 0$$

2D-Kelvinovo řešení

posunutí

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G}\left[(3-4\nu)\ln(1/r)\delta_{ij} + \frac{r_i}{r}\frac{r_j}{r}\right]$$

síla

$$p_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left[\frac{dr}{dn}\left\{(1-2\nu)\delta_{ij} + 2\frac{r_i}{r}\frac{r_j}{r}\right\} + (1-2\nu)\left(\frac{r_j}{r}n_i - \frac{r_i}{r}n_j\right)\right]$$

napětí

$$\sigma_{ijk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left[(1-2\nu)(-\frac{r_i}{r}\delta_{jk} + \frac{r_j}{r}\delta_{ik} + \frac{r_k}{r}\delta_{ij}) + 2\frac{r_i}{r}\frac{r_j}{r}\frac{r_k}{r}\right]$$

Somiglianova formulace

Na hranici
$$\boldsymbol{c}(\xi)\boldsymbol{u}(\xi) = \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{U}^*(\xi,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\;d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \boldsymbol{P}^*(\xi,\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\;d\Gamma + \boldsymbol{u}_I(\xi)$$

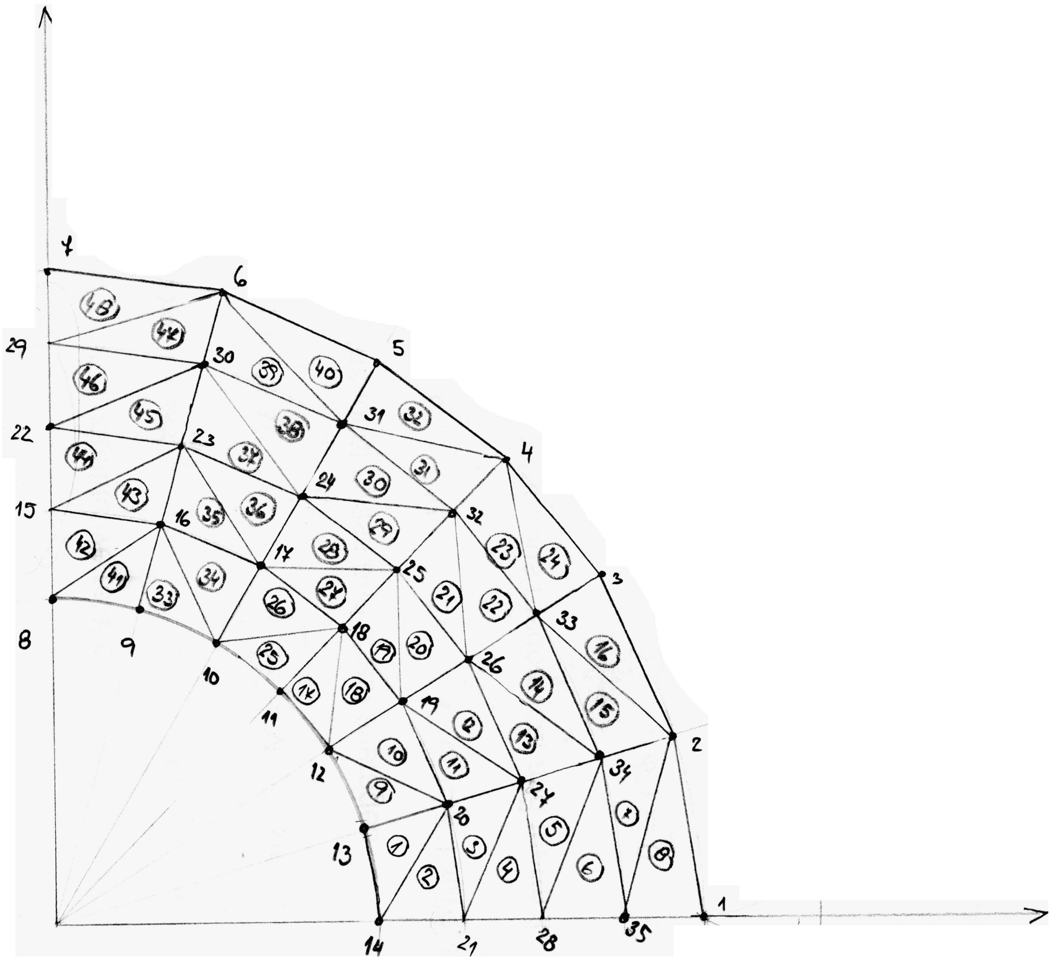
Pro vnitřní bod:

posunutí
$$\boldsymbol{u}(\xi) = \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{U}^*(\xi,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\;d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \boldsymbol{P}^*(\xi,\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\;d\Gamma + \boldsymbol{u}_I(\xi)$$

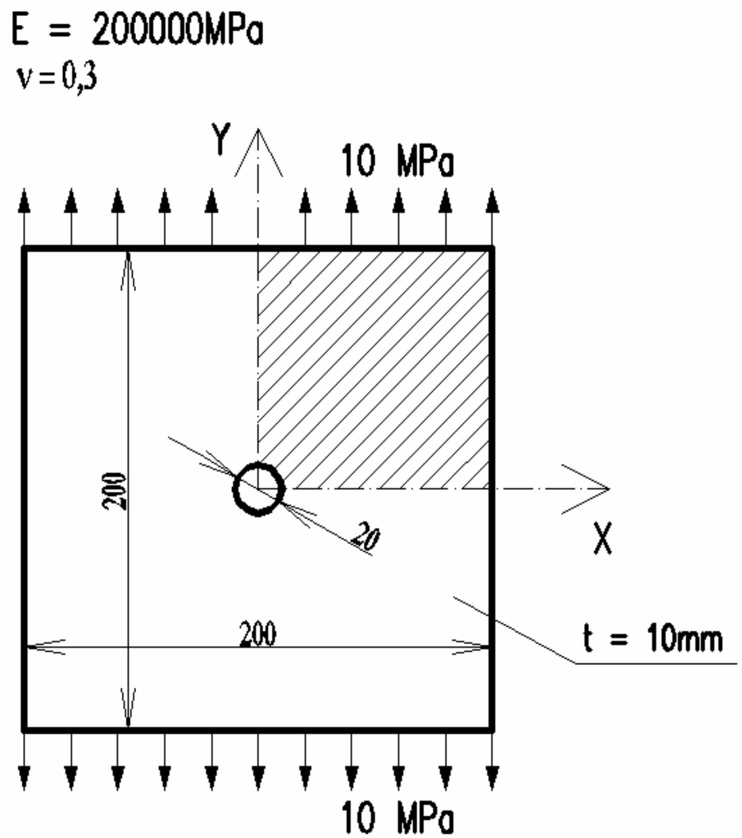
napětí
$$\boldsymbol{\sigma}(\xi) = \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{D}^*(\xi,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\;d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \boldsymbol{S}^*(\xi,\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\;d\Gamma + \boldsymbol{\sigma}_I(\xi)$$

$$\boldsymbol{u}_I(\xi) = \int_{\Gamma_p} \boldsymbol{U}^*(\xi,\boldsymbol{x})\,\overline{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\;d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{P}^*(\xi,\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})\;d\Gamma$$
$$+\int_{\Omega} \boldsymbol{U}^*(\xi,\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\;d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma}^*(\xi,\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\boldsymbol{x})\;d\Omega$$

Interní buňka



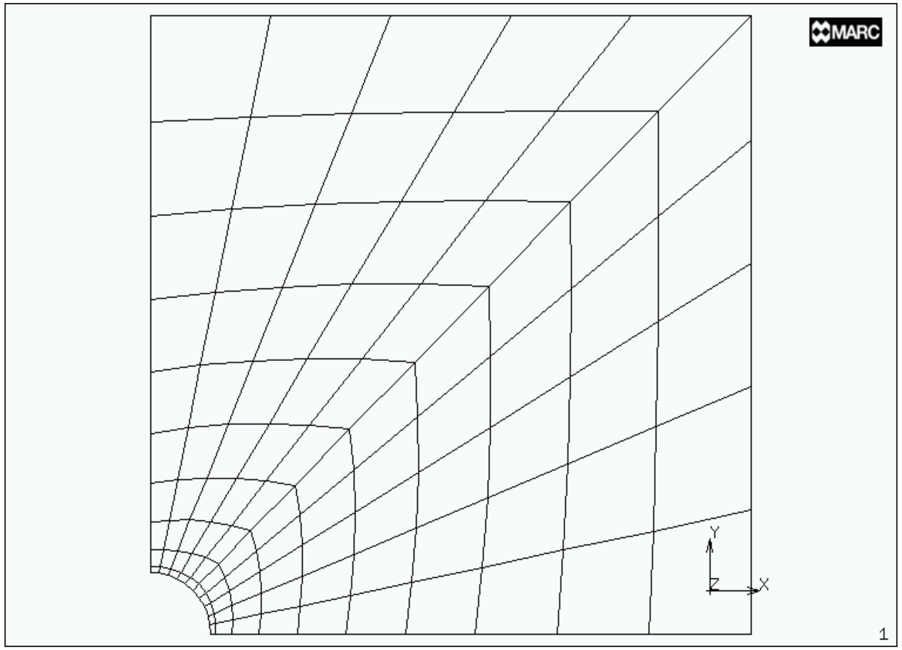
Numerický příklad

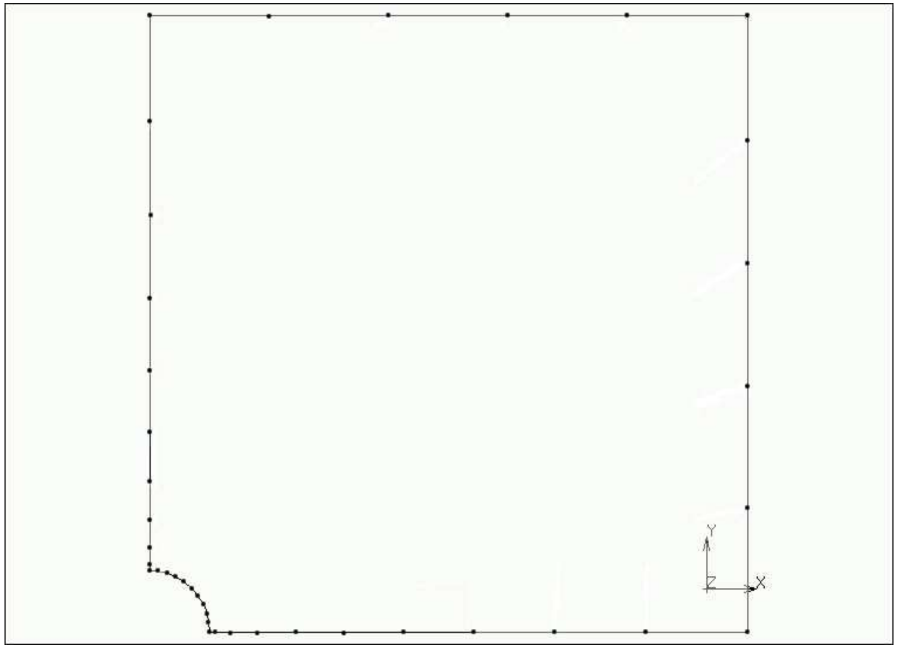


Diskretizace

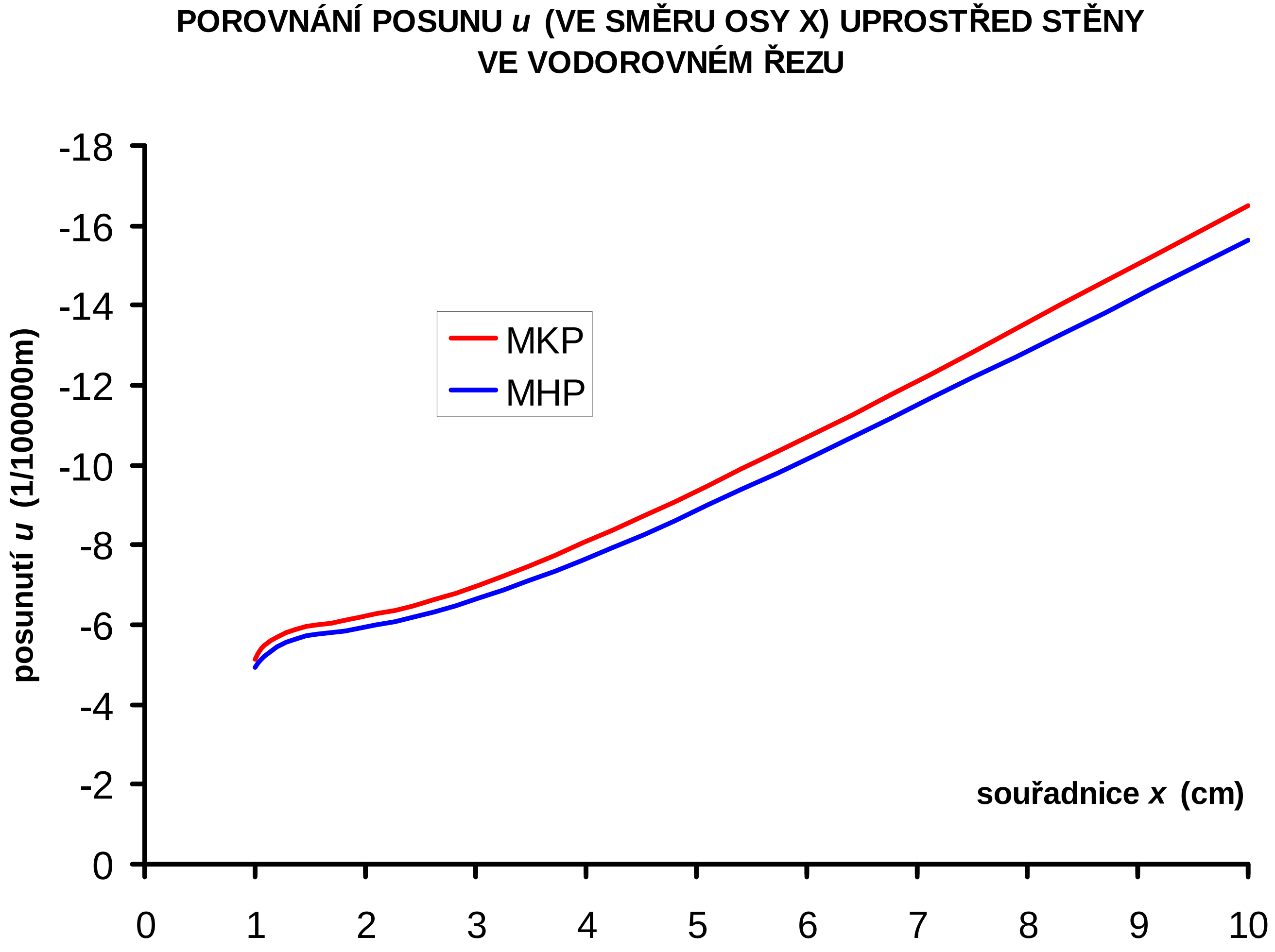
FEM

BEM

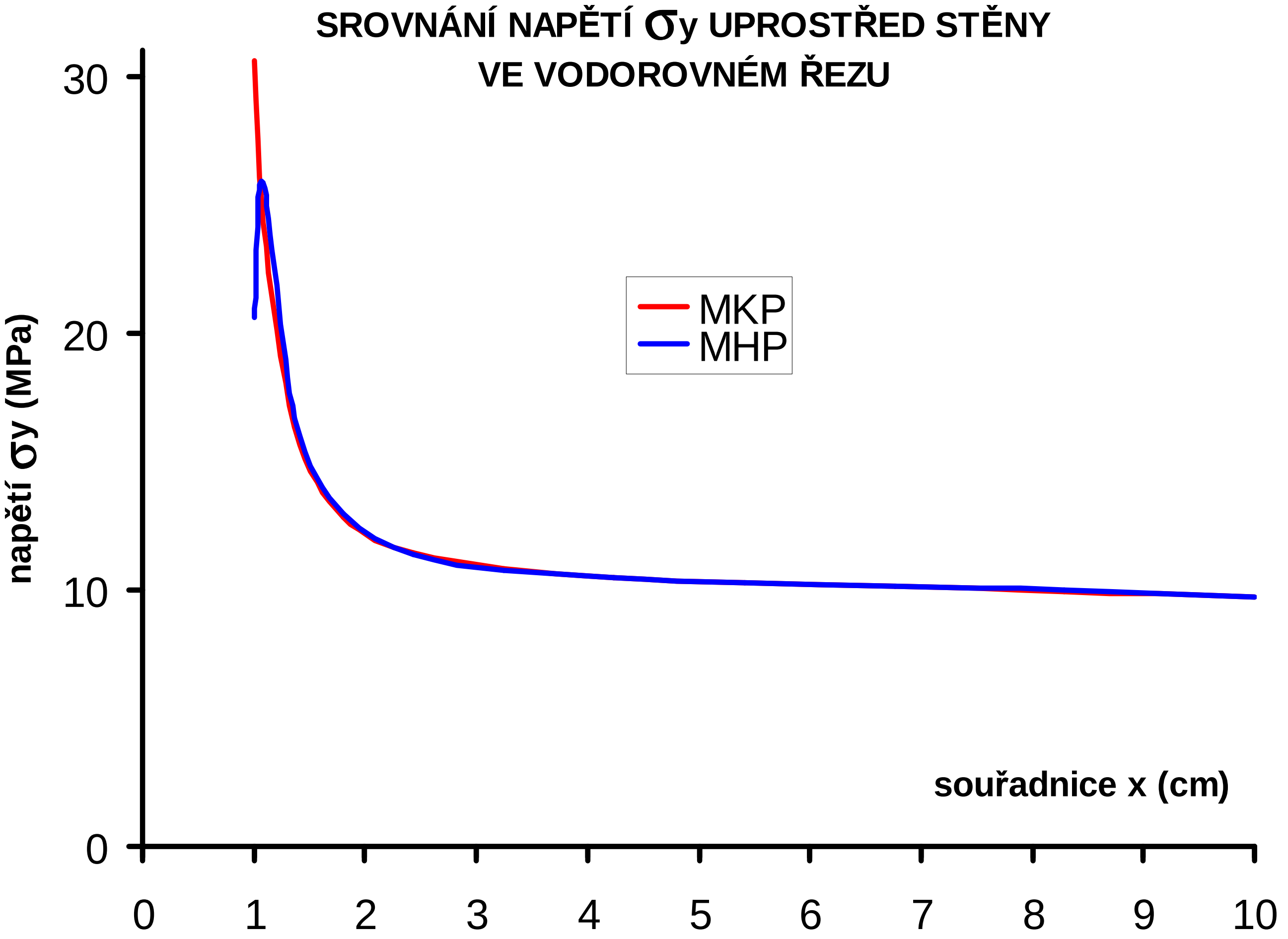




Výsledky


POROVNÁNÍ POSUNU u (VE SMĚRU OSY X) UPROSTŘED STĚNY
VE VODOROVNÉM ŘEZU
posunutí u (1/100000m)
-18
-16
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
MKP
MHP
souřadnice x (cm)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Výsledky


SROVNÁNÍ NAPĚTÍ σy UPROSTŘED STĚNY
VE VODOROVNÉM ŘEZU
30
20
10
0
napětí σy (MPa)
MKP
MHP
souřadnice x (cm)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Další „problémy“

2D, 3D, axisymetrie

Ohyb desky

Difuzní problémy

- Lineární
- Nelineární

- Časová diskretizace – časově nezávislé fundamentální řešení
  – časově závislé fundamentální řešení

Přenos tepla

Sdružený přenos tepla a vlhkosti

Konsolidace